

## Plugstars, une Alternative aux Trous Noirs.

J.P.Petit , H. Zejli

---

**Mots-clés :** black hole, plugstar, hypermassive objets, giant black holes, gravitational redshift, signature, proper time, topology, non contractile hypersurface, Schwarzschild, Hilbert, **gravastar**

---

**Résumé:** On ne dispose, en tant que données directes, que du rapport des températures maximales et minimale, proche de 3, émanant des images de objets hypermassifs des galaxies M 87 et Voie Lactée. S'agissant des trous noirs on recense ce qui a été à la base de ce modèle, la confusion de la grandeur intermédiaire R du premier article de Schwarzschild avec une coordonnée radiale r, susceptible de prendre des valeurs inférieures à la longueur caractéristique  $\alpha$ , qu'on retrouve dans l'article publié en décembre 1916 par D.Hilbert. A cela s'ajoute, avec le changement de signature de la métrique, la perte de repère que représentait l'exigence d'une longueur s, donc d'un temps propre, réels. On montre, même en considérant la géométrie issue de la solution de l'équation d'Einstein à second membre nul, le caractère fallacieux d'une description d'un objet résolument non contractile, telle qu'à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild r devienne la coordonnée de temps et t une coordonnée d'espace. On signale enfin la non prise en compte de la criticité physique introduite dans le second article de Schwarzschild, se produisant avant que la classique criticité géométrique ne puisse se manifester. En reprenant ces éléments, après avoir évoqué l'alternative des gravastars, on propose le modèle alternatif de plugstars où toute matière en excès est éliminée par inversion et éjection hors de l'objet. Après avoir justifié le fait que la rotation ait peu d'effet dans les objets hypermassifs et les avoir identifiés à des objets subcritiques on montre que le rapport des longueurs d'onde, maximale et minimale, dans ces condition proche de 3, s'accorde avec les données observationnelles issues des objets hypermassifs situés au centre des galaxies M 87 et Voie Lactée.

---

### 1 – Introduction.

En 1979, 63 ans après la publication de ses deux articles par Karl Schwarzschild, L.S.Abrams publie un article intitulé « The Legacy of Hilbert's error ». Ce thème est repris par la suite par S.Antoci et E.E. Liebscher en 2003 [2]. Ces auteurs dénoncent la confusion qui aurait été faite entre le solution originale publiée par Karl Schwarzschild en 1916 [3]. En 2011 C.Corda [4] s'oppose à ces critiques en prétendant que les soi-disant erreurs ne reposent que sur une mauvaise interprétation des variables. Tout repose sur le fait que les différents auteurs, Droste et Hilbert les premiers, tablent sur le fait que les solutions de l'équation d'Einstein peuvent être formulées dans n'importe quel système de coordonnées, s'autorisent un, ou plusieurs changement successifs d'une supposée coordonnée radiale sous le prétexte que la solution s'identifie avec la métrique de Lorentz à l'infini :

$$(1) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Ce qui s'est trouvé sous-estimé c'est en quelque sorte l'autonomie et l'intelligence des solutions émanant de cette équation, révélant une topologie sous-jacente. C'est ce qui avait été identifié dès 1917 par Herman Weyl, qui écrit [6], page 794, nous citons :

Dieses Linienelement charakterisiert die Geometrie, die auf dem folgenden Rotationsparaboloid im Euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x_1, x_2, z$  gilt:

$$z = \sqrt{8a(r - 2a)},$$

wenn dasselbe durch orthogonale Projektion auf die Ebene  $z = 0$  mit den Polarkoordinaten  $r, \vartheta$  bezogen wird. Die Projektion bedeckt das Äußere des Kreises  $r \geq 2a$  doppelt, das Innere überhaupt nicht. Bei natürlicher analytischer Fortsetzung wird also der wirkliche Raum in dem zur Darstellung benutzten Koordinatenraum der  $x_i$  das durch  $r \geq 2a$  gekennzeichnete Gebiet doppelt überdecken. Die beiden Überdeckungen sind durch die Kugel  $r = 2a$ , auf der sich die Masse befindet und die Maßbestimmung singulär wird, geschieden, und man wird jene beiden Hälften als das „Äußere“ und das „Innere“ des Massenpunktes zu bezeichnen haben.

Fig.1 : Weyl, équation de la méridienne [6]

Traduction :

Cette métrique caractérise la géométrie d'un parabolôide de révolution<sup>13</sup> dont l'équation s'écrit, dans l'espace Euclidien doté de coordonnées orthogonales  $x_1, x_2, z$  :

$$z = \sqrt{8a(r - 2a)},$$

Sa projection sur le plan  $z = 0$ , dont les points sont repérés par des coordonnées polaires  $r, \vartheta$ , couvre deux fois le domaine extérieur au cercle de rayon  $2a$ . Mais la surface ne se projette pas à l'intérieur de ce cercle. De manière analytique et continue, l'ensemble des points de l'espace réel, repérés par les coordonnées  $x_i$ , qui est utilisé pour représenter l'objet<sup>14</sup>, revêtira deux fois<sup>15</sup> la zone correspondant à  $r \geq 2a$ . Ces deux revêtements sont séparés par la sphère  $r = 2a$ , sur laquelle se trouve la masse, et qui est un lieu singulier. On conviendra de désigner ces deux éléments du revêtement comme l'« extérieur » et l'« intérieur » de ce que nous considérerons comme un « point-masse ».

Fig. 1bis :Weyl 1917, équation méridienne.

A la différence de Schwarzschild, Weyl considère une structure qui serait entièrement décrite par la solution de l'équation d'Einstein à second membre nul et cela dans l'optique de donner aux masses une nature topologique traduisant une connexion avec un second feuillet d'espace-temps. On voit ici apparaître le concept de revêtement à deux feuillets d'une variété à bord, celui-ci étant la sphère de Schwarzschild. Il n'est donc pas étonnant que l'hypersurface décrite par cette métrique soit non-contractile présente un périmètre minimal qui est  $2\pi$  multiplié par la longueur de Schwarzschild (ici  $2a$ ).

Cette structure topologique a été également décrite en 1916 par le mathématicien Ludwig Flamm [7], un article dont la traduction anglaise n'a été disponible qu'en 2012, donc un an après la publication de l'article de Corda [4]. Il est remarquable de constater que ce jeune mathématicien avait immédiatement donné l'interprétation correcte de l'ensemble des deux solutions que Karl Schwarzschild, à la fois mathématicien, géomètre, physicien et astronome, venait de publier ([3],[8]). En effet la description de la géométrie à l'extérieur et à l'intérieur d'une sphère emplies d'un matériau incompressible de densité constante correspond, chez Schwarzschild, au raccordement d'une sphère  $S^3$  avec ce qu'on pourrait appeler l'hypersurface 3D de Flamm, le long d'une sphère  $S^2$ . Dans cette figure Flamm trace la méridienne associée à cette structure 3D, constituée d'un arc de cercle se raccordant avec une portion de parabole.

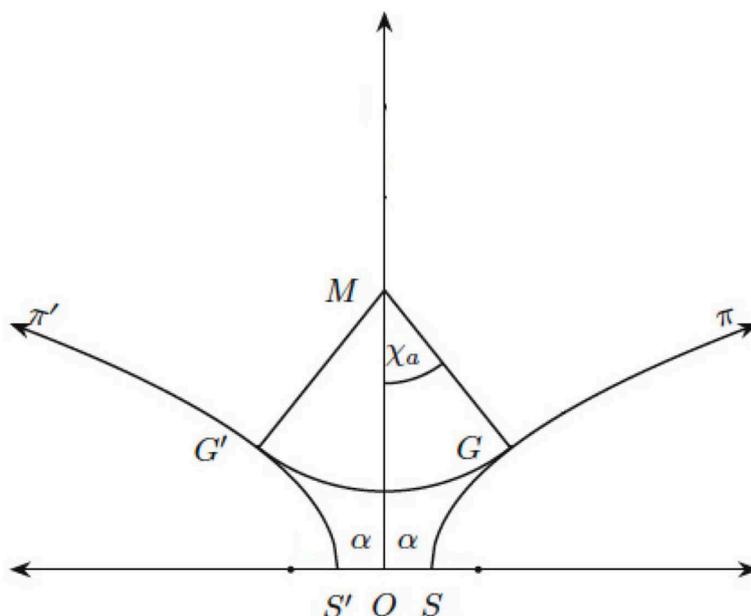


Fig.2 : La méridienne de l'hypersurface 3D solution [7]

La « surface de Flamm » obtenue en faisant tourner cette parabole couchée autour de son axe donne une image didactique 2D de cette hypersurface 3D non contractile.

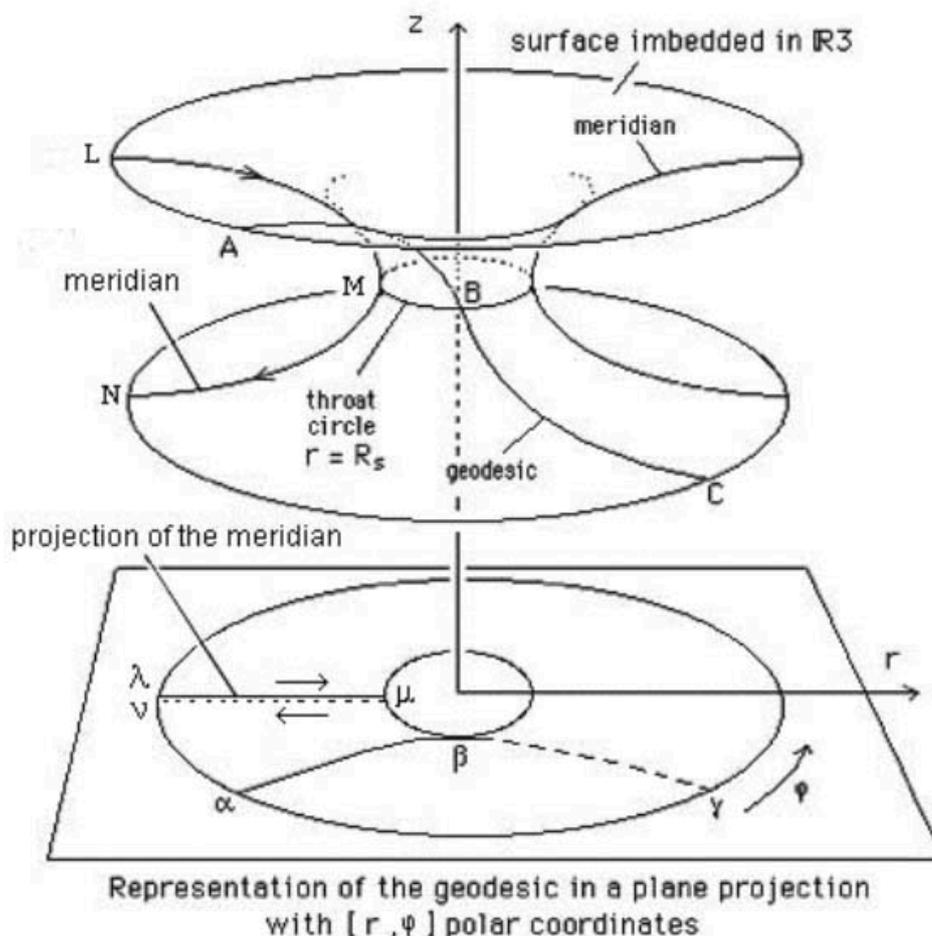


Fig.3 : 3-surface de Flamm [10]

Citons la traduction anglaise de l'article de Flamm :

§3. The mass point, which generates the gravitational field, is found at the vertex  $S$  of the meridional parabola. The surface of rotation of the branch  $S\pi$  of the parabola, as seen in Fig. 3, already maps to the full sectional plane through the centre, preserving the metric properties. The peculiarity that the point mass has a finite circumference, an equator of length  $2\pi\alpha$ , as Schwarzschild has already emphasized, is clearly noticeable in the figure.

Fig.4 Extrait de l'article de L.Flamm [7].

Traduction :

Le point masse qui est la source du champ gravitationnel se situe au sommet  $S$  de la parabole. La surface de rotation de la branche  $S\pi$  de la parabole correspond à la section plane complète, passant par le centre et préservant les propriétés métriques. La particularité est que cette « masse ponctuelle » a une extension finie, selon une sphère à l'équateur est  $2\pi\alpha$ , comme Schwarzschild l'avait déjà remarqué, ce qui est évident sur la figure.

Fig. 4bis : Fig.4 Extrait de l'article de L.Flamm.

Mais il serait faux de confondre les géodésiques de cette 2-surface avec les géodésiques de la 3-surface se raccordant avec la portion de sphère S3 le long d'une sphère S2. Flamm, à la fois reprend le travail complet de K.Schwarzschild, mais n'exclut pas de considérer l'hypersurface 3D non contractile issue de la métrique extérieure, considérée isolément, comme la représentation d'une masse, comme le fait Weyl, et le feront plus tard, en 1935, Einstein et Rosen [9]. On retrouve aussi dans la figure 3, extraite de [10] l'illustration de la topologie découlant de la métrique extérieure de Schwarzschild. Cette illustration est d'autant plus parlante qu'elle repose sur une nouvelle variable  $\rho$  qui permet à elle seule de décrire les deux nappes, selon le changement de variable, appliqué à ce qui est considéré comme la « formulation standard de la solution de Schwarzschild :

$$(2) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Ce changement de variable étant [10]:

$$(3) \quad R = \alpha \left[ 1 + L_n \operatorname{ch} \rho \right]$$

Qui donne :

$$(4) \quad ds^2 = \frac{L_n \operatorname{ch} \rho}{1 + L_n \operatorname{ch} \rho} c^2 dt^2 - R_s^2 \frac{1 + L_n \operatorname{ch} \rho}{L_n \operatorname{ch} \rho} \operatorname{th}^2 \rho d\rho^2 - R_s^2 (1 + L_n \operatorname{ch} \rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Cette formulation décrit alors l'objet dans son intégralité, intégrant sa non contractibilité. Il est constitué de deux nappes, l'une pour  $\rho$  variant de  $+\infty$  à 0 et l'autre de 0 à  $-\infty$ , se raccordant sur la sphère de Schwarzschild, correspond à la valeur  $\rho = 0$ . Les éléments ci-dessus montrent que C.Corda [4] n'a pas compris la nature topologique du problème. Interprété correctement l'objet, non contractile, est exempt de singularité centrale.

## 2 – L'espace-temps selon Hilbert.

Des historiens des sciences ont publié des analyses minutieuses [11] de ces articles de David Hilbert ([12],[13]). Il est bon de les resituer dans le contexte de l'époque.

Au début de sa carrière Hilbert n'imagine pas que les mathématiques dans lesquelles il évolue, ces « mathématiques pures », qui lui semblaient relever d'une pure abstraction, puissent avoir des liens aussi étroits avec la physique. Mais, par la suite son attitude évolue, en particulier au fil de échanges avec Einstein, qu'il invite en juin et juillet 1915 à donner des conférences à Göttingen, il commence alors à utiliser les outils de la géométrie moderne en les appliquant à la physique. C'est ainsi qu'il parvient à construire une équation de champ, qu'il publie le 20 novembre 1915 [12], quatre jours

avant qu'Einstein ne publie la sienne. Ceci se situe à la page 404 de [12], précisément à l'équation (21) :

Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungweise für die Variationsableitungen bezüglich der  $g^{\mu\nu}$  erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$(21) \quad [\sqrt{g} K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0.$$

Das erste Glied linker Hand wird

$$[\sqrt{g} K]_{\mu\nu} = \sqrt{g} (K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}),$$

Fig.5 : L'équation de champ de D.Hilbert [12].

Traduction:

Les équations de base (4) de ma première communication sont, en raison de l'hypothèse (20) qui y est faite :

$$[\sqrt{g} K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

où

$$[\sqrt{g} K]_{\mu\nu} = \sqrt{g} \left( K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} \right)$$

Fig.5bis : L'équation de champ de D.Hilbert [12]

Le tenseur  $K_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci et le scalaire  $K$  le scalaire de Ricci. En écrivant

$$(5) \quad T_{\mu\nu} = - \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}}$$

on retrouve l'équation de la relativité générale. Nous nous intéresserons bien évidemment à ce qui concerne le traitement fait par Hilbert de la solution stationnaire à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein, ce qui se réfère à son second article ([13]). Comme dans son premier article Hilbert présente sa propre compréhension de la relativité restreinte dès la première page de son article :

Zunächst führen wir an Stelle der Weltparameter  $w_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) die allgemeinsten reellen Raum-Zeit-Koordinaten  $x_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) ein, indem wir

$$\tilde{w}_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = i x_4$$

Fig.6 : Les coordonnées de l'espace-temps d'Hilbert, allemand [13].

Traduction :

Tout d'abord, nous introduisons, à la place des paramètres spatiaux  $w_s$  ( $s=1,2,3,4$ ), les paramètres réels les plus généraux de l'espace-temps en posant

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = i x_4,$$

Fig. 6bis : Les coordonnées de l'espace-temps selon Hilbert [13].

Référons-nous maintenant à la traduction anglaise mise à disposition, pour 30 dollars, par la maison d'édition Springer :

First we introduce in place of the world parameters  $w_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) the most general *real* spacetime coordinates  $x_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) by putting

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = i x_4,$$

Fig.6ter : Traduction en anglais [15].

C'est moi qui ai souligné en rouge la lettre i devant  $x_4$ . Ce qui n'est pas la seule chose que l'on peut trouver dans ce document, qui se présente comme un document important pour l'histoire de la science et de l'évolution des idées scientifiques. Cet extrait illustre la façon dont Hilbert se représentait le monde de la relativité : avec une coordonnée chronologique  $w_4$  imaginaire pure. Comment cela peut-il être possible ? Rappelons-nous qu'en 1916 personne n'imagine que l'univers ait eu une histoire, au point que quand Einstein envisagea son premier modèle il compta sur l'introduction de la constante cosmologique comme clé de voute d'un univers stationnaire. La mécanique quantique n'a pas encore entamé son essor. Tout au plus connaît-on l'électron, identifiée comme une particule électriquement chargée, dont l'existence vient tout juste d'être confirmée. Les seules forces connues sont la force électromagnétique et la force de gravité. L'article « Fondements de la Physique » est souvent qualifié de la première tentative de création d'une Theory of Everything. Bien qu'Hilbert n'y fasse point allusion on peut se demander si, derrière cet essai ne se trouvait pas un tentative de compréhension globale du monde, à travers les mathématiques.

Hilbert naît en 1862 au sein d'une famille protestante. Il est élevé dans une école religieuse, mais quand il écrit ses articles, à 53 ans il se déclare agnostique. Il dit et écrit que la science, et en particulier les mathématiques, apportent les réponses logiques, les unes après les autres, en leur temps. Gravée sur sa tombe, sa devise : « Wir müssen wissen, wir werden wissen » : « Nous devons savoir et nous saurons ». En 1916 l'univers semble régi par deux uniques forces : la gravitation et l'électromagnétisme. La construction d'une équation de champ à l'aide d'une action semble à Hilbert être l'outil ultime et de nombreux auteurs qualifient ses deux papiers de « tentative de construction du tout », une TOE, theory of everything. Einstein caressa le même rêve jusqu'à sa mort de « théorie des champs unifiés ». Aujourd'hui on sait qu'il est impossible de marier la gravitation et l'électromagnétisme sans ajouter une dimension supplémentaire (espace de Kaluza). Mais Einstein et Hilbert l'ignoraient. En 1916 on ignore que le cosmos évolue, que des milliards d'années plus tôt il se présentait sous un visage ô combien différent. Comment imaginer qu'Hilbert, qui l'ignore, ne cherche pas dans son essai à esquisser un scénario de création de l'univers. Si on décode sa démarche l'univers est au départ un espace « pseudo-euclidien » quadridimensionnel avec des coordonnées  $\{ w_1, w_2, w_3, w_4 \}$ . Pour qui sait lire, tout peut s'écrire dans ce contexte, l'équation de champ, les géodésiques, les trajectoires des planètes et peut être celles des électrons. Tout est en place. Il ne reste plus qu'à lancer la machine, à créer le temps. Ce que fait Hilbert en écrivant que  $w_4$ , qu'il appelle  $l$  dans sa reprise de la solution de Schwarzschild, est égal à  $it$ , que cette coordonnée chronologique bascule en révélant sa véritable nature : elle est imaginaire pure. Allons page 65. Le texte en allemand :

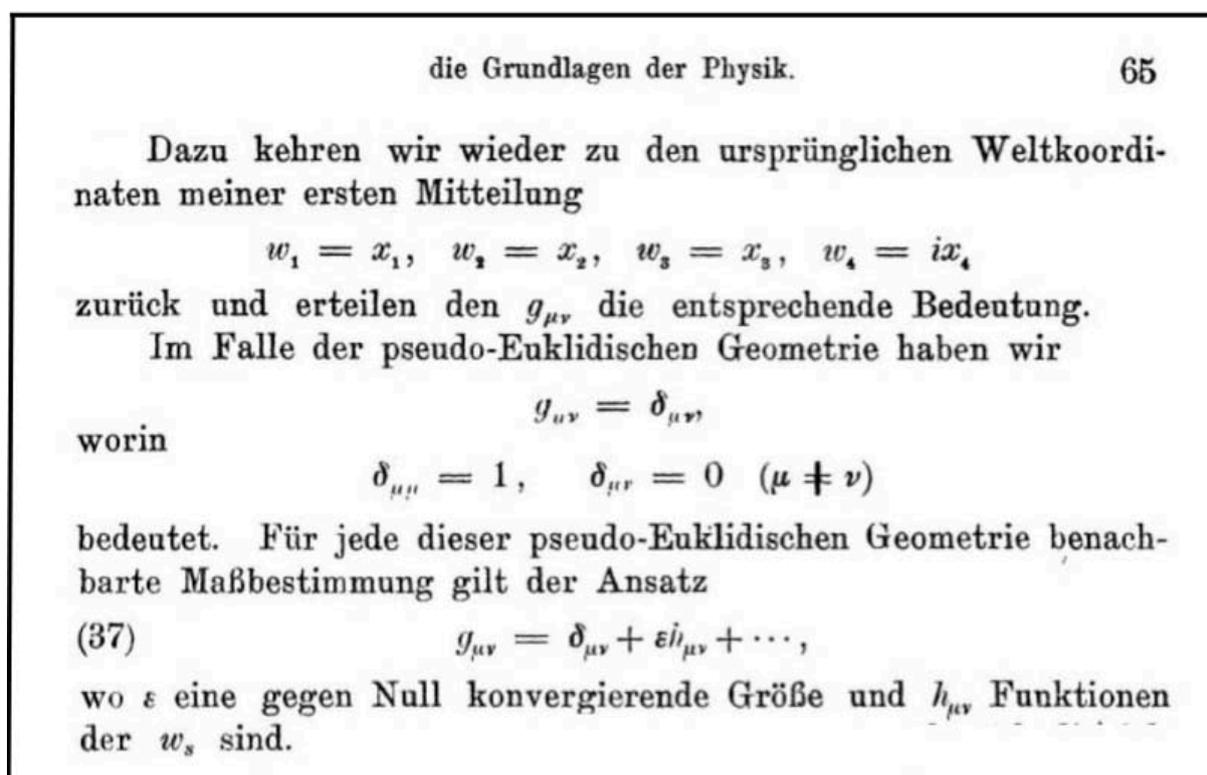


Fig.7 : La page 65 [13].

Traduction :

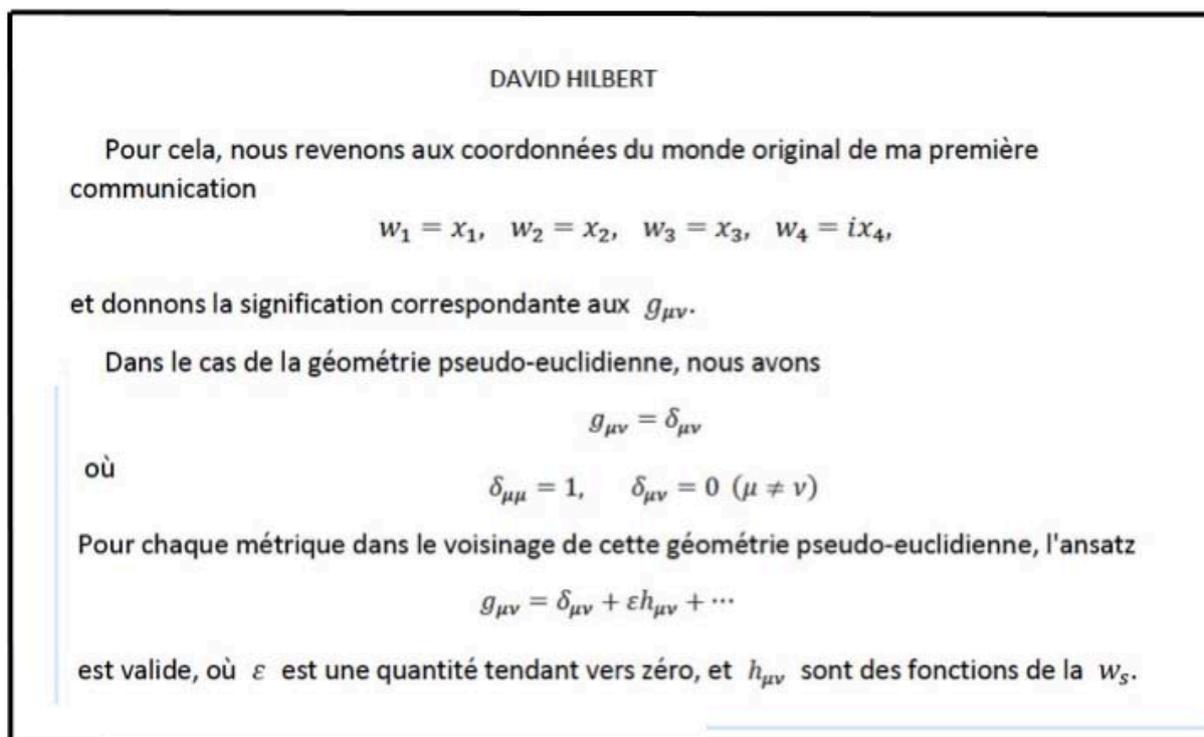


Fig.7bis : La page 65.

En (37) vous avez la preuve éclatante de la vision de l'espace-temps d'Hilbert. Le terme d'ordre zéro, c'est l'univers avant que le temps ne se manifeste, avant que ne soient suivis les chemins géodésiques préexistants que les planètes vont devoir suivre, quand le temps créera le mouvement. Cet univers originel est qualifié par Hilbert de pseudo Euclidien. Son tenseur métrique correspond à la matrice de Kronecker  $\delta_{\mu\nu}$ , à la matrice unité. Et ce que contient l'univers ne sera jamais qu'un infime perturbation d'un espace quasi-plat. Au passage, vous découvrirez l'origine du changement de signature, dans son équation (35) :

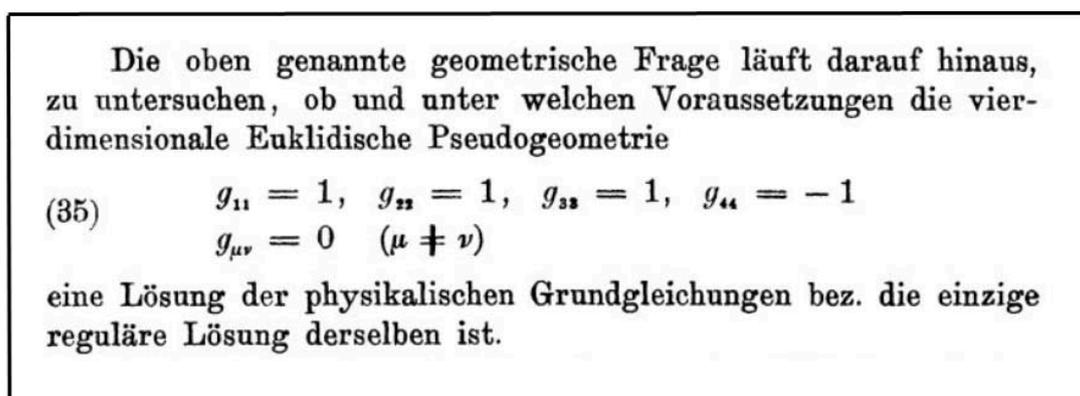


Fig.8 : L'origine du changement de métrique [13]

La question géométrique mentionnée ci-dessus consiste à déterminer si et dans quelles conditions la pseudo-géométrie euclidienne à quatre dimensions...

$$\begin{aligned} g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g_{44} = -1, \\ g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \end{aligned} \quad (35)$$

est une solution, voire la seule solution régulière, des équations physiques de base.

Fig.8bis : L'origine du changement de métrique.

Pour Hilbert l'espace est premier, le temps ne se manifeste qu'en second. Cette manifestation de l'apparition du temps ne peut s'écrire que selon les séquences successives :

$$g_{11} dw_1^2 + g_{22} dw_2^2 + g_{33} dw_3^2 + g_{44} dw_4^2 \quad (6)$$

$$g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + g_{33} dx_3^2 - g_{44} dx_4^2$$

Avant 1939 tous les mathématiciens utilisent la signature  $(+---)$  c'est à dire, en particulier, qu'ils écrivent la métrique de Lorentz :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (7)$$

Le fait que les vitesses ne puissent excéder  $c$  se traduit simplement par l'exigence que la longueur  $ds$  soit réelle. Cette longueur  $s$  s'identifie alors au temps propre  $\tau$  à l'aide de la relation  $s = c\tau$ . Dans l'après-guerre on voit progressivement ceci passer à :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (8)$$

Paradoxalement, si la vitesse est inférieure à  $c$  l'élément de longueur devient imaginaire pur et ne peut plus être identifié au temps propre. Pour obtenir celui-ci on doit écrire :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-(-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} \quad (9)$$

On ne trouve nulle part, dans la littérature, d'article, ou même d'argument justifiant cette généralisation, universellement pratiquée, du passage à une signature  $(-+++)$  ou  $(+++-)$ . Or cette définition déconcertante du temps propre est dans l'article de Hilbert de 1916. Il faut noter que le terme  $ds^2$  n'apparaît à aucun moment dans ses deux articles. Ce dont il s'occupe c'est d'une forme bilinéaire :

Wir konstruieren nun in einem jeden Punkte  $x_1, x_2, x_3$  desselben die zu ihm orthogonale geodätische Linie, die eine Zeitlinie sein wird, und tragen auf derselben  $x_4$  als Eigenzeit auf; dem so erhaltenen Punkte der vierdimensionalen Welt weisen wir die Koordinatenwerte  $x_1, x_2, x_3, x_4$  zu. Für diese Koordinaten wird, wie leicht zu sehen ist,

$$(32) \quad G(X_s) = \sum_{\mu, \nu}^{1, 2, 3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2$$

Fig.9 : La forme bilinéaire d'Hilbert [13].

Traduction :

Nous allons maintenant construisons en chaque point  $x_1, x_2, x_3$  de cet espace, la géodésique orthogonale à celui-ci, qui sera une ligne temporelle, et sur cette ligne, nous marquons  $x_4$  le temps propre ; le point de cet espace quadridimensionnel ainsi obtenu reçoit les coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Dans ces coordonnées, nous avons, comme on le voit facilement,

$$G(X_s) = \sum_{\mu, \nu}^{1, 2, 3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2 \quad (32)$$

Fig. 9bis: La forme bilinéaire d'Hilbert.

Hilbert étudie les propriétés mathématiques d'une forme bilinéaire (32). Il ne lui vient pas à l'idée décrire :

$$(10) \quad s^2 = \sum_{\mu, \nu}^{1, 2, 3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2$$

ou, sous une forme différentielle :

$$(11) \quad ds^2 = \sum_{\mu, \nu}^{1, 2, 3} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu - dx_4^2$$

En fait, on imagine qu'il ne « visualise » pas du tout cette hypersurface 4D. Il peut donc, sans que cela ne lui pose le moindre problème, équiper cette forme de deux longueurs différentes :

nicht sein Vorzeichen ändert: ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

ausfällt, heiße eine *Strecke* und das längs dieses Kurvenstücks genommene Integral

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

heiße die *Länge der Strecke*; ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

ausfällt, heiße eine *Zeitlinie* und das längs dieses Kurvenstückes genommene Integral

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

heiße die *Eigenzeit der Zeitlinie*; endlich heiße ein Kurvenstück, längs dessen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

wird, eine *Nullinie*.

Fig. 10: Les deux longueurs de Hilbert [13]

Traduction :

Un morceau de courbe pour lequel

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

sera appelé un *segment* et l'intégrale le long de ce morceau de courbe

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

est la longueur du segment; un morceau de la courbe pour lequel

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

sera appelé ligne de temps et l'intégrale

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

évaluée le long de ce morceau de courbe sera *le temps propre de la ligne de temps*; enfin un morceau de courbe le long duquel

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

sera appelé une ligne nulle.

Fig. 10bis: Les deux longueurs de Hilbert.

On retrouve la définition du temps propre  $\tau$ . Mais on se demande quelle signification apporter à cette seconde longueur  $\lambda$ . Cela évoque une « autre physique ». Le fait que cette tentative de description de l'univers avec deux longueurs différentes nait connu aucune suite n'a pas attiré l'attention des commentateurs. Serait-ce à dire qu'Hilbert aurait, dans cette Théorie du Tout, envisagé l'ébauche d'une métaphysique ?

Voilà donc la conception assez singulière que le mathématicien David Hilbert se faisant de la géométrie de l'espace-temps.

### 3 – Constructions comparées de la solution stationnaire en symétrie $SO(3)$ de l'équation d'Einstein par Schwarzschild et Hilbert.

#### 3a – Le calcul de Schwarzschild :

Nous avons résumé ces deux stratégies sur deux illustrations pleine page. Commençons par la construction de la métrique extérieure par Schwarzschild. Commençons par la première page de son article qui correspond au numéro 189 de la revue dans laquelle il est publié. Nous nous référerons à cette pagination. Ce qui se trouve indiqué dans les équations (1) est extrêmement important.

# Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der EINSTEINSchen Theorie.

VON K. SCHWARZSCHILD.

(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

§ 1. Hr. EINSTEIN hat in seiner Arbeit über die Perihelbewegung des Merkur (s. Sitzungsberichte vom 18. November 1915) folgendes Problem gestellt:

Ein Punkt bewege sich gemäß der Forderung

$$\left. \begin{array}{l} \delta \int ds = 0, \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\} \quad (1)$$

wobei

Fig. 11 La méthode suivie par Schwarzschild, texte allemand [49]

Traduction :

## Champ gravitationnel d'un point de masse dans la théorie d'Einstein Par Karl SCHWARZSCHILD

traduction H.Traccard et D. Petel

§1. Mr. Einstein, dans son travail sur le périhélie du mouvement de Mercure (voir Sect. 18 Novembre 1915) pose le problème d'un point qui se déplace selon l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \int ds = 0, \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right. \quad (1)$$

Fig. 11bis : Schwarzschild, page 1

La première des deux équations indique que Schwarzschild va minimiser le longueur  $s$ . La seconde équation indique que cet élément de longueur sera nécessairement positif ou nul. Ces deux présupposés auront par la suite une importance capitale.

Page 190 il indique les hypothèse qui déterminent sa solution, censée être exprimée dans un système de coordonnées  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . La coordonnée se réfère au temps, les trois autres à l'espace. Les composants de la métrique solution sont indépendants du temps. Il précise ensuite ses conditions à l'infini. Les coefficients de la métrique doivent tendre vers ceux de la métrique de Lorentz.

$$(12) \quad g_{44} = 1 \quad , \quad g_{11} = -1 \quad , \quad g_{22} = -1 \quad , \quad g_{33} = -1$$

Comme on le voit il opte dès le départ, comme le font Einstein, Droste ; Weyl, Flamm, etc. pour la signature  $(+---)$ . Mais à cette époque il ne vient à l'idée de personne ne faire autrement. Page 191 il rend compte des symétries à sa façon, puis passe en coordonnées polaires. Ses variables sont réelles, ainsi la variable  $r$  est elle nécessairement positive ou nulle.

SCHWARZSCHILD: Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes 191

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

wobei  $F, G, H$  Funktionen von  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  sind.

Die Forderung (4) verlangt: Für  $r = \infty$ :  $F = G = 1, H = 0$ .

Wenn man zu Polarkoordinaten gemäß  $x = r \sin \vartheta \cos \phi, y = r \sin \vartheta \sin \phi, z = r \cos \vartheta$  übergeht, lautet dasselbe Linienelement:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2) - Hr^2 dr^2 \quad (6)$$

$$= Fdt^2 - (G + Hr^2) dr^2 - Gr^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2).$$

Fig. 12 Passage en coordonnées polaires [49].

Traduction :

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

Où F,G,H sont des fonctions de  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

La condition (4) entraîne que pour  $r = \infty$  on a  $F=G=1$  et  $H=0$

Quand on passe en coordonnées polaires

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\phi), y = r \sin(\vartheta) \sin(\phi), z = r \cos(\vartheta)$$

On obtient le même élément linéaire :

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\phi^2) - Hr^2 dr^2$$

(6)

$$ds^2 = Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\phi^2)$$

Fig. 12bis : Passage en coordonnées polaires.

Schwarzschild introduit alors un changement de variables dont le seul but est de faciliter son calcul des symboles de Christoffels :

$$(13) \quad x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \vartheta, \quad x_3 = \phi$$

Puis il écrit :

In den neuen Polarkoordinaten lautet das Linienelement:

$$ds^2 = Fdx_4^2 - \left( \frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2} \right) dx_1^2 - Gr^2 \left[ \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2(1-x_2^2) \right], \quad (8)$$

wofür wir schreiben wollen:

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3 dx_3^2(1-x_2^2). \quad (9)$$

Dann sind  $f_1, f_2 = f_3, f_4$  drei Funktionen von  $x_i$ , welche folgende Bedingungen zu erfüllen haben:

1. Für  $x_1 = \infty$ :  $f_1 = \frac{1}{r^4} = (3x_1)^{-4/3}, f_2 = f_3 = r^2 = (3x_1)^{2/3}, x_4 = 1$
2. Die Determinantengleichung:  $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 = 1$ .
3. Die Feldgleichungen.
4. Die  $f$  stetig, außer für  $x_1 = 0$ .

Fig. 13 : La métrique de Schwarzschild dans ses nouvelles coordonnées, [49]

Traduction :

Dans les nouvelles coordonnées polaires, l'élément linéaire est :

$$ds^2 = F dx_4^2 - \left( \frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2} \right) dx_1^2 - Gr^2 \left( \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2(1-x_2^2) \right), \quad (8)$$

Pour lequel nous écrirons :

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3 dx_3^2(1-x_2^2), \quad (9)$$

Ensuite,  $f_1, f_2, f_3, f_4$  sont trois fonctions devant remplir les conditions suivantes

1. Pour  $x_1 = \infty$  :  $f_1 = \frac{1}{r^4} = (3x_1)^{-\frac{4}{3}}$ ,  $f_2 = f_3 = r^2 = (3x_1)^{\frac{2}{3}}$ ,  $x_4 = 1$
2. L'équation du déterminant:  $f_1 * f_2 * f_3 * f_4 = 1$
3. Les équations de champ.
4. les fonctions f continues en dehors de  $x_1 = 0$

Fig. 13 bis : La métrique de Schwarzschild dans ses nouvelles coordonnées.

Schwarzschild calcule ensuite les coordonnées du tenseur de Ricci à l'aide des symboles de Christoffel. Tous calculs faits il obtient :

Son équation (12) :

$$(14) \quad f_1 = \frac{(3x_1 + \rho)^{-4/3}}{1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-1/3}}$$

Son équation (10) :

$$(15) \quad f_2 = (3x_1 + \rho)^{2/3}$$

Page 194 il précise que :

$$(16) \quad f_3 = f_2 = (3x_1 + \rho)^{2/3}$$

Son équation (11) :

$$(17) \quad f_4 = 1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-1/3}$$

Dans son équation (13) il précise que  $\rho = \alpha^3$ . En remplaçant  $x_1$  par  $r^3/3$  il vient :

$$(18) \quad ds^2 = \frac{(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4}{(r^3 + \alpha^3) [(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} dr^2 - (r^3 + \alpha^3)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Et est ce qu'on appellera plus tard la longueur de Schwarzschild.

Personne n'a jamais explicité ce qui constitue la véritable expression de la solution originale trouvée par Schwarzschild en janvier 1916, il y a 108 ans, exprimée à l'aide des coordonnées qu'il avait définies au début de son article :

$$(19) \quad \{t, x, y, z\} \rightarrow \left\{ t, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \vartheta, \phi, \right\}$$

Personne, non plus, depuis plus d'un siècle, n'a examiné ses propriétés. Faisons-le :

Lors que  $r$  tend vers zéro,  $g_{tt}$  tend vers zéro. Le terme donne la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ , et les termes  $g_{\vartheta\vartheta}$  donnent :

$$(20) \quad f_2 \rightarrow (r^2 + \alpha^3)^{2/3} \quad f_3 \rightarrow (r^2 + \alpha^3)^{2/3} \sin^2 \vartheta$$

Le caractère non contractile de l'hypersurface à 4 dimensions apparaît en pleine lumière. Lorsque, à  $t = \text{Cst}$ ,  $r = \text{Cst}$ ,  $\vartheta = \pi/2$ , on calcule la longueur :

$$(21) \quad p = \int_0^{2\pi} (r^2 + \alpha^3)^{1/3} d\phi = 2\pi (r^2 + \alpha^3)^{1/3}$$

ce périmètre  $a$ , pour  $r = 0$  la valeur minimale  $2\pi\alpha$ . Passons maintenant à l'article de David Hilbert [13]:

### 3a - Le calcul de Hilbert :

Il commence, à la page 67 de l'article original, par poser ses hypothèses :

Die Annahmen über die  $g_{\mu\nu}$  sind folgende:

1. Die Maßbestimmung ist auf ein Gaußisches Koordinatensystem bezogen — nur daß  $g_{44}$  noch willkürlich gelassen wird; d. h. es ist

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0.$$

2. Die  $g_{\mu\nu}$  sind von der Zeitkoordinate  $x_4$  unabhängig.

3. Die Gravitation  $g_{\mu\nu}$  ist zentrisch symmetrisch in Bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

$$w_1 = r \cos \vartheta$$

$$w_2 = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$w_3 = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$w_4 = l$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

$$(42) \quad F(r) dr^2 + G(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + H(r) dl^2$$

Fig.14 : Les hypothèses de Hilbert , [13]

Traduction :

et qui offre en outre des avantages pour mes recherches ultérieures. Les hypothèses concernant les  $g_{\mu\nu}$  sont les suivantes

1. La métrique est représentée dans un système de coordonnées gaussien, sauf que  $g_{44}$  est laissé arbitraire, c'est-à-dire que nous avons

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0,$$

2. Les  $g_{\mu\nu}$  sont indépendants de la coordonnée temporelle  $x_4$
3. La gravitation  $g_{\mu\nu}$  est à symétrie centrale par rapport à l'origine des coordonnées.

Selon Schwarzschild, la métrique la plus générale conforme à ces hypothèses est représentée en coordonnées polaires, où

$$w_1 = r \cos\theta$$

$$w_2 = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$w_3 = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$w_4 = l$$

par l'expression

$$F(r) dr^2 + G(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + H(r) dl^2 \quad (42)$$

Fig.14 bis : Les hypothèses de Hilbert .

- Cette expression de la métrique (comme celle pour laquelle Schwarzschild avait opté) n'est pas la plus générale, compte tenu des hypothèses premières : indépendance par rapport au temps, symétrie sphérique, mais nous verrons cela plus loin.
- Hilbert reprend sa vision d'un univers avec un métrique de signature (+ + + +)
- Sa formulation (42) de la forme bilinéaire n'est pas exactement celle de Schwarzschild. Voir les figures «&&& et &&& et ses équations (6). Son coefficient du facteur n'est pas G mais  $Gr^2$ . Considérons cela comme un détail.

Sur ce Hilbert écrit :

$$(42) \quad F(r) dr^2 + G(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + H(r) dl^2$$

dargestellt, wo  $F(r)$ ,  $G(r)$ ,  $H(r)$  noch willkürliche Funktionen von  $r$  sind. Setzen wir

$$r^* = \sqrt{G(r)}, \quad \leftarrow$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt  $r^*$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42)  $r^*$  anstatt  $r$  ein und lassen dann wieder das Zeichen  $*$  weg, so entsteht der Ausdruck

$$(43) \quad M(r) dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + W(r) dl^2,$$

wo  $M(r)$ ,  $W(r)$  die zwei wesentlichen willkürlichen Funktionen von  $r$  bedeuten. Die Frage ist, ob und wie diese auf die allgemeinste Weise zu bestimmen sind, damit den Differentialgleichungen (36) Genüge geschieht.

Fig. 15 : La variable « radiale »  $r^*$  n'est plus  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  . [13]

Traduction :

$$F(r) dr^2 + G(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + H(r) dl^2 \quad (42)$$

où  $F(r), G(r), H(r)$  sont toujours des fonctions arbitraires de  $r$ . Si nous posons

$$r^* = \sqrt{G(r)} \quad \leftarrow$$

alors nous sommes également justifiés d'interpréter  $r^*, \theta, \varphi$  comme des coordonnées polaires spatiales. Si nous introduisons  $r^*$  dans (42) au lieu de  $r$  et que nous éliminons ensuite le signe  $*$ , le résultat est l'expression suivante

$$M(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + W(r) dl^2 \quad (43)$$

où  $M(r), W(r)$  désignent les deux fonctions essentielles et arbitraires de  $r$ . La question est de savoir si et comment celles-ci peuvent être déterminées de la manière la plus générale de sorte que les équations différentielles (36) soient satisfaites.

Fig. 15 bis : La variable « radiale  $r^*$  » n'est plus  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Il est tout à fait licite de faire ce changement de variable  $r^* = \sqrt{G(r)}$  qui ne demande plus que la détermination de deux fonctions inconnues  $M(r^*)$  et  $W(r^*)$  mais il faut alors écrire la forme bilinéaire (43) sous la forme :

$$(22) \quad M(r^*) dr^2 + r^{*2} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + W(r^*) dt^2$$

Que

Quelle est cette équation (36) dont nous cherchons la solution ? C'est :

$$(23) \quad K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} = 0 \quad (36)$$

Comme on sait que la lettre K se réfère au tenseur et au scalaire de Ricci, c'est bien l'équation d'Einstein sans second membre. La suite du calcul peut alors être reconduite, jusqu'à son résultat, **à condition de l'exprimer à l'aide de cette variable  $r^*$  et non  $r$**  :

und, wenn wir

$$M = \frac{r^*}{r^* - m} \quad W = w^2 \frac{r^* - m}{r^*}$$

setzen, wo nunmehr  $m$  und  $w$  die unbekanntes Funktionen von  $r^*$

Fig. 16 : Les fonctions  $M$  et  $N$  de Hilbert, [13]

Traduction :

THE FOUNDATIONS OF PHYSICS – SECOND COMMUNICATION - 1917

$$M = \frac{r^*}{r^* - m} \quad W = w^2 \frac{r^* - m}{r^*}$$

où maintenant  $m$  et  $w$  sont les fonctions inconnues de  $r^*$  nous obtenons finalement

Fig. 16 bis : Les fonctions  $M$  et  $N$  de Hilbert.

Hilbert exprime alors son résultat, c'est à dire la forme bilinéaire recherchée :

den gemachten Annahmen 1., 2., 3., dar. Nehmen wir als Integrale von (44)  $m = \alpha$ , wo  $\alpha$  eine Konstante ist und  $w = 1$ , was offenbar keine wesentliche Einschränkung bedeutet, so ergibt sich aus (43) für  $l = it$  die gesuchte Maßbestimmung in der von Schwarzschild zuerst gefundenen Gestalt

$$(45) \quad G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} dt^2.$$

Die Singularität dieser Maßbestimmung bei  $r = 0$  fällt nur dann fort, wenn  $\alpha = 0$  genommen wird, d. h. Die Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie ist bei den An-

Fig. 17 : Le résultat du calcul de Hilbert. [13]

Traduction :

disparaissent ; elles représentent donc essentiellement la solution la plus générale des équations (36) sous les hypothèses 1., 2., 3. que nous avons faites. Si nous prenons comme intégrales de (44)  $m = \alpha$ , où  $\alpha$  est une constante, et  $w = 1$ , qui n'est évidemment pas une restriction essentielle, alors pour  $l = it$ , (43) aboutit à la métrique désirée sous la forme trouvée pour la première fois par Schwarzschild

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} dt^2 \quad (45)$$

La singularité de la métrique en  $r = 0$  ne disparaît que si l'on prend  $\alpha = 0$  ;

Fig. 17 bis : Le résultat du calcul de Hilbert.

Plus haut, dans son article, Hilbert montre montré que ses quantités  $m$  et  $w$ , qui ne représente en aucun cas le module du vecteur  $(w_1, w_2, w_3, w_4)$  sont des constantes. La constante  $m$  est alors identifiée à  $\alpha$ , longueur de Schwarzschild, et  $w$  à l'unité.

A titre de simple remarque, le fait de tabler sur une métrique elliptique ou sur une métrique hyperbolique ne modifierait en rien la projection sur le plan d'une trajectoire géodésique. En faisant abstraction du temps, c'est à dire en gardant cette variable  $l$  Hilbert aurait tout aussi bien pu présenter son résultat, à condition de conserver sa variable  $r^*$  selon :

$$(24) \quad G(dr^*, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r^*}{r^*-\alpha} dr^{*2} + r^{*2} d\vartheta^2 + r^{*2} \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \frac{r^*-\alpha}{r^*} dl^2$$

Dans l'équation (45) une faute typographique. Ce résultat est en fait :

$$(25) \quad G(dr^*, d\vartheta, d\varphi, dt) = \frac{r^*}{r^*-\alpha} dr^{*2} + r^{*2} d\vartheta^2 + r^{*2} \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - \frac{r^*-\alpha}{r^*} dt^2$$

→ L'erreur de Hilbert a consisté à confondre cette forme bilinéaire avec « la forme trouvée pour la première fois par Schwarzschild » («der von Schwarzschild zuerst gefundenen Gestalt»).

Nous encadrons cette remarque car cette confusion, reprise par ses successeurs, aura de conséquences incalculables. C'est une erreur au sens où Hilbert mentionne l'existence d'une singularité (« en  $r = 0$  »).

Notons que J.Droste [5], qui est pris comme référence par C.Corda [4] commet la même confusion. Il commence par introduire la forme d'une métrique dépendant de trois fonctions inconnues, dans son équation (2) :

For a centre at rest and symmetrical in all directions it is easily seen that

$$ds^2 = w^2 dt^2 - u^2 dr^2 - v^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad . . . (2)$$

$w, u, v$  only depending on  $r$ , and  $(\vartheta, \varphi)$  representing polar coordinates. Now, if  $g_{ij}$  and therefore also  $g^{ij}$  are all zero, if  $i \neq j$ ,  $G$

Fig. 18 : Droste, la forme initiale de sa métrique [5]

Mais, très vite, comme Hilbert, il réduit ce nombre des fonctions inconnues à deux :

199

The equations of the field being covariant for all transformations of the coordinates whatever, we are at liberty to choose instead of  $r$  a new variable which will be such a function of  $r$ , that in  $ds^2$  the coefficient of the square of its differential becomes unity. That new variable we name  $r$  again and we put

$$ds^2 = w^2 dt^2 - dr^2 - v^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad . . . . (4)$$

$w$  and  $v$  only depending on  $r$ . We now find

Fig. 19: Droste [5], commet la même erreur que Hilbert.

Traduction :

Les équations du champ étant covariantes pour toute transformation des coordonnées, quelles qu'elles soient, nous sommes libres de choisir une autre, variable, fonction de  $r$ , telle que le coefficient de  $dr^2$  devienne l'unité. Une nouvelle variable que nous continuerons à appeler  $r$

$$ds^2 = w^2 dt^2 - dr^2 - v^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\rho^2) \dots \dots \dots (4)$$

$w$  et  $v$  ne dépendant que de  $t$ , nous trouvons maintenant

Fig. 19 bis : Droste commet la même erreur que Hilbert.

On remarque que Droste opte pour la signature  $(+---)$ . A l'issue de ce calcul, usant de plusieurs changements de variables successifs il produit, à l'issue d'un ultime changement, ce que Corda qualifie « Standard Schwarzschild solution » :

$$ds^2 = (1 - \xi) dt^2 - \frac{4\alpha^2}{(1 - \xi)\xi^4} d\xi^2 - \frac{\alpha^2}{\xi^2} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\rho^2).$$

Lastly we put -

$$\xi = \frac{\alpha}{r}$$

This  $r$  is not the same as occurs in (4). We obtain

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\rho^2) \quad (7)$$

Fig. 20 ; Résultat final. [5],

Traduction :

$$ds^2 = (1 - \xi) dt^2 - \frac{4\alpha^2}{(1-\xi)\xi^4} d\xi^2 - \frac{\alpha^2}{\xi^2} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\rho^2).$$

Pour finir, nous poson

$$\xi = \frac{\alpha}{r}$$

Ce  $r$  là n'est pas celui qui figure dans l'équation (4). Nous obtenons

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\rho^2) \quad (7)$$

Fig. 20 bis ; Résultat final.

Et, finalement, cette nouvelle coordonnée, qu'il nomme toujours  $r$ , donne une forme quadratique identique à celle de Hilbert. Mais ça n'est en aucun cas la coordonnée radiale initiale. Droste, à la différence de Hilbert, fait preuve d'une certaine prudence, qui ne sera pas celle de Hilbert qui envisage d'emblée qu'une singularité puisse correspondre à la valeur nulle de sa variable  $r$ . Voici le passage de l'article de Droste :

3. From (7) we can immediately deduce some conclusions. The point  $(r, \vartheta, \varphi)$  lies at a distance

$$\sigma = \int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}} = r \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} + \alpha \log \left( \sqrt{\frac{r}{\alpha} - 1} + \sqrt{\frac{r}{\alpha}} \right). \quad (8)$$

1) After the communication to the Academy of my calculations, I discovered that also K. SCHWARZSCHILD has calculated the field. Vid : Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akad. der Wiss. 1916, page 189. Equation (7) agrees with (14) there, if  $R$  is read instead of  $r$ .

201

from the point, where the radius intersects sphere  $r = \alpha$ , if  $r > \alpha$  and supposing that (7) remains valid up to  $r = \alpha$ . In future we will always make these two suppositions, as we shall see, that a moving particle outside sphere  $r = \alpha$  can never pass that sphere, we may, in studying its motion, disregard the space  $r < \alpha$ . Should (7) cease to be valid as soon as  $r$  becomes  $< R$ , we need only exclude the space  $r < R$  from the conclusions which will still be made, to make them valid again.

If  $r$  be very large with respect to  $\alpha$ , the proportion  $\sigma : r$  approaches to 1.

The circumference of a circle  $r = \text{const.}$  is  $2\pi r$  by (7); this shows how  $r$  can be measured. Circle  $\alpha$  has the circumference  $2\pi\alpha$ .

One might in (7) perform a substitution  $t = f(r, \tau)$ . Then a term containing  $dr d\tau$  would arise and the velocity  $c$  of light, travelling along  $r$ , would have to be calculated from an equation of the form

$$F_1(r, \tau) + F_2(r, \tau) c - F_3(r, t) c^2 = 0$$

and would have two values, one for light coming from the centre, the other for light moving towards it. Moreover these values would depend on  $t$ . In consequence of the last fact we should not name

Fig. 21 : Droste, pages 200-201 . [5],

Traduction :

3. A partir de (7) nous pouvons déduire un certain nombre de conclusions. Le point  $(r, \vartheta, \varphi)$  se situe à la distance

$$\sigma = \int_r^R \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}} = r \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} + \alpha \log \left( \sqrt{\frac{r}{\alpha} - 1} + \sqrt{\frac{r}{\alpha}} \right). \quad (8)$$

1) Après avoir transmis ma communication à l'Académie, j'ai découvert que K.Schwarzschild avait aussi calculé ce champ. Vid : Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akad. der Wiss. 1916, page 189. Mon équation (7) est en accord avec l'équation (14) de cet article à condition d'y remplacer  $r$  par  $R$ .

## 201

Au point où le rayon coupe la sphère correspondant à  $r = \alpha$ , si  $r > \alpha$  on suppose que (7) reste valable jusqu'en  $r = \alpha$ . Dans ce qui va suivre nous ferons toujours les deux suppositions, qu'une particule évoluant au delà de la sphère  $r = \alpha$  ne peut jamais la franchir en ne tenant pas compte de la portion d'espace  $r < \alpha$ . Si (7) cesse d'être valable, il suffit d'exclure l'espace  $r < R$  des conclusions qui peuvent encore être faites, pour les rendre de nouveau valables. Si  $r$  est grand devant  $\alpha$ , le rapport  $\sigma : r$  tend vers l'unité.

Le périmètre d'un cercle de rayon  $r = \text{const.}$  est  $2\pi r$  d'après (7); Ceci montre comment on peut avoir accès à une mesure de  $r$

Un cercle correspondant à  $\alpha$  a un périmètre  $2\pi\alpha$ .

On pourrait, dans (7), opérer la substitution  $t = f(r, \tau)$  ce qui ferait apparaître un terme croisé  $dr d\tau$ . Alors on obtiendrait deux valeurs de la vitesse de la lumière cheminant selon  $r$ , en tant que solution d'une équation de la forme :

$$F_1(r, \tau) + F_2(r, \tau) c - F_3(r, t) c^2 = 0$$

Des valeurs différentes selon que la lumière émane du centre ou se dirige vers celui-ci. En outre ces valeurs dépendraient de  $t$ .

and would have two values, one for light coming from the centre, the other for light moving towards it. Moreover these values would depend on  $t$ . In consequence of the last fact we should not write

Ce ne sont que les conclusions d'un théoricien pour qui tout doit être réel, y compris l'élément de longueur  $ds$ . Ceci impose alors que  $r \geq \alpha$  (c'est à dire avec les notations de Schwarzschild  $R \geq \alpha$ ). Les portions d'espace pour lesquelles  $r < \alpha$  (c'est à dire  $R < \alpha$ ) sont exclues de la solution.

Droste fait alors une remarque concernant la possibilité que soit présent un terme croisé en  $dr dt$ . Mais sa façon de l'introduire l'amène à conclure qu'un tel terme dépendrait de la coordonnée du temps, ce qui n'est nullement une obligation. Tout ceci sera repris plus loin.

### 3b – L'exploitation de sa solution par Hilbert.

Construire une solution de l'équation d'Einstein c'est avant tout être capable de produire des géodésiques. Hilbert :

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien für das zentrische Gravitationsfeld (45) entspringen aus dem Variationsproblem

$$\delta \int \left( \frac{r}{r-\alpha} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 \right) dp = 0,$$

Fig. 22 : Hilbert minimise le carré de la longueur. [13]

Traduction :

Ceci fournit la preuve souhaitée, et il est donc suffisant pour la suite de la discussion sur les lignes géodésiques de ne considérer que la valeur  $\theta = \pi/2$ . Le problème variationnel se simplifie alors comme suit

$$\delta \int \left\{ \frac{r}{r-\alpha} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 \right\} dp = 0$$

Fig. 22 bis : Hilbert minimise le carré de la longueur.

Cette façon de faire sera reprise par maints successeurs pendant le siècle suivant. Il est à noter que Schwarzschild, quant à lui, n'écrit pas cette variation de l'intégrale d'action, ce que fait Droste :

4. We now proceed to the calculation of the equations of motion of a particle in the field.

The equations of motion express the fact that the first variation of the integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

will be zero, if the varied positions for  $t = t_1$  and  $t = t_2$  are the same as the actual ones.  $L$  represents the quantity

$$L = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 \dot{\vartheta}^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2, \dots} \quad (9)$$

Fig. 23: Droste, son Lagrangien. [5]

Traduction :

4. Nous allons maintenant procéder au calcul du mouvement d'une particule dans le champ.

Les équations expriment le fait que la première variation de l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

sera nulle, en situation d'extremas liés.  $L$  représente la quantité

$$L = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 \dot{\vartheta}^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2, \dots} \quad (9)$$

Fig. 23 bis ; Droste, son Lagrangien.

En comparant ce que font Hilbert et Droste il est clair que le premier minimise le carré de la longueur et le seconde cette longueur, nécessairement positive. Or faisons la remarque ci-après ;

(26)

$$\delta \int \left( \frac{R}{R-\alpha} \left( \frac{dR}{dp} \right)^2 + R^2 \left( \frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 - R^2 \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\phi}{dp} \right)^2 - \frac{R-\alpha}{R} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 \right) dp = 0$$



Lagrange eq.



$$\delta \int \sqrt{ \frac{R-\alpha}{R} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 - \frac{R}{R-\alpha} \left( \frac{dR}{dp} \right)^2 - R^2 \left( \frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 - R^2 \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\phi}{dp} \right)^2 } dp = 0$$

Les deux approches conduisent au même système d'équations de Lagrange. Ceux-ci produisent des courbes géodésiques en  $(R, \phi)$ , complètes dans le premier cas, qui s'interrompent quand  $R < 0$  dans le second. Avec une singularité de coordonnées qui peut être éliminée. Les courbes correspondantes sont données ci-après :

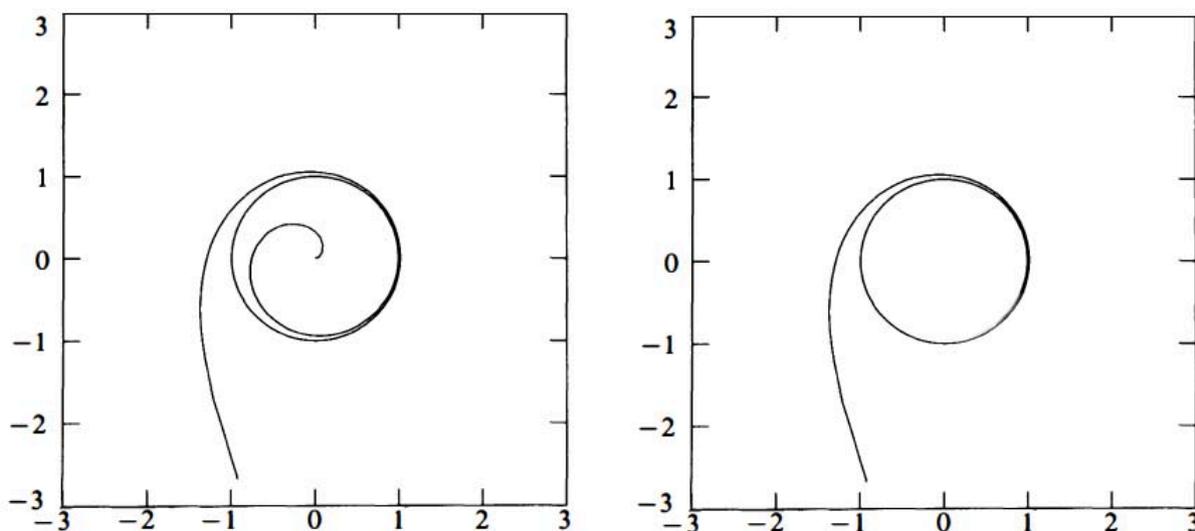


Fig.24 : Géodésiques plongeantes [50]. A gauche la particule tombe vers le centre en spirant. A droite sa trajectoire s'interrompt quand elle atteint la sphère de Schwarzschild.

La partie de courbe correspondant à  $R < \alpha$ , algébriquement bien réelle, n'entre pas dans le domaine de la physique si on fait l'hypothèse que la mesure de longueur, le long de cette portion de courbe, doit être réelle. Avant d'aller plus loin il nous faut évoquer les contributions de L.Flamm et de H.Weyl.

Comme on le verra plus loin, Karl Schwarzschild, qui était à la fois un excellent mathématicien-géomètre et un physicien aguerri, avait suivi une logique de Physicien. La description géométrique du champ gravitationnel créé par une masse correspondant

à une sphère emplie d'un matériau incompressible ne pouvait s'effectuer qu'en raccordant deux métriques, la première décrivant la géométrie à l'extérieur de la masse et la seconde à l'intérieur.

## 5 - La contribution de Richard Tolman.

Ces éléments, qui vont constituer les bases d'une cosmologie scientifique sont nés en Allemagne et Autriche avant la seconde guerre mondiale. Ces textes fondateurs sont à la base en allemand et à cette époque la diffusion des idées se joue à travers l'envoi de tirés à part, un très petit nombre de copies imprimées d'articles. Il y a bien entendu les contacts directs, lorsque les auteurs de travaux viennent faire des conférences hors de leur pays d'origine, comme ce fut le cas quand Einstein donna en 1921 une série de conférences à l'université de Columbia et à Princeton. Le premier qui réunit tout un ensemble de connaissance, en langue anglaise, est le mathématicien Richard Tolman, sous la forme d'un ouvrage[18] qui paraît en 1934 et a rapidement un écho planétaire. Ne s'y trouve évoquée que la solution décrivant l'extérieur d'une masse. La métrique qui est censée rendre compte des symétries est la suivante :

In accordance with the static and spherically symmetrical nature of the field which would surround an attracting point particle, it can be shown necessarily possible (see § 95) to choose coordinates  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , and  $t$  such that the line element will be of the simple form

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + e^\nu dt^2, \quad (82.1)$$

where  $\lambda$  and  $\nu$  are functions of  $r$  alone. Furthermore, the components

Fig. 25 : La métrique de Tolman, avec ses exponentielles. [18]

Traduction :

En accord avec la symétrie sphérique et statique du champ qui entoure une particule ponctuelle attractive, on peut montrer qu'il est possible et nécessaire (voir § 95) de choisir des coordonnées  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , et  $t$  de telle façon que la métrique s'écrive de la façon simple

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + e^\nu dt^2, \quad (82.1)$$

où  $\lambda$  et  $\nu$  sont fonctions de la seule variable  $r$

Fig. 25 bis : La métrique de Tolman, avec ses exponentielles.

Les fonctions  $e^\lambda$  et  $e^\nu$  sont introduites de manière à assurer l'invariance de la signature de la métrique, qui conserve sa formulation habituelle (+---). On notera le qualificatif de « statique » qui n'est pas stationnaire. Par stationnaire on entend une

solution indépendante du temps. Par statique, une solution à la fois indépendante du temps et symétrique quand on change  $t$  en  $-t$ . Il n'y a pas d'impératif physique qui conduisent à opter pour cette symétrie. On note cependant que ceci exclut tout terme croisé  $dr dt$ . L'auteur donne alors le résultat du calcul, identique à la formule de Droste, en tenant compte, ce qui n' guère d'intérêt, de la présence de la constante cosmologique dans l'équation de champ.

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2, \quad (96.3)$$

Fig. 26 : La métrique extérieure selon Tolman [18] .

Tolman lit et parle couramment l'allemand, ce qui lui permet de lire le second article de Schwarzschild, celui de février 1916, décrivant la géométrie à l'intérieur d'une masse. Nous en parlerons avec plus de détails plus loin. Mais on remarquera qu'il ne fait pas mention de conditions restrictives concernant la valeur de la coordonnée  $r$  présente dans son équation (96.3).

## 5 -Retour sur des considérations géométriques.

En février 1916 K.Schwarzschild complète son article de janvier en en publiant un second où il construit une solution stationnaire, à symétrie sphérique, de l'équation d'Einstein avec second membre, décrivant la géométrie de la portion d'espace correspondant à l'intérieur d'une sphère emplies d'un matériau incompressible. En fait de coordonnée spatiale il utilise deux angles :  $\phi$  et  $\chi$  qui, qui permettent de repérer la position d'un point dans la sphère. La valeur  $\chi=0$  correspond au centre de l'objet et  $\chi = \chi_a$  à sa surface extérieure. La coordonnée radiale est alors :

$$(27) \quad R = \hat{R} \cos \chi$$

Et cette seconde longueur caractéristique est :

$$(28) \quad \hat{R} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho_0}}$$

Cette métrique intérieure s'écrit :

$$(29) \quad ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)^2 c^2 dt^2 - \frac{3c^2}{8\pi G\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2)$$

On peut alors utiliser cette « grandeur intermédiaire »  $R$  (« Hilsgröße ») de Schwarzschild pour décrire la géométrie à l'extérieur de la masse. Si  $M$  est la masse de l'objet, cette métrique s'écrit alors :

$$(30) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

E, 1917 F.Flamm avait parfaitement décrit une telle approche en effectuant des coupes dans l'hypersurface à quatre dimensions, le résultat faisant apparaître sa méridienne. Voir la figure 2. Une forme de criticité géométrique se manifeste quand on considère un objet de densité constante, dont la masse s'accroît progressivement. Si on table sur une densité constante, le rayon caractéristique  $\hat{R}$  l'est aussi. Le rayon de Schwarzschild croît comme la masse, dont comme le cube du rayon. Pour une étoile comme le Soleil le rayon est de l'ordre de 3 kilomètres, alors que le rayon vaut cent fois le rayon de l'astre. On achoppe ainsi avec une première criticité, que nous nommerons géométrique, quand le rayon de Schwarzschild rejoint ce rayon  $\hat{R}$ . Si nous traçons la méridienne de l'hypersurface elle correspond à un demi cercle se raccordant avec une demie-parabole couchée :

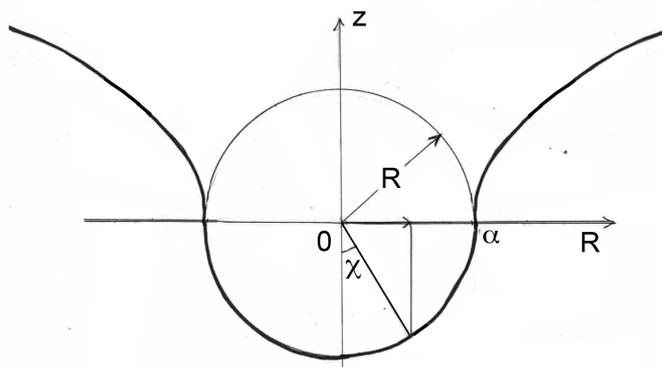


Fig. 27: Première forme de criticité.

Une question apparaît alors : que se passe-t-il quand l'apport de matière fait que cette situation se trouve dépassée et que la description fournie par K.Schwarzschild, à l'aide de deux métriques se raccordant, ne peut plus convenir ?

## 6 – Des extensions de nature topologiques.

Celles-ci sont envisagées avant même qu'on envisage que de tels astres pussent exister, sous la plume de ceux qui tentent de représenter les masses à l'aide de la topologie. Weyl est un pionnier dans ce domaine [6]. Sa représentation a déjà été évoquée dans la section 1 et dans l'extrait de la figure 1. Mais il va plus loin en proposant un nouveau changement de variable :

lungen willen transformieren muß. Die Transformationsformeln sollen lauten

$$x_1' = \frac{r'}{r} x_1, \quad x_2' = \frac{r'}{r} x_2, \quad x_3' = \frac{r'}{r} x_3; \quad r = \left(r' + \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'}.$$

Lasse ich nach Durchführung der Transformation die Akzente wieder fort, so ergibt sich

$$(12) \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad f = \left(\frac{r - a/2}{r + a/2}\right)^2.$$

In den neuen Koordinaten ist das Linienelement des Gravitationsraumes also dem Euklidischen *konform*; das lineare Vergrößerungsverhältnis ist

$$\left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2.$$

$d\sigma^2$  ist regulär für alle Werte  $r > 0$ ,  $f$  ist durchweg positiv und wird nur für

$$r = \frac{a}{2}$$

zu Null. Der Umfang des Kreises  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  beträgt

$$2\pi r \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2;$$

Fig.28 : Coordonnées isotropes de Weyl. [6]

Les choses peuvent devenir plus clair en introduisant un nouveau changement de variable, dont je vais avoir besoin pour illustrer ce qui suivra.

$$x_1' = \frac{r'}{r}x_1, \quad x_2' = \frac{r'}{r}x_2, \quad x_3' = \frac{r'}{r}x_3; \quad r = \left(r' + \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'}.$$

Si je supprime les ' j'obtiens la nouvelle formulation de la métrique

$$(12) \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad f = \left(\frac{r - a/2}{r + a/2}\right)^2$$

Dans ces nouvelles coordonnées la métrique devient *conforme* à un espace Euclidien, dilaté d'un facteur

$$\left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2.$$

$d\sigma^2$  est régulier pour toutes les valeurs de  $r > 0$ ,  $f$  est alors toujours positif, devenant nul pour

$$r = \frac{a}{2}.$$

⌈ La circonférence du cercle  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  est

$$2\pi r \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2;$$

Si nous permettons à  $r$  de varier dans ce domaine, depuis  $+\infty$ , alors cette fonction décroît de manière monotone et atteint  $4\pi a$  pour

$$r = \frac{a}{2},$$

Fig.28 bis : Coordonnées isotropes de Weyl.

Le fait de remplacer  $r'$  par  $r$  n'est pas souhaitable. Les coordonnées ne sont jamais qu'une tentative de lecture d'une géométrie. Il aurait été préférable d'utiliser une autre lettre. Ainsi, attendu que Weyl part de :

$$(31) \quad ds^2 = f dt^2 - d\sigma^2 \geq 0$$

$d\sigma^2$  désignant la partie spatiale de la métrique on devrait écrire :

$$(32) \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{a}{2u}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

$$(33) \quad f = \left(\frac{u - a/2}{u + a/2}\right)^2$$

Il retrouve alors le caractère non contractile de l'objet, à savoir que le périmètre d'une courbe fermée centrée a une valeur minimale  $p = 4\pi a = 2\pi\alpha$ . Mais il va plus loin en exprimant le temps propre selon :

$$(34) \quad ds = \sqrt{f} \, dt = \left( \frac{u - a/2}{u + a/2} \right) dt$$

La seconde nappe de l'hypersurface est parcourue pour les valeurs de  $a$  allant de  $a/2$  (sphère de gorge) à zéro. Or le facteur ci-dessus devient alors négatif. L'élément de longueur  $ds$  ne peut devenir négatif, ce qui revient à dire que le temps propre ne peut s'inverser. Donc pour maintenir le signe de  $ds$  il faut que le long de cette seconde nappe la coordonnée de temps s'inverse, ce que mentionne Weyl explicitement :

dem Innern des Massenpunktes entsprechen. Bei analytischer Fortsetzung wird

$$\sqrt{f} = \frac{r - a/2}{r + a/2}$$

im Innern negativ, so daß also dort für einen ruhenden Punkt kosmische Zeit ( $x_4$ ) und Eigenzeit gegenläufig sind. (In der

Fig. 29 : Weyl : inversion de la coordonnée de temps. [6]

Traduction :

En procédant à une extension analytique la quantité

$$\sqrt{f} = \frac{r - a/2}{r + a/2}$$

devient négative pour la région intérieure, ce qui signifie que pour un observateur la coordonnée de temps  $x_4$  et le temps propre sont de signes opposés.

Fig. 29 bis : Weyl, inversion de la coordonnée de temps. Français.

Ici Weyl, qui tente toujours de donner une interprétation topologique aux masses, parle de « l'intérieur » d'un tel objet, ce qui montre qu'il se laisse également prendre au piège consistant à remplacer  $r'$  part, en croyant construire une nouvelle coordonnée radiale, allant de zéro à l'infini. Si on redonne à cette grandeur son caractère de simple paramètre, en ne portant son attention que sur la seule grandeur intrinsèque, la longueur  $s$ , il est clair que quand  $u$  tend vers zéro le périmètre  $p$  tend vers l'infini.

Weyl est donc le premier à envisager que la géométrie associée à la métrique extérieure de Schwarzschild, considérée isolément, traduise un pont entre deux espace-temps T-symétriques.

Cette représentation des masses comme des singularités topologique est également la base de l'article d'Einstein et Rosen, en 1935 [20]. On notera cependant que cette extension n'est pas Lorentzienne à l'infini.

Un autre type d'extension [10] fait recours au changement de variable :

$$(35) \quad R = \alpha (1 + L_n \rho)$$

La métrique devient alors :

$$(36) \quad ds^2 = \frac{L_n \operatorname{ch} \rho}{1 + L_n \operatorname{ch} \rho} c^2 dt^2 - \alpha^2 \frac{1 + L_n \operatorname{ch} \rho}{L_n \operatorname{ch} \rho} \operatorname{th}^2 \rho d\rho^2 - \alpha^2 (1 + L_n \operatorname{ch} \rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Les deux nappes sont alors parcourues en faisant varier la coordonnée  $\rho$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ , a sphère de gorge correspondant à la valeur  $\rho = 0$ . Sur cette sphère de gorge le terme

$g_{tt}$  tend vers zéro et le terme  $g_{\rho\rho}$  devient  $\frac{0}{0}$ . En faisant tendre  $\rho$  vers cette valeur zéro

un développement limité montre que tend alors vers 2, ce qui constitue une autre façon de montrer que sur la sphère de gorge on est simplement face à une singularité de coordonnée  $s$ .

## 7 -De l'usage problématique d'une solution stationnaire pour décrire un processus hautement instationnaire.

L'existence d'une nouvelle particule, le neutron, s'impose en 1932, c'est à dire au moment où Tolman rédige son livre. C'est l'époque où la conception de modèles théoriques et l'afflux de résultats expérimentaux et observationnels se répondent l'un l'autre. Avec l'avènement de la mécanique quantique, de la physique nucléaire et la compréhension des mécaniques à l'œuvre au sein des étoiles l'idée d'une instabilité des étoiles massives, en fin de fin, s'impose de plus en plus. En 1939 R.Oppenheimer et Snyder [19] proposent d'utiliser la métrique extérieure, considérées isolément, pour décrire un objet en phase d'implosion. Tout part du temps que met une masse-témoin, en chute libre, pour atteindre la sphère de Sshwarzschild. Si le temps propre est fini et très bref, en choisissant une coordonnée  $t$  dans une symétrie sphérique et dans des conditions « statiques » ce temps devient alors infini.

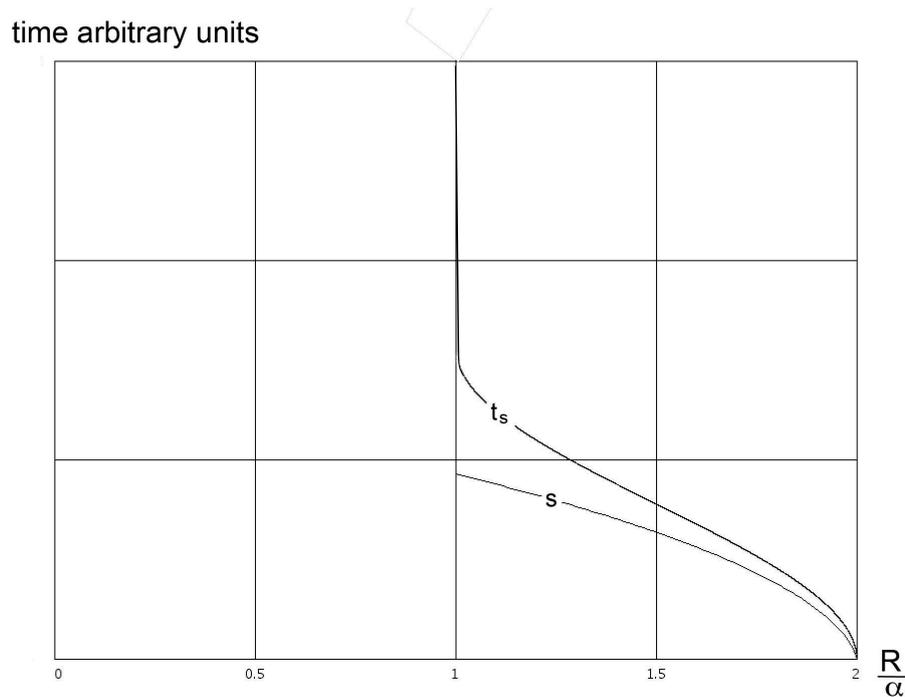


Fig. 30 : Envôlée du temps de chute libre dès que la particule s'approche de la sphère de Schwarzschild

Cet aspect est la base d'une proposition de modèle d'implosion d'une étoile massive. Si toutes ces particules massives implosent sans que la force de pression ne puisse s'y opposer, et que collapse, cette implosion, quoique s'effectuant en temps propre dans une durée qui se en chiffre en secondes, semble durer en un temps infini pour un observateur extérieur, alors la métrique extérieure peut suffire pour décrire ce phénomène. En 1939, à travers cette étude, Oppenheimer et Snyder [20] donnent naissance à un nouvel objet, auquel John Archibald Wheeler donnera le nom de trou noir.

Ce scénario ne tient plus si on tient compte d'un terme croisé en  $dr dt$  dans la métrique. En 1924 A.Eddington, suivi en 1958 par D.Finkelstein [17], fait apparaître un tel terme à l'aide d'un simple changement de variable affectant la variable temps :

$$(37) \quad ct_E = ct_s + \delta \alpha L_n \left( \frac{R}{\alpha} - 1 \right) \quad \delta = \pm 1$$

$t_s$  désignant « le temps de Schwarzschild»). La métrique devient, en  $R$  avec  $R \leq \alpha$  :

$$(38) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{\alpha}{R} \right) c^2 dt_E^2 - \left( 1 + \frac{\alpha}{R} \right) dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{2\delta\alpha c}{R} dR dt_E$$

Avec la variable d'espace  $\rho$  :

(39)

$$ds^2 = \frac{L_n \text{ch}\rho}{1 + L_n \text{ch}\rho} c^2 dt_E^2 - \alpha^2 \frac{L_n \text{ch}\rho}{1 + L_n \text{ch}\rho} \text{th}^2 \rho d\rho^2 + \frac{2\delta c \alpha}{\rho} d\rho dt_E - \alpha^2 (1 + L_n \text{ch}\rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



## 8 – Retour sur la métrique intérieure de Schwarzschild [8].

Comme celle-ci n'a été disponible sous la forme d'une traduction anglaise, qu'en 1999 les aspects qui vont suivre sont la plupart du temps encore ignorés des théoriciens. Cette métrique est exprimée à l'aide d'un angle  $\chi$ .

Das Linienelement im Innern der Kugel nimmt, wenn man statt  $x_1, x_2, x_3$  ( $ix$ ) die Variablen  $\chi, \vartheta, \phi$  benutzt, die einfache Gestalt an:

$$ds^2 = \left( \frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right)^2 dt^2 - \frac{3}{\chi \rho_0} [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\vartheta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta d\phi^2]. \quad (35)$$

Außerhalb der Kugel bleibt die Form des Linienelements dieselbe, wie beim Massenpunkt:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{\alpha}{R} \right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \quad (36)$$

wobei:  $R^3 = r^3 + \rho$

ist. Nur wird  $\rho$  nach (33) bestimmt, während für den Massenpunkt  $\rho = \alpha^3$  war.

Fig.32 : Métrique intérieure de Schwarzschild 1916 [3]

Traduction :

L'équation à l'intérieur de la sphère se simplifie en utilisant les variables  $\chi, \vartheta, \phi$  au lieu de  $x_1, x_2, x_3$  ( $ix$ ) :

$$ds^2 = \left( \frac{3 \cos(\chi_a) - \cos(\chi)}{2} \right)^2 dt^2 - \frac{3}{\chi \rho_0} (d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\vartheta^2 + \sin^2(\chi) \sin^2(\vartheta) d\phi^2) \quad (35)$$

En dehors de la sphère, la forme de l'équation reste identique à celle du point de masse:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{\alpha}{R} \right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\phi^2) \quad (36)$$

où  $R^3 = r^3 + \rho$

Seul  $\rho$  est déterminé selon (33), tandis que pour le point de masse  $\rho = \alpha^3$ .

Fig. 32 bis : Métrique intérieure de Schwarzschild 1916.

On remarque au passage ( flèche rouge) la très discrète mention d'une coordonnée de temps imaginaire pure (ix), par Schwarzschild, qui demanderait à être commentée par les historiens es sciences.

Viennent ensuite les variations de la pression et de la vitesse de la lumière à l'intérieur de la masse :

4. Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3 \cos \chi_a - \cos \chi}, \quad (44)$$

sie wächst also vom Betrag  $\frac{1}{\cos \chi_a}$  an der Oberfläche bis zum Betrag  $\frac{2}{3 \cos \chi_a - 1}$  im Mittelpunkt. Die Druckgröße  $\rho_0 + p$  wächst nach (10) und (30) proportional der Lichtgeschwindigkeit.

Im Kugelmittelpunkt ( $\chi = 0$ ) werden Lichtgeschwindigkeit und Druck unendlich, sobald  $\cos \chi_a = 1/3$ , die Fallgeschwindigkeit gleich  $\sqrt{8/9}$  der (natürlich gemessenen) Lichtgeschwindigkeit geworden ist. Es ist damit eine Grenze der Konzentration gegeben, über die hinaus eine Kugel inkompressibler Flüssigkeit nicht existieren kann. Wollte man unsere Gleichungen auf Werte  $\cos \chi_a < 1/3$  anwenden, so erhielte man bereits außerhalb des Kugelmittelpunktes Unstetigkeiten.

Fig. 33 : Evolution de la vitesse de la lumière et de la pression. [3]

Traduction :

4. La vitesse de la lumière dans notre sphère est:

$$v = \frac{2}{3 \cos(\chi_a) - \cos(\chi)} \quad (44)$$

de sorte qu'elle varie à partir de la valeur sur la surface  $\frac{1}{\cos(\chi_a)}$   
jusqu'à la valeur au centre  $\frac{2}{3 \cos(\chi_a) - 1}$

La variable de pression  $\rho_0 + p$  augmente selon (10) et (30) proportionnellement à la vitesse de la lumière.

Au centre de la sphère ( $\chi = 0$ ), la vitesse de la lumière et la pression deviennent infinies dès que  $\cos(\chi_a) = \frac{1}{3}$ , la vitesse de chute est devenue égale à  $\sqrt{\frac{8}{9}}$  de la vitesse de la lumière (mesurée naturellement).

Il y a donc une limite de densité au-delà de laquelle une boule de fluide incompressible ne peut exister. Si nous voulions appliquer nos équations aux valeurs  $\cos(\chi_a) < \frac{1}{3}$ , des discontinuités seraient obtenues en dehors du centre de la sphère.

Fig.33 bis : Evolution de la vitesse de la lumière et de la pression.

A l'intérieur de la masse la force de pression s'oppose à la force de gravité. C'est ce qu'ont repris Oppenheimer et Volkoff [24], et Tolman [23] dans leurs articles parus en 1939. C'est ce qui a donné naissance à l'équation TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff). Celle-ci fait également montre d'une envolée de la pression au centre de l'astre quand ces conditions d'une nouvelle criticité que nous désignerons sous le nom de criticité physique se manifeste. Les différentes facettes de cette situation de criticité physique sont illustrées dans cette illustration extraite de [25]. La criticité physique survient à :

$$(42) \quad R_{\text{cr phys}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{R} = \sqrt{\frac{8}{9}} \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho}} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho}}$$

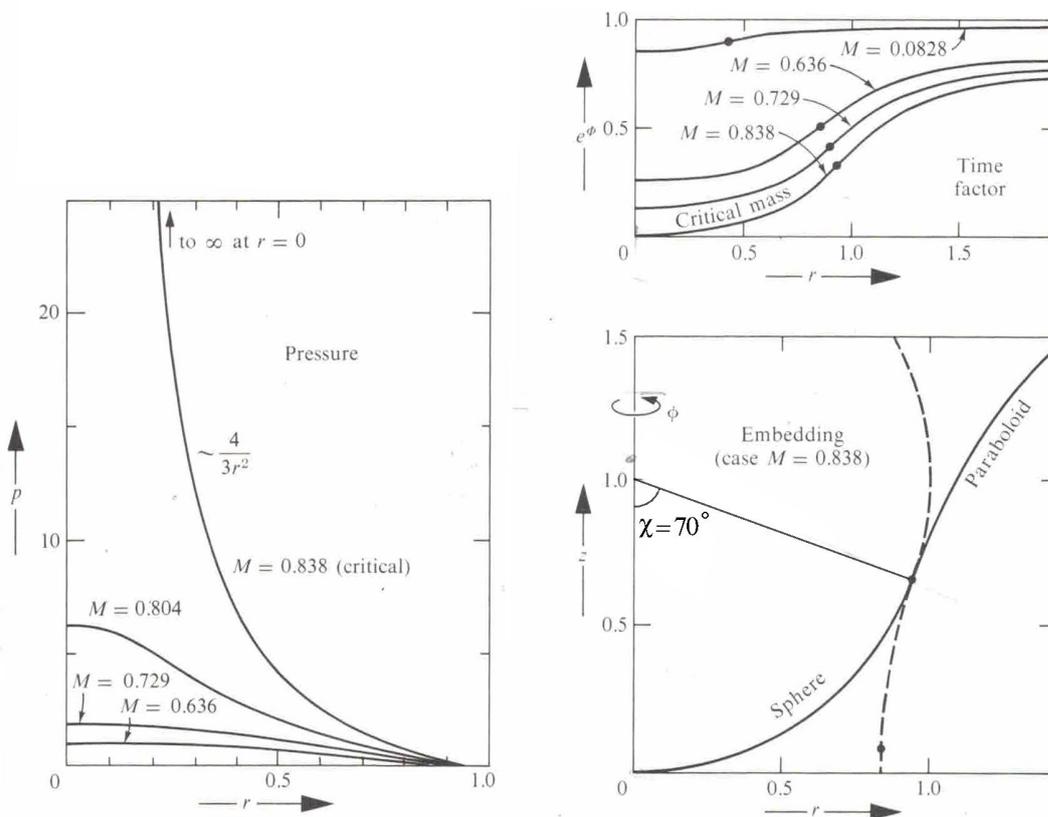


Fig.34 : Criticité physique [25] .

A gauche nous avons l'envolée de la pression. En bas et a droite c'est la courbe méridienne pour laquelle la criticité physique survient quand  $\chi : \text{arc cos}(1/3)$  ce qui porte cette valeur de l'angle à environ  $70^\circ$ , alors que la criticité géométrique des atteinte pour  $\chi = \pi/2$  . La courbe qui se trouve en haut et à droite représente le terme  $(3\cos\chi_a - \cos\chi) / 2$ , tel que pour un observateur au repos :

$$(43) \quad ds = dt(3\cos\chi_a - \cos\chi) / 2$$

Les étoiles à neutrons ont une densité  $\rho$  qu'on peut approximativement figurer comme quasi constante. Dans son article de 1916 K.Schwarzschild n'hésite pas à attribuer cette montée de la pression la variation de la vitesse de la lumière. Il est ainsi le premier à envisager la possibilité d'une possible variation de cette grandeur. Pourtant ceci est envisagé en tant qu'alternative au modèle de l'inflation ([26], [27]). Dans ce modèle toutes les constantes varient conjointement en assurant une conservation généralisée de toutes les équations de la physique, de même que la conservation de toutes les formes d'énergie. En supposant que ce phénomène ne se produit que dans la phase radiative on a alors les courbes d'évolution ci-après :

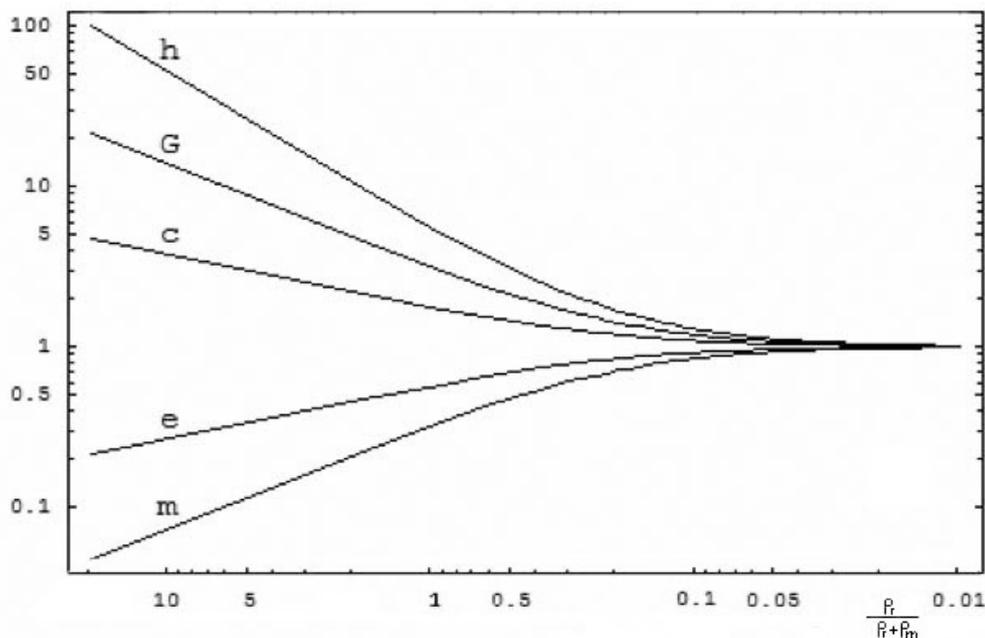


Fig. 35 : Evolutions conjointes normalisées des constantes de la physique [27].

Il y a un unique observable : l'homogénéité de l'univers primitif, lié au fait que pendant toute la période précédant le écoulage l'horizon cosmologique varie comme le facteur d'échelle spatial de l'univers.

Classiquement, cette envolée de la pression est rejetée comme non physique, du fait que la vitesse du son, définie comme  $(dp / d\rho)^{1/2}$  deviendrait alors supérieure à la vitesse de la lumière (considérée comme invariante) brisant par le principe de causalité. En fait au centre des étoiles à neutrons se trouve un milieu où la contribution du « gaz de photons » devient prépondérante et où la pression devient :

$$(44) \quad p \approx p_r = \frac{\rho c^2}{3}$$

Ainsi, comme le suggérait Schwarzschild la montée de la pression va de pair avec la variation locale de la vitesse de la lumière ce qui permet au gradient de pression de continuer à contrebalancer l'écrasante force de gravité. . Mais que se passe-t-il lorsque la criticité physique est atteinte et dépassée ?

## 9 - L'alternative des plugstars.

Une alternative au modèle du trou noir a suscité un vif intérêt dans la communauté des spécialistes, c'est celle du gravastar, un modèle ([33]to [48]) qui a l'avantage de fait disparaître à la fois l'horizon et la singularité centrale, composé d'une fine couche de matière entourant une portion d'espace apportant une contribution négative au tenseur source et de fait s'opposant à l'implosion. En nous appuyant sur une physique et une géométrie plus conventionnelles nous allons présenter le modèle du plugstar. Imaginons dépasser très légèrement la criticité physique. Le terme entre parenthèse de

l'équation (43) devient négatif. Reprenons le raisonnement de H.Weyl : comme la longueur  $ds$  (le temps propre à un facteur près) ne peut s'inverser, c'est la coordonnée de temps qui change de signe, ce qui signifie que les masses situées dans cette petite région deviennent négatives. Si on considère, comme dans le modèle Janus ([30], [31], [32]) que le champ gravitationnel produit par des masses positives repoussent les masses-témoins négatives, n'interagissant avec celles-ci que par antigravitation, alors elles seront expulsées hors de l'objet. On obtient ainsi un mécanisme assurant l'autostabilité d'objets comme, par exemple, les étoiles à neutrons, avec un mécanisme réactionnel très brutal. Reprenons l'examen du time factor en imaginant outrepasser la criticité physique.

## Facteur Temps

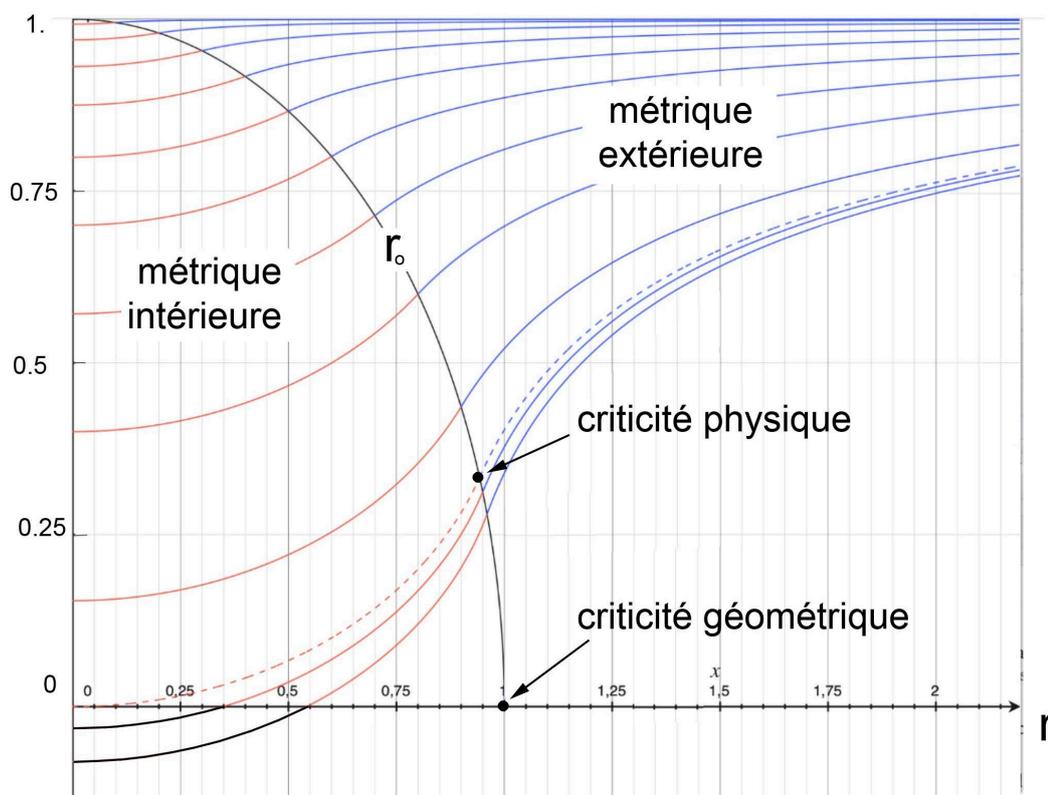


Fig. 36 : Evolution du time factor à l'approche de la criticité.

Le mode d'ouverture de cette singularité centrale où les masses sont inversées est du type parabolique :

Croissance (parabolique) du rayon de la sphère centrale  
où s'opère l'inversion de masse

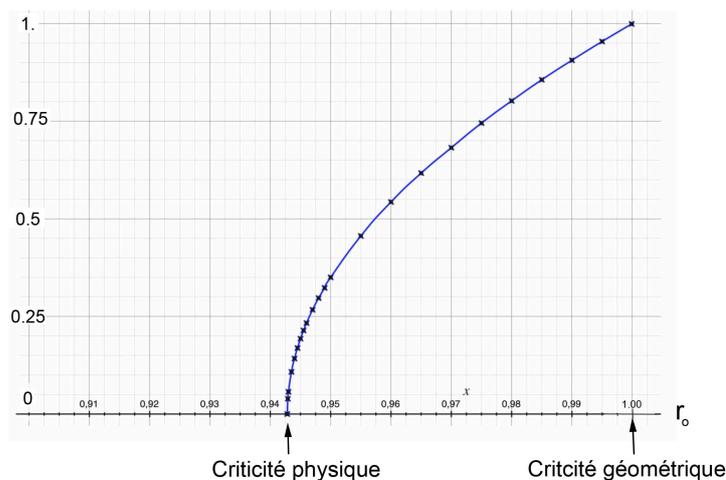


Fig. 37 : Croissance parabolique du diamètre de la singularité centrale

La criticité physique survient à :

$$(45) \quad R_{\text{cr phys}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{R} = \sqrt{\frac{8}{9}} \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho}} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho}}$$

Tous ces calculs, concernant la métrique intérieure, correspondent à des objets à symétrie  $SO(3)$ , exempts de rotation. Les valeurs ne peuvent donc qu'être indicatives. Les étoiles à neutrons sont animées de vitesses de rotation allant jusqu'à mille tours par seconde, avec des vitesses périphériques atteignant le quart de la vitesse de la lumière. En s'opposant à la force de gravité, la force centrifuge se traduit par un relèvement des conditions critiques, qui fait l'objet de travaux en cours.

## 10 – Comparaison avec des données observationnelles.

Les seules directes disponibles sont les images d'objets hypermassifs situés au centre des galaxies M 87 et Voie Lactée.

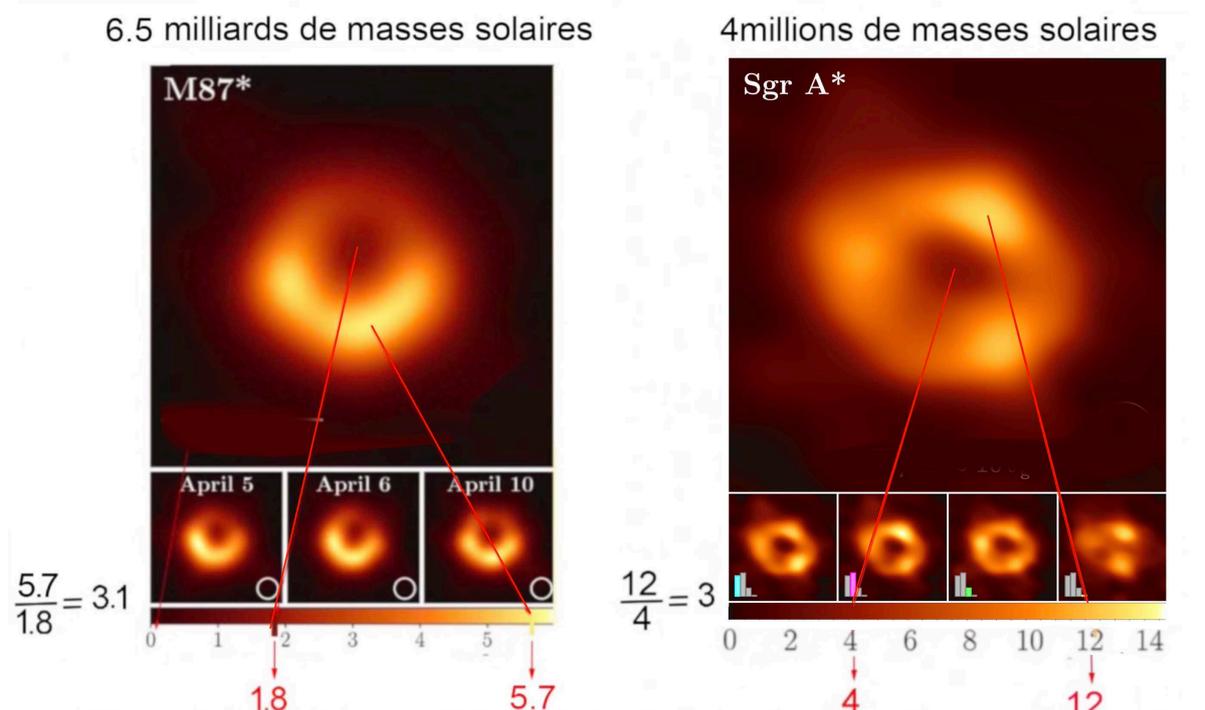


Fig. 38: Les images des objets présentés comme des Trous Noirs Géants.

En 2019 et 2022 Le système Event Horizon Telescope présente pour la première fois des images reconstituées des deux objets supermassifs situés au centre des galaxies M87 et de la voie lactée. Ce qu'on constate immédiatement, les centres de ces objets ne sont pas parfaitement noirs. Une échelle chromatique permet d'avoir accès, sinon à des valeurs fiables de températures de rayonnement, du moins aux rapports entre les valeurs maximales et minimales, dans les deux cas. On tombe alors sur des valeurs proches de trois. Il est significatif que maints articles présentant ces résultats incluent dans leurs titres les mots « shadow of giant black hole », l'argument invoqué, quand il y en a, étant qu'on ne voit pas ce que cela pourrait être d'autre que des Trous Noirs Géants. A propos de la lumière émise par les portions centrales des spécialistes l'attribuent rapidement à la masse gazeuse située à l'avant-plan, correspondant au disque d'accrétion. Mais si c'était la bonne explication pourquoi ce rayonnement de trahit pas sa présence en dehors de l'objet ?

Un calcul rapide montre ce que cet assombrissement de la partie centrale peut être interprété comme un effet de redshift gravitationnel émanant d'objets qui se situeraient en limite de criticité.

$$(46) \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{R_o c^2}}} \quad M = \frac{4\pi R_o^3}{3} \quad R_o = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho}} \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3$$

Si cet accord était considéré comme rendant compte de ces deux observations cela signifierait que ces objets seraient animés d'un mouvement de rotation suffisamment faible pour que ceci soit de peu d'effet sur le relèvement de la valeur de la masse critique physique. Se pose alors la question de leur origine. L'objet situé au centre de la galaxie M 87

émet deux jets de plasma dans des directions diamétralement opposées. C'est donc un quasar. Celui qui est au centre de notre galaxie n'en est pas doté. Considérons-le comme un reliquat de quasar. Ans ce qui va suivre nous sommes obligés de faire état de recherches en cours, qui en sont au tout début. Mais nous avons situé le scénario possible des décennies auparavant. Dans le modèle Janus le cosmos est décrit à l'aide de deux équations de champ couplées. Ce système est susceptible d'engendrer des fluctuations conjointes des métriques des deux secteurs  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  et  $\tilde{\tilde{g}}_{\mu\nu}$ . Ceci se traduirait par des fluctuations spatio-temporelles de la façon dont chaque espèce influerait sur l'autre, à travers sa contribution au champ gravitationnel agissant sur celle-ci. Deux cas de figure doivent alors être envisagés, qui ont connu un début d'exploration à travers des simulations numériques.

- Soit le champ gravitationnel assurant le confinement des galaxies se trouve affaibli. Dans les cas les plus extrêmes celles-ci se disloquent totalement et donnent ce qui est qualifié de galaxies irrégulières.
- Soit ce champ se trouve renforcé et crée alors une onde de densité centripète. Les galaxies de Hoag pourraient représenter ce genre de situation

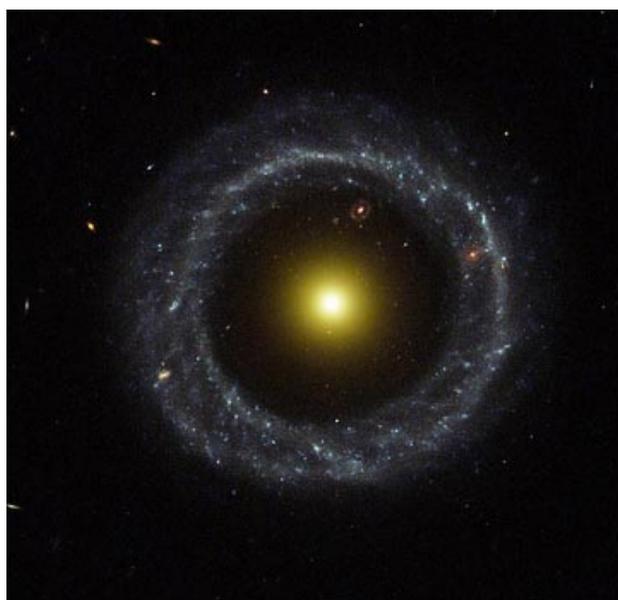


Fig.39 : Galaxie de Hoag

L'onde de densité convergerait alors vers le centre galactique. Comme dans les structures spirales le contraste de lumière ne traduit pas le contraste de densité mais signale la naissance d'étoiles nouvelles qui, émettant dans l'ultraviolet, excitent le gaz interstellaire. Cette émission ionise également le gaz, créant des conditions de nombre de Reynolds magnétique élevé. L'onde de densité se double donc d'une onde d'ionisation, qui piège le très faible champ magnétique préexistant dans la galaxie. La convergence de l'onde de densité rassemble les lignes de force du champ magnétique à la façon dont un moissonneur rassemble ses épis de blé. L'onde peut être comparée à un tsunami, qui lorsqu'il frappera la côte engendrera des effets considérables mais qui, lorsqu'il se forme, n'est qu'une onde qui ne traduit pas de transport de matière. Sa vitesse de propagation étant supérieure à la

vitesse résiduelle des paquets de gaz, de l'ordre d'un km/s, les ondes de densité ont également une structure d'ondes de choc. Comme c'est également le cas des ondes de densité spirale, trailings, où le front d'onde se situe dans la partie concave de ces ondes. Les ondes spirales traduisent un effet de friction dynamique, ayant pour effet de transférer une partie du moment cinétique de la galaxie vers son environnement de masse négative. Mais, comme montré dans les simulations, cet effet reste presque imperceptible.

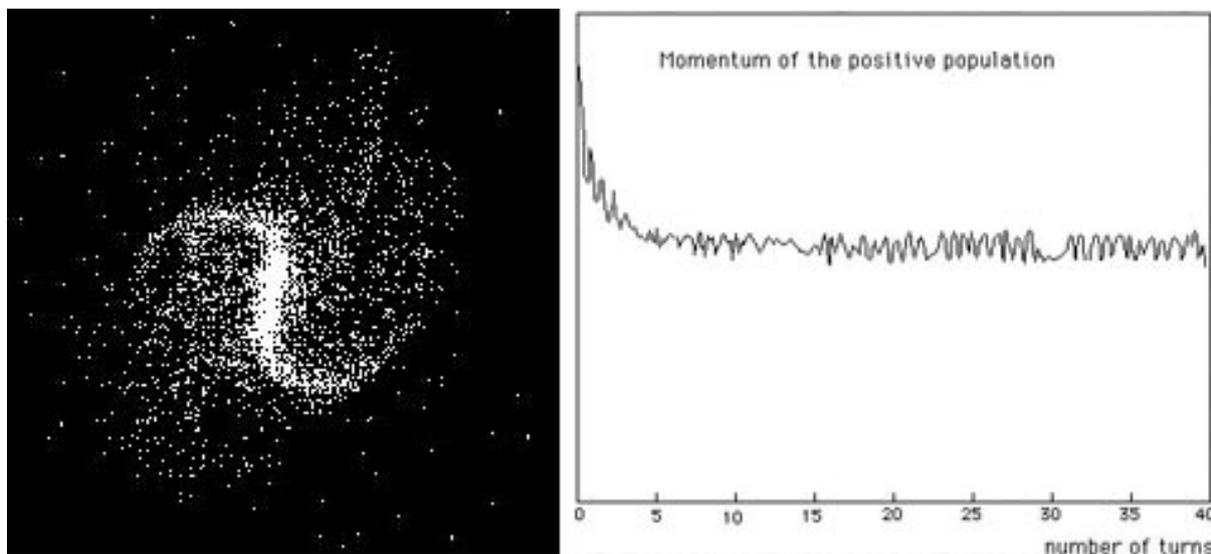


Fig. 40 : Faible perte de moment cinétique des galaxies, due au transfert de moment par ondes de densité [29].

De même, les ondes de densité centripètes sont peu efficaces, s'agissant du transfert de vitesse angulaire de rotation de la périphérie vers le centre, ce que traduisent des inhomogénéités spirales visibles dans les galaxies de Hoag, voir figure 35. Quand l'onde de densité atteint le centre de la galaxie elle se traduit par une brusque remontée de la densité, avec démarrage de réactions de fusion dans un très faible volume. Le champ magnétique, renforcé du fait de la conservation du flux, canalise le plasma émis en deux jets diamétralement opposés. C'est l'essence même du phénomène quasar. Si la concentration de matière est telle qu'une criticité physique se produit, le phénomène plugstar débarrasse la galaxie de la matière en excès, ceci s'accompagnant de l'émission d'une puissante onde gravitationnelle. Quand le phénomène quasar cesse, une masse considérable subsiste en lieu et place, dont la structure n'a rien à voir avec celle d'une étoile à neutrons. La pression en son centre garde une valeur finie, mais très élevée, et le gradient de pression suffit alors à prévenir l'effondrement de l'objet sur lui-même. Issue d'un objet quasi exempt de rotation, pour les raisons évoquées plus haut, sa géométrie est alors proche des solutions présentées par K.Schwarzschild en 1916, c'est à dire qu'ils s'identifient à des objets sous-critiques engendrant un effet de redshift gravitationnel avec  $\lambda'/\lambda \approx 3$ . C'est ce que confirmeraient les premières données observationnelles évoquées plus haut. Il est en effet statistiquement peu probable, quand on opte pour la présence d'un disque d'accrétion situé à l'avant-plan, que sa température soit dans les deux cas telle que  $\lambda'/\lambda \approx 3$ . Nous conjecturons que ces fluctuations conjointes des métriques étaient beaucoup plus intenses dans la prime jeunesse de l'univers mais qu'elles se poursuivent, engendrant, à intervalles réguliers, la relance du

phénomène quasar. Tel serait le cas pour l'objet hypermassif, mais non hyperdense, situé au centre de la Voie Lactée. Nous conjecturons également, quand les images de futurs objets hypermassifs seront disponibles, que ce rapport des longueurs d'onde maximale et minimale sera encore voisin de 3, autrement dit que ce seront des objets subcritiques de peu de rotation.

Depuis qu'ont été effectuées les premières détections d'ondes gravitationnelles par les systèmes LIGO et VIRGO, ces très faibles signaux ont été décodés en les comparant à ceux qui résulteraient de la fusion d'étoiles à neutrons, puis de trous noirs de plus en plus massifs, dont la communauté scientifique peine alors à décrire le scénario engendrant leur formation. Les résultats montre un gap entre ces deux types d'évènements :

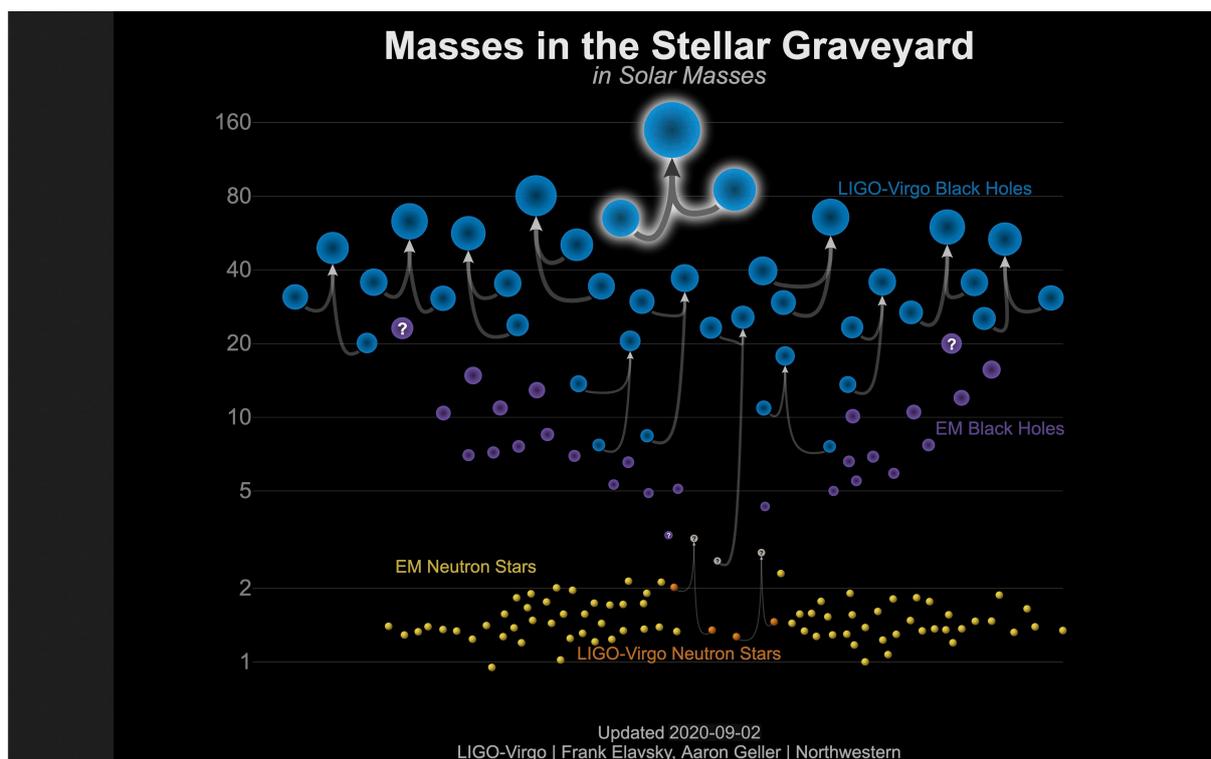


Fig. 41 : Le scénario des fusions, d'après LIGO (2020).

La théorie des ondes gravitationnelles, dans le système bimétrique Janus, en tant que phénomène dissipatif, reste à construire, et nous nous y employons. Elle produira sans doute un scénario différent où les envois d'ondes gravitationnelles les plus intenses seraient attribués à des inversions de masse et non à des fusions de trous noirs massifs.

## 11 – Conclusion.

L'ensemble de cette étude recense les éléments ayant donné naissance au modèle du trou noir, essentiellement la confusion de la grandeur intermédiaire  $R$  figurant dans l'article original de Schwarzschild, de janvier 1916, avec une coordonnée radiale  $r$ , susceptible de prendre des valeurs inférieures à la longueur de Schwarzschild  $\alpha$ . A cette confusion s'ajoute la perte de repère liée à l'inversion des signes de la signature de la métrique et du fil

conducteur que représente l'exigence d'une longueur  $s$ , donc d'un temps propre, réels. Même quand il s'agit d'envisager la géométrie associée à une solution de l'équation d'Einstein à second membre nul, considérée isolément, l'erreur a engendré des interprétations trahissant une interprétation fallacieuse de la topologie d'un objet, résolument non contractile, en envisageant « qu'à l'intérieur  $r$  puisse désigner la coordonnée de temps et que  $t$  puisse devenir une coordonnée d'espace ». Enfin la non prise en compte de l'article de février 1916, et de ses implications, trahissant l'impasse d'un événement incontournable, signalant une criticité physique survenant avant que la classique criticité géométrique puisse être atteinte, a faussé la construction de tout scénario se référant, soit à une étoile à neutrons subcritique déstabilisées par apport de matière, soit à l'entrée en criticité d'une étoile massive au moment de son effondrement. La reprise de cette question donne alors naissance au modèle alternatif des plugstars autostables, où tout apport de matière en excès est éliminé par inversion de masse. Après avoir justifié l'hypothèse d'une faible incidence de la rotation des objets hypermassifs situés au centre des galaxies et en le considérant comme des objets sous-critiques, on montre que les rapport des longueurs d'ondes maximale et minimal, traduisant un effet de redshift gravitationnel  $\lambda'/\lambda$  proche de trois, s'accorde avec les données observationnelles disponibles.

### Annexe : Les schémas comparés de construction de la solution à second membre nul selon Schwarzschild et Hilbert

Schwarzschild	Hilbert
Gestion des hypothèses géométriques $\delta \int ds = 0$	Gestion des Hypothèses Géométriques
$ds^2 = F^2 dt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)$	et passage en coordonnées polaires :
Passage en coordonnées polaires	$w_1 = r \cos \vartheta, w_2 = r \sin \vartheta \cos \phi, w_3 = r \sin \vartheta \sin \phi, w_4 = 1$
$x = r \sin \vartheta \cos \phi, y = r \sin \vartheta \sin \phi, z = r \cos \vartheta$	$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ (37)
F, G, H fonctions de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Forme bilinéaire :
$ds^2 = F dt^2 - (G + Hr^2) - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)$ (6)	$F dr^2 + G(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) + H dl^2$ (42)
$x_1 = \frac{r^3}{3}, x_2 = -\cos(\vartheta), x_3 = \phi, x_4 = t$ (7)	F, G, H fonctions de $r \longrightarrow r^* = \sqrt{G(r)}$
$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3 dx_3^2(1-x_2^2)$ (9)	$M(r^*) dr^{*2} + r^{*2}(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) + W(r^*) dl^2$ (43)
$ds^2 = f_4 dr^2 - f_1 r^4 dr^2 - f_2 d\vartheta^2 - f_3 \sin^2 \vartheta d\phi^2$	$M = \frac{r^*}{r^* - \alpha} \quad W = \frac{r^* - \alpha}{r^*}$
$f_4 = 1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} \quad f_2 = \frac{(r^3 + \alpha^3)^{-4/3}}{1 - (r^3 + \alpha^3)^{1/3}} \quad f_2 = f_3 = (r^3 + \alpha^3)^{2/3}$	$G(dr^*, d\vartheta, d\phi, dl) = \frac{r^*}{r^* - \alpha} dr^{*2} + r^{*2}(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) + \frac{r^* - \alpha}{r^*} dl^2$
$ds^2 = \frac{(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4}{(r^3 + \alpha^3)[(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} dr^2$	$l = it \quad \downarrow$
	$G(dr^*, d\vartheta, d\phi, dt) = \frac{r^*}{r^* - \alpha} dr^{*2} + r^{*2}(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) - \frac{r^* - \alpha}{r^*} dt^2$
	$r^* = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$
	$\delta \int ds^2 = 0$

Fig.42 : Les Schémas de Schwatzschild et d'Hilbert, comparés. fr

### References :

- [1] L.S.Abrams : Phys.Rev.D20, 2474 (1979) arXiv :gr-qc/0201044 (2003)
- [2] S.Antoci, D.E. Liebscher : David Hilbert and the origin of the Schwarzschild Solution. Gen. Rel. Grav. 35,5,945)950 (2003) and <https://arxiv.org/abs/physics/0310104>
- [3] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz

1916. English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.
- [4] C.Corda : A clarification on the debate on « the original Schwarzschild solution (2011) 62-82. arxiv :1010 :6031v5 (gr-qc) 25 mar 2011.
- [5] J.Droste – The field of a single centre in Einstein’s theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Ned. Acad. Wer. SA 1917 lutecium.fr. KNAW, Proceedings 19 I, 1917, Amsterdam, pp. 197-215. Mais présenté par le Pf Lorentz lors d’un meeting le 27 mai 2016.
- [6] H.Weyl.Zur Gravitationstheorie. Annalen der Physik IV Fogl. 54 pp 117-145
- [7] L.Flamm. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zestschrift XVII (1916) pp. 448-454.
- [8] K. Schwarzschild : Über das Gravitionalsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916. English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluide according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.
- [9] A.Einstein and N.Rosen : The particle problem in general theory of relativity. Physical Review 110 (4) : 73-77. 1935
- [10] J.P.Petit & G.D’Agostini: Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process. Mod. Phys. Lett. A vol. 30 n°9
- [11] Jürgen Renn & John Stachel : « Hilbert’s foundations of physics. From a theory of everything to a constituent of general relativity. Edited by Stephan Hadjuk. History of Science. Max Planck Institute, 1999.  
[https://pure.mpg.de/rest/items/item\\_2273751\\_1/component/file\\_2273749/content](https://pure.mpg.de/rest/items/item_2273751_1/component/file_2273749/content)
- [12] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Esrte Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-ohysikalische Klasse. (1915) 395-407.
- [13] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Esrte Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1916)
- [14] Jürgen Renn & John Stachel : « Hilbert’s foundations of physics. From a theory of everything to a constituent of general relativity. Edited by Stephan Hadjuk. History of Science. Max Planck Institute, 1999.  
[https://pure.mpg.de/rest/items/item\\_2273751\\_1/component/file\\_2273749/content](https://pure.mpg.de/rest/items/item_2273751_1/component/file_2273749/content)
- [15] D.Hilbert. The foundations of Physics (first communication). English translation. Boston Series in Philosophy and Science. Copyright Springer, Vol.250 2007 (29\$95)  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-4000-9\\_44](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-4000-9_44)
- [16] A.Eddington : A comparizon with Withehead’s and Einstein’s Formulae. Nature vol.113. N\_ 2832, 9 fe 1924, p.192
- [17] D.Finkelstein : Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. Physical Review. 110(4) : 965-967, 1958.
- [18] R.Tolman : Relativity, Thermodynamics and Cosmology. The International Series of Monographs on Physics. Oxford at the Clarendon Press. London. 1934
- [19] J.R.Oppenheimer and H.Snyder : On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. Vol. 56 pp 455-459 sept 1939
- [20] J.R.Oppenheimer, H.Snyder : On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. Vol. 56 pp 455-459 sept 1939

- [20] A.Einstein and N.Rosen : The particle problem in general theory of relativity. Physical Review 110 (4) : 73-77. 1935
- [21] P.Koiran : Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application do Eddington-Rosen Bridges. Inter. Jr. of Mod. Phys. 2021 <https://arxiv.org/abs/2110.05938>
- [22] J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhäuser Ed. 1997
- [23] R.C.Tolman : Static Solutions of Einstein's field equation for a sphere of fluid. Phys. Rev. 1939 nol.55 ( 15feb. 1939)
- [24] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff : On Massive Neutron Cores. Physical Review vol. 55 pp. 344-381 Feb. 15 1939
- [25] C.M.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler : Gravitation. Princeton University Press. 2017
- [26] J.P.PETIT : Cosmological model with variable velocity of light. Modern Phys Letters A3, 1988, pp. 1527
- [27] J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophysics And Space Science, A **29**, 145-182 (2014)
- [28] J.P.PETIT, Twin Universe Cosmology, Astrophys. and Sp. Science, **226**, 273-307, 1995
- [29] G. DAgostini and J.P.Petit : Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia, Astrophysics and Space Science, (2018), 363:139. <https://doi.org/10.1007/s10509-018-3365-3>
- [30] J.P.Petit , H.Zejli : Janus Cosmological Model mathematically and Physically Consistent.
- [31] J.P.Petit , H.Zejli : The Legacy of Andre Sakharov
- [32] J.P.Petit , H.Zejli : Challenging the Standard Model
- [33] O.Mazur, E.Mottola. Condensate Stars : An Alternative to Black Hole. arXiv :gr-qc/010935. Universe 2023, 9(2), 88 ; DOI.org/10.3390/universe9020088
- [34] N.Sakai, H.Saida, T.Tamaki. Gravastars Shadows. Physical Review D 90, 10401, 2014
- [35] CBMH Chirenti, L.Rezzola. How to tell a gravastar from a black hole. Classical and Quantum Gravity. Vo. 24, numero 16. DOI 10.1088/0264-938/24/013, 2007.
- [36] C.Chirenti, L.Rezzola. Did GW150914 produce a gravastar ? Phys. Rev. D 94, 084016 Oct. 2016
- [37] A.DeBenedictis, D.Horvat, S.Llijic, S.Kloster, S.Viswanathan. Gravastar with continuous pressures and equation of state. Classical and Quantum Gravity Vo. 23 n° 7 March 2006
- [32] P.Bhar. Higher Dimensional charged gravastar admitting conformal motion. 2014. Astrophysics and Space Science. Vo. 354, pages 457-463, 2014.
- [32] S.Pradhan, S.Mandal, PK Sakho. Gravastar in the framework of symmetric teleparallel gravity. Chinese Physics C Vol. 47, Number 5. DOI 10.1088/1137/acc1ce. . arXiv (gr-qc) 2004.01519v1 1 April 2020.
- [38] T.Sengupta, S.Gosh, S.Ray, B.Mishra, SK Tripathy. Gravastar in the framework of the braneworld gravity. Phys ? Rev. D 102, 024037 July 2020
- [39] S. Pradhan, S.Mohanty, PK.Sahoo. Thin-shell gravastar model in  $f(Q,T)$  gravity. Chinese Physics C Vol. 47, Number 9. 2023. DOI 10.1088/1674-1137/ace311
- [40] P.Bhar, P.Rej. Stable and self-consistent charged gravastar model within the framework of  $f(R,T)$  gravity. The European Physical Journal. Vol. 81, Number 762 (2021)
- [41] M.Sharif, S. Naz. Impact of  $f(R,T^2)$  theory on stable Fich-Skea gravastar model. Mod. Phys. Lett. A. Vol. 38, Number 26. DOI.org/10.1142/S021/7732235011237
- [42] YT.Wang, J.Zhang, YS. Piao. Primordial gravastar from inflation. Phys. Lett. Vol. 795, 10. August 2019, pp. 314-3118

- [43] GE Volovik. Type-II Weyl Seminal versus Gravastar. JETP Letters Vo. 114, pp. 236-241 (2021)
- [44] Z.Yousaf, M.Z.Bhatti, H.Asad. Electromagnetic effects on cylindrical gravastar like gravity. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. Vo. 19, Numeo 05, 2250070 (2022)
- [45] D.Bhattacharjee, P.K. Chattapadhyay B.C.Paul. New gravastar model in generalized cylindrically symmetric stace-time prediction of mass limit. Physics of the Dark Universe. Vol. 43, 101411, Feb. 2024
- [46] P.Pani, E.Berti, V.Cardoso, Y. Che, R. Norte. Gravitational-wave signature of a thin-shell gravastar. Journal of Physics. Phys. Conf. Ser. 222 012032
- [47] R.Chan, M.F.A sz Silva, P.Rocha. How the cosmological constant affects gravastar formation. Journal of Cosmology and Astroparricle Physics, Vo. 2009 Dec. 2009.
- [48]D. Mohanty, S.Ghosh, P.K. Sahoo. Study of a gravastar model in  $f(D)$  gravity. Annals of Physics. Vol. 463, April 2024, 169636
- [49] K. Schwarzschild: Über das Gravitationsfeld Messenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sit. Deut. Akad. Wiss. 1916
- [50] S.Chandrasekhar :The Mathematical Theory of Black Holes. Okford University Press 1992