

Une cosmologie devenue chimérique.

Jean-Pierre Petit

21 octobre 2026

Gratté à l'arrache, entre deux tâches urgentes
Pour répondre à la demande du public.

1 - Préambule.

Il est toujours problématique de tenter d'imposer un nouveau modèle en science. Voyons clairement la situation.

Le modèle de la relativité générale, reposant entièrement sur l'équation publiée en 1915 par Albert Einstein :

$$(1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

ne parvient plus, en dépit des nombreuses « rustines » apposées (matière sombre, énergie noire, inflation) à rendre compte des données observationnelles, même en réintroduisant la constante cosmologique :

$$(2) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

La solution que nous avons proposée consiste à remplacer cette équation de champ par le système d'équations de champ couplées du modèle Janus, selon ses deux formulations :

$$(3a) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi (T_{\mu\nu} + \bar{K}_{\mu\nu})$$

$$(3b) \quad \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{\mu\nu} = -\chi (\bar{T}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu})$$

Et :

$$(4a) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}} \hat{T}_{\mu\nu} \right)$$

$$(4b) \quad \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{\mu\nu} = -\chi \left(\bar{T}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}} \hat{T}_{\mu\nu} \right)$$

Elles sont semblables. Elles procèdent simplement de deux dérivations équivalentes à partir d'une action (une des critiques avancées par Luminet, qui ne lit rien). La dérivation du système (4a)-(4b) est donnée dans l'article paru en 2024 dans la revue European Physical Journal C¹. Au passage, le nom d'Hicham Zejli se trouvera désormais indissolublement lié à cette publication. A la fin de l'article, on trouvera :

¹ J.P.Petit, F.Magnat, H.Zejli : A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024)

Author contributions: JPP designed the model, developed the theoretical formalism, drafted the manuscript and prepared the figures. FM managed the submission and peer-review process. HZ corrected many typos from the draft and improved the layout of the manuscript.

Pour plus de précisions : Je remercie Florent Margnat d'avoir joué, de façon méritoire, le rôle harassant de secrétaire dans ces tâches de soumission, jusqu'à ce qu'une revue se décide à soumettre l'article à des referees. La situation d'Hicham Zejli est totalement différente.



Hicham Zejli, ingénieur informaticien

J'ai dû me séparer de lui quand il s'est avéré qu'il s'apprêtait à proposer une thèse de doctorat à l'université de Casablanca, qui était en fait fondée sur le pillage d'un travail, en fait copié ligne par ligne, sur un document de travail de 2008, dû à mon collaborateur de toujours Gilles d'Agostini².

Le système d'équations de champ couplées (3a)-(3b) peut être dérivé en partant de l'action³ proposée par T.Damour dans son article de 2002⁴, comme cela sera montré dans un article à paraître. En effet les trois approches : la nôtre, celle de Damour et Kogan, et celle de Sabine Hossenfelder diffèrent par le choix des « constantes d'Einstein » χ et $\bar{\chi}$ que Damour et Kogan prennent dissemblables, mais de même signe, et que S.Hossenfelder prend égales à l'unité. Ainsi ceux-là sont passés à un cheveu du modèle Janus.

Le temps passe et le modèle Janus gagne mois après moi en crédibilité , du fait de l'accroissement de ses confirmations par des données observationnelles. Nous n'irons pas plus loin dans ce sens car ce n'est pas le but du présente article. Le contenu de l'article cité suffisant à étayer cette assertion.

² <http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2024-20-24-Pillage-travail-dAgostini-par-H.Zejli.pdf>

³ Pour le spécialiste, la différence se situe dans le choix des « densités Lagrangiennes », la version (3a)-(3b) se rapprochant de l'article de Sabine Hossenfelder de 2008 (Physical Review D)

⁴ Damour T. , Kogan I I. Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity Phys. Rev. D **66** (2002) 104024. hep-th/0206042

2 - 1918 : Naissance de la « cosmologie ».

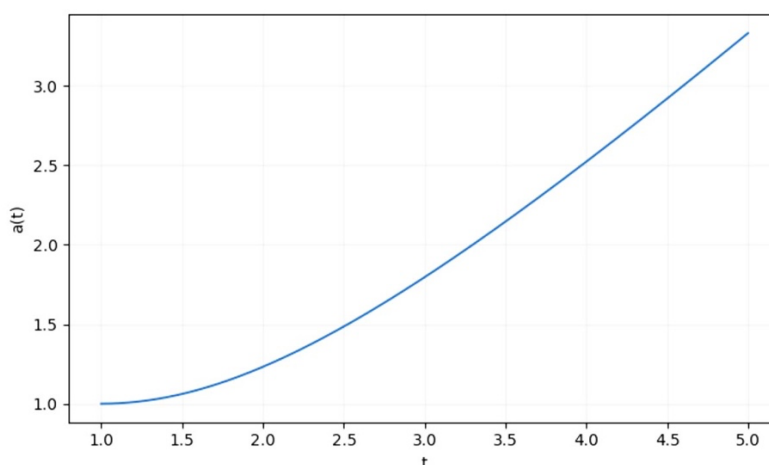
Il est en effet indispensable se faire un retour historique conséquent. Cette cosmologie se résume à deux applications du formalisme de la relativité générale. La première décrit le comportement dans le temps d'un univers isotrope et homogène et débouche donc sur les trois modèles de Friedmann. Rien à dire sous l'aspect mathématique. Ces trois solutions diffèrent par l'indice de courbure :

- Positive : évolution « elliptique », univers cyclique
- Négative : évolution « hyperbolique, avec une vitesse d'expansion tendant vers une constante
- Nulle : évolution « parabolique », intermédiaire

En 1998 la découverte de l'accélération de l'expansion⁵ oblige à abandonner ces trois modèles. La constante cosmologique Λ , réintroduite dans l'équation, synonyme de « pouvoir répulsif du vide », pilote la dynamique cosmique, avec une loi d'expansion exponentielle (et une accélération à croissance également exponentielle).

En 2014 une solution exacte du système Janus donne l'expansion ci-après :

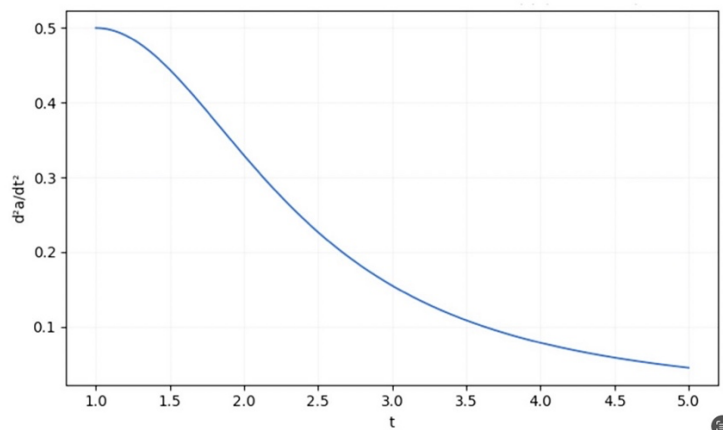
Cette expansion s'effectuant à accélération décroissante :



Loi d'expansion Janus⁶

⁵ Récompensée par un prix Nobel en 2011

⁶ J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. *Astrophysics And Space Science*, A **29**, 145-182 (2014)



Loi d'accélération variable Janus.

Ce résultat est un des principaux éléments militant en faveur du modèle Janus. On notera que chez les deux seuls contradicteurs auteur d'éléments écrits (T.Damour en 2019, dans sa page de l'IHES, et plus récemment J-P Luminet) aucun des deux ne mentionne cette avancée, publiée en 2014, c'est-à-dire douze ans plus tôt.

Revenons près d'un siècle en arrière, au fil de la naissance de cette nouvelle discipline à laquelle on donnera avec le temps le nom de « cosmologie ». En 1916 apparaît l'interprétation, en terme de géométrie de l'espace-temps, de la nature d'objets que l'on peut raisonnablement considérer comme stationnaires. Les premiers sont évidemment ces concentrations de matière que constituent les étoiles. Une solution exacte est alors publiée sous la forme de deux articles successifs par le mathématicien-astronome Karl Schwarzschild en janvier⁷ et février⁸ 1916. On notera, et ceci revêt une importance cruciale, que les traductions de ces articles en langue anglaise ne furent disponibles que très tardivement (en 1999 !). Encore aujourd'hui beaucoup de « cosmologistes » ignorent le contenu du second papier, et parfois même jusqu'à son existence.

Seul l'article de Janvier se prête à une confrontation avec l'observation (avance du périhélie de Mercure). La solution présentée par Schwarzschild est non-linéaire. Elle rejoint l'article publié par Einstein à peine quelques semaines plus tôt, fondé sur une solution approchée, linéarisée de son équation de champ⁹.

Schwarzschild est parfaitement clair dans sa démarche. Il opte pour des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , réelles, auxquelles il adjoint une coordonnée de temps t , également réelle. Puis il passe en coordonnées polaires en posant (c'est explicitement mentionné dans l'article):

⁷ K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sit. Deut. Akad. Wiss. 1916. English translation by S.Antoci and A.Loinger. On the gravitational field of a mass point according to Einstein theory. arXiv :physics/9912033v1 [physics.hist-ph] 16 dec 1999.

⁸ K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916. English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.

⁹ Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus allgemeinen Relativitätstheorie. Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin) Sitzungberichet (25 nov. 1915) p. 831-838

$$(5) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \rightarrow \quad r \geq 0$$

Il ne donne alors pas explicitement l'expression de sa solution métrique dans son article, qu'il juge inutilement compliquée et opte pour son expression en fonction qu'une grandeur R , qualifiée de grandeur intermédiaire (*Hilfstroße*). Il s'en explique dans un courrier adressé à Einstein¹⁰ avant que l'article ne paraisse. Ci-après la traduction du passage de cette lettre qui montre comment les grandeurs R et r se rejoignent lors que le rayon de Schwarzschild (ici désigné par α) devient négligeable devant r :

As follows, it had beside your α yet a second term, and the problem was physically undetermined. From this I made at once by good luck a search for a full solution. A not too difficult calculation gave the following result: It gave only a line element, which fulfills your conditions 1) to 4), as well as field- and determinant equations, and at the null point and only in the null point is singular.

If:

$$x_1 = r \cos \phi \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \phi \cos \theta, \quad x_3 = r \sin \theta$$

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} = r \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\alpha^3}{r^3} + \dots \right)$$

then the line element becomes:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\gamma}{R} \right) dt^2 - \frac{dR^2}{\left(1 - \frac{\gamma}{R} \right)} - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

R, θ, ϕ are not "allowed" coordinates, with which one must build the field equations, because they do not have the determinant = 1, however the line element expresses itself as the best.

Fig.1 : Extrait de la lettre de Schwarzschild à Einstein (décembre 1915)

Juste en dessous, la forme prise par la solution. Quelques semaines plus tard, voici l'extrait concernée, publié en janvier 1916 :

¹⁰ K.Schwarzschild, 1915 22 dec. Letter to A.Einstein . Collected papers of Albert Einstein, The Berlin Years, correspondence 1914-1918, document n°169. <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc>

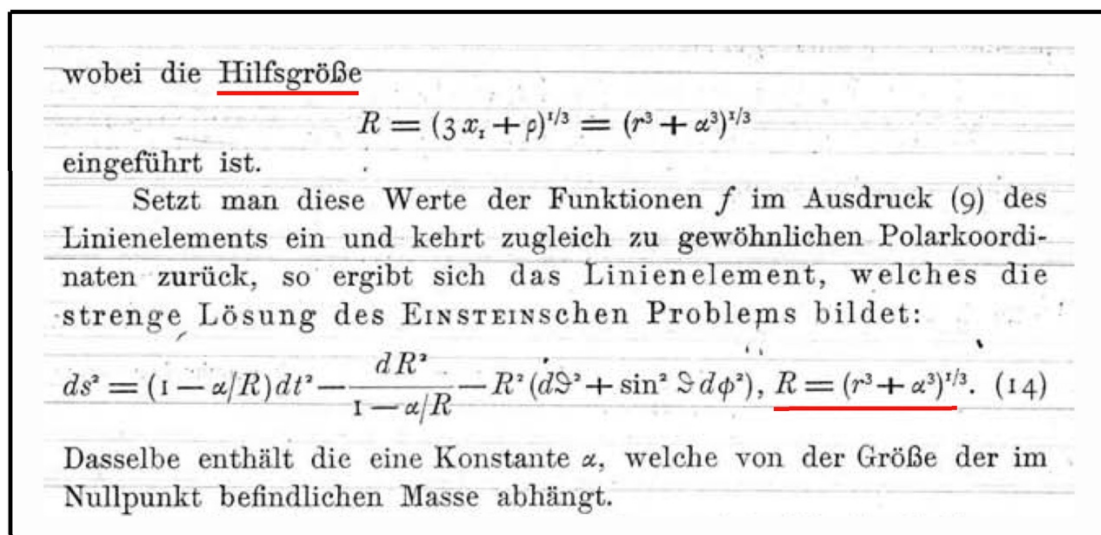


Fig.2 : La solution métrique extérieure de Schwarzschild (janvier 1916)

Dès lors, les choses deviennent parfaitement claires. La coordonnée r étant réelle, telle que définie en (5) entraîne aussitôt :

$$(6) \quad R \geq \alpha$$

R n'est donc pas une coordonnées radiale ». Ca n'est qu'une « grandeur intermédiaire ». La constante d'intégration α étant la longueur (ou rayon de) de Schwarzschild R_s , fondamentalement réelle et positive :

$$(7) \quad \alpha = R_s = \frac{2GM}{c^2} > 0$$

Pour envisager de gérer des valeurs $0 < R < \alpha$ il est nécessaire pour :

$$(8) \quad r = (R^3 - \alpha^3)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} \sqrt[3]{\alpha^3 - R^3}$$

$$(9) \quad -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$(10) \quad \sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \sqrt{\frac{3}{2}}$$

La variable r doit alors prendre une valeur complexe. On sort alors du domaine de définition initialement défini par Schwarzschild. Géométriquement ceci traduit une extension complexe de la variété, de l'espace-temps.

2 - La parfaite lecture géométrique faite par Ludwig Flamm en 1916

En 1916 Ludwig Flamm est un jeune mathématicien de 31 ans. Il opère une analyse de la géométrie associée aux deux solutions publiées par Schwarzschild en janvier en février et

publie ses résultats sept mois plus tard¹¹. Il comprend parfaitement que ces deux solutions géométriques, décrivant l'intérieur et l'extérieur d'une masse, ne peuvent être considérées indépendamment. Mais ces géométries ont un point commun : elles sont indépendantes du temps. L'objet géométrique solution est de dimension quatre. Ce dernier point permet de considérer la translation dans le temps d'un objet de dimension trois. Flamm est donc conduit à étudier un objet géométrique de dimension 3.

La masse créant la courbure, la géométrie à l'intérieur de celle-ci, de densité constante, est donc celle d'une hypersphère S3. Cette sphère S3 est associée à un rayon :

$$(11) \quad \hat{R} = \sqrt{\frac{3 c^2}{8 \pi G \rho}}$$

Très différent du rayon de Schwarzschild

$$(12) \quad R_s = \frac{2 G M}{c^2} = \frac{8 \pi G \rho}{3 c^2} R_e^3$$

Si, pour un astre comme le Soleil, le rayon de Schwarzschild R_s est une grandeur minuscule à côté de son rayon R_e , le rayon $\hat{R}$ est au contraire près de 500 fois R_e . Si on compare R_e et R_s ils diffèrent alors de huit ordres de grandeur.

A l'extérieur, Schwarzschild prélève une portion d'hypersurface à trois dimensions correspondant à la géométrie dans le vide environnant.

Quand on veut étudier un objet à deux dimensions comme une sphère S2, une « sphère ordinaire », on procède en effectuant des coupes planes qui sont alors des cercles (des « sphères S1 »).

Par extension, quand on veut analyser les propriétés d'une sphère S3, à trois dimensions, on opère des coupes « planes » et ces coupes sont alors des ... sphères S2.

Là où les choses deviennent intéressantes c'est quand il s'agit de la géométrie extérieure, en trois dimensions. Flamm opère là aussi des coupes planes (à θ constant) et l'opération lui donne un objet à deux dimensions, de révolution, qualifié de « surface de Flamm ». Celui-ci est le résultat de la rotation autour de son axe de symétrie d'une « parabole couchée ».

¹¹ Ludwig Flamm. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zeitschrift XVII (septembre 1916) pp. 448-454.

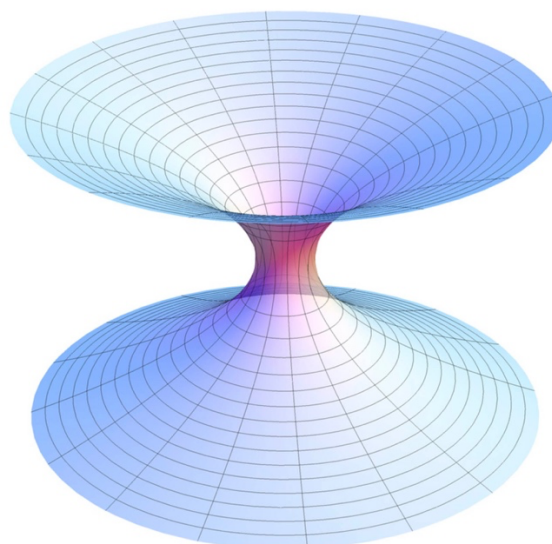


Fig.3 : La surface de Flamm

Cette surface a deux nappes et un cercle de gorge (de rayon R_s). Elle s'étend à l'infini selon ses deux nappes en peut être considérée comme un pont reliant deux espaces 2D euclidiens, deux plans.

La sphère S^2 possède une propriété topologique intrinsèque. Si on trace sur celle-ci n'importe quelle courbe fermée, il sera toujours possible d'amener la longueur mesurée le long de cette courbe à zéro. On dira que :

La sphère S^2 est simplement connexe.

Pour être précis nous écrirons :

La sphère S^2 est 1-connexe

Le chiffre 1 indiquant la dimension de l'espace fermé considéré : une sphère S^1 , c'est-à-dire une courbe fermée.

Cette expression « 1-connexe » est l'expression consacrée en mathématiques, mais elle parle peu à l'intuition. J'ai cherché, avec l'aide de l'IA, quelque chose de plus parlant, sans être faux. Ce serait alors la phrase :

« 1-connexe » signifie « où tous les boucles sont contractiles, au sens où leurs périmètres peuvent être amenés à zéro »

De la même manière :

« 2-connexe » signifie « où tous les sphères sont contractiles, au sens où toutes leurs aires peuvent être amenés à zéro »

Par contre si notre courbe fermée englobe la gorge de notre surface de Flamm, en serrant ce « nœud coulant » il arrivera un moment où cela coïncera, lorsque ce cercle s'identifiera avec le cercle de gorge, de périmètre $2\pi R_s$. Nous dirons que :

La surface de Flamm n'est pas 1-connexe. .

Revenons sur ces coupes planes de la sphère S2 qui sont des cercles. En partant d'un de ces cercles, nous pourrions engendrer cette sphère S2 en déployant cette sphère S2 selon un angle θ . Le résultat nous est difficile à envisager. Toujours est-il que l'opération préserve le niveau de connexité de l'objet :

La sphère S3 est 2-connexe :

Où l'aire de toute sphère S2, contenue dans S3 peut être amenée à zéro.

Dans cette sphère S3 on pourra partout situer un domaine limité par une sphère S2 et, en déformant celle-ci de proche en proche, tout en restant à l'intérieur de S3, amener le domaine considéré à n'être plus qu'un simple point. On pourra aussi traduire cette contraction régulière de cette sphère S2 vers un simple point en disant que son aire peut être amenée à zéro.

Si on prend maintenant la surface de Flamm et qu'on la déploie selon une dimension supplémentaire, un angle θ , son cercle de gorge va tourner et envelopper une sphère, la sphère de gorge de cet objet 3D. Il est alors difficile, mentalement, de se représenter un tel objet. Cela devient alors une sorte de « pont » reliant deux espaces euclidiens 3D.

Si la surface de Flamm était non 1-connexe, l'objet 3D sera non 2-connexe.

Pour la surface de Flamm, 2D, celle-ci se traduisait par l'impossibilité d'amener une courbe fermée (enserrant sa gorge) dans une situation où son périmètre soit inférieur à $2\pi R_s$. En 3D il s'agira d'une sphère d'aire $4\pi r^2$ qui, si elle enserre la sphère de gorge, ne pourra se voir dotée d'une aire inférieure à $4\pi R_s r^2$.

L'hypersurface 4D, objet géométrique associé à la solution métrique extérieure de Schwarzschild, est non-2-connexe. .

Cela signifie que dans cet être géométrique, toutes les sphères S2 le sont pas contractiles.

Ce qui est affreusement pénible à envisager, mentalement, deviendra algébriquement évident un peu plus loin.

Que fait Flamm ? Il raisonne sur ces coupes 2D de l'hypersurface solution 3D. Et cela donne les dessins ci-après, qui ne sont pas une image didactique, schématique, mais une traduction mathématiquement conforme à cette analyse :

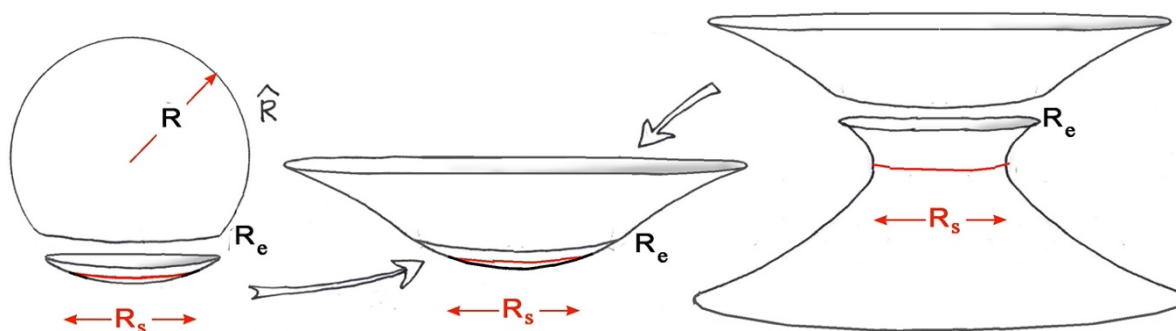


Fig. 4 : Construction de la géométrie de Schwarzschild

On sait que pour un astre comme le Soleil le rayon de Schwarzschild est de l'ordre de trois kilomètres, alors que le rayon, rayon de courbure de la sphère S^3 , atteint 500 fois le rayon de l'astre. Dans la figure ci-dessus, ces rayons sont très voisins et correspondent plus à la géométrie d'une étoile à neutrons proche de la criticité.

Ceci étant, ce qu'il faut retenir c'est que l'approche de Schwarzschild signifie qu'il serait hors de question de considérer la géométrie extérieure, prise isolément, en considérant que cette solution mathématique décrit à elle seul un objet physique.

3 – L'intervention du mathématicien David Hilbert.

En 1915 David Hilbert est déjà connu comme un mathématicien de premier plan. Professeur titulaire dans l'université de Göttingen depuis vingt ans, il est membre de l'académie royale de cette même université. Son ouvrage *Die Grundlagen der Geometrie* (les Fondements de la Géométrie), publié en 1899, est connu dans le monde des mathématiques, à l'échelle de la planète.

Les constructions de Hilbert reposent sur des bases totalement axiomatiques.

En juin-juillet 1915 il invite Albert Einstein à donner à l'université de Göttingen une série de conférences. Il découvre à cette occasion que les hautes mathématiques constituent les bases géométriques de cette vision nouvelle du monde que constitue la relativité. Il a de nombreux entretiens avec Einstein, dont il apprécie vite la hauteur de vue et le talent, qui se poursuivent ensuite à travers de très nombreux échanges épistolaires. Tous deux comprennent que les symétries orientent les constructions géométriques. Mais ils abordent les problèmes sous des angles diamétralement opposés.

Einstein part de la physique, de ses symétries et de ses invariances. Grâce à l'aide de son ami le mathématicien Grossman il s'est familiarisé avec l'usage de tenseurs, qui permettent de déboucher sur un formalisme « covariant », indépendant du choix des coordonnées.

Hilbert voit dans les équations de la physique l'expression d'un principe variationnel.

Einstein décrit à Hilbert son projet de parvenir à identifier courbure et énergie, ceci se traduisant par une équation de champ, une équation géométrique, à découvrir, formulée

à l'aide de tenseurs. Tous les deux parviennent au résultat en novembre 1915, Hilbert déposant son article quatre jours avant Einstein. Il est intéressant de comparer les deux équations.

D'abord celle de Hilbert :

$$(11) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \Rightarrow - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\mu\nu}}$$

Puis celle d'Einstein :

$$(12) \quad R_{\mu\nu} \Leftarrow \chi T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}$$

Elles sont, dans un certain sens, équivalentes, mais révèlent la stratégie de leur auteur. Celle de Hilbert est la traduction d'un principe variationnel, basé sur une action :

$$(13) \quad S = \int (R + H) \sqrt{g} d^4x$$

$R_{\mu\nu}$ est un « tenseur géométrique » (le tenseur de Ricci). R est le scalaire de Ricci, sa « contraction », et H une « fonction d'univers », à préciser, à définir.

Le second membre de l'équation d'Einstein traduit les propriétés d'invariance des équations de la physique relativiste, qui détermine la forme du tenseur qui en rend compte.

C'est à dessin que j'ai ajouté les flèches $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$, de sens opposés.

Mais quand on regarde l'article de Hilbert « à la loupe » on constate que, pour lui, la quatrième dimension, celle du temps, qu'il désigne par la lettre l , est imaginaire pure.

$$(14) \quad l = i t$$

C'est la vision Hilbertienne de la relativité¹².

Il faut se replacer dans à une époque où personne n'imagine une seule seconde que l'univers puisse avoir une histoire, qu'il puisse évoluer. C'est un vaste mouvement d'horlogerie, dont les rouages sont les orbites de planètes. Sa géométrie ne peut être, pour Hilbert, que très proche d'une géométrie euclidienne.

Donc, pour Hilbert, la géométrie est par essence euclidienne. Donc, dans la forme bilinéaire qui lui est, la succession Pythagoricienne

$$(15) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 + \dots$$

s'impose selon lui, d'emblée.

Ajoutons qu'à cette époque les scientifiques ne connaissent que deux forces fondamentales :

¹² Ce faisant, il s'aligne sur la tentative d'interprétation de la relativité faite en 1902 par le mathématicien Henri Poincaré.

- La force de gravité
- Le force électromagnétique

Donc si une équation de champ parvient à intégrer les deux à la fois, cela ne peut être qu'une *théorie du tout*, la première du genre.

Car l'ambition intellectuelle de Hilbert se veut être sans limite, ce qui fera écrire sur sa tombe sa devise :

Nous devons comprendre et nous comprendrons.

Si l'univers connaît un instant de création, ou d'apparition ex nihilo, peu importe, les chemins que les planètes doivent suivre sont déjà tracés. Il suffit que la variable temps, imaginaire (pour assurer l'invariance de la vitesse de la lumière), se mêle de la partie pour que l'horlogerie cosmique se mette en marche.

Après avoir publié en novembre 1915 sa version de l'équation de champ, Hilbert va plus loin et publie en décembre 1915 un mémoire intitulé ambitieusement :

*Les fondements de la Physique*¹³

Mais, deux mois plus tard, Schwarzschild publie les deux premières solutions exactes de l'équation de champ. Il faut donc que Hilbert mette à jour son mémoire, ce qu'il fait en décembre 1916, sous le même titre¹⁴.

Première remarque, importante : Hilbert ne dit pas un mot du second article, celui de février, donnant la géométrie à l'intérieure de la masse. Pourquoi ? Mystère.

Seconde remarque, qui aura son importance : Pour Hilbert la géométrie d'un espace à N dimensions, quatre éventuellement, est déterminée non par une métrique :

$$(16) \quad ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Mais par une *forme bilinéaire* , avec quatre coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées d'espace. x_4 est donc sa coordonnée de temps.

Cette forme est :

$$(17) \quad G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right) = \sum g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp}$$

Cette forme est associée à des courbes décrites à l'aide d'un paramètre p . En posant, classiquement :

$$(18) \quad \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dp}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dp}, \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dp}, \dot{x}_4 = \frac{dx_4}{dp}$$

¹³ D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. (20 november 1915) 395-407.

¹⁴ Die Grundlagen der Physik. (Zweite Mitteilung) in Nachrichten von Königlich-Preussischen Gesellschaft zu Göttingen. Math-Phys. Klasse 1917 p.53-76. Presented in the Session of 23 december 1916.

La forme bilinéaire a alors la forme :

$$(19) \quad G(x_i, \dot{x}_i)$$

Ce qui est typiquement une fonction de Lagrange, qui va de pair avec une action :

$$(20) \quad S = \int G(x_i, \dot{x}_i) dp$$

La géométrie se déduit donc, selon Hilbert, de la variation :

$$(20) \quad \delta S = 0$$

Qui engendre les quatre équations de Lagrange :

$$(21) \quad \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

Hilbert passe alors à une solution stationnaire (où les coefficients de sa forme bilinéaire sont indépendants de la coordonnée de temps (x_4 ou l), en coordonnées polaires :

$$(22) \quad x_1 = r \cos \theta$$

$$(23) \quad x_2 = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$(24) \quad x_3 = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$(25) \quad x_4 = l$$

Cette forme bilinéaire doit être proche de la forme euclidienne :

$$(26) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

Ou, en coordonnées polaires, de :

$$(27) \quad dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dl^2$$

Elle prend alors la forme (compte tenu de la symétrie sphérique)

$$(28) \quad G \left(\frac{dr}{dp}, \frac{d\theta}{dp}, \frac{d\varphi}{dp}, \frac{dl}{dp} \right) = F \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \Gamma \left(\left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \right) + H \left(\frac{dl}{dp} \right)^2$$

J'ai remplacé une des fonctions par la lettre grecque Γ , pour éviter le double emploi, par Hilbert, de la lettre G.

Pour Hilbert, la forme bilinéaire qui sous-tend la géométrie du vide, est donc (avec $l = it$ et $c = 1$) :

$$(29) \quad dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - dt^2$$

Reproduisons les mots exacts de Hilbert, à ce stade. Nous citons (en utilisant la lettre Γ) :

Si nous posons

$$r^* = \sqrt{\Gamma(r)}$$

*alors nous sommes également justifiés d'interpréter r^*, θ, φ comme des coordonnées polaires spatiales. Si nous introduisons r^* dans l'équation au lieu de r et que nous éliminons ensuite le signe * , le résultat est l'expression suivante*

$$M(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + W(r) dl^2$$

où $M(r), W(r)$ désignent les deux fonctions essentielles et arbitraires de r .

De facto, Hilbert change de système de coordonnées. Il écrit alors l'action :

$$(30) \quad \int \left\{ M(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left(\left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \right) + W(r) \left(\frac{dl}{dp} \right)^2 \right\} dp$$

La construction de sa forme bilinéaire-solution se résume alors à la détermination des deux fonctions $M(r)$ et $W(r)$ à l'aide des équations de Lagrange.

Tous calculs faits Hilbert parvient à :

$$(31) \quad M = \frac{r}{r - \alpha}$$

$$(32) \quad W = \frac{r - \alpha}{r}$$

C'est-à-dire à une forme bilinéaire (quasi-euclidienne) de la forme :

$$(33) \quad G(dr, d\theta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r - \alpha} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{r - \alpha}{r} dl^2$$

Et c'est là, et seulement là qu'il pose, nous citons :

Alors, pour $l = it$ on aboutit à la métrique désirée, sous la forme trouvée la première fois par Schwarzschild

$$G(dr, d\theta, d\varphi, dt) = \frac{r}{r - \alpha} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{r - \alpha}{r} dt^2$$

La singularité en $r = 0$ disparaît quand on fait $\alpha = 0$. Autrement dit la métrique de la géométrie pseudo-euclidienne est la seule métrique régulière-solution.

Deux remarques s'imposent immédiatement.

La métrique-solution de Schwarzschild est :

$$(34) \quad ds^2 = \frac{R-\alpha}{R} dt^2 - \frac{R}{R-\alpha} dR^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad R = (r^2 + \alpha^3)^{1/3}$$

Les signes sont différents. La variable d'espace est différente.

La solution produite par Schwarzschild est une *métrique*, donnant une longueur, assimilée au temps propre selon $s = c \tau$ quantité fondamentalement *réelle*, selon l'article fondateur de Minkowski de 1909¹⁵ et tous les travaux qui ont suivi entre 1909 et 1916.

La solution produite par Hilbert est une forme bilinéaire, qui n'est dès lors plus contrainte par son signe, et peut indifféremment, dans l'espace solution, prendre des valeurs positives ou des valeurs négatives.

Hilbert écrit que les équations de Lagrange donnent alors les géodésiques de la structure géométrique associée à la solution.

Chez Hilbert ceci découle de :

$$(35) \quad \delta \int G(dr, d\theta, d\varphi, dt) dp = 0$$

Chez Schwarzschild (chez qui c'est explicitement précisé sur la première page de son article) de

$$(36) \quad \delta \int \sqrt{G(dr, d\theta, d\varphi, dt)} dp = 0$$

Avec $p = s$ ces deux approches variationnelles conduisent *aux mêmes équations de Lagrange*. Mais (36) donne des courbes où la longueur s , le temps propre τ , sont impérativement, exclusivement *réels*, alors que dans (35) celui-ci peut devenir *imaginaire pur*.

Hilbert donne alors sa propre définition du temps propre, qui devient réel quand G devient négatif, selon, nous citons :

Si une courbe

$$x_s = x_s(p) \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

est donnée dans cette géométrie, où $x_s(p)$ signifie certaines fonctions réelles arbitraires du paramètre p , alors elle peut être divisée en morceaux de courbes sur chacune desquelles l'expression

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

¹⁵ Minkowski **H.** Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, 1909 vol. 10, p. 75–88.

ne change pas de signe : Un morceau de courbe pour lequel

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

sera appelé un segment et l'intégrale le long de ce morceau de courbe

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

est la longueur du segment; un morceau de la courbe pour lequel

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

sera appelé ligne de temps et l'intégrale

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

évaluée le long de ce morceau de courbe sera le temps propre de la ligne de temps ; enfin un morceau de courbe le long duquel

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

sera appelé une ligne nulle.

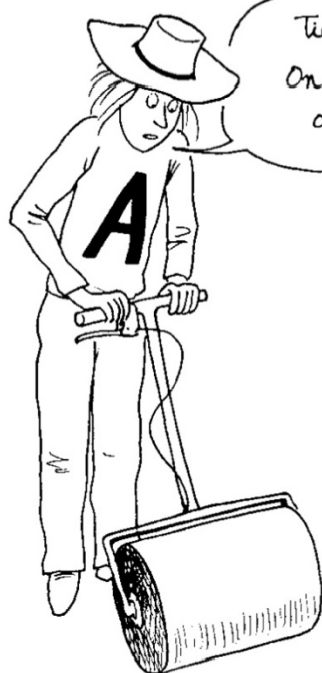
Ceci ne sera jamais tiré au clair. Comme nous allons le montrer à l'aide d'exemples 2D, cette recherche de l'objet géométrique-solution diffère selon qu'on la fonde sur la métrique (avec s réel) ou sur la forme bilinéaire (où s peut être soit réel, soit imaginaire pur).

Les géodésiques, sous-ensemble des courbes autoparallèles.

Dans une de mes bandes dessinées¹⁶ (la mal nommée), page 5 on trouve ceci :

¹⁶ http://www.savoir-sans-frontieres.com/telechargeable/Francais/LE_TROU_NOIR.pdf

Une fois de plus, Anselme part explorer des mondes nébuleux.



Tiens, qu'est-ce que c'est que ce truc là ?
On dirait un rouleau pour court de tennis,
ou une sorte de rouleau à peinture.

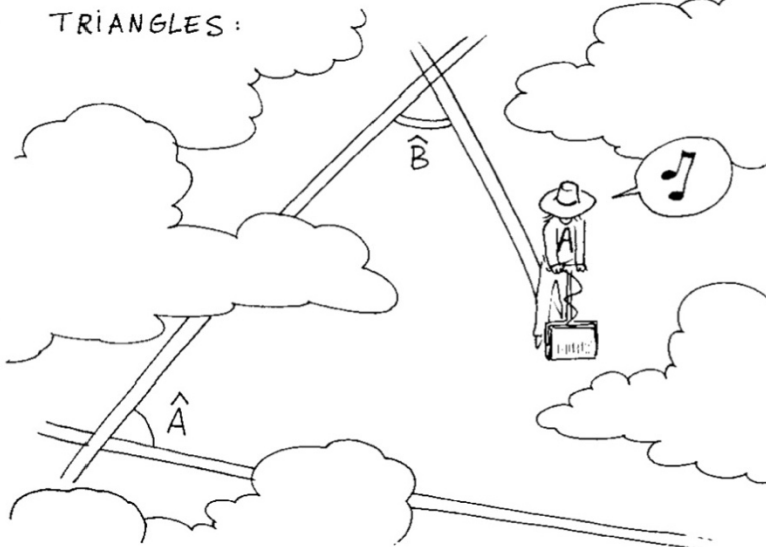


On peut le déplacer
TOUT DROIT, sans effort.
Par contre, impossible
de dévier d'un poil
à DROITE ou à GAUCHE.



A quoi sert cette
poignée ?
Tiens, elle supprime
l'adhérence et me
permet de temps en temps
de changer de direction.

Grâce à cet appareil, Anselme peut tracer
les GÉODÉSIQUES d'une surface. A l'aide de
trois géodésiques, Anselme peut tracer des
TRIANGLES :



Une surface est un ESPACE À DEUX DIMENSIONS. C'est-à-dire qu'il faut DEUX QUANTITÉS pour
y repérer la position d'un point, deux coordonnées.

5

Fig.5 : Construction des courbes autoparallèles.

Grâce à son rouleau (ou en collant sur la surface du ruban adhésif, sans faire de plis) Anselme Lanturlu progresse sur cette surface en allant « tout droit », en ne tournant « ni à droite, ni à gauche ». Il matérialise ce qu'on appelle en géométrie différentielle un « transport parallèle » et la courbe qu'il crée peut alors être qualifiée de « courbe autoparallèle ».

Dans ces bandes dessinées, ce mode de construction est confondu avec celui des classiques courbes géodésiques, qui joignent deux points selon une longueur minimale. Ce qui doit être éclairci c'est que dans cet ensemble de courbes, issues des équations de Lagrange les géodésiques n'en constituent que le sous-ensemble tel que la longueur soit réelle. Le système d'équation peut alors, selon les coordonnées choisies, engendrer des courbes équipées d'une longueur imaginaire.

Revenons à une définition des géodésiques où la longueur est minimisée. Dans la littérature la forme bilinéaire G est décrite à l'aide de la lettre L , en guise de « Fonction de Lagrange » :

$$(37) \quad S = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}} dp = \int \sqrt{L(x^i, \dot{x}^i)} dp = \int L(x^i, \dot{x}^i) dp$$

En partant de l'expression ci-dessus et en partant d'une variation nulle :

$$(38) \quad \delta S = 0$$

Les équations de Lagrange qui en découlent sont :

$$(39) \quad \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

Or, de manière quasi-automatique on passe dans la littérature aux équations :

$$(40) \quad \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

Associée à l'action :

$$(41) \quad S = \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} dp^2$$

Voyons comment ces deux modes de construction conduisent aux mêmes équations de Lagrange.

En partant de la définition (37) nous aurons :

$$(42) \quad \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{1}{2} L \frac{dL}{dp} = 0$$

Pour obtenir les mêmes équations de Lagrange il faut donc se donner un paramétrage tel que :

$$(43) \quad \frac{dL}{dp} = 0$$

Quelle incidence sur le calcul de la longueur ?

$$(44) \quad \text{longueur} = \int \sqrt{L} \, dp$$

$$(45) \quad \delta(\text{longueur}) = \int \frac{1}{2\sqrt{L}} \frac{dL}{dp} dp = 0$$

Entre deux points de l'objet géométrique-solution non seulement on minimise la longueur, mais on impose en plus que celle-ci soit constante. Ceci peut se faire si on prend la longueur s comme paramètre. Dans ces conditions :

$$(46) \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$$

Et :

$$(47) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds^2$$

D'où l'apparition systématique de l'équation :

$$(48) \quad 1 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Simplifiant les équations de Lagrange en se substituant à l'une d'entre elles, en l'occurrence celle liée à la variable r .

Ainsi, simplement en utilisant machinalement la relation (46) fait-on en sorte, implicitement, que les équations de Lagrange issues de (37) soient les mêmes que celles issues de :

$$(49) \quad S' = \int g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds^2 = \int g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds^2$$

Dans l'ouvrage de base de Chandrasekhar¹⁷ trouve-t-on, page :

where τ is some affine parameter along the geodesic. For time-like geodesics, τ may be identified with the proper time, s , of the particle describing the geodesic.

For the Schwarzschild space-time, the Lagrangian is

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - 2M/r} - r^2 \dot{\theta}^2 - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \right], \quad (80)$$

where the dot denotes differentiation with respect to τ . The corresponding canonical momenta are

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}, \quad p_\omega = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dots$$

Fig.6 : L'action utilisée par Chandrasekhar (&&&)

¹⁷ S.Chandrasekhar :The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford University Press 1992

Ainsi, lorsque Chandrasekhar calcule les courbes-solutions, voit-il apparaître une projection réelle, dans le référentiel (r, φ) , traduisant la trajectoire spirale d'une masse témoin tombant « à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild (&&&) », vers la « singularité centrale », en $r = 0$.

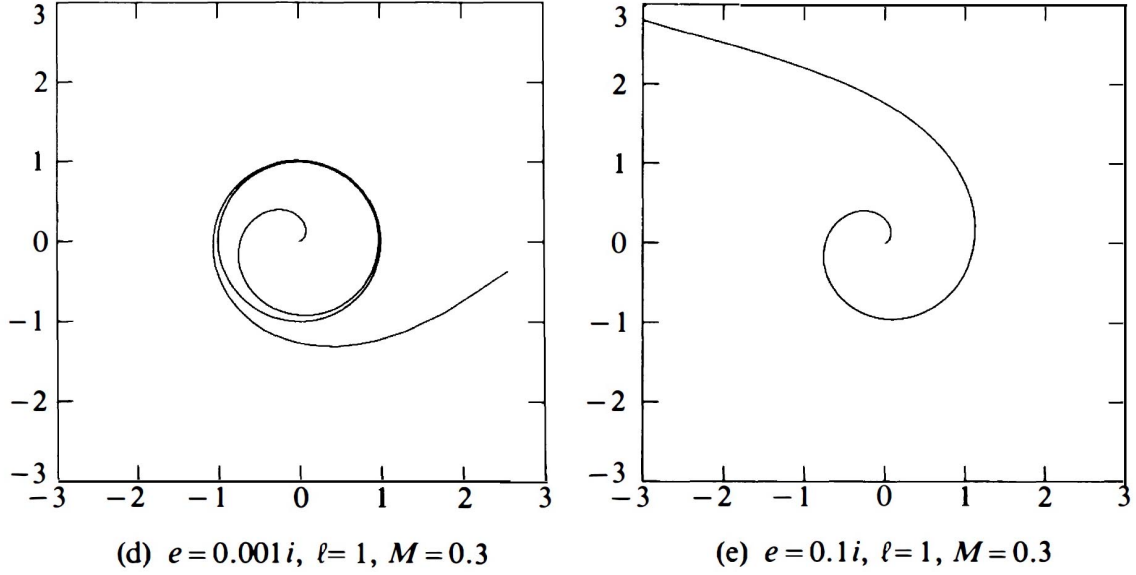


FIG. 7b. Various classes of time-like geodesics described by a test particle with $E^2 > 1$: (a), (b), (c): orbits of the first and the second kind with eccentricity $e = 3/2$ and latera recta, 4.5, 2.5, and 1.94 respectively ($M = 3/14$ in the scale along the coordinate axes); (d), (e): unbound orbits with $l = 1$ and with imaginary eccentricities $e = 0.001i$ and $0.1i$ ($M = 0.3$ in the scale along the coordinate axes).

121

Fig.7 : Courbes inscrites à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild (&&&)

Pour éclaircir cette question, considérons des objets géométriques 2D, comme nous le faisons avec tout le luxe de détails possible, dans notre article de 2026¹⁸.

Les « géodésiques-fantômes »

Nous allons considérer des objets 2D définis par leur métrique. Commençons par la sphère. Classiquement on l'écrit à l'aide de deux coordonnées angulaires :

$$(50) \quad ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Ici, nous avons la « signature » $(++)$

Nous choisirons de l'exprimer selon un autre système de coordonnées, issu du changement :

¹⁸ J-P Petit. Kruskal coordinates, semi-complex spacetime expansion. Journal of Modern Physics. 2026 17(9), 1197-1228 <https://doi.org/10.4236/jmp.2026.179053>

$$(51) \quad \theta = \arcsin \frac{r}{R}$$

Qui nous donne :

$$(52) \quad ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2}$$

Nous voyons tout de suite que la signature est $(+, +)$, pour $r < R$ est, alors qu'elle passe à $(+, -)$ pour $r > R$. Nous nous disons « c'est normal puisque cette région de l'espace est extérieure à notre sphère de rayon R ». Mais ce mot « rayon » implique une distance par rapport à un centre, qui n'apparaîtrait que si la sphère était plongée dans un espace 3D. Il faut mieux alors parler de « longueur caractéristique R ».

La longueur est donnée par :

$$(53) \quad S = \int \sqrt{r^2 d\varphi^2 + \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2}} = \int \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{R^2 \dot{r}^2}{R^2 - r^2}} ds$$

Faisons comme Chandrasekhar et décidons de conduire « les géodésiques » en utilisant « le Lagrangien » :

$$(54) \quad L = \int \left(r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{R^2 \dot{r}^2}{R^2 - r^2} \right)$$

Nous obtenons l'équation différentielle :

$$(55) \quad d\varphi = \frac{-h R dr}{r \sqrt{(R^2 - r^2)(r^2 - h^2)}}$$

Nous obtenons alors deux familles de courbes *réelles*.

- Pour $r < R$ et $h > r$
- Pour $r > R$ et $h < r$

On montre que ces deux types de courbes sont des ellipses. On a alors la figure ci-après :

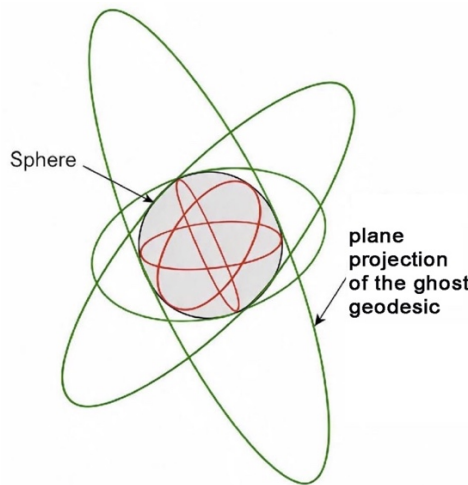


Fig. 8 : Géodésiques réelles et « ghost geodesics » de la sphère S^2 .

Une façon d'avoir « prise » sur ces géodésiques de la sphère S^2 consiste à la plonger dans un espace $3D(r, \varphi, z)$.

Pour φ constant, la méridienne de cette surface est alors un cercle. Si on tente de faire la même opération avec l'autre famille de courbes, on peut alors les plonger dans un espace semi complexe (r, φ, ζ) où deux des coordonnées : (r, φ) sont réelles, alors que la troisième ζ est imaginaire pure. Dans ce plongement 3D, semi-complexe, la méridienne est alors une hyperbole. En décidant que on peut faire cohabiter ces deux surfaces, on obtient cette méridienne :

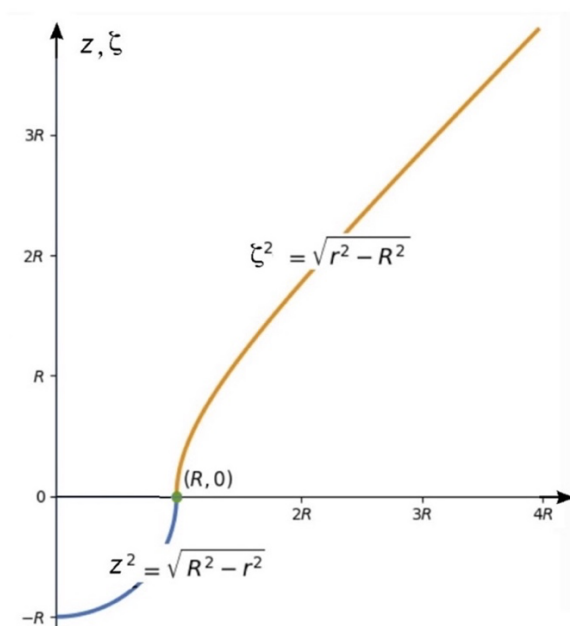


Fig.9 : Méridienne de l'extension semi-complexe.

Ce qui donne la figure ci-après :

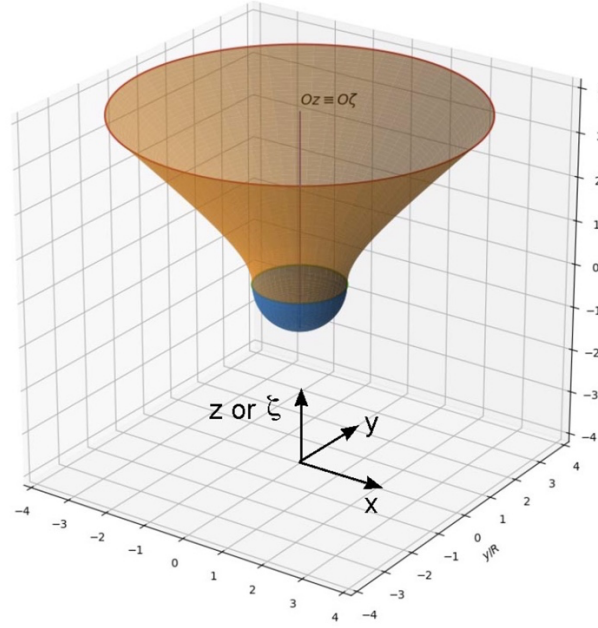


Fig.10 : Demi-extension semi-complexe de la sphère.

Nous pouvons faire la même chose avec le tore T^2 , engendré par la rotation autour d'un axe d'un cercle de rayon dont le centre décrit un cercle de rayon R . La métrique s'écrit alors :

$$(56) \quad ds^2 = r_0^2 d\theta^2 + (R + r_0 \cos\theta)^2 d\varphi^2$$

Comme pour sphère, nous introduisons le changement de variable :

$$(57) \quad \theta = \arccos \frac{r - R}{r_0}$$

La métrique devient alors :

$$(58) \quad ds^2 = r_0^2 d\theta^2 + \frac{dr^2}{-R^2 + r_0^2 - r^2 + 2rR}$$

Comme précédemment ce sont les valeurs de r pour lesquelles la signature conserve la forme $(+, +)$ qui assurent le fait que nous restons sur le tore. Là encore, en nous basant sur la variation :

$$(59) \quad \delta \int r_0^2 d\theta^2 + \frac{dr^2}{-R^2 + r_0^2 - r^2 + 2rR} = 0$$

Et en nous basant sur les équations de Lagrange qui en résultent nous verrons apparaître deux familles de courbes. Les géodésiques du tore et les courbes autoparallèles s'inscrivant sur une extension semi-complexe de la variété. Voir la référence &&&.

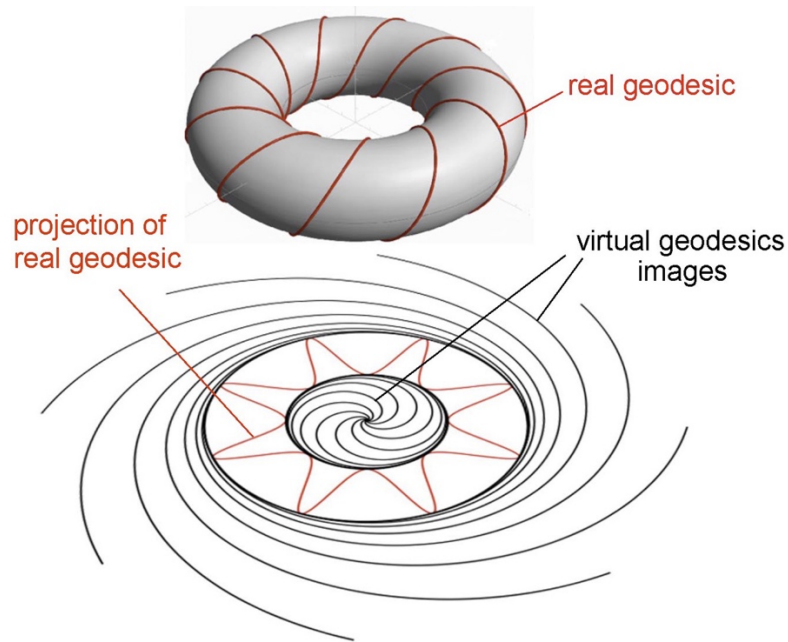


Fig11 : Le tore, ses géodésiques et ses « ghost geodesics »

On pourra, comme pour la sphère, opérer une extension semi-complexe qui complètera le tore avec deux ensembles disjoints, correspondant à une extension vers l'intérieur, jusqu'à des points coniques situés sur l'axe du tore et vers l'extérieur jusqu'à l'infini :

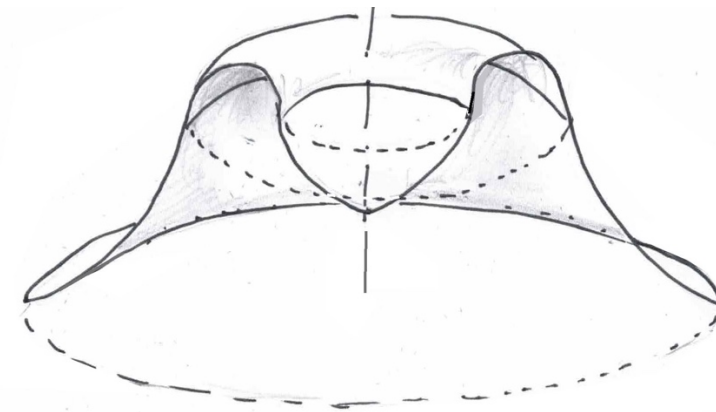


Fig.12 : Demi-extension semi-complexe du tore T2.

Les choses deviennent plus intéressantes quand on applique cela à la surface de Flamm, qui se trouve alors être une section de l'objet 3D-solution par le plan $\theta = Cst$.

La métrique est alors :

$$(60) \quad ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

Pour $r \geq \alpha$ la signature $(++)$ est maintenue. On plongeant dans l'espace 3D (r, φ, z) est possible et donne la méridienne parabolique :

$$(61) \quad z = \pm 2 \sqrt{\alpha (r - \alpha)}$$

Pour $r < \alpha$ un plongement est possible, dans un espace semi-complexe (r, φ, ζ) . Et en faisant $\zeta = iz$ on complète la méridienne selon :

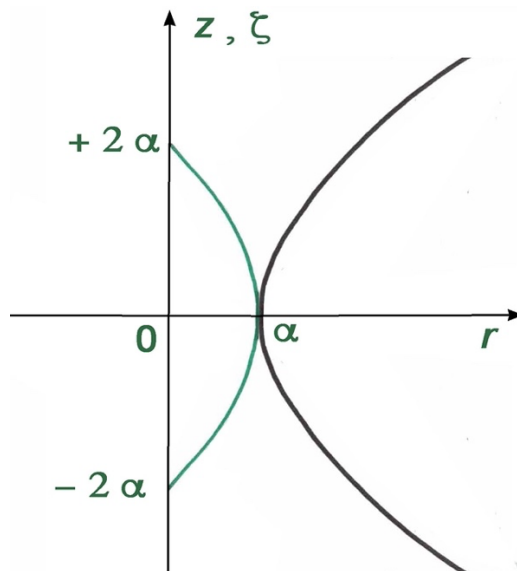


Fig.12 : Méridienne de l'extension semi-complexe de la surface de Flamm

L'image ci-après, en 3D :

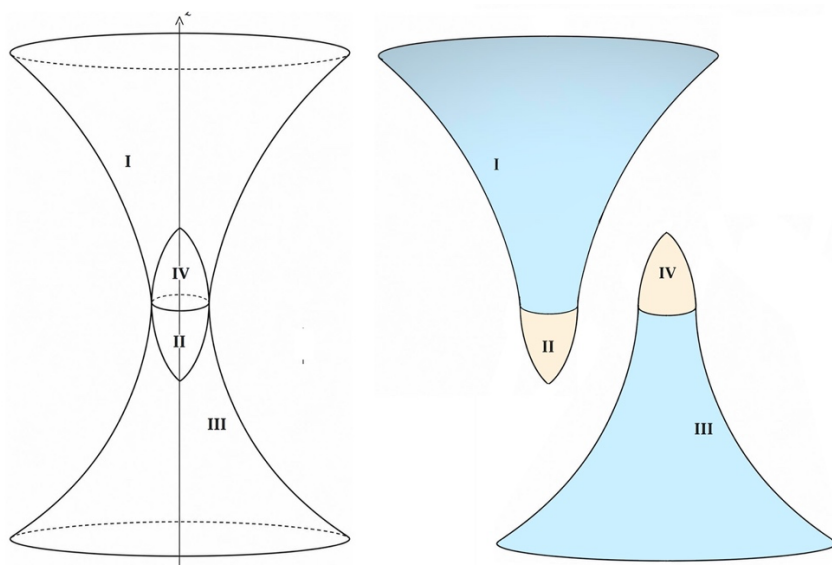


Fig.13 : La surface de Flamm et son extension semi-complexe.

Ce qui est à noter : cette représentation fait apparaître quatre régions. Les régions 1 et III sont les deux nappes réelles, situées de part et d'autre du cercle de gorge. En 3D ceci se décline selon deux nappes 3D situées au-delà de la sphère de gorge. Image suivante : ce que cela donne en projection :

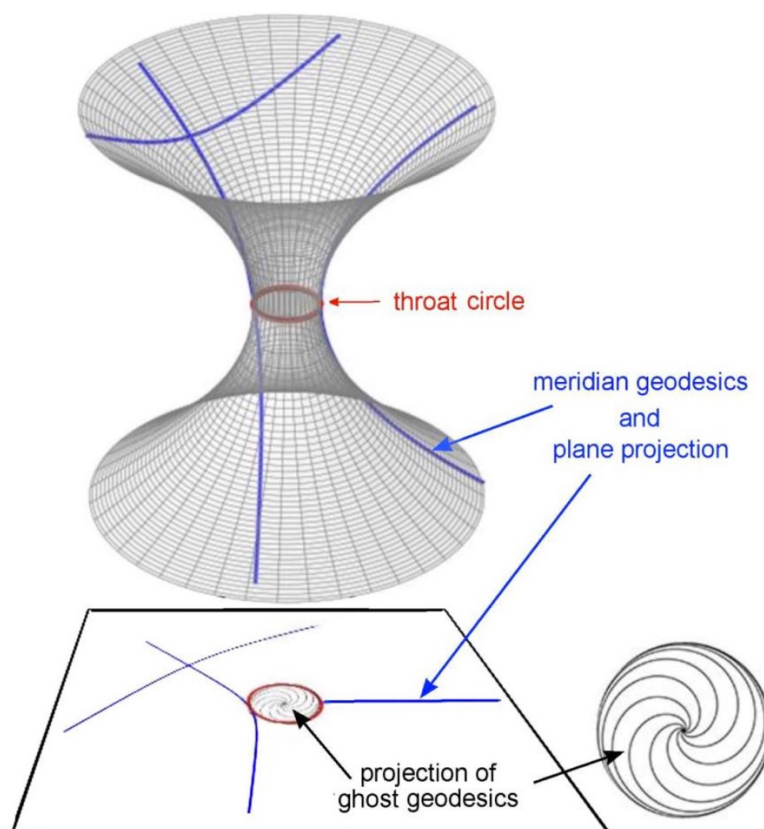


Fig.14 : Projection plane des géodésiques de la surface de Flamm et de ses « ghost geodesics ».

Ce que nous devons retenir de ces explorations en 2D : que le fait de rechercher les courbes minimisant la longueur ou le carré de la longueur, issues de la donnée de la métrique, produisent deux ensembles de courbes, les unes s'inscrivant sur une portion réelle de la surface et les autres dans une forme d'extension semi-complexe (où la longueur devient imaginaire pure).

Nous devons maintenant nous poser la question de cette démarche-clé du modèle du trou noir, qualifié d'extension maximale. Certes, mais de quelle nature ?

Une bien étrange histoire.

Nous avons vu plus haut que la démarche initiale de Karl Schwarzschild était sans point d'ombre. On part des deux solutions de l'équation d'Einstein en stationnaire et en symétrie sphérique. La solution extérieure n'est exploitable que pour $r > \alpha$. La solution intérieure n'est exploitable que pour $r < \hat{R}$. Une découpe s'avère possible à $r = r_e$ telle que $\alpha < r_e < \hat{R}$, cette valeur correspondant au rayon de l'étoile. Le raccordement des métriques peut alors être assuré, ce qui va de pair avec la continuité des géodésiques, à la traversée de cette frontière.

Seuls des gens comme le jeune Ludwig Flamm intègrent d'emblée cette situation. Ce n'est pas le cas du mathématicien David Hilbert qui, apparemment, ne « voit » que la solution métrique extérieure. Il ne dit pas un mot de la solution intérieure, pourtant indispensable

à une réelle compréhension de la géométrie globale. A cela s'ajoute un autre phénomène. Si la démarche de Schwarzschild (et de Flamm, de Droste) se centre sur l'astrophysique, certains comme Hermann Weyl en 1917¹⁹, puis Einstein en 1939²⁰, et envisagent de tenter d'utiliser la solution métrique extérieure, considérée isolément, pour produire une description géométrique des masses, en tant qu'accident topologique mettant en communication deux feuilletés d'univers.

Dans cette première exploration Einstein évoque la solution intérieure et formule, sommairement, un avis négatif à son sujet, qui a probablement eu un effet dissuasif important. Nous reproduisons le passage concerné :

This arises the question whether it is possible to build up a field containing such singularity with the help of actual gravitational mass, or whether such region with vanishing g_{44} do not exist in cases which have physical reality. Schwarzschild himself investigated the gravitational field which is produced by an incompressible liquid. He found that in this case, too, there appears a region with vanishing g_{44} if only, with given density of liquid, the radius of the field-producing sphere is chosen large enough.

This argument; however, is not convincing; the concept of an incompressible liquid is not compatible with relativity theory as elastic waves would have to travel at infinite velocity. It would be necessary, therefore, to introduce a compressible liquid whose equation of state excludes the possibility of signals with a speed in excess of the velocity of light. But the treatment of any such problem would be quite involved; besides the choice of such an equation would be arbitrary within wide limits, and one could not be sure that thereby no assumptions are excluded from the very beginning.

Cela soulève la question de savoir s'il est possible de générer un champ comportant une telle singularité au moyen d'une masse gravitationnelle réelle, ou si, au contraire, de telles régions où la composante g_{44} s'annule n'existent pas dans les situations physiquement réalisables. Schwarzschild lui-même a étudié le champ gravitationnel produit par un fluide incompressible. Il a constaté que, dans ce cas également, il apparaît une région où g_{44} s'annule, pour peu que le rayon de la sphère génératrice du champ soit choisi suffisamment grand, étant donné une densité de fluide fixée.

Toutefois, cet argument n'est pas convaincant ; le concept de fluide incompressible est incompatible avec la théorie de la relativité, car il impliquerait que les ondes élastiques se propagent à une vitesse infinie. Il serait donc nécessaire d'introduire un fluide compressible, dont l'équation d'état exclurait la possibilité de signaux se propageant à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Or, le traitement d'un tel problème s'avérerait extrêmement complexe ; par ailleurs, le choix d'une telle

¹⁹ H.Weyl : Zu Gravitationstheorie. Annalen der Physik, Vol.35 n° 18 (1917)

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/andp.19173591804> :

²⁰ A.Einstein. On stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. Annals of Mathematics. Vo.40, n°4, 10 may 1939

équation d'état resterait arbitraire dans une large mesure, et rien ne garantirait qu'aucune hypothèse pertinente n'ait été exclue d'emblée.

En quelques lignes Einstein dissuade d'autres chercheurs de se pencher avec plus d'attention sur cette solution métrique intérieure. Et de fait, personne ne fera l'effort de le faire pendant des décennies. Einstein, cependant, note l'aspect central de cette « criticité physique », que nous reprendrons plus loin avec notre modèle de plugstar : l'annulation du terme de temps g_{44} (et au-delà, son inversion, au centre géométrique du système, synonyme d'inversion de la masse).

Ajoutons que pour avoir prise sur cet article il faut lire l'allemand. L'article ne sera disponible en langue anglaise qu'en 1999, 83 ans après sa publication, en 1916.

Replaçons-nous donc dans cet entre deux guerres, entre 1918 et 1939. La diffusion des avancées scientifiques ne se fait efficacement qu'à travers des livres. A cet époque la photocopie n'existe pas. Les auteurs disposent d'un nombre très limité de « tirés à part », qu'ils peuvent envoyer à des correspondants. Le nombre type est entre 5 et 25 exemplaires.

Ainsi les grands diffuseurs d'information scientifique sont les auteurs de livres, réalisant de vastes synthèses. Pour le sujet concerné il y en a deux.

Le premier est Arthur Eddington, avec son ouvrage²¹ paru en 1924. Le second est Tolman en 1934²². Chez Eddington, page 143 on trouve cette expression de la métrique extérieure :

$$(62) \quad ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - \frac{dr^2}{1-2m/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

La signature n'a pas encore changé. Mais la limitation imposée à la variable d'espace (qui est en fait la grandeur intermédiaire $R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} \geq \alpha$ de Schwarzschild) a disparu.

r est devenu une coordonnée radiale ordinaire.

Formulation identique chez Eddington, page 204. Ainsi commence à se dessiner la « forme standard de la solution de Schwarzschild ». Dès lors il paraît absolument licite, et même indispensable d'explorer la région

$$(63) \quad 0 \leq r \leq \alpha$$

La nullité du dénominateur du terme a suggéré d'existence sur cette sphère de Schwarzschild d'une singularité. Mais il s'est avéré qu'il ne s'agissait pas d'une « vraie singularité, mais d'une « coordinate singularity » qu'il était possible d'éliminer avec

21 A.Eddington : «The mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, 1960, second edition. First edition, same editor, 1924

Schwarzschild line element page 64.

22 R.C.Tolman : Relativity, Thermodynamics and Cosmology. In England, 1946 :Oxford at the Clarendon Press, First Edition :1934

différents autres choix de coordonnées. En particulier les coordonnées introduites en 1924 par Eddington, selon le changement affectant la coordonnée de temps (en appelant t_s la coordonnée de temps de Schwarzschild :

$$(64) \quad t_s = t_E + \varepsilon \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|$$

Ce qui conduit à la métrique d'Eddington :

$$(65) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 dt_E^2 + \varepsilon c r_s \frac{dt_E dr}{r} - \left(1 + \frac{r_s}{r} \right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

En faisant apparaître un terme croisé en $dt_E dr$

Mais en $r = 0$ le « scalaire de Kretchman » étant nul, ce point est considéré comme lieu d'une « true singularity », d'une véritable singularité.

La véritable solution trouvée par Schwarzschild, jamais explicitée.

Comme nous l'avons dit plus haut, en partant de ses variables réelles (t, r, θ, φ) Schwarzschild a effectivement coïncidé une solution exacte, mais choisi de la présente à l'aide des coordonnées (t, R, θ, φ). Il suffit de retourner à ses coordonnées initiales pour obtenir sa véritable solution²³ Je tien à présenter ce résultat en couleur rouge et en encadré. En effet, celui-ci n'avait jamais été présenté depuis 110 ans !

Avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$:

$$ds^2 = \frac{(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4 dr^2}{(r^3 + \alpha^3)[(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} - (r^3 + \alpha^3)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Ceci représente la translation dans le temps de l'objet 3D défini par la métrique :

$$(67) \quad ds_1^2 = \frac{r^2 dr^2}{(r^3 + \alpha^3)[(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} + (r^3 + \alpha^3)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

On peut alors opérer un feuilletage à $r = \text{Cst}$ constitué par les sphères définies par la métrique :

$$(68) \quad ds_2^2 = (r^3 + \alpha^3)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

²³ J'ai consacré en 2026 un article entier pour détailler son calcul. J-P Petit G. D'Agostini : The true Schwarzschild solution and its subsequent geometry. The Journal of Modern Physics. August 2026. Vol. 17 n°8.

Le déterminant de cette métrique est :

$$(69) \quad g = (r^3 + \alpha^3)^{4/3} \sin^2 \theta$$

Les aires de ces sphères sont définies par :

$$(70) \quad A(r) = \iint \sqrt{g} \, d\theta \, d\varphi = (r^3 + \alpha^3)^{2/3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 4\pi (r^3 + \alpha^3)^{2/3}$$

Ces sphères ont une valeur minimale, pour $r = 0$:

$$(71) \quad A_{min} = 4\pi \alpha^2$$

C'est la sphère de Schwarzschild et la topologie de cet objet est donc celle d'une variété à bord. Si on se tient à des valeurs réelles des variables (t, r, θ, φ) cette sphère de Schwarzschild ne possède par « d'intérieur ».

Faute d'avoir explicité la véritable expression de cette métrique extérieure, nos modernes théoriciens ont donc cherché à décrire à tout prix « l'intérieur de cette sphère », à comprendre comment se comportait l'espace-temps pour " $0 < r < \alpha$ "

Tout commence par la description d'un phénomène éminemment instationnaire à l'aide d'une solution stationnaire.

En 1939 Robert Oppenheimer et H.Snyder²⁴ calculent les temps de chute libre et d'évasion pour la « forme standard de la métrique de Schwarzschild et trouve dans les deux cas une valeur infinie. Dans ce cas la variable t avec laquelle est exprimée cette métrique s'identifie avec le temps propre vécu par un observateur distant. Les auteurs en concluent donc que cette métrique stationnaire représente une sorte de « gel du temps ». L'observateur distant est ainsi témoin de l'implosion finale d'une étoile massive, qui s'opère en quelques jours. Mais la présence d'une concentration importante de masse altère l'écoulement du temps. Pour cet observateur ce phénomène, ultrabref à l'échelle des phénomènes du cosmos (quelques jours) lui apparaît alors durer en un temps infini.

C'est l'acte de naissance du modèle des trous noirs.

Mais ce qui est considéré comme la forme standard de cette solution métrique n'est qu'une forme parmi d'autres, obtenues par des simples changements de coordonnées. Nous avons vu plus haut que si le temps de l'observateur lointain est vécu selon « le temps d'Eddington » c'est-à-dire avec une métrique présentant un terme croisé en r , tout change²⁵ :

Forme :

²⁴ J.R.Oppenheimer and H.Snyder : On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. Vol. 56 pp 455-459 sept 1939 <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.56.455>

²⁵ P.Koiran : Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application to Eddington-Rosen Bridges. International Journal of Modern Physics D , vol.30 , n° 15, 2150106 (2021). <https://arxiv.org/abs/2110.05938>

(72)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt_E^2 - c r_s \frac{dt_E dr}{r} - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

→ temps de chute libre fini - temps d'évasion infini

Forme :

(73)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt_E^2 + c r_s \frac{dt_E dr}{r} - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

→ temps de chute libre infini - temps d'évasion fini

Certains s'appuieront alors sur un théorème de Birkhoff²⁶ en prétendant ce que théorème interdit la présence de ce terme croisant le temps et l'espace. C'est inexact. Ce théorème prédit seulement que dans le cas d'une solution stationnaire il est toujours possible de donner à la métrique sa forme standard et de faire disparaître ce terme croisé.

Toujours est-il qu'après la seconde guerre mondiale tous les spécialistes pensent que tout se concentre sur cette forme standard et que le problème du moment est d'explorer ce que devient la matière après qu'elle ait traversé la sphère de Schwarzschild et plonge alors vers « la singularité centrale ».

Un fantastique tour de prestidigitat.

Dans cet après-guerre, « post-nucléaire », John Archibald Wheeler, ancien du projet Mannathan, s'est vu octroyer un poste permanent au prestigieux Institute for Advanced Studies, où Albert Einstein est déjà en poste. On peut le considérer comme un précurseur dans une sorte de science-spectacle, très axée sur les échos médiatiques.

Il commence par proposer l'existence de particules « premières », qu'il nomme géons, qui sont des concentrations d'énergie électromagnétique. Des objets « auto-confinés » dans leur propre champ de gravitation. Mais les paramètres à envisager ôtent à de tels objets tout statut physique et l'idée fait long feu.

Il propose alors ce qu'il nomme « la géomérodynamique²⁷ ». Mais la montagne accouche encore une fois d'une souris.

Un jour, à la cafétéria de Princeton, Wheeler, 50 ans, croise le jeune mathématicien Martin Kruskal, 30 ans. Kruskal était alors affecté à un projet Matterhorn, axé sur la fusion au cœur d'un plasma confiné. Sans être membre de l'Institut des Sciences avancées de Princeton il travaillait dans le laboratoire de physique des plasmas de Princeton. Ayant entendu parler de cette question de métrique de Schwarzschild et tout à fait qualifié en matière de calcul tensoriel il imagine un beau jour un changement de coordonnées dont la vertu est de rendre la métrique régulière sur la sphère de Schwarzschild. Il montre alors

²⁶ G.D. Birkhoff : Relativity and modern physics. Cambridge Harvard University Press, 1923 and Hans-Jürgen Schmidt : A new proof of Birkhoff's theorem. Gravitation and Cosmology, vol. 3, n°3, sept. 1997, p.185-190 and arXiv gr-qc/9709071

²⁷ En fait l'espace des métriques riemanniennes 3D, évoluant dans le temps.

à Wheeler les coordonnées en question, u et v , réelles. Pour lui, simple curiosité. Voici ces coordonnées, en haut de la figure ci-après, extraite de l'ouvrage de référence de J.A.Wheeler, C.W. Misner, K.S.Thorne (prix Nobel 2017).

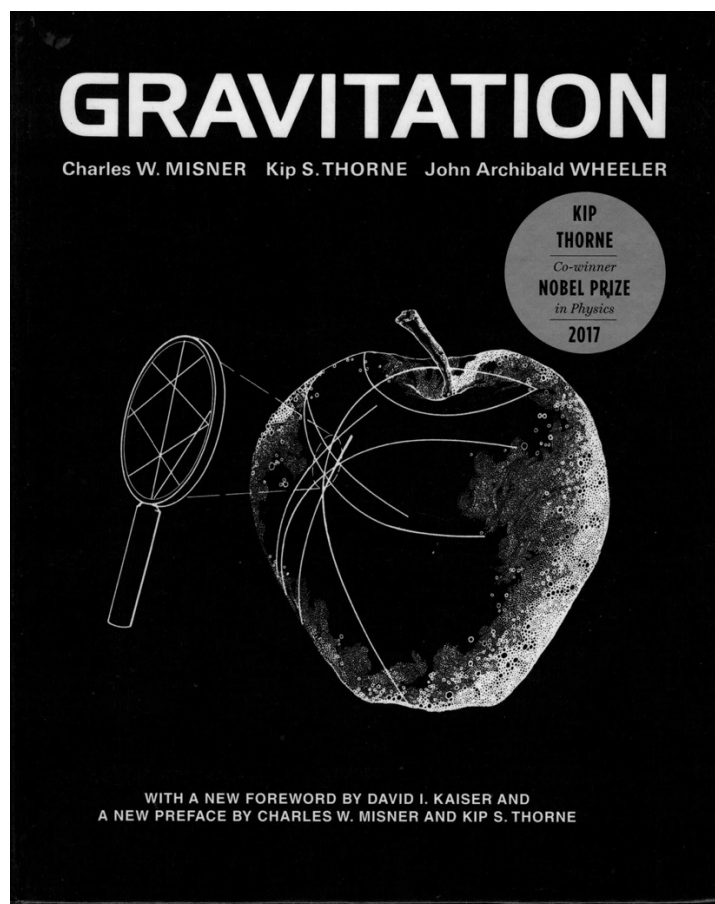


Fig. 15 : Le célèbre ouvrage « Gravitation » première édition en 1973.

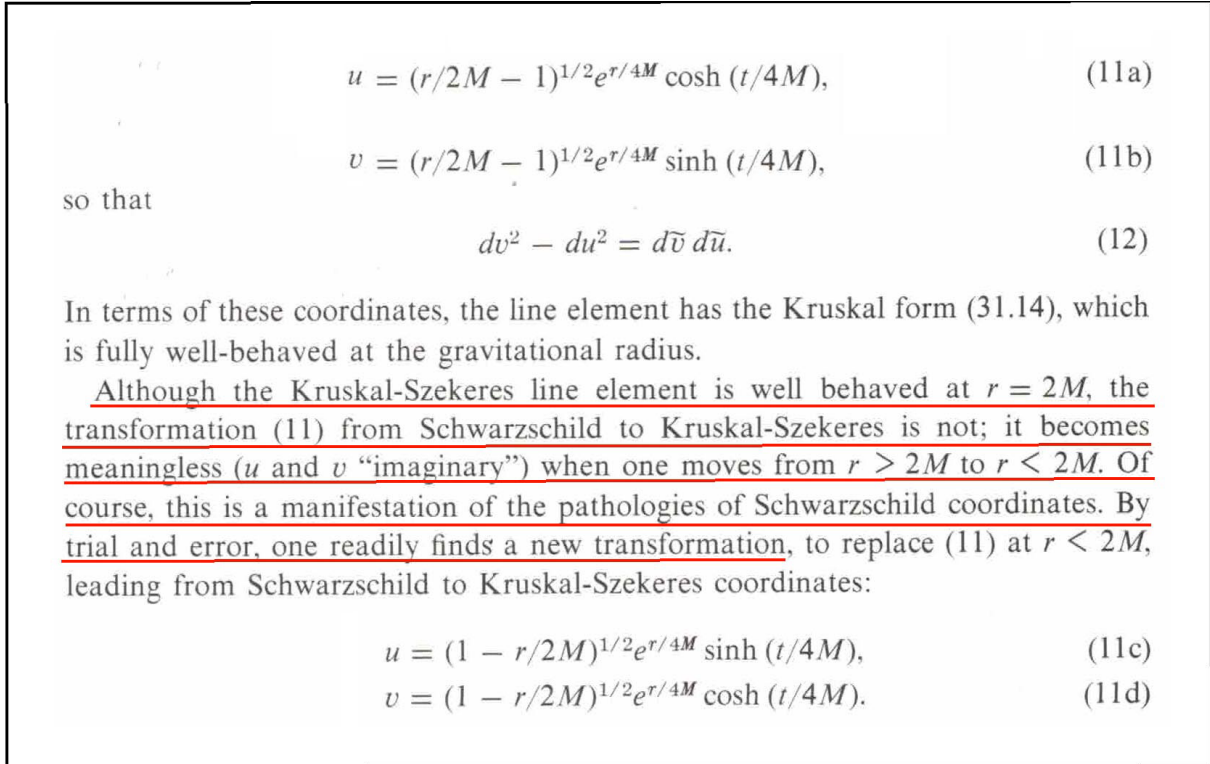


Fig. 16 : En haut de la figure, les « coordonnées de Kruskal »

Wheeler, très intéressé, demande à Kruskal de lui écrire ces équations sur quelque support. Mais ni l'un ni l'autre n'ont de carnet sous la main. Finalement un serveur de la cafétéria leur donne une serviette en papier sur laquelle Kruskal consigne les deux équation figurant en haut de la figure 16²⁸.

Wheeler part alors pour la France, pour participer en 1959 à un colloque organisé par le CNRS à l'Abbaye de Royaumont et présidé par le mathématicien André Lichnérowicz. Wheeler y présente une communication. Nous n'avons pas eu accès aux minutes de ce colloque pour savoir quel était le contenu de cette communication. Toujours est-il qu'à son retour aux Etats Unis, Wheeler exulte. Grâce à la serviette en papier de Kruskal et à quelques manipulations il a réussi à pénétrer à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, qui plus est, à l'aide coordonnées réelles.

Il rédige alors un article de deux pages, émaillé d'une qui sera connue dans le monde entier, article qu'il envoie à Physical Review D en lui faisant porte la signature de M.Kruskal. Etant donnée l'importance de cet article, nous avons jugé utile de le reproduire dans cet article.

²⁸ J. D. Gibbon, S. C. Cowley, N. Joshi et M. A. H. MacCallum, « Martin David Kruskal. 28 September 1925–26 December 2006 », Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, volume 64, 2018, pages 261–284.

Maximal Extension of Schwarzschild Metric*

M. D. KRUSKAL†

Project Matterhorn, Princeton University, Princeton, New Jersey

(Received December 21, 1959)

There is presented a particularly simple transformation of the Schwarzschild metric into new coordinates, whereby the "spherical singularity" is removed and the maximal singularity-free extension is clearly exhibited.

THE well-known Schwarzschild expression¹ for the metric around a center of mass $m(g)$ or $m^* = (Gm/c^2)(cm)$ is

$$ds^2 = -(1 - 2m^*/r)dt^2 + (1 - 2m^*/r)^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2, \quad (1)$$

with

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2)$$

Kasner, Lemaitre, Einstein and Rosen, Robertson, Synge, Ehlers, Finkelstein, and Fronsdal have shown² that the singularities at $r=0$ and $r=2m^*$ are very different in character (Table I). Their conclusion—that there is no real singularity at $r=2m^*$ —can be demonstrated by a choice of coordinates seemingly simpler and more explicit than any introduced so far to this end. One way to find it is to seek a spherically symmetric coordinate system in which radial light rays everywhere have the slope $dx^1/dx^0 = \pm 1$:

$$ds^2 = f^2(-dv^2 + du^2) + r^2d\omega^2. \quad (3)$$

Identifying (3) with (1) and requiring f to depend on r alone and to remain finite and nonzero for $u=v=0$, one finds the following essentially unique equations of transformation between the exterior of the "spherical singularity," $r > 2m^*$, and the quadrant $u > |v|$ in the plane of the new variables (Table II).

The new coordinates give an analytic extension, $\mathcal{E}$, of that limited region of space-time, $\mathcal{L}$, which is described without singularity by the Schwarzschild coordinates with $r > 2m^*$. The metric in the extended region joins on smoothly and without singularity to the metric at the boundary of $\mathcal{L}$ at $r=2m^*$. That this extension is possible was already indicated by the fact that the curvature invariants of the Schwarzschild metric are perfectly finite and well behaved at $r=2m^*$.

The extended space, $\mathcal{E}$, moreover, is the *maximum* singularity-free extension of $\mathcal{L}$ that is at all possible, for the following reason: As may be seen by direct examination of the geodesics (perhaps most simply carried out mainly in the familiar r, T coordinates, with special attention to geodesics on which $r=2m^*$ either isolatedly or everywhere), every geodesic, followed in whichever direction, either runs into the "barrier" of intrinsic singularities at $r=0$ ($v^2-u^2=1$), or is continuable infinitely with respect to its "natural length." (This is measured in terms of the number of parallel transfers of an infinitesimal tangent vector, is determined only up to an arbitrary scale factor, and not only accords with the proper time or distance along time-like or space-like geodesics but is defined even for null geodesics.) But it is obvious that if there were a transformation (no matter how wild at the boundary) between $\mathcal{E}$ and a subregion $\mathcal{E}'$ of a still further singularity-free extension $\mathcal{F}$, there would have to be one geodesic (to say the least) running from $\mathcal{E}'$ into $\mathcal{F}-\mathcal{E}'$, in contradiction to the aforementioned property.

The maximal extension $\mathcal{E}$ has a *non-Euclidean topology* (Fig. 1) and therefore falls into the class of topologies considered by Einstein and Rosen, Wheeler, and Misner and Wheeler.³ It is remarkable that it presents just such a "bridge" between two otherwise Euclidean spaces as Einstein and Rosen sought to obtain by modifying the field equations. It may also be interpreted as describing the "throat of a wormhole" in the sense of Wheeler, connecting two distant regions in *one* Euclidean space—in the limit when this separation of the wormhole mouths is very large compared to the circumference of the throat. The length of the wormhole connection may of course be exceedingly

TABLE I. Singularities in Schwarzschild metric, real and apparent.

r	Invariant representation of curvature	Singularity in metric?	Singularity in Schwarzschild coordinate system?
0	Infinite as m^*/r^2	Yes	Yes
$2m^*$	Finite	No	Yes

* This work was reported in abbreviated form by J. A. Wheeler on behalf of the author at the Royaumont Conference on Relativistic Theories of Gravitation, June, 1959.

† On leave 1959-60 at Max-Planck-Institut für Astrophysik, Aumeisterstrasse 2, München 23, Germany.

¹ K. Schwarzschild, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Physik.-math. Kl. 189 (1916).

² E. Kasner, Am. J. Math. 43, 130 (1921); G. Lemaitre, Ann. soc. sci. Bruxelles A53, 51 (1933); A. Einstein and N. Rosen, Phys. Rev. 48, 73 (1935); H. P. Robertson, lecture in Toronto, 1939 (unpublished), cited by J. L. Synge; J. L. Synge, Proc. Roy. Irish. Acad. A53, 83 (1950); J. Ehlers, thesis, Hamburg, 1957 (unpublished); D. Finkelstein, Phys. Rev. 110, 965 (1958); C. Fronsdal, Phys. Rev. 116, 778 (1959).

³ J. A. Wheeler, Phys. Rev. 97, 511 (1955); C. W. Misner and J. A. Wheeler, Ann. Physik 2, 525 (1957).

TABLE II. Relation of new coordinates to Schwarzschild coordinates.

New coordinates in terms of Schwarzschild coordinates	Schwarzschild coordinates in terms of new coordinates
$u = \left[\left(\frac{r}{2m^*} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{4m^*} \right) \cosh \left(\frac{T}{4m^*} \right)$	$\left[\left(\frac{r}{2m^*} \right) - 1 \right] \exp \left(\frac{r}{2m^*} \right) = u^2 - v^2$
$v = \left[\left(\frac{r}{2m^*} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{4m^*} \right) \sinh \left(\frac{T}{4m^*} \right)$	$T/4m^* = \operatorname{arctanh}(v/u)$ $= \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}[2uv/(u^2 + v^2)]$
$f^2 = (32m^{*3}/r) \exp(-r/2m^*) = \text{a transcendental function of } (u^2 - v^2)$	

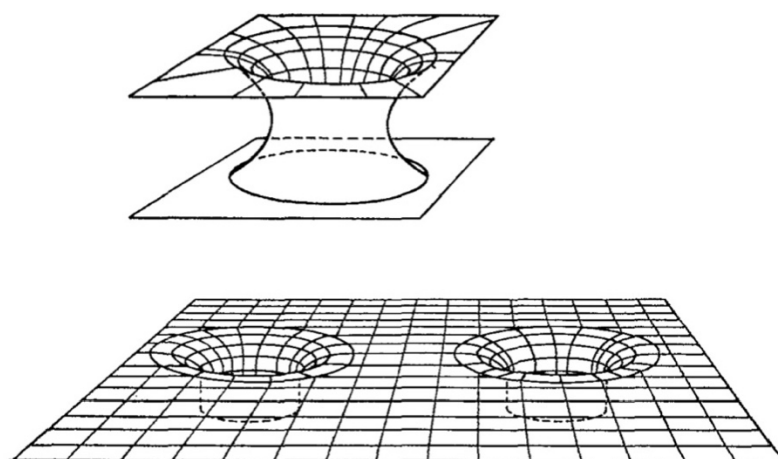


FIG. 1. Two interpretations of the 3-dimensional "maximally extended Schwarzschild metric" at the time $T=0$. Above: A connection or bridge in the sense of Einstein and Rosen between *two* otherwise Euclidean spaces. Below: A wormhole in the sense of Wheeler connecting two regions in *one* Euclidean space, in the limiting case where these regions are extremely far apart compared to the dimensions of the throat of the wormhole.

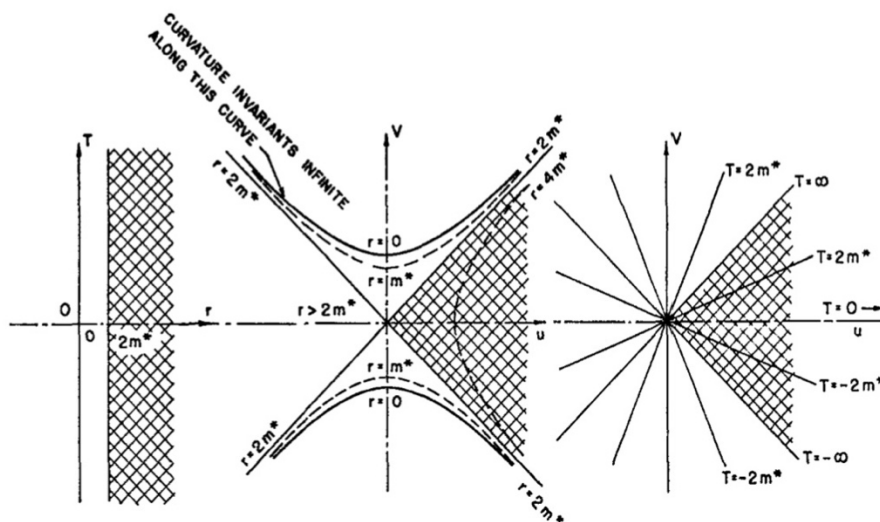


FIG. 2. Corresponding regions of the (r, T) and (u, v) planes. In the latter, curves of constant r are hyperbolas asymptotic to the lines $r = 2m^*$ while T is constant on straight lines through the origin. The exterior of the singular sphere, $r > 2m^*$, corresponds to the region $|v| < u$ (the hatched areas). The whole line $r = 2m^*$ in the (r, T) plane corresponds to the origin $u = v = 0$, while two one-dimensional families of ideal limit points with $r \rightarrow 2m^*$ and $T \rightarrow \pm\infty$ correspond to the remaining boundary points $u = |v| > 0$.

In the (u, v) plane the metric is entirely regular not only in the hatched area but in the entire area between the two branches of the hyperbola $r = 0$. This comprises two images of the exterior of the spherical singularity and two of its interior. (The expressions in Table II are valid in the right-hand quadrant $u > |v|$. To obtain formulas valid in the left-hand quadrant replace u and v by their negatives everywhere. To obtain formulas valid in the upper or lower quadrant replace u by $\pm v$, v by $\pm u$, and $r/2m^* - 1$ by its negative everywhere. Note that the formula for r and the final formula for T remain invariant under these substitutions.) The purely radial ($d\theta = d\varphi = 0$) null geodesics are lines inclined at 45° . The points with $r = 2m^*$ have no local topological distinction, but still a global one: if a test particle crosses $r = 2m^*$ into the interior (where r is time-like and T space-like), it can never get back out but must inevitably hit the irremovable singularity $r = 0$ (curvature invariants infinite). This circumstance guarantees that one cannot violate ordinary causality in the "main universe" by sending signals via the wormhole effectively faster than light.

On notera que l'article ne présente nullement le changement de coordonnées à la base de toute cette affaire. La métrique de Kruskal devient :

$$(74) \quad ds^2 = \frac{32 m_*^2}{r} \exp(-r + 2m_*) (-dv^2 + du^2) + r^3 d\omega^2$$

La fonction $f^2 = \frac{32 m_*^2}{r} \exp(-r + 2m_*)$ est, dans l'article, qualifiée de "transcendante"

Kruskal découvre l'existence de cet article, portant sa signature, quand la revue lui envoie ces deux pages, porteuses du diagramme (qui désormais portera son nom, mais est en fait dû à Wheeler) pour qu'il signe le bon à tirer et qu'il le découvre dans sa boîte aux lettres. Il entre dans le bureau de Wheeler, le papier à la main, lui confiant sa perplexité.

On ne saura jamais comment cette affaire s'est conclue. Certains disent que Kruskal aurait alors demandé à Wheeler de cosigner l'article, lequel aurait refusé, prétextant que cette découverte appartenait exclusivement à Kruskal. Toujours est-il que le papier a été publié en 1960²⁹. Par ailleurs il se trouve que ce procédé d'extension est également publié, pratiquement au même moment, par un mathématicien d'origine hongroise, établi en Australie, Györgys Szekeres. Alors que cette extension à quatre secteurs est suggérée dans le papier de Kruskal, les deux jeux de coordonnées figurent explicitement dans le papier de Szekeres³⁰. En gardant les mêmes notations :

$$(75) \quad u = \left[1 - \left(\frac{r}{2m_*}\right)\right]^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4m_*}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{T}{4m_*}\right)$$

$$(76) \quad v = \left[1 - \left(\frac{r}{2m_*}\right)\right]^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4m_*}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{T}{4m_*}\right)$$

Ces coordonnées reçoivent le nom de

Coordonnées de Kruskal-Szekeres

A ce stade, la question qui se pose alors est « comment ces coordonnées, réelles, sont-elles obtenues ? Il est alors intéressant de citer les phrases du livre gravitation, dans sa version de 2017. Les voici :

Bien que la métrique de Kruskal-Szekeres se comporte bien en $r = 2m$, il n'en est pas de même pour le passage de la forme donnée par Schwarzschild à celle correspondant à Kruskal-Szekeres : (u et v deviennent « imaginaires ») quand on passe de $r > 2m$ à $-r < 2m$. Bien sûr, c'est une manifestation de la pathologie des coordonnées de Schwarzschild. En procédant par essai-erreur, on a cependant rapidement trouvé le changement de variable convenant à cette région $r < 2m$.

²⁹ M.D Kruskal : Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys. Rev. 119, 1734 (1^{er} sept 1960). Ce qui est par contre étonnant est qu'à la suite de la conclusion de cet accord, Kruskal est retourné au laboratoire de physique des plasmas de Princeton et n'a plus jamais porté le moindre intérêt pour ce fameux diagramme ou pour quelque question que ce soit relevant de la cosmologie et de l'astrophysique.

³⁰ Publicationes Mathematicae Debrecen (Hongrie), volume 7, pages 285–301 (1960).

On trouve effectivement différents modes de constructions selon les ouvrages consultés. Selon l'IA celui de Wald³¹ contiendrait la version considérée comme recevant l'assentiment le plus important. Nous l'avons analysé avec la plus grande attention et le résultat de cet examen se trouve dans les 32 pages de notre article de 2026. Quelle que soit la technique de construction considérée, on tombe toujours sur un moment où ce qui est opéré ressemble au moment « où le prestidigitateur fait disparaître la carte dans sa manche ». Ainsi dans la méthode présentée par Wald trouve-t-on, pour les coordonnées correspondant à $r > 2m$, la quantité :

$$(77) \quad \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)$$

Quand r devient inférieur à $2m$ ce logarithme devient ... complexe. Wald remplace alors cette quantité par :

$$(78) \quad \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|$$

Une autre façon d'opérer consiste à changer de variable temps à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild. Considérons les coordonnées à l'extérieur de la sphère de Schwarzschild.

$$(79) \quad u = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \exp \left(\frac{r}{4m} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{t}{4m} \right)$$

$$(80) \quad v = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \exp \left(\frac{r}{4m} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{t}{4m} \right)$$

On peut écrire

$$(81) \quad u = i \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \exp \left(\frac{r}{4m} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{t}{4m} \right)$$

$$(82) \quad v = i \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \exp \left(\frac{r}{4m} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{t}{4m} \right)$$

Opérons le changement de variable sur le temps :

$$(83) \quad \frac{t'}{4m} = \frac{t}{4m} - i \frac{\pi}{2}$$

On a :

$$(84) \quad e^{i\pi/2} = i \quad e^{-i\pi/2} = -i$$

$$(85) \quad \operatorname{ch} \left(\frac{t}{2\alpha} - i \frac{\pi}{2} \right) = -i \operatorname{sh} \left(\frac{t}{2\alpha} \right)$$

Il vient :

³¹ R.M.Wald General Relativity, University of Chicago Press, 1984

$$(86) \quad u = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{t}{4m}\right)$$

De la même façon nous obtenons :

$$(87) \quad u = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{t}{4m}\right)$$

Quoiqu'in fasse ce ne sont jamais que des procédés très artificiels pour retomber sur les coordonnées prônées par Szekeres en 1960.

L'idée qui se fait alors jour est que cette prétendue « extension à l'ensemble de l'espace-temps » est en fait une extension semi-complexe qui ne veut pas dire son nom, qui est d'ailleurs corroborée par le fait qu'on considère « qu'à l'intérieur des trous noirs les coordonnées de temps et d'espace échangent leurs rôles respectifs ».

Au lieu de parler de la « pathologie des coordonnées de Schwarzschild » il serait alors opportun de mettre sur la sellette la façon de traiter cette extension des coordonnées à travers l'obsession de déboucher sur des quantités réelles.

Mais, en conséquence, si on remet en question le modèle des trous noirs, de toutes tailles, si on récuse l'idée d'utiliser que la métrique extérieure, considérée isolément, pour décrire un objet physique, comme alors quel scénario proposer pour décrire le destin d'une étoile massive en fin de vie ?

Le modèle des plugstars³².

La métrique intérieure, pour une masse assimilée par Schwarzschild en février 1916, à une sphère emplie d'un matériau de densité constante, s'écrit :

$$(88) \quad ds^2 = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_e^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Plaçons-nous en un point fixe : ($dr = d\theta = d\varphi = 0$)

$$(89) \quad ds = c d\tau = \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_e^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right) c dt$$

$$(90) \quad d\tau = f(r) dt$$

$f(r)$ est le « time factor ». Comme note par Einstein en 1939 celui-ci peut s'annuler, et même devenir localement négatif, au centre de l'astre.

³² J.P.Petit, G.d'Agostini. Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. Octobre 2025.

Facteur Temps

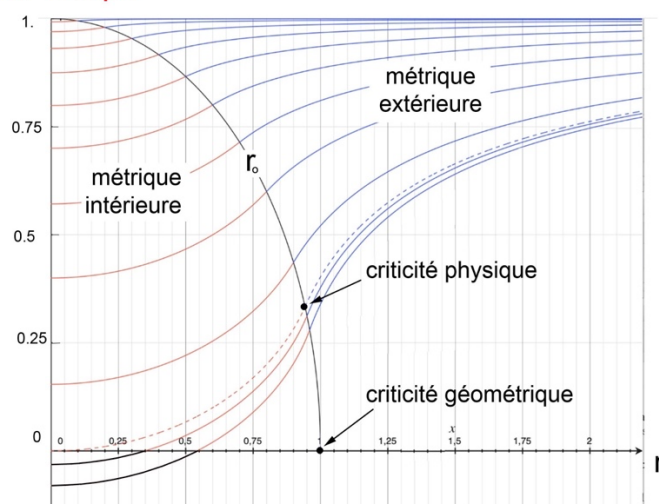


Fig.17 : L'évolution du « facteur temps ». En abscisse r/R_s

On a un éventail de courbes bleues, qui se rapprochent de l'axe des abscisses au fur et à mesure que croît le rayon de l'étoile, dans une évolution à masse volumique ρ constante. La criticité physique se manifeste quand le facteur temps devient négatif.

Or le temps propre τ ne saurait s'inverser, pas plus que la mesure ds de la longueur. On ne peut pas faire « marche arrière » le long d'une géodésique. Or :

$$(91) \quad d\tau = f dt$$

Comme $d\tau \geq 0$, si $f < 0$ alors $dt < 0$

La coordonnée de temps s'inverse.

Dans son blog « luminescence » le chroniqueur scientifique Jean-Pierre Luminet (cela fait 20 ans qu'il n'a pas publié d'article dans une revue scientifique, ses contributions se limitent à des livres) s'intéresse à un début de modèle, issu de la mécanique quantique, où on envisage de faire interagir deux entités cosmiques équipées de flèches du temps opposées. Et il s'empresse d'ajouter que l'inversion du temps n'entraîne pas automatiquement celle de l'énergie et de la masse.

C'est méconnaître la contribution du mathématicien Jean-Marie Souriau³³, à travers sa théorie des groupes dynamiques (ou groupes symplectiques). Dans la métrique la lettre t n'est qu'une coordonnée permettant le repérage des points dans l'objet géométrique 4D. Cette lettre n'a pas plus de contenu physique que ne le sont les valeurs de la latitude et de la longitude sur une sphère. L'inversion de cette coordonnée est alors synonyme d'inversion de la masse m et de l'énergie $m c^2$.

La géométrie est aussi affaire de groupes (d'isométrie). Le groupe symplectique de l'espace de Minkowski est le groupe de Poincaré. En étudiant l'action coadjointe des

³³ J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhäuser Ed. 1997

groupes sur le dual de leur algèbre de Lie, sur leur espace du moment (des grandeurs caractérisant le mouvement des particules, assimilées à des points-masses) Souriau a montré en 1970 que la T-symétrie entraînait l'inversion de la masse.

Tout cela a été repris et publié³⁴ dans une revue de physique mathématique en 2024. Le devenir d'une étoile massive déstabilisée devient alors différent dans le contexte géométrique Janus qui conjugue deux feuillet d'univers liés par une CPT symétrie, donc en particulier une T-symétrie.

Le fait que dans la partie centrale de l'astre la masse s'inverse est synonyme d'une modification topologique locale, permettant à cette masse inversée de fuir dans le second feuillet d'univers. Fuir, parce que soudain sensible à un champ gravitationnel inversé. L'image didactique d'une telle situation est celle de la chasse d'eau :

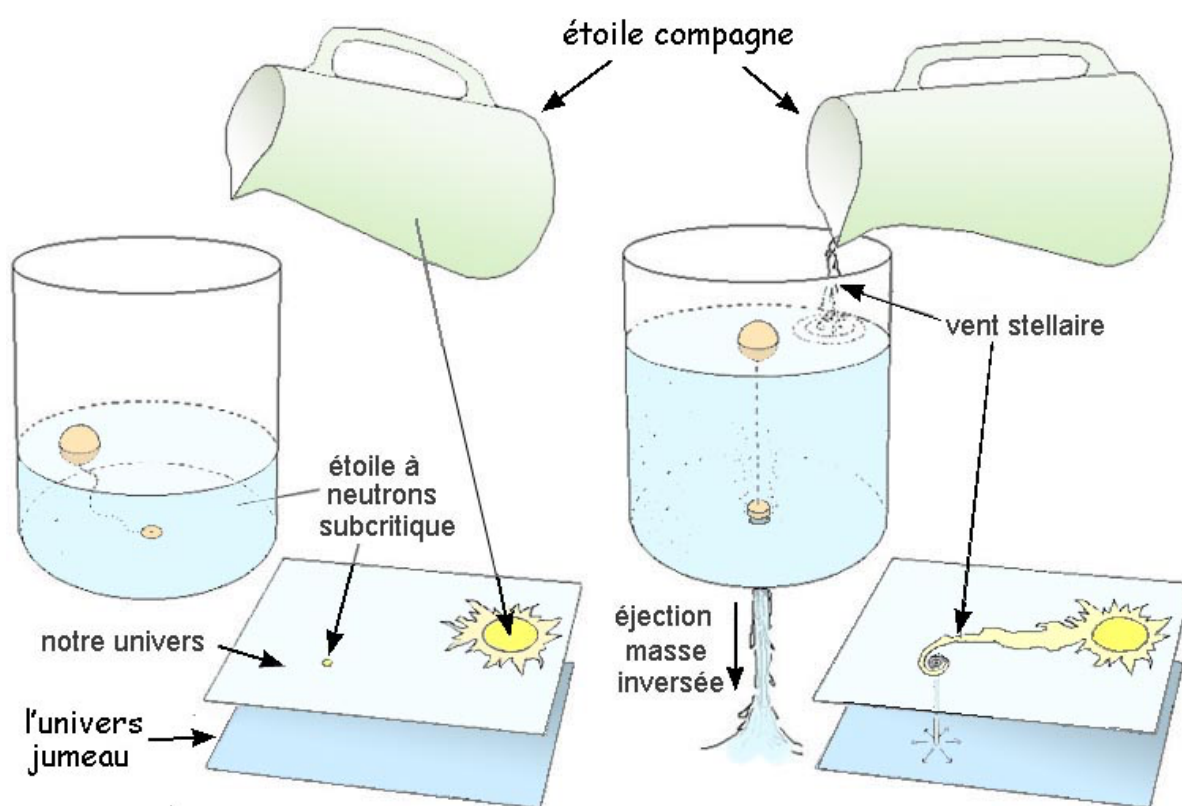


Fig.18 : Image didactique du mécanisme des plugstars

Quand une étoile compagne suffisamment proche émet du « vent stellaire » cette masse peut alors être captée par une étoile à neutron constituant le second élément du couple. Ceci l'amènera inmanquablement, au fil du temps, à cette criticité physique (à droite). Sa masse est alors maintenue constante, grâce à l'évacuation immédiate de cette masse en excès.

³⁴ J.P.Petit, H.Zejli : Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group. Reviews in Mathematical Physics. Vol. 37, n001, 2024. (contribution nulle de H.Zejli).

Si la masse critique censée faire évoluer une étoile à neutrons en trou noir est située autour de 3 masses solaires, la masse critique physique est inférieure, autour de 2.5 masses solaires.

Bien sûr, les seuls outils théoriques dont on dispose reposent sur la solution à symétrie sphérique. Les étoiles à neutrons peuvent être animées de rotations très rapides (jusqu'à 1000 tours par seconde). Tant que les vitesses de rotation restent négligeables devant la vitesse de la lumière on peut se limiter à cette solution à symétrie sphérique. Mais si ça n'est plus le cas le calcul théorique amènerait une modification de l'évaluation de la masse critique physique.

Celle-ci est entièrement basée sur la métrique intérieure. Avec rotation il faudrait disposer d'une solution exacte se raccordant à la métrique de Kerr, dont on ne dispose pas, personne n'ayant réussi à construire cette solution, relativiste, à ce jour.

Les mesures de vitesses des étoiles au voisinage des parties centrales de nombreuses galaxies ont amené à la conclusion de la présence au centre de celles-ci, d'objets à la fois très massifs et très concentrée. La simple mise en œuvre de la loi de Newton a permis d'évaluer ces masses.

- 4 millions de masses solaires pour l'objet SgrA* situé au centre de notre galaxie, la voie lactée
- Plus de 6 milliards de masses solaires pour l'objet situé au centre de la galaxie M87.

Il se trouve que la conjonction de plusieurs moyens d'observation (radiotélescopes) a permis l'obtenir des images de tels objets. Ceux-ci ont été immédiatement qualifiés de trous noirs géants, en trouvant simplement dans ces articles «on ne voit pas ce que cela pourrait être d'autre ».

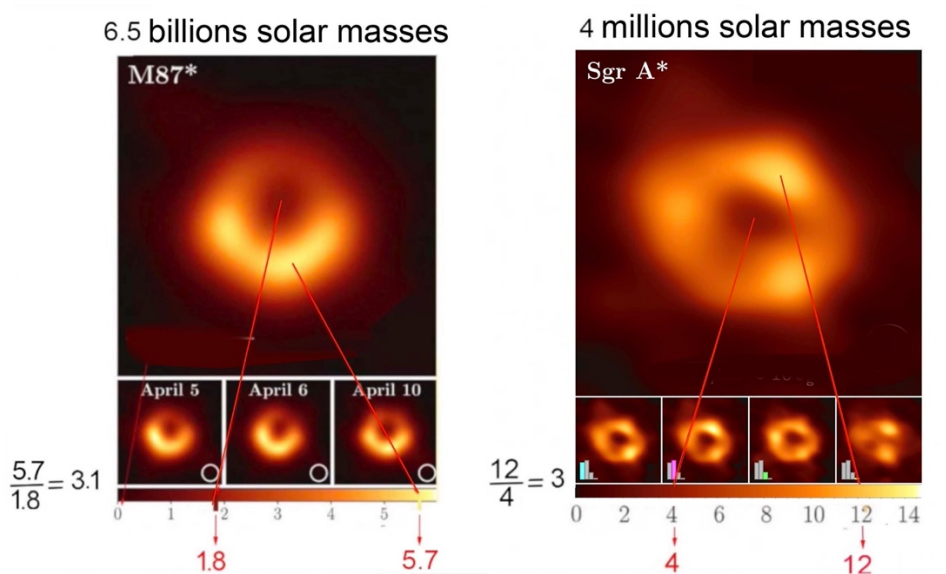


Fig.19 : Image des deux objets supermassifs.

Sous ces images une barre chromatique graduée en degrés Kelvin. Ceci ne signifie nullement qu'on puisse se fier à ces valeurs de température. Elles traduisent simplement, selon leur inverse, les longueurs d'onde des rayonnements captés. Les rapports indiqués traduisent donc des rapports de longueurs d'onde, maximale sur minimale. On s'aperçoit alors que ces rapports, dans les deux cas, sont significativement proches de 3.

Si ces objets sont des plugstars leurs parties centrales doivent effectivement présenter un effet de redshift gravitationnel, un accroissement de la longueur d'onde dans la partie centrale.

Si c'étaient des trous noirs cet effet se traduirait par un effet de redshift gravitationnel infini. Les parties centrales seraient totalement noires.

Le calcul montre alors que dans un plugstar (à symétrie sphérique) ce rapport serait de 3. Cette coïncidence, pour les deux premiers objets observés est alors intéressante.

D'aucuns (toujours le même) arguent qu'une solution à symétrie sphérique, sans rotation, ou avec rotation négligeable, ne saurait décrire de tels objets. Mais comment se forment-ils ?

Les tenants de l'interprétation basée sur des trous noirs géants prônent un phénomène progressif d'accrétion, de fusions successives d'objets plus légers (de « trous noirs stellaires »).

Nous voyons des choses différemment. Mais le modèle théorique reste à construire.

La cosmologie a toujours imaginé que l'évolution de l'univers s'accorde avec l'hypothèse d'isotropie et d'homogénéité. Nous imaginons au contraire que l'expansion s'effectue de manière irrégulière, ceci devant pouvoir se modéliser à travers des fluctuations conjointes des métriques.

Les galaxies sont corsetées par leur environnement de masse négative, auto-attractive, mais répulsive. Ces fluctuations des métriques entraînent un effet de modification de la masse apparente.

Si cette masse apparente se trouve diminuée sensiblement, la baisse d'efficacité du confinement peut s'avérer si importante qu'elle entraîne la dislocation de la galaxie. C'est selon nous ce qui correspond à l'observation de galaxies très irrégulières.

Si au contraire cette masse apparente se trouve renforcée, le champ gravitationnel de confinement se trouve accru et ceci entraîne alors la naissance d'une onde de densité annulaire, centripète. Imaginons, pour illustrer l'idée, le modèle didactique ci-après.

Nous aurons une cuvette en rotation, qui contient de l'eau. Sa forme est telle que la force de pesanteur équilibre en tout point la force centrifuge. La couche d'eau le long de cette paroi alors une épaisseur constante. Ceci simule la présence du gaz dans les galaxies, dont la densité varie peu à travers celle-ci.

Imaginons qu'on redresse soudain cette cuvette. Ceci donnera naissance à une onde de densité circulaire, qui tendra à converger vers le centre du système. Elle est en tous points comparable à un tsunami.

Lors de son passage cette onde renforce la valeur locale de la densité du gaz. Ceci entraîne la formation de nouvelles étoiles. C'est l'interprétation que nous donnons de la galaxie de Hoag.

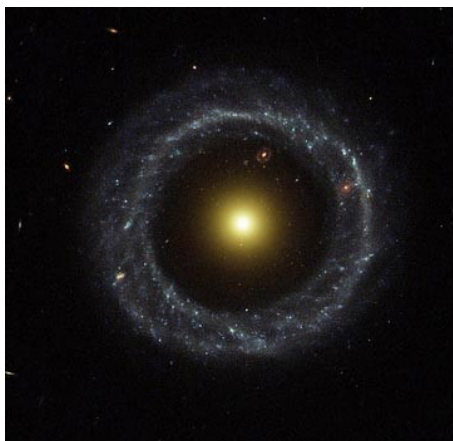


FIG. 20. Galaxie de Hoag

Comme peut le faire un tsunami ; lorsque la perturbation de densité affecte la partie centrale de la galaxie, il y a une remontée importante de la densité et de la température, au point que les conditions de fusion peuvent être atteintes dans toute la masse concernée. Cette focalisation d'onde de densité au centre des galaxies ne se traduit pas par une conservation de moment cinétique. L'onde n'en transporte pas. Dans ces conditions le mouvement de rotation reste modéré et la solution à symétrie sphérique, sans rotation, peut convenir pour décrire le phénomène.

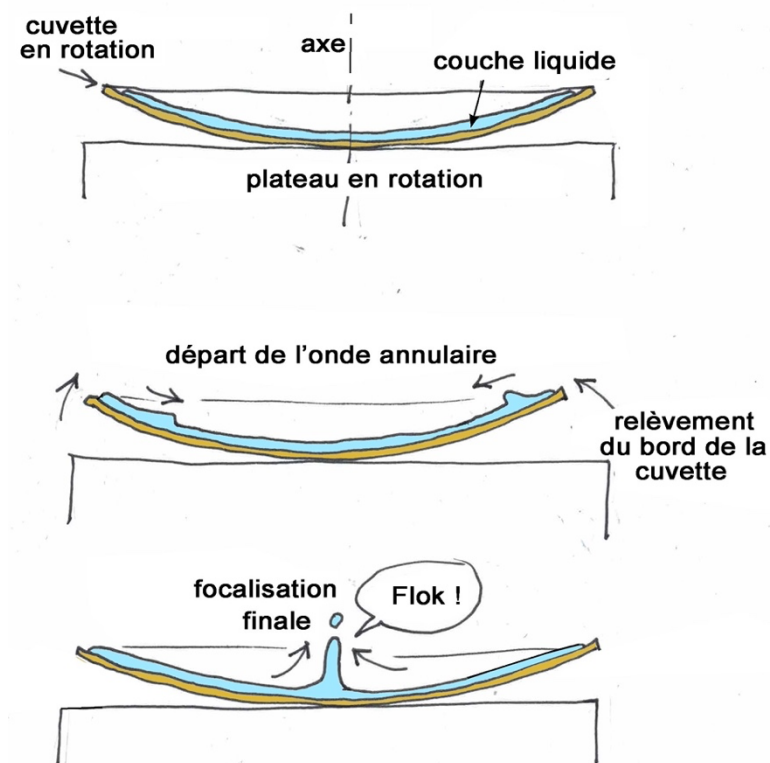


Fig. Simulation hydraulique du phénomène quasar.

On a ainsi le mécanisme de formation d'un quasar :

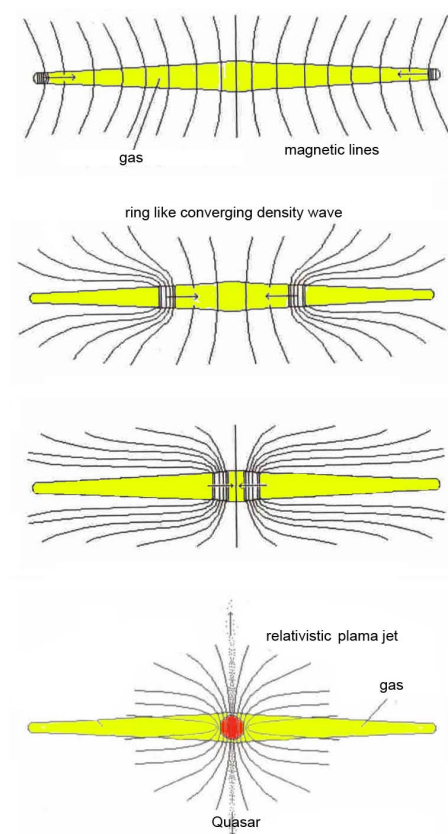


FIG. 21. Phénomène des quasars.

Les dessins ci-dessus suggèrent un mécanisme intéressant. L'onde de densité suscite la formation de nouvelles étoiles. Celles-ci ionisent alors le gaz interstellaire. Le degré d'ionisation peut alors être suffisant pour que le milieu se trouve dans des conditions « de nombre de Reynolds magnétique important », tel que le champ magnétique se trouve alors piégé dans le plasma. L'onde de densité ramasse alors les lignes de force du très faible champ magnétique présent dans la galaxie (un microgauss). Mais la conservation du flux fera que lorsque l'onde atteint le centre ce champ, dipolaire, atteint des valeurs considérables. Le plasma émis par les réactions de fusion se trouve alors focalisé selon deux jets, diamétralement opposés. L'objet au centre de la galaxie M-87, dont voici ci-après une image d'artiste, est un quasar actif.



Fig. Image d'artiste de la galaxie M-87.

En fait, l'image du jet de M-87 révèle une structure « tiretée », qui suggère des reprises périodiques d'activité, liées à l'arrivée d'onde de densités engendrées par des fluctuations conjointes des métriques. Sous cet angle, l'objet situé au centre de la voie lactée serait un « quasar éteint ».