Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen.

Von

WERNER BOY in Leipzig.

Einleitung.

In seiner berühmten Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas geht Gauß von der Definition des Krümmungsmaßes k einer Fläche in einem bestimmten Punkte aus. Das Integral dieses Krümmungsmaßes erstreckt über einen endlichen Bereich einer Fläche nennt er die „Curvatura integra" dieses Bereiches. Wir bezeichnen sie heute zum Unterschiede vom „Krümmungsmaß" als „Gesamtkrümmung" oder „Totalkrümmung" oder wohl auch noch als Curvatura integra, um Verwechslungen vorzubeugen, die dadurch entstehen könnten, daß man in Frankreich unter „courbure totale" unser „Krümmungsmaß" versteht. Die Curvatura integra eines Flächenstückes ist gleich dem Inhalt seines sphärischen Bildes, d. h. gleich dem Inhalt des Kugelstückes, das von den durch den Mittelpunkt einer Einheitskugel zu der Gesamtheit der Normalen der Fläche gelegten Parallelen aus der Kugeloberfläche ausgeschnitten wird. Die Krümmung eines Flächenstückes wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Umlaufungssinn seines Umfangs bei der Übertragung auf die Kugel erhalten bleibt oder sich umkehrt. Bedeckt das sphärische Bild eines Flächenstückes die Kugel mehrfach, so zerlegt man dieses Flächenstück in Teile, die sich einfach auf die Kugel abbilden, und bestimmt die Größe der Totalkrümmung der einzelnen Teile; die algebraische Summe dieser Einzelkrümmungen ist dann die Totalkrümmung des gesamten Flächenstückes.

Auf diese Totalkrümmung geht Gauß nicht weiter ein. Er sagt am Schlusse von Art. 6 der angeführten Abhandlung: „Indessen müssen wir die weitere Erörterung dieses Gegenstandes, *der die allgemeinste Auffassung der Figuren betrifft*, uns für eine andere Gelegenheit vorbehalten". Diese versprochene Untersuchung über die Totalkrümmung hat Gauß nicht veröffentlicht. Aber aus der gesperrt gedruckten Bemerkung geht hervor, daß er die Beziehung der Curvatura integra zu den Zusammenhangsverhältnissen der Flächen gekannt hat. Diese Beziehung ist aufgedeckt worden von Kronecker und von Dyck.

Kronecker definiert in seiner Abhandlung: „Über Systeme von Funktionen mehrer Variablen*) für Systeme von Funktionen eine gewisse „Charakteristik" K, d. h. eine gewisse Zahl, die dem Funktionssystem in bestimmter Weise zugeteilt ist. Durch die Gleichung $z = f(x, y)$ einer Fläche und ihre partiellen Ableitungen ist ein Funktionensystem (f, f_x, f_y) bestimmt, dessen Charakteristik auch schlechtweg als Charakteristik der Fläche: $z = f(x, y)$ bezeichnet wird. Ist die Fläche nun geschlossen und hat sie eine stetige Tangentialebene und eine abteilungsweise stetige Krümmung, so besteht zwischen ihrer Charakteristik K und der Totalkrümmung C die einfache Beziehung:

$$K = \frac{1}{2\pi} C$$

soweit Kronecker.

Dyck**) hat nun seinerseits für Flächen eine Charakteristik K' durch die Zahl der Rückkehrschnitte und der Ränder definiert, und zwar für geschlossene Flächen in folgender Weise. Eine geschlossene Fläche ist im Sinne der Analysis situs bekanntlich definiert durch die Zahl der auf ihr gleichzeitig möglichen, einander nicht schneidenden, nicht zerstückenden Rückkehrschnitte. Bei diesen muß man nun zwei Arten unterscheiden. Bei den Schnitten „der ersten Art" kehrt die mit einem gewissen Richtungssinn versehene Normale nach einmaligem Umlauf längs des Rückkehrschnittes in der Ausgangsrichtung zum Anfangspunkt zurück. Die Zahl dieser Schnitte sei σ. Jeder von ihnen liefert *zwei* Ränder. Bei den Schnitten „der zweiten Art" kehrt sich die Normale bei einmaligem Umlauf um. Ihre Zahl sei σ'. Jeder von ihnen liefert bloß *einen* Rand. (Vergl. etwa den Schnitt längs der Mittellinie des Möbiusschen Bandes.) Dyck setzt nun:

$$K' = 2 - 2\sigma - \sigma'.$$

Danach ist die Charakteristik der Kugel 2, die der Ringfläche 0 etc. Bei zweiseitigen Flächen ist $\sigma' = 0$. Bei einseitigen sind, wie wir bemerken wollen, σ und σ' nicht fest. Vielmehr können je zwei Schnitte σ' ersetzt werden durch einen Schnitt σ, und bei einseitigen Flächen auch umgekehrt je ein Schnitt σ durch zwei Schnitte σ'. Die Charakteristik K bleibt dabei, wie man sieht, ungeändert.

*) Berl. Monatsber. 1869, März und Aug. pag. 688f.

**) Dyck, Analysis situs I, Math. Annalen Bd. 32, 1888. In dieser Abhandlung ist auch die gesamte einschlägige Litteratur in höchst übersichtlicher Weise zusammengestellt.

Von dieser Charakteristik K' zeigt nun Dyck, daß sie identisch ist mit der Kroneckerschen Charakteristik des Systems (f, f_x, f_y). Damit ist die Totalkrümmung in Beziehung gesetzt zu den Rückkehrschnitten, also auch zu dem Begriff des Zusammenhangs und des Geschlechts von Flächen. Für zweiseitige Flächen, für die $\sigma' = 0$ ist, ist der Zusammenhang: $Z = 1 + 2\sigma$, das Geschlecht: $p = \sigma$. Also besteht zwischen der Totalkrümmung C und den angeführten Ausdrücken bei zweiseitigen Flächen die Beziehung:

$$\frac{1}{2\pi} C = K = 2(1-p) = 3 - Z.$$

Damit ist die von Gauß angedeutete Beziehung zwischen der Totalkrümmung und den allgemeinsten Eigenschaften der Flächen aufgedeckt. Wie man aber sieht, ist der dabei eingeschlagene Weg ein ziemlich komplizierter. Man ist nicht von der Totalkrümmung ausgegangen, sondern diese ist beiläufig in die Untersuchung hineingekommen. Auf Veranlassung von Herrn Prof. Hilbert-Göttingen hatte ich es unternommen, die von Gauß angedeutete Beziehung zwischen der Curvatura integra und den allgemeinsten Eigenschaften der Flächen aufzudecken. Ich ging dabei aus von der geometrischen Bedeutung der Totalkrümmung und fand natürlich die obigen Relationen, konnte diese aber auch erweitern auf Flächen, die nicht frei von Singularitäten sind, die etwa endende Doppelkurven enthalten. Das Mittel dazu bot mir eine Erweiterung des Begriffes der Krümmung auf singuläre Punkte wie Knoten, Spitzen, Kantenpunkte usw. Diese ganz in Analogie zum Krümmungsmaß definierte Krümmung habe ich aus einem später hervortretenden Grunde Äquivalentkrümmung genannt. Diese letztere ermöglichte es nun auch, den Begriff der Totalkrümmung und somit die obige Beziehung auf Polyeder anzuwenden. Durch eine einfache Umformung liefert die letztere dann die als verallgemeinerte Eulersche Sätze bekannten Relationen an Polyedern.

Diese Fragen habe ich im zweiten Kapitel meiner Dissertation: „Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen"*) behandelt. In § 1—§ 4 des Folgenden will ich einen kurzen Überblick über die dort eingeschlagene Methode und die gefundenen Resultate geben, ohne mich aber auf Ausführungen einzulassen, derentwegen ich auf die angeführte Dissertation verweise.

Diese Betrachtungen führen nun unmittelbar zur Topologie der Flächen. Die Größe der Curvatura integra C bestimmt sich durch die Charakteristik K und die Zahl n der *endenden* Doppelkurven als:

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi.$$

*) Göttingen, 1901.

Da drängt sich nun die Frage auf: Gibt es zu jedem $K(\leqq 2)$ und zu zu jedem $n(\geqq 0)$ auch eine zugehörige reelle Fläche? Die Frage spitzt sich dann zu der folgenden zu:

Gibt es eine ganz im Endlichen gelegene, geschlossene, singularitätenfreie Fläche, auf der nur ein Rückkehrschnitt zweiter Art möglich ist? Dabei sehen wir das Auftreten von Doppelelementen nicht als Singularität an, wohl aber das Auftreten von Enden von Doppelkurven. Wir verlangen nämlich, daß jeder Mantel für sich vollkommen regulär verlaufe.

Die gesuchte Fläche existiert in der Tat. Wir werden im Folgenden zwei Typen von dieser Fläche beschreiben*). Diese Fläche interessiert nun nicht nur in rein topologischer Hinsicht, sie verdient auch aus einem ganz anderen Grunde Beachtung. *Sie entspricht nämlich im Sinne der Analysis situs vollkommen der projektiven Ebene.* Sie entspricht ihr in demselben Sinne wie die Kugel der komplexen Zahlenebene. Bei geeigneten Festsetzungen würde auf unserer Fläche die projektive Geometrie gelten und zwar ausnahmlos für alle Punkte.

Diese Fläche habe ich schon behandelt im Cap. III, § 3—§ 5 meiner Dissertation und in einem Aufsatz: „Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene, *singularitätenfreie* Fläche." Göttinger Nachrichten, 1901, Heft 1.

Wir wollen im Folgenden das dargelegte Programm ausführen.

§ 1.

Die vollkommen stetige Deformation von Flächen. Die Curvatura integra als Kurvenintegral.

Betrachten wir ein überall positiv gekrümmtes Gebiet einer Fläche. Sein sphärisches Bild wird einen gewissen Kugelteil bedecken. Wir wählen das Gebiet so klein, daß es diesen Kugelteil nur·einfach bedeckt. Halten wir dann die Grenzkurve des betreffenden Gebietes samt ihren Tangentialebenen, d. h. den sogenannten Grenz*streifen* fest, so bleibt sein Bild auf der Kugel, also auch der von diesem umschlossene Inhalt erhalten, wenn wir die von ihm umschlossene Fläche irgendwie deformieren. Wir sehen daraus, daß der Curvatura integra eines Flächenstückes ein hoher Grad von Invarianz zukommt. Betrachten wir nun statt eines Flächenstücks eine geschlossene Fläche, etwa die Kugel, so erkennt man leicht, daß ihre Totalkrümmung bei allen Deformationen ungeändert bleibt, bei denen die Fläche mit ihren Tangentialebenen stetig und das Krümmungsmaß in

*) Diese beiden Flächen sind als Gypsmodelle in dem bekannten Modellverlage von Martin Schilling, Halle a. d. S. erschienen.

jedem Punkte unter einer endlichen Grenze bleibt. Die Notwendigkeit der letzteren Annahme habe ich in meiner Dissertation dargelegt (pag. 17). Deformationen, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, nennen wir „vollkommen stetige“ Deformationen*). Die Gleichheit der Totalkrümmung ist also die notwendige, (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür, daß zwei Flächen vollkommen stetig ineinander übergeführt werden können. Nun kann ich jede Fläche, die denselben Zusammenhang hat wie die Kugel, d. h. für die $K = 2$ ist, und die außerdem frei von Doppelkurven ist, auf die Kugel vollkommen stetig deformieren. Daß ich solche Flächen überhaupt auf die Kugel transformieren kann, ist aus der Funktionentheorie her geläufig. Die vollkommene Stetigkeit wird dabei nur beim Verschwinden der Doppelkurven unterbrochen. Sind solche nicht vorhanden, so läßt sich die Verwandlung vollkommen stetig ausführen. Daraus ergibt sich: Alle Flächen mit der Charakteristik $K = 2$ ohne Doppelkurven haben die Totalkrümmung 4π.

Wir könnten nun diesen rein auf der Anschauung beruhenden Weg weiter verfolgen. Wir wollen aber zunächst rechnerisch aus dem die Curvatura integra bestimmenden Integral einige Resultate ableiten. Diese werden uns dann die Fortsetzung der Überlegung sehr erleichtern.

Die Curvatura integra C eines Stückes G der Fläche: $z = z(x, y)$ mit der Randkurve c ist gegeben durch:

$$C = \int_G \frac{z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}\, d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Flächenelement bezeichnet. Damit unser Integral einen Sinn hat, ist vorausgesetzt, daß die Fläche $z = z(x, y)$ in dem Gebiete G mit ihren ersten Differentialquotienten stetig und das Krümmungsmaß stets endlich sei und daß das letztere sich beim Fortschreiten längs einer beliebigen Linie in G wenigstens abteilungsweise stetig ändere. Außerdem nehmen wir vorderhand ausdrücklich an, die betrachteten Flächen seien zweiseitig. Flächen, die diese Voraussetzung erfüllen, erhalte ich, wenn ich Stücke beliebiger Flächen so zusammensetze, daß die entstehende Fläche nirgends Ecken, Kanten oder dergl. hat. Am einfachsten übersieht man das bei den Rotationsflächen. Ich kann etwa einen Kreiscylinder von endlicher Höhe durch Halbkugeln schließen.

*) In analoger Weise kann man bei geschlossenen ebenen Kurven eine vollkommen stetige Deformation definieren. Bestimmt man dann als Curvatura integra der Kurve $\int k\,ds$, wo k die bekannte Krümmung, ds das Längenelement ist, so ergibt sich der hübsche Satz: *Die Gleichheit der Curvatura integra ist die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß sich zwei geschlossene ebene Kurven vollkommen stetig in einander deformieren lassen.* (Vergl. Cap. I m. Diss.)

Nun haben wir gesehen, daß die Curvatura integra eines Flächenstückes, dessen Bild die Kugel einmal bedeckt, nur abhängt von der Randkurve und den Tangentialebenen in dieser. Daraus entnimmt man, daß es möglich ist, das Flächenintegral, durch das die Curvatura integra gegeben ist, darzustellen als Kurvenintegral über den Rand des Gebietes. Diese Umformung gelingt nun unschwer, wenn man bedenkt, daß das Integral der Curvatura integra nichts anderes darstellt als einen Flächeninhalt auf der Kugel. Einen solchen kann man leicht als Integral über den Rand darstellen und dieses Integral dann auf der Fläche deuten. Aber das so gefundene Integral gilt nur für Gebiete der Fläche, welche Pole der Kugel nicht enthalten. Das abzubildende Flächenstück darf also keine vertikalen Normalen, d. h. keine Extreme und Sattelpunkte enthalten. Enthält es solche Punkte doch, so sind diese durch kleine Ovale auszuschließen. Die Ovale und ihre Bilder hat man zu den Grenzen hinzuzurechnen. Wir nehmen nun an, die horizontalen Tangentialebenen berührten nur in Punkten, deren Krümmungsmaß von 0 verschieden ist, eine Annahme, die, wie man leicht erkennt, unwesentlich ist. Dann geben die Ovale um diese Punkte wieder Ovale auf der Kugel und der Beitrag, den eine Oval zur Gesamtkrümmung liefert, läßt sich von vorneherein bestimmen. Wir können dann die Ovale aus der Begrenzung des Kurvenintegrals fortlassen und die ihnen entsprechenden Werte zu dem Werte, den die eigentliche Begrenzung des Flächenstückes liefert, addieren. Man findet so:

$$\text{I.} \qquad C = \int_c \frac{z_x dz_y - z_y dz_x}{(1+W)\cdot W} + R_1 \cdot 4\pi,$$

$$\text{II.} \qquad C = -\int_c \frac{z_x dz_y - z_y dz_x}{W\cdot(W-1)} + R_2 \cdot 4\pi,$$

$$\text{III.} \qquad C = -\int_c \frac{z_x dz_y - z_y dz_x}{(z_x^2+z_y^2)\cdot W} + R_3 \cdot 2\pi,$$

wo:

$$W = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

ist und die Indizes partielle Ableitungen nach den betreffenden Variablen bedeuten. Die Grenzkurve c ist stets so zu durchlaufen, daß das Gebiet, dessen Curvatura integra bestimmt werden soll, zur Linken liegt. Die drei angegebenen Werte für die Totalkrümmung unterscheiden sich nur durch die Stellung, die Nord- und Südpol in ihnen einnehmen und dementsprechend in der Bestimmung der Zusatzglieder.

In Formel I liefern die Punkte, die sich auf den Nordpol abbilden, keinen Beitrag, die sich auf den Südpol abbildenden Extreme E_s und Sattelpunkte S_s einen solchen von je $+4\pi$ resp. -4π, so daß ist:

$$R_1 = E_s - S_s.$$

In Formel II vertauschen Nordpol und Südpol ihre Rollen, sodaß, wenn wir die sich auf den Nordpol abbildenden Extreme und Sattelpunkte resp. mit E_n und S_n bezeichnen, wird:

$$R_2 = E_n - S_n.$$

Schließlich ist in Formel III:

$$R_3 = E - S = R_1 + R_2,$$

wo E die Gesamtzahl der Extreme, S die der Sattelpunkte ist. Durch eine leichte Umformung kann man den Integranden allein als Funktion der Richtungscosinus ξ, η, ζ auf dem Rande der betrachteten Fläche darstellen. Der erste Integrand wird beispielsweise:

$$\frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{1+\zeta}.$$

Wir erhalten so den Satz: *Die Curvatura integra eines Flächenstückes hängt nur ab von dem begrenzenden Streifen und von der Zahl der im Inneren gelegenen Extreme und Sattelpunkte.*

Für eine geschlossene Fläche ergiebt sich:

Die Curvatura integra einer geschlossenen Fläche hängt nur ab von der Zahl der Extreme und Sattelpunkte.

Zerlegen wir nämlich durch eine geschlossene Kurve die Fläche in zwei Teile, so heben sich aus der Summe der Totalkrümmungen beider Teile die Integrale heraus, da diese über dieselbe Kurve in entgegengesetztem Sinne zu erstrecken sind. *Genauer ergibt sich für die Totalkrümmung einer geschlossenen Fläche:*

$$\begin{aligned} C = R_1 \cdot 4\pi &= (E_s - S_s) \cdot 4\pi \\ = R_2 \cdot 4\pi &= (E_n - S_n) \cdot 4\pi \\ = R_3 \cdot 2\pi &= (E - S) \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

welche Relationen man leicht in Worte faßt. Es ergibt sich auch:

$$E_s - S_s = E_n - S_n = \frac{1}{2}(E - S).$$

Die Differenz der Extreme und Sattelpunkte ist also stets eine gerade Zahl; wir fügen hinzu *bei zweiseitigen Flächen*, denn diese Voraussetzung ist in unserem Resultate wesentlich enthalten.

Um nun die Totalkrümmung C zu bestimmen, könnten wir die Differenz $E - S$ zu bestimmen suchen, sie etwa in Beziehung setzen zur Charakteristik. Wir würden dann im Prinzip dasselbe Verfahren einschlagen wie Dyck. Wir verfahren aber anders: wir drücken die Totalkrümmung direkt aus durch die Charakteristik, indem wir alle Flächen zurückführen auf doppelkurvenlose Flächen der Charakteristik $k=2$, deren Totalkrümmung wir schon als 4π erkannt haben. Als Mittel zu dieser Reduktion dient die Äquivalentkrümmung.

§ 2.

Die Äquivalentkrümmung.

Wir gehen aus von der Betrachtung der Spitze eines Kreiskegels. (s. Fig. 1.) Wir legen in den Kegel eine Kugelschale FEG. Wir können uns nun die Kegelspitze entstanden denken dadurch, daß der Mittelpunkt M dieser Kugelschale auf der Geraden OH auf die Spitze O sich zubewegt, während ihr Radius so abnimmt, daß die Kugel dauernd den Kegel berührt, bis OM schließlich unendlich klein wird. Der Inhalt der Kugelschale wird dabei immer kleiner, aber ihre Curvatura integra ändert sich nicht. Es hindert uns nun nichts, festzusetzen, daß der Kegelspitze, in die die Kugelschale übergeht, wenn ihr Radius nach 0 hin abnimmt, dieselbe Krümmung zukomme, wie der Kugelschale. Da das die Curvatura integra einer der Spitze „äquivalenten" Fläche ist, so wollen wir diese Krümmung kurz: *„Äquivalentkrümmung"* nennen. Es entspricht also der Kegelspitze auf der Kugel ein endliches Flächenstück. Das steht vollkommen damit in Einklang, daß das Gaußsche Krümmungsmaß: $\lim\limits_{f=0} \frac{f'}{f}$, wo f der Flächeninhalt einer den Punkt enthaltenden Fläche, f' der ihres sphärischen Bildes ist, für einen solchen Punkt ∞ ist.

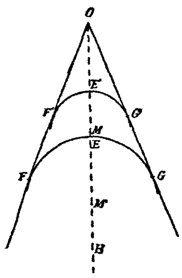

Fig. 1.

Was wir jetzt bei der Kreiskegelspitze gemacht haben, wollen wir allgemein durchführen.

Wir schließen die betreffende Singularität (Punkte oder Kurven) durch eine oder wenn nötig durch mehrere Kurven ein und denken uns diese Kurven so durchlaufen, daß die Singularität stets zur Linken liegt. Diese Kurven übertragen wir auf die Kugel, wo sie einen bestimmten Flächeninhalt umschließen, der durch ein Integral über die Kurven gegeben ist. Die die Singularität einschließenden Kurven lassen wir sich immer enger um die Singularität zusammenziehen und bilden schließlich den Grenzwert (indem wir irgend einen Prozeß zugrunde legen, der uns die Garantie gibt, diesen Grenzwert zu erhalten, bei einer Spitze etwa den größten geodätischen Abstand der Spitze von der Kurve nach 0 hin konvergieren lassen). Wenn dieser Grenzlage ein bestimmter Flächeninhalt auf der Kugel entspricht, so schreiben wir ihn der Singularität als Äquivalentkrümmung zu.

Die Äquivalentkrümmung ist also gleich dem Grenzwert des Flächeninhaltes, den das Bild einer die Singularität umschließenden Kurve auf der Kugel bestimmt, wenn diese Kurve sich in die Singularität zusammenzieht.

Dieser Grenzwert ist nach der Definition bei einer kegelförmigen Spitze identisch mit der Äquivalentkrümmung der Spitze des Tangentialkegels, da beide ja denselben Grenznormalenkegel haben. Bei der Spitze eines Kegels brauchen wir aber nicht erst den Grenzübergang auszuführen, um die Krümmung zu erhalten; denn das in § 1 abgeleitete Integral über irgend einen die Spitze einfach umschließenden Streifen ist gleich der Äquivalentkrümmung der Spitze, da ja das Krümmungsmaß des Mantels in jedem Punkte 0 ist. Die Äquivalentkrümmung ist also durch ein Integral über einen Streifen des Tangentialkegels gegeben.

Denken wir uns die Spitze des Tangentialkegels in dem Mittelpunkte der Einheitskugel liegen, so ist der zugehörige Normalkegel der sogenannte zum Tangentialkegel „polare" Kegel, und die Äquivalentkrümmung ist nichts anderes wie das von dem Polarkegel ausgeschnittene Kugelstück, also die „Appertur" des Polarkegels.

Wir wollen im folgenden nun einige Singularitäten in Bezug auf ihre Äquivalentkrümmung betrachten.

In einer wirklichen Spitze artet der Tangentialkegel in eine Gerade aus. Der zugehörige Normalkegel ist eine Ebene. Die Äquivalentkrümmung einer solchen Spitze ist also 2π.

Betrachten wir jetzt eine geschlossene Kante. Dieselbe wird eingeschlossen durch zwei Kurven. Die Integrale I, II oder III (§ 1) über diese Kurve geben in der Grenze die Äquivalentkrümmung. Hierbei müssen natürlich, wenn der Nord- oder Südpol innerhalb des der Kante äquivalenten Gebietes liegt, diese in richtiger Weise berücksichtigt werden. Das macht aber in speziellen Fällen keine Schwierigkeit. Diese Definition der Äquivalentkrümmung einer Kante ist gleichwertig der folgenden, die für die Anwendung und namentlich für die Anschauung meist bequemer ist. In einem Kantenpunkte nimmt die Normale zwei bestimmte Grenzwerte an. Zu der Ebene dieser Normalen — der Normalebene der Kante — legen wir durch den Mittelpunkt der Einheitskugel eine Parallelebene. Diese schneidet auf der Kugel einen größten Kreis aus. Dem Kantenpunkte schreiben wir als Äquivalent den zwischen den Bildpunkten der beiden Normalen liegenden kürzeren Teil dieses Kreisbogens zu. Wenn wir die beiden Normalen an der geschlossenen Kurve entlang laufen lassen, so bewegt sich der Kreisbogen auf der Kugel, und der von ihm beschriebene Flächenraum, in der richtigen Weise in positive und negative Teile zerlegt, ist die Äquivalentkrümmung der Kante. Diese Auffassung der Äquivalentkrümmung einer Kante, die sich in praxi mit der früher entwickelten deckt, hat ihr gegenüber den Vorzug, daß sie einem beliebig aus einer Kante herausgegriffenen Stück eine bestimmte Äquivalentkrümmung zuschreibt.

Zwei Flächenmäntel mögen sich längs einer Kurve durchdringen; wir zerschneiden diese Mäntel längs dieser Kurve und heften je zwei der entstandenen Ränder so zusammen, daß zwei Kanten entstehen. Aus diesen Kanten denken wir uns durch die Normalebenen in einander entsprechenden Punkten R, R' und S, S' je ein Stück herausgeschnitten und wollen sehen, wie sich die Äquivalentkrümmungen dieser Stücke verhalten (s. Fig. 2). Die Normale auf einem Flächenstück bestimmen wir dabei willkürlich, die auf den anderen wählen wir dann so, wie wir sie auf der unzerschnittenen Fläche hätten bestimmen *müssen*. Dann ergibt eine einfache Betrachtung: Die Äquivalentkrümmungen der beiden Kurvenstücke sind absolut genommen gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; denn die den beiden Kanten entsprechenden Flächeninhalte decken sich, werden aber entgegengesetzt durchlaufen. *Wenn wir also die sich in einer geschlossenen Doppelkurve durchdringenden Mäntel zerschneiden und in anderer Weise aneinanderheften, so haben die entstehenden Kanten entgegengesetzte Äquivalentkrümmung.* Eine einzelne Kurve auf einer Fläche liefert keinen Beitrag zur Totalkrümmung; die Kurven, die die geschlossene Doppelkurve auf den einzelnen Mänteln bestimmt, liefern also keinen Beitrag. Zerschneide ich die Fläche, bilde durch Umheftung die Kanten, und rechne ihre Äquivalentkrümmungen zur Curvatura integra hinzu, so liefert zwar jede der Kanten einen Beitrag, aber diese Beiträge heben sich fort, sodaß die Curvatura integra der Gesamtfläche durch unsere Umschaltung ungeändert bleibt. Wir bemerken noch, daß, wenn einer der sich durchdringenden Flächenmäntel eine Kante enthält, diese Kante beim Umschalten zwei Ecken liefert, deren Äquivalentkrümmungen auch entgegengesetzt gleich sind, die sich also auch gegenseitig in ihrem Einfluß zerstören.

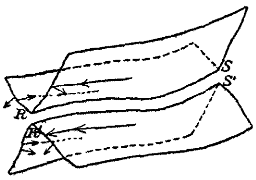

Fig. 2.

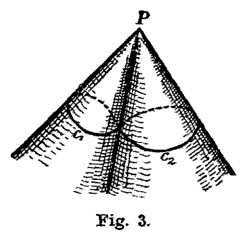

Fig. 3.

Im besonderen Grade erregt unsere Beachtung der Endpunkt einer Doppelkurve. Wir denken uns zwei übereinanderliegende ebene Blätter längs eines vom Punkte P ausgehenden Strahles zerschnitten und die Ränder nach Art eines Riemannschen Blattes überkreuz aneinander geheftet. Dieses Blatt werde dann in irgend einer Weise deformiert. In der Umgebung von P hat dann die Fläche etwa die in Fig. 3 gezeichnete Form. Den Tangentialkegel in P erhalten wir, wenn wir zwei Kegel aneinanderlegen (im allgemeinen mit einer scharfen Kante), längs der Berührungslinie zerschneiden und überkreuz aneinanderheften. Diesen Tangentialkegel brauchen wir allein zu betrachten. Die Äquivalentkrümmung der Spitze ergibt sich, wenn wir die Gesamtspitze mit einer Kurve umgeben und längs dieser Kurve hin integrieren. Ihre Krümmung sei A. Bezeichnen wir die beiden Teile, in die diese Kurve durch die Doppelkurve geteilt wird, mit c_1 und c_2, und die Integrale über eine Kurve immer mit I und dem Index, durch den die Kurve bezeichnet wird, so ist:

$$A = I_1 + I_2.$$

Dabei wählen wir den Integranden passend nach § 1 I—III oder umgeben die Pole mit Kreisen, die wir als schon in c_1 oder c_2 enthalten ansehen. Von P aus zerschneiden wir die Flächenmäntel längs der Doppelkurve und heften die Ränder so aneinander, daß aus P zwei getrennte Spitzen entstehen. Hat die eine von ihnen die Äquivalentkrümmung A_1, die andere A_2, so ergibt sich leicht:

$$A = A_1 + A_2,$$

denn es ist: $A_1 = I_1 + I_3$, $A_2 = I_2 - I_3$, wo I_3 das Integral über den Kreisbogen c_3 ist, auf den sich die Kantenpunkte abbilden; derselbe ist, wenn wir den Normalen der beiden Kegel ihre ursprüngliche Richtung lassen, für die Punkte beider Kanten derselbe, wird aber bei der Integration in verschiedenen Richtungen durchlaufen. Wenn also eine Fläche eine endende Doppelkurve enthält und es nach dem Zerschneiden möglich ist, die Ränder so zu heften, daß an beiden Enden gleichzeitig zwei getrennte Spitzen entstehen, (siehe Fig. 4), so wird durch diese Umschaltung die Curvatura integra der Gesamtfläche nicht geändert, (wobei, wie immer, die Äquivalentkrümmung als ein Teil der Curvatura integra angesehen wird).

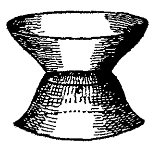

Fig. 4.

Die ausgeführte Zerschneidung und Umheftung einer endenden Doppelkurve, bei der im Ganzen vier Spitzen entstehen, ist aber durchaus nicht immer möglich. Wenn wir ein ebenes Doppelblatt wie vorhin längs eines Strahls von P aus zerschneiden, die Ränder kreuzweise aneinanderheften, jetzt aber nur bis zum Punkte P' (s. Fig. 5), von dort ab die direkt übereinanderliegenden Ränder miteinander verbinden, so erhalten wir eine Kurve, bei deren Umheftung, immer nur an einer Seite zwei getrennte Spitzen entstehen. Diese Doppelkurven nennen wir: *„Doppelkurven mit ungleicher Endenschaltung“*, die vorigen *„Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung“*. Ihr Auftreten veranlaßt uns zu der Frage: Wenn ich das Ende einer Doppelkurve so umschalte, daß bloß eine Spitze

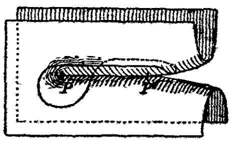

Fig. 5.

entsteht, wie verhält sich dann die Äquivalentkrümmung A' der entstehenden Spitze zu der A der ursprünglich gegebenen?

Durch einfache Betrachtungen findet man:

$$A = A' + 2\pi.$$

Diese Relation kann bei der Ableitung der Curvatura integra spezieller einseitiger Flächen zuweilen gute Dienste tun.

Noch eine kurze Bemerkung wollen wir hinzufügen. Die über die Äquivalentkrümmung zweier durch Umschaltung einer Doppelkurve entstandenen Kanten angestellte Betrachtung gilt auch in folgendem speziellen Falle. Wir denken uns eine Fläche doppelt belegt, zerschneiden die beiden Belegungen längs einer geschlossenen Kurve und heften die obere Belegung an die untere. Die dadurch entstehenden Kanten haben auch entgegengesetzt gleiche Äquivalentkrümmung; jedem Kantenpunkte entspricht ein Halbkreis auf der Kugel. Ein einzelner Kantenpunkt liefert zur Äquivalentkrümmung keinen Beitrag (vorausgesetzt natürlich, daß die Schnittkurve in ihm eine stetige Tangente hat). Zerschneiden wir aber jetzt von einem Punkte der Kante ausgehend die beiden Blätter abermals und heften die übereinanderliegenden Ränder zusammen, so haben die dadurch entstehenden zwei Spitzen zusammen die Äquivalentkrümmung 2π, wie man leicht sieht. Das Entstehen eines solchen Punktes vermehrt also die Curvatura integra um 2π.

§ 3.

Die Curvatura integra von zweiseitigen Flächen.

Wir wollen nun zunächst die Totalkrümmung einer beliebigen zweiseitigen Fläche bestimmen. Wir haben gesehen: Eine geschlossene Fläche vom Geschlechte $p = 0$, d. i. eine Fläche der Charakteristik $K = 2$, die selbst stetig ist, stetige Richtungscosinus der Normalen hat und deren Krümmungsmaß nirgends unendlich wird, hat die Totalkrümmung 4π. Nach Definition der Äquivalentkrümmung können wir die obigen Voraussetzungen fallen lassen bis auf die Forderung, daß die Fläche selbst stetig ist. Auch Flächen mit Kanten und Ecken der Charakteristik $K = 2$, die frei von Doppelkurven sind, haben die Curvatura integra 4π. Dabei verstehen wir hier unter der Curvatura integra C stets die Totalkrümmung der regulären Flächenmäntel vermehrt um die Äquivalentkrümmung der singulären Stellen. Unsere Definition der Äquivalentkrümmung tut ja nichts anderes, als die Stellen mit unendlichem Krümmungsmaß ersetzen durch Flächen mit endlicher Krümmung; sie rundet die Unstetigkeiten ab. Die Kurven auf der Kugel, welche die den Singularitäten entsprechenden Flächenstücke begrenzen, treten gleichzeitig als Begrenzung der Bilder der regulären Flächenmäntel auf, so daß die Integrale über sie sich fortheben. Wenn wir ein einfach berandetes einfach zusammenhängendes Flächenstück doppelt belegt denken, und annehmen, die beiden Belege hingen an den Rändern zusammen, so hat diese Fläche die Totalkrümmung 4π. Bei einem so als doppelt belegt aufgefaßten Kugeloktanten hat z. B. jede Belegung die Krümmung $\frac{\pi}{2}$, jede Kante die Krümmung 0, jede der Ecken die Äquivalentkrümmung π, so daß diese Fläche in der Tat die Curvatura integra 4π hat.

Wir denken uns eine zweiseitige, doppelpunktlose Fläche mit der Curvatura integra C und der Charakteristik K doppelt belegt, ziehen durch beide Belege die σ nicht zerstückenden Rückkehrschnitte und heften die übereinanderliegenden Ränder aneinander. Wir erhalten eine Fläche mit 2σ geschlossenen Kanten. Hierbei ändert sich nach § 4 die Totalkrümmung nicht, bleibt also in Rücksicht auf die doppelte Belegung $2C$. Ziehen wir auf der entstandenen Fläche $2\sigma - 1$ die Kanten in bestimmter Weise verbindende, beide Belege durchdringende Schnitte und heften die übereinanderliegenden Ränder aneinander, so erhalten wir eine Fläche von der Charakteristik $K = 2$. Diese hat einerseits die Totalkrümmung 4π, anderseits die Krümmung $2C + 4\pi(2\sigma - 1)$; denn bei jedem der letzten Schnitte entstehen zwei der am Schlusse von § 4 besprochenen Punkte, die die Äquivalentkrümmung 2π haben. Mithin ist:

$$4\pi = 2C + 4\pi(2\sigma - 1),$$

also:

$$C = K \cdot 2\pi = (1-p)4\pi$$

d. h. die Totalkrümmung einer geschlossenen zweiseitigen Fläche ohne Doppelpunkte ist gleich der mit 2π multiplizierten Charakteristik der Fläche.

Bevor wir nun die Formeln für Flächen mit Doppelkurven aufstellen, müssen wir einige Worte über Doppelkurven im allgemeinen sagen.

Die beiden Arten von nichtgeschlossenen Doppelkurven: Doppelkurven mit gleicher und solche mit ungleicher Endenschaltung haben wir schon im § 2 kennen gelernt. Die letzteren haben stets die Einseitigkeit zur Folge, kümmern uns hier also noch nicht. (In Fig. 5 ist ein Rückkehrschnitt eingezeichnet, längs dessen sich die Normale umkehrt).

Mannigfaltiger sind scheinbar die Arten der geschlossenen Doppelkurven. Denken wir uns in einem Punkte der Doppelkurve auf beiden Mänteln in einer bestimmten Richtung die Normalen errichtet und nun diese beiden Normalen miteinander die Doppelkurve durchlaufen, so können diese nach ihrer Rückkehr zum Ausgangspunkte acht verschiedene Lagen einnehmen. Wie man leicht sieht, sind dreimal je zwei von den erhaltenen Konfigurationen insofern identisch, als sie bei Umkehrung einer der

Anfangsrichtungen der Normalen oder bei Umkehr des Umlaufungssinnes der Doppelkurve ineinander übergehen. Es bleiben nur noch die fünf in Fig. 6 *a*—*e* dargestellten Fälle übrig. Fig. 6 *a* stellt die Anfangslage der Normalen dar, von denen die eine von der anderen durch Strichelung unterschieden ist. Die Normalen können in den Lagen *a*, *b*, *c*, *d*, *e* zurückkehren. Die Doppelkurven wollen wir entsprechend als Typus *a*—*e* unterscheiden. Fall *a* ist der gewöhnliche. Im Falle *b* kehren beide Normalen ihre Richtung um. Die zugehörige Fläche ist also einseitig, und bei ihr ist $k' \leqq 0$ $(\sigma' \geqq 2)$ da die Spuren der Doppelkurve auf den Mänteln zwei Rückkehrschnitte der zweiten Art liefern. Im Falle *c* kehrt sich die eine Normale um, die Fläche ist also auch einseitig. Fall *d* und *c* gehören insofern zusammen, als bei ihnen die Normalen nach einmaligem Umlauf nicht auf den Ausgangsmänteln zurückkehren. Bei zweimaligem Umlauf baben bei Typus *d* die Normalen wieder ihre alte Richtung, bei *e* dagegen die entgegengesetzte. Erst nach viermaligem Umlauf nehmen in diesem Falle die Normalen wieder die Ausgangsrichtung an. Während Typus *d* sehr wohl auf zweiseitigen Flächen möglich ist, hat eine Doppelkurve vom Typus *e* die Einseitigkeit der zugehörigen Fläche im Gefolge.

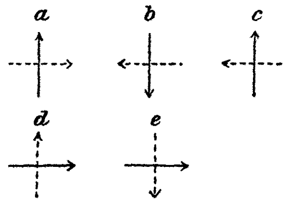

Fig. 6.

Aber eine einfache Bemerkung wird die Zahl dieser Typen abermals um drei verringern. Solange man die Fläche als ein starres Gebilde ansieht, steht jeder Typus gleichwertig neben dem anderen. Von dem allgemeinen Standpunkte der Analysis situs aus gehören aber Flächen, die durch vollkommen stetige Deformation in einander übergehen, zusammen, und Eigenschaften, die bei einer solchen Deformation nicht erhalten bleiben, fallen aus dem Rahmen unserer Betrachtung. Durch eine beliebig kleine, vollkommen stetige Deformation lassen sich aber die Typen *b*, *c*, *d* auf Typus *a* und *e* reduzieren. Nehmen wir der Einfachheit wegen wieder Stetigkeit der Tangentialebene an. Dann sind die Doppelkurven *b*, *c*, *d* nicht ohne Selbstberührungspunkte möglich, in denen sich die Flächenmäntel längs zweier Doppelkurven durchsetzen (s. Fig. 7 a). Nun sieht man leicht, daß durch eine beliebig kleine Hebung oder Senkung eines Blattes der Selbstberührungspunkt verschwindet, und die in Fig. 7 a gezeichnete Umgebung des Selbstberührungspunktes das in Fig. 7 b dargestellte Aussehen gewinnt. Die beiden sich im Selbstberührungspunkte schneidenden Doppelkurven werden durch diese unendlich kleine Deformation also hintereinander geschaltet oder ge-

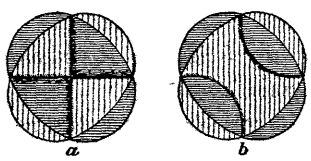

Fig. 7.

trennt. Mit den Selbstberührungspunkten verschwinden gleichzeitig die Typen b, c, d. Wir haben also bloß die Doppelkurven a und e zu betrachten, von denen die letztere auch aus den Betrachtungen dieses Paragraphen herausfällt, da sie nur bei einseitigen Flächen möglich ist. Von den offenen Doppelkurven untersuchen wir hier nur die mit gleicher Endenschaltung.

Die betrachtete Fläche enthalte *eine* geschlossene Doppelkurve. Wir zerschneiden die beiden sich durchdringenden Mäntel längs der Durchdringungskurve und heften so um, daß wir wieder eine geschlossene Fläche erhalten. Dabei kehren sich eventuell in einigen Flächenteilen die Normalen um; das ändert aber nur die Lage der Bilder dieser Teile auf der Kugel, nicht ihre Größe. Hiernach und nach dem in § 2 über solche Umschaltungen Abgeleiteten ist die Totalkrümmung der entstehenden Fläche gleich der der ursprünglichen. Läßt sich zeigen, daß die entstehende Fläche dieselbe Charakteristik hat wie die frühere, so folgt, daß eine geschlossene Doppelkurve die Totalkrümmung nicht ändert.

Dieser Nachweis läßt sich nun in der Tat leicht führen. Somit haben wir den Satz: Eine geschlossene, sich nicht schneidende Doppelkurve vom Typus a ändert die Totalkrümmung einer Fläche nicht; es ist immer noch:

$$C = K \cdot 2\pi.$$

Dieses Resultat läßt sich nun ohne weiteres auf n einander nicht schneidende Doppelkurven erweitern.

Ebenso leicht erledigen sich die nicht geschlossenen Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung. Es sei bei einer Fläche bloß eine solche Doppelkurve vorhanden. Wir zerschneiden längs der Doppelkurve und heften so um, daß an beiden Enden zwei getrennte Spitzen entstehen. Das ist nach Definition immer möglich und ändert nach § 2 die Curvatura integra der Gesamtfläche nicht. Zerfällt die Fläche bei dieser Umschaltung, so sind auf den beiden entstehenden Flächen zusammen genau so viel Rückkehrschnitte wie auf der ursprünglichen; denn der Schnitt längs der Doppelkurve ist gleichwertig dem Schnitt längs der der Doppelkurve beliebig nahen Kurve c (s. Fig. 4). Wir können das System der Rückkehrschnitte so wählen, daß es diese geschlossene zerstückende Kurve c nicht schneidet. Bezeichnen wir die Totalkrümmungen der entstehenden beiden Flächen und die Zahl ihrer Rückkehrschnitte durch die Indices 1 bezw. 2, so ist:

$$C_1 = (1-\sigma_1)\,4\pi,$$
$$C_2 = (1-\sigma_2)\,4\pi,$$
$$C = C_1 + C_2 = \{2-(\sigma_1+\sigma_2)\}\cdot 4\pi,$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma,$$
$$C = (2-2\sigma)\cdot 2\pi + 4\pi.$$
$$C = K \cdot 2\pi + 4\pi.$$

Dieselbe Formel ergibt sich, wenn c nicht zerstückt, denn dann enthält die neue Fläche einen Rückkehrschnitt weniger als die alte, hat aber dieselbe Totalkrümmung. Wir sehen also:

Eine offene Doppelkurve mit gleicher Endenschaltung erhöht die Curvatura integra einer Fläche um 4π.

Hat die Fläche n offene, einander nicht schneidende Doppelkurven, so finden wir in ganz entsprechender Weise:

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi,$$

d. h. die Curvatura integra wird durch diese n Kurven um $n \cdot 4\pi$ erhöht.

Hiernach hat die zweiblättrige Riemannsche Fläche auf der Kugel mit zwei Verzweigungspunkten die Curvatura integra 8π, denn bei ihr ist $K = 2$, $n = 1$. Das stimmt aufs beste mit der Anschauung überein.

Haben wir eine zweiblättrige Riemannsche Fläche auf der Kugel mit n Verzweigungsschnitten, so bestimmt sich das Geschlecht p dieser Fläche auf die einfachste Weise. Ihre Curvatura Integra C ist nämlich einerseits:

$$C = 8\pi,$$

anderseits nach vorigem Satze:

$$C = (1-p)4\pi + n \cdot 4\pi,$$

Mithin:

$$p = n - 1.$$

Das Geschlecht einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche ist also um 1 kleiner als die Zahl der Verzweigungsschnitte.

Wir haben bisher angenommen die Doppelkurven schnitten sich nicht. Diese Annahme ist nun überflüssig, worauf wir hier aber nicht eingehen wollen (vergl. m. Diss. pg. 31). Auch sonstige Besonderheiten lassen sich mit den bisher besprochenen Methoden leicht behandeln. Das Resultat können wir dahin zusammenfassen:

Die Curvatura integra einer geschlossenen, zweiseitigen Fläche mit n nichtgeschlossenen Doppelkurven ist:

$$\boldsymbol{C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi.}$$

Da wir schon früher gesehen hatten, daß die Totalkrümmung einer Fläche mit stetiger Tangentialebene, die frei ist von offenen Doppelkurven, ist:

$$C = (E - S) \cdot 2\pi,$$

so ergibt sich für die Charakteristik K:

$$K = E - S.$$

§ 4.

Die Curvatura integra von einseitigen Flächen. Die Polyeder. Ein Satz über Flächen von durchweg positiver Krümmung.

Unter einer *einseitigen* Fläche versteht man bekanntlich eine Fläche, auf der geschlossene Wege existieren, längs deren sich die Normale umkehrt. Auf einer bestimmten Fläche gibt es eine Maximalzahl σ'_M von solchen Wegen, die einander nicht schneiden. Die Schnitte längs dieser Wege zerstücken die Fläche nie. Ihre Charakteristik ist dann:

$$K = 2 - \sigma'_M.$$

Je zwei dieser Schnitte lassen sich zu einem Schnitte erster Art zusammenfassen, wie das schon in der Einleitung bemerkt wurde. Während nun bei geschlossenen zweiseitigen Flächen die Charakteristik stets gerade ist, kann sie hier jeden Wert $\leqq 1$ annehmen.

Für die einseitigen Flächen gebraucht man außer diesem Namen noch die Bezeichnung „Doppelfläche"*). Den beiden Bezeichnungen entspricht eine verschiedene Auffassung desselben Gegenstandes. Bei einer „einseitigen Fläche" unterscheiden wir in *der Umgebung eines Punktes* innere und äußere Seite der Fläche, gerade wie bei den zweiseitigen Flächen. Der Unterschied liegt darin, daß wir bei den einseitigen Flächen von der äußeren zur inneren Seite gelangen können, ohne den Mantel zu durchdringen, was bei den zweiseitigen Flächen unmöglich ist. Die *gesamte* einseitige Fläche hat deshalb nicht zwei Seiten. Eine Kurve denkt man sich nicht „auf" sondern „in" der Fläche gezogen, so daß sie gleichzeitig auf den beiden Seiten erscheint. Ein Rückkehrschnitt zweiter Art ist nach einmaligem Umlauf geschlossen. Mit dem Namen „Doppelfläche" verbindet man die Vorstellung, die einseitige sei durch eine zugehörige zweiseitige Fläche ersetzt. Tragen wir auf den Normalen einer Fläche nach beiden Seiten hin das beliebig kleine Stückchen ε ab, so bekommen wir eine Parallelfläche. Bei zweiseitigen Flächen besteht diese aus zwei getrennten Mänteln, bei einseitigen Flächen bloß aus einem Mantel. Man könnte füglich ein- und zweiseitige Flächen unterscheiden als Flächen mit ein- und zweischaligen Parallelflächen. Wenn man eine einseitige Fläche eine Doppelfläche nennt, so denkt man dabei an diese zweiseitige, einschalige Parallelfläche, bei der man sich ε nach 0 hin abnehmen denkt. Ein Rückkehrschnitt zweiter Art ist auf ihr nach zweimaligem Umlauf

*) Die Namen einseitige Fläche, Fläche mit umkehrbarer Normale, Fläche mit umkehrbarer Indikatrix sind gleichbedeutend. Wegen der dem letzten Namen zu Grunde liegenden Vorstellung, die die Einseitigkeit als eine „innere" Eigenschaft der Fläche zeigt, vergl. Klein, Math. Ann. IX, pg. 479. Dyck, a. a. O., pg. 474.

geschlossen. Wir wollen dementsprechend die Bezeichnungen einseitige Fläche und Doppelfläche auseinanderhalten. Die letztere ist, wie wir noch einmal hervorheben, ein zweiseitiges Surrogat der einseitigen Fläche. Faßt man die einseitigen Flächen als Doppelflächen auf, so muß man konsequenter Weise auch alle zweiseitigen Flächen durch ihre unendlich benachbarten Parallelflächen ersetzen und ihnen die doppelte Charakteristik geben. Auch die Curvatura integra der zweiseitigen Flächen wäre dann zu verdoppeln. Übertragen wir die einseitigen Flächen auf die Kugel, so entsprechen jedem Flächenpunkte zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel. Die Totalkrümmung C' der einseitigen Fläche ist identisch mit der der Doppelfläche. Um sie mit der Curvatura integra zweiseitiger Flächen vergleichen zu können, müßten wir diese also mit zwei multiplizieren. Statt dessen wollen wir aber die Curvatura integra C' der einseitigen Flächen durch zwei dividieren und die erhaltene Zahl C fernerhin kurz Curvatura integra der einseitigen Fläche, C' Curvatura integra der Doppelfläche nennen, so daß ist: $C = \frac{1}{2} C'$.

Die Totalkrümmung C der einseitigen Fläche bestimmt sich also als die Hälfte der Totalkrümmung C' der Doppelfläche. Da diese aber zweiseitig ist, so gelten für sie die im vorigen Kapitel gefundenen Werte, und es handelt sich hier nur darum, die Charakteristik K' der Doppelfläche auszudrücken durch die K der einseitigen Fläche, und zu sehen, wie sich die Doppelkurven auf die Doppelfläche übertragen.

Nehmen wir an, auf der einseitigen Fläche seien alle Rückkehrschnitte erster Art durch die zweiter Art ersetzt. Deren Zahl sei σ'_M. Dann ist: $K = 2 - \sigma'_M$. Nach Ausführung dieser Schnitte gibt es keinen Weg mehr von der einen Seite auf die andere, die zugehörige Doppelfläche besteht dann aus zwei getrennten Blättern. Damit die Doppelfläche nicht in diese zerfällt, müssen wir noch eine Bahn offen lassen, die die beiden Seiten verbindet. Ich darf also bloß $\sigma'_M - 1$ Schnitte legen. Jeder dieser Schnitte erscheint auf der Doppelfläche als Rückkehrschnitt erster Art. Danach ist ihre Charakteristik K':

$$K' = 2 - 2(\sigma'_M - 1) = 2(2 - \sigma'_M),$$
$$K' = 2K.$$

Die Curvatura integra der Doppelfläche ist nun:

$$C' = K' \cdot 2\pi + m \cdot 4\pi,$$

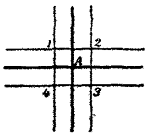

Fig. 8.

wo m in noch zu bestimmender Weise von den Doppelkurven der einseitigen Fläche abhängt. Eine geschlossene Doppelkurve A des Typus a liefert auf der Doppelfläche vier solche Kurven 1, 2, 3, 4 (s. Fig. 8). Einer geschlossenen

Doppelkurve vom Typus e entspricht auf der Doppelfläche *eine* Kurve vom Typus a. Denn erst nach dem Durchlaufen von 2, 3, 4 (Fig. 8) komme ich nach 1 zurück und zwar mit der ursprünglichen Konfiguration der Normale. Daraus folgt: Geschlossene Doppelkurven der einseitigen Flächen ändern die Curvatura integra der Doppelfläche nicht. Anders ist es natürlich mit den offenen Doppelkurven. Eine offene Doppelkurve a mit gleicher Endenschaltung liefert, wie die Anschauung lehrt, auf der Doppelfläche zwei entsprechende offene Doppelkurven 1, 2 und eine geschlossene Doppelkurve 3, die in Fig. 9a schematisch gezeichnet sind. In jedem Ende einer Doppelkurve b mit ungleicher Endenschaltung hat nun die Doppelfläche dasselbe Aussehen wie bei den Enden von a, nur die Lage der Enden in Bezug aufeinander ist gedreht, so daß einer Doppelkurve b mit ungleicher Endenschaltung zwei Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung entsprechen (s. Fig. 9b). Jede offene Doppelkurve erhöht demnach die Curvatura integra der Doppelfläche um $2\cdot 4\pi$. Demzufolge ist:

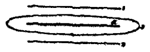

Fig. 9a.

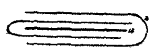

Fig. 9b.

$$C' = K'\cdot 2\pi + 2n\cdot 4\pi,$$

wo n die Zahl der offenen Doppelkurven der einseitigen Flächen ist, oder da:

$$C = \frac{1}{2}C', \quad K = \frac{1}{2}K',$$

$$C = K\cdot 2\pi + n\cdot 4\pi.$$

Mehrfache Punkte übertragen sich auf die Doppelfläche, sie ändern die Curvatura integra dieser und dementsprechend die der einseitigen Fläche nicht.

Wir haben also für die Curvatura integra der einseitigen Fläche dieselbe Formel gefunden, wie für die der zweiseitigen Flächen, wenn wir die Curvatura in der besprochenen Weise auffassen.

Die für die Totalkrümmung abgeleitete Formel gilt nun vermöge der Definition der Äquivalentkrümmung auch für Polyeder. Dort liefern aber nur die Ecken Beiträge zur Totalkrümmung; diese ist gleich der Summe der Äquivalentkrümmungen der Ecken. Die Äquivalentkrümmung einer Ecke ist nun nichts anderes wie der von der Polarecke gebildete räumliche Winkel. Die Summe dieser Winkel läßt sich in einfacher Weise ausdrücken durch die Anzahl der Kanten, Ecken, Flächen und sonstiger für das Polyeder charakteristischer Zahlen. Man erhält so die Curvatura integra C ausgedrückt einmal durch K und n (oder p und n), das andere Mal durch Kanten, Ecken, Flächen etc. Die Gleichsetzung gibt je nach den über das Polyeder gemachten Annahmen die Eulerschen Sätze oder die

Hesseschen Formeln die so auf einheitliche Weise aus einem höheren Prinzipe abgeleitet werden.

Bei Flächen, die unsere ursprünglichen Voraussetzungen erfüllen, die also frei von Kanten, endenden Doppelkurven etc. sind, ist:

$$K' = E' - S',$$

wo E', S' die Zahl der Extreme, resp. Sattelpunkte der Doppelfläche bezeichnet. Jedes Extrem und jedes Maximinimum der einseitigen Fläche liefert nun *zwei* entsprechende Punkte der Doppelfläche, so daß wir für die Charakteristik K, und die Anzahl E und S der Extreme und Sattelpunkte der einseitigen Fläche die Relation haben:

$$K = E - S.$$

Diese Relation gilt also für alle geschlossenen Flächen, die in unserem Sinne singularitätenfrei sind, d. h. für Flächen, die ganz im Endlichen liegen, keine Ränder, Kanten, Spitzen oder Verzweigungspunkte enthalten, die dementsprechend keine endenden, wohl aber geschlossene Doppelkurven enthalten dürfen.

Eine solche Fläche hat notwendig mindestens *ein* Maximum und *ein* Minimum, sodaß:

$$E \geqq 2$$

ist. Da nun nach obiger Relation:

$$S = E - K,$$

also

$$S \geqq 2 - K$$

ist, so ergibt sich beim Einsetzen der Werte von $K (K = 2, 1, 0, -1 \cdots)$ nur für $K = 2$

$$S \geqq 0,$$

für alle anderen K ist:

$$S > 0.$$

Alle Flächen, die unsere Voraussetzung erfüllen, außer Flächen $K = 2$, enthalten somit Sattelpunkte, also Gebiete negativer Krümmung. Das liefert den Satz:

Geschlossene, in obigem Sinne singularitätenfreie Flächen von durchweg positiver Krümmung haben stets denselben Zusammenhang wie die Kugel, d. h. sie enthalten keinen nicht zerstückenden Rückkehrschnitt.

Für die Curvatura integra von Flächen haben wir gefunden:

$$C = K \cdot 2\pi + n \cdot 4\pi.$$

Es fragt sich nun: *Wenn wir K und n beliebige Werte erteilen, die ihrer Bedeutung nach zulässig sind,* d. h. Werte $K \leqq 2$ und $n \geqq 0$, *entspricht dann einem solchen System ein geometrisches Gebilde?* Es ergibt sich somit das Problem, zu zeigen, daß diese Flächen alle existieren, oder aber die Unmöglichkeit der Existenz gewisser Arten darzutun.

§ 5.

Die bisher bekannten geschlossenen Flächen.

Wir wollen nun nicht bloß die Flächen in Bezug auf die Werte von K und n untersuchen, sondern wir wollen bei n unterscheiden Kurven mit gleicher und solche mit ungleicher Endenschaltung, bei K noch besonders berücksichtigen, ob die Flächen ein- oder zweiseitig sind.

Die *zweiseitigen Flächen* haben stets eine gerade Charakteristik, da ja in $K = 2 - 2\sigma - \sigma'$ die Zahl σ' stets gleich 0 ist. Die Repräsentanten dieser Flächen mit irgend einer Charakteristik erhält man, wenn man an die Kugel Henkel ansetzt. Jeder Henkel erhöht σ um 1. Die Kugel mit einem Henkel entspricht der Ringfläche. Geschlossene Doppelkurven vom Typus a erhält man dadurch, daß man an die Kugeln oder um die Henkel ringförmige Wülste legt und die sich berührenden Mäntel längs der Berührungskurve aufschneidet und überkreuz aneinanderheftet. Man kann auch einen Henkel die Kugelfläche eine gerade Anzahl von Malen durchdringen lassen. Offene Doppelkurven mit gleicher Endenschaltung erhält man, wenn man eine kugelförmige geschlossene Fläche eine Fläche mit der vorgeschriebenen Charakteristik berühren läßt längs einer offenen Kurve und nun genau wie oben bei den geschlossenen Kurven umschaltet. Hierher gehören auch die Riemannschen Blätter über der Kugel. Bei einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit n Verzweigungsschnitten ist das Geschlecht:

$$p = n - 1,$$

die Charakteristik also:

$$K = 4 - 2n.$$

Diese Typen kann man nun leicht in mannigfachster Weise abändern. Geschlossene Doppelkurven vom Typus e und offene Doppelkurven mit ungleicher Endenschaltung können nicht vorkommen, da diese stets die Einseitigkeit zur Folge haben.

Weniger bekannt wie die Gestalten der zweiseitigen sind die der *einseitigen Flächen*. Wir könnten hier auch bei den Rückkehrschnitten erster Art im Anschluß an Dyck noch zwei Unterarten unterscheiden, worauf wir aber nicht eingehen wollen. In Bezug auf die Gestalten der einseitigen Flächen ist zu bemerken, daß diese Flächen, soweit sie ganz im Endlichen liegen, stets Doppelkurven enthalten müssen. Der Beweis findet sich für algebraische Flächen bei Darboux*). Allgemein läßt er sich leicht führen mit Hilfe der Betrachtungen des § 6 (vergl. m. Diss., pag. 43).

*) Darboux, Leçons sur la Théorie générale des surfaces, Bd. II, pg. 360.

Die bekannteste einseitige Fläche ohne Singularitäten ist die Fläche, die man erhält, wenn man einen Schlauch umbiegt, das eine Ende durch die Wandung hindurchsteckt und im Inneren weiterführt und dann die beiden Ränder aneinanderheftet*). Die Charakteristik dieser Fläche ist 0; die Curvatura integra entsprechend auch 0.

Einfacher und im engeren Anschluß an die zweiseitigen Flächen verfährt man, wenn man auch hier an die Kugel Henkel ansetzt, diese Henkel aber die Kugelfläche einmal durchdringen läßt (s. Fig. 10). Die Anzahl der Henkel ist wieder gleich σ. Die erhaltenen Flächen haben alle eine gerade Charakteristik. Die geschlossenen Doppelkurven vom Typus a lassen sich in bekannter Weise beliebig vermehren. Unter den Flächen, für die $n = 0$ ist, ist also keine Fläche ungerader Charakteristik.

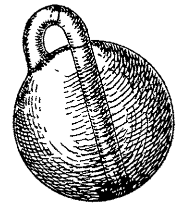

Fig. 10.

Nehmen wir nun offene Doppelkurven zu Hilfe, so lassen sich einseitige Flächen beliebiger (auch ungerader) Charakteristik konstruieren. Die letzteren enthalten immer offene Doppelkurven ungleicher Endenschaltung.

Es sind sogar geschlossene algebraische Repräsentanten der Flächen von der Charakteristik 1 bekannt: Die Steinerschen Flächen mit einer oder drei reellen Doppelgeraden**).

Wir denken uns ein flaches Rotationsellipsoid, pressen die obere und untere Seite vom Äquator aus auf den Mittelpunkt zu zusammen, sodaß sich die nördliche und südliche „Hemisphäre" längs einer Strecke der Äquatorialebene berühren, zerschneiden längs dieser Strecke und heften diese Ränder kreuzweise aneinander (s. Fig. 11). Wir erhalten eine Fläche von der Charakteristik 1. Der eine Rückkehrschnitt zweiter Art ist aus Fig. 5 zu entnehmen. Die Fläche ist im wesentlichen identisch mit der Steinerschen Fläche mit einer reellen Geraden. Ihre Curvatura integra ist $C = 6\pi$. Die Doppelkurve ist eine solche mit ungleicher Endenschaltung. Durch Vermehrung dieser Doppelkurven a, a' (s. Fig. 12a) läßt sich σ' beliebig erhöhen. Je zwei solche Kurven können ersetzt werden durch eine mit gleicher Endenschaltung. Ich erhalte dieselbe, wenn ich die zwei Doppelkurven a, a' verschiebe (s. Fig. 12b) bis sie einander berühren, was in einem Selbstberührungspunkte der Fläche geschieht, und über diesen hin die Doppelkurven in

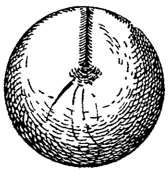

Fig. 11.

*) Vergl. F. Klein, Über Riemanns Theorie der algebr. Funktionen etc. Leipzig, 1882, pag. 80 unten.

**) Vergl. F. Klein, Bemerkungen über den Zusammenhang von Flächen, Math. Ann. VII. 1874, pag. 551, 554.

bekannter Weise umschalte (s. § 3, Fig. 7). Die Deformation ist vollkommen stetig. Der Prozeß ist angedeutet in Fig. 12 *a—c*. Das Vorhandensein der Doppelkurve *a* in Fig. 12c beeinflußt die Charakteristik der Fläche nicht. Lassen wir sie fort, so erhalten wir den Typus Fig. 12d

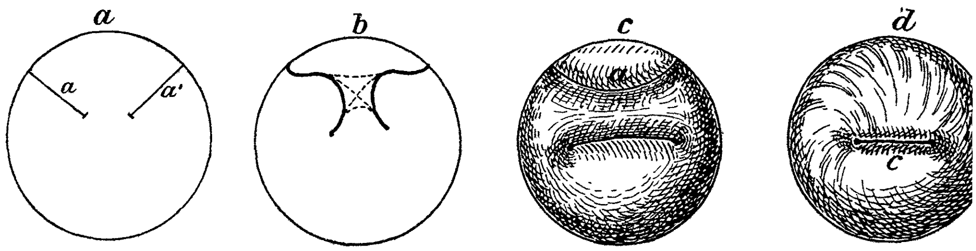

Fig 12.

mit der Doppelkurve *c* mit gleicher Endenschaltung. Diese Doppelkurven *c* können wir beliebig vermehren, wodurch jedesmal die Charakteristik um zwei sinkt.

Durch geeignete Kombination der bisher gegebenen Typen lassen sich alle bekannten Flächen darstellen. Wie wir sehen, fehlen die singularitätenfreien Flächen mit ungerader Charakteristik, mit denen wir uns im nächsten Paragraphen beschäftigen wollen.

Wir brauchen uns zu dem Zwecke nur zu befassen mit der Fläche der Charakteristik 1. Denn wie wir aus der Kugel alle Flächen gerader Charakteristik ableiteten, so können wir aus einer Fläche $K = 1$ alle Flächen ungerader Charakteristik ableiten (durch Ansetzen von Henkeln etc.).

§ 6.

Konstruktion singularitätenfreier Flächen der Charakteristik 1.

Wie wir in § 4 erkannt haben, erfüllt die Charaktertstik aller singularitätenfreier Flächen die Relation:

$$K = E - S.$$

Diese Beziehung gibt uns nun ein Mittel, die Konstruktion von Flächen gegebener Charakteristik zurückzuführen auf die Konstruktion von ebenen Kurvensystemen mit bestimmten Eigeschaften. Denken wir uns nämlich eine Ebene $z =$ const. parallel mit sich im Sinne der wachsenden z bewegt, so schneidet sie aus einer Fläche in jedem Augenblick eine unter Umständen aus mehreren Teilen bestehende Kurve aus. Diese Kurve ändert sich bei der Bewegung der Ebene im allgemeinen vollkommen stetig. Nur bei Berührungen der Ebene mit der Fläche tritt eine Unstetigkeit in der Deformation des Kurvensystems ein, und zwar entsteht oder verschwindet bei Berührungen in einem Minimum resp. Maximum je eine ovalförmige Kurve, während über die Berührung in einem Sattelpunkt hin eine Umschaltung in unserem System eintritt. Im allgemeinen werden sich dort zwei getrennte Kurven zu einer vereinigen, oder eine Kurve wird sich in zwei trennen (siehe Fig. 13). Findet das nun in jedem Sattelpunkte statt, so hat die Fläche notwendig eine gerade Charakteristik. Sind nämlich m_1 Minima, m_2 Maxima vorhanden, so müssen über $|m_1 - m_2|$ Sattelpunkt hin die m_1 Ovale in m_2 verwandelt werden. Jeder neue Sattelpunkt ändert die Zahl der Ovale, und da m_2 Ovale verschwinden und verschwinden müssen, so muß sein Einfluß wieder rückgängig gemacht werden, so daß die übrigen Sattelpunkte notwendig in gerader Zahl $2n$ vorhanden sind, also ist:

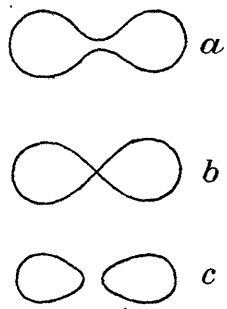

Fig. 13.

$$K = E - S = m_1 + m_2 - (|(m_1 - m_2)| + 2n),$$

was immer eine gerade Zahl ist.

Wenn wir also singularitätenfreie Flächen ungerader Charakteristik erhalten wollen, so müssen wir eine Umschaltung finden, die die Aufeinanderfolge der Teile *einer einzigen geschlossenen* Kurve ändert. Zu dem Zwecke betrachten wir eine Umschaltung genauer.

$A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $D_{1,2}$, seien Stücke eines Kurvensystems in der Umgebung des Sattelpunktes (s. Fig. 14). Die Indizes 1, 2 bezeichnen die Enden der Stücke A, B, C, D. Wir nehmen an, während des Überganges über den Sattelpunkt fänden nicht gleichzeitig in anderen Teilen der Kurve Umschaltungen statt. Es ist keine Beschränkung, wenn wir annehmen, vor der Umschaltung sei A_2 mit B_2, nachher mit D_2 verbunden. Das Ende A_1 kann dann zusammenhängen mit B_1, C_1, D_1. Man sieht nun leicht, daß, wenn A_1 mit B_1 oder D_1 zusammenhängt, stets eine *Vereinigung resp. Trennung* von geschlossenen Kurven statt hat, daß dagegen, wenn A_1 mit C_1 verbunden ist, stets eine *Umschaltung innerhalb einer geschlossenen Kurve* stattfindet (s. Fig. 15). Im Augenblicke der Berührung haben wir in den ersten Fällen stets *eine* Kurve mit einem Doppelpunkt im Sattelpunkt (siehe Fig. 13), wogegen im letzten Falle dann A und C einerseits B und D anderseits *zwei* getrennten Kurven angehören, die sich im Sattelpunkte schneiden. Da diese Kurven notwendig noch einen anderen Punkt gemein haben müssen, der beim Übergang über den Sattelpunkt erhalten bleibt, so erkennt man hier unmittelbar, daß die geschlossenen Flächen ungerader Charakteristik Doppelkurven enthalten müssen (s. Fig. 16f). Um die verlangte Umschaltung

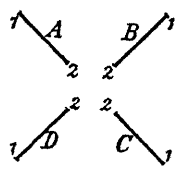

Fig. 14.

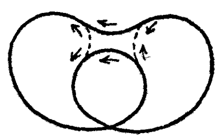
Fig. 15.

zu finden, brauchen wir also bloß bei zwei ebenen sich schneidenden Kurven einen Doppelpunkt aufzufassen als hervorgegangen aus der Berührung in einem Sattelpunkt und dementsprechend zwei Umschaltungen vorzunehmen. Die entstandene Kurve müssen wir dann durch vollkommen stetige Deformation unter Zuhilfenahme gewöhnlicher Umschaltungen aus Ovalen erzeugen und in solche wieder zurückverwandeln. Wir sehen, wie einem Kurvensystem in der Ebene eine Fläche entspricht, und welcher Art die Umschaltungen in dem Kurvensystem sein müssen, wenn die Fläche eine ungerade Charakteristik haben soll. Auf die Ableitung von weiteren Regeln, die sich auf dieses Erzeugen von bestimmten Flächen beziehen und deren Kenntnis uns des Probierens überheben würde, wollen wir hier verzichten.

Wir wollen jetzt sofort die Fläche mit der Charakteristik 1 betrachten.

Die Fläche $K = 1$, die vom Standpunkte der Analysis situs gleichwertig neben den anderen Flächen ungerader Charakteristik steht, besitzt, wie schon in der Einleitung hervorgehoben, vom Standpunkte der Geometrie aus noch ein besonderes Interesse. Wie nämlich bekannt, *ist die in projektivem Sinne aufgefaßte Ebene, „die projektive Ebene", eine Fläche mit der Charakteristik* 1*). Auf ihr existiert *ein* Rückkehrschnitt zweiter Art, der nicht zerstückt, und zwar kann jeder unpaare sich selbst nicht schneidende Kurvenzug als solcher fungieren. Nun ist bei geschlossenen einseitigen Flächen die Gleichheit der Charakteristik die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Flächen umkehrbar eindeutig aufeinander abbildbar sind. Die Fragestellung: „Existieren die singularitätenfreien Flächen ungerader Charakteristik?" ist also äquivalent mit der folgenden:

„Gibt es eine singularitätenfreie, ganz im Endlichen gelegene, geschlossene Fläche, auf die sich die projektive Ebene umkehrbar eindeutig abbilden läßt?"

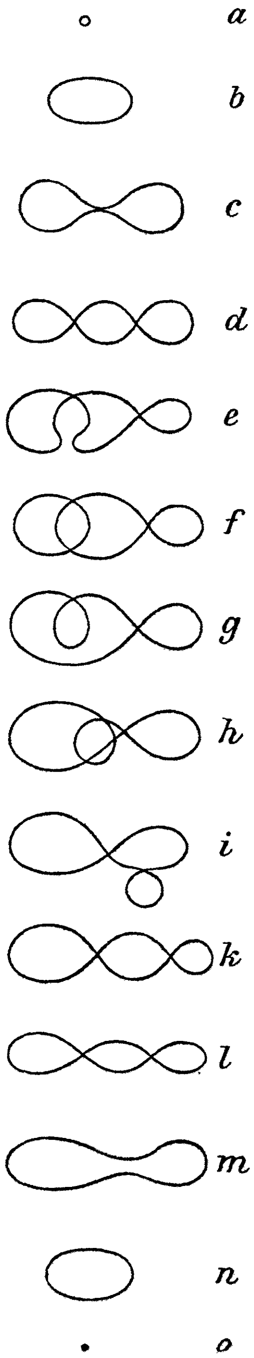

Fig. 16.

*) Vgl. schriftl. Mitteilg. von Schläfli an Klein in dem erwähnten Aufsatz. Math. Annalen VII, pag. 550.

Diese Fläche würde zur projektiven Ebene in demselben Verhältnis stehen, wie die Kugel zur komplexen Zahlenebene. Wie die Kugel uns den Zusammenhang der Funktionen auch im Unendlichen vor Augen führt, so würden wir auf der gesuchten Fläche die Gebilde der projektiven Geometrie in ihrer Gesamtausdehnung verfolgen können.

Die Existenz der verlangten Fläche $K = 1$ und damit die aller im Sinne der Analysis situs verschiedenen Flächen, wird bewiesen durch Aufstellung eines Kurvensystems, für das $E - S = 1$ ist. Wir setzen:

$$1)\quad E = 2, \quad S = 1,$$
$$2)\quad E = 4, \quad S = 3.$$

Wir wollen für diese beiden Wertepaare von E und S die zugehörigen Kurvensysteme und Flächen aufstellen, uns damit aber nicht begnügen, sondern für die in dem zweiten Wertsystem von E und S gehörige Fläche eine andere Erzeugungsart darlegen und ohne Zuhilfenahme der Relation $K = E - S$ einen einfachen Beweis dafür erbringen, daß die Fläche die

a

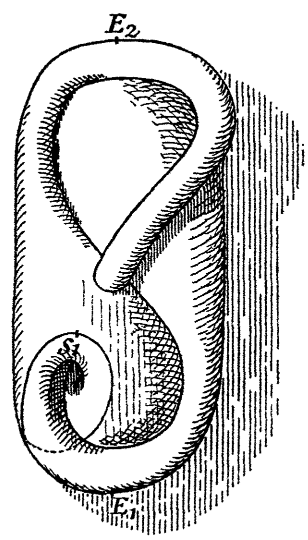

Fig. 17a.

b

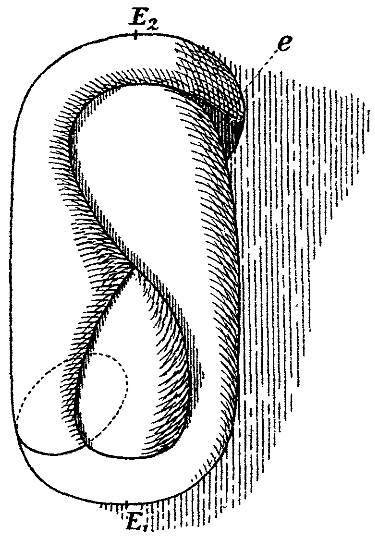

Fig. 17b.

Charakteristik 1, d. h. bloß einen Rückkehrschnitt zweiter Art hat. Denn wegen der selbständigen Bedeutung der Fläche scheint es wünschenswert, einen solchen Beweis zu haben, zumal da ein solcher zu einem tieferen Verständnis des Wesens der Fläche führt.

Das Kurvensystem, für das $E = 2$, $S = 1$ ist, das also aus *einem* Oval entsteht und über *ein* solches hin verschwindet, und bei dem *eine* Umschaltung stattfindet, wird dargestellt durch Fig. 16a—o. Fig. 16 a, o und f zeigen bezw. die Berührung im Minimum, Maximum und im Sattelpunkt. Wir sehen, bei der letzteren zerfällt die Kurve in zwei geschlossene Teile. Die übrigen Kurven zeigen, wie Fig. 16e aus einem Oval entsteht, bezw. wie Fig. 16g sich in ein Oval verwandelt. Denken wir uns eine aus einem Punkt entstehende Kurve das ganze System durchlaufen und die die Kurve tragende Ebene parallel mit sich selbst verschoben, so beschreibt das Kurvensystem die gewünschte Fläche von der Charakteristik 1. Fig. 17 a, b zeigen die Fläche und zwar zeigt Fig. 17b die Rückseite von Fig. 17a, wie sie in einem hinter a aufgestellten Spiegel erscheinen würde. Die Punkte E_1, E_2, S_1 stellen bezw. das Minimum, das Maximum und den Sattelpunkt dar. Die eingetragene Kurve ist ein Schnitt, längs dessen sich die Normale umkehrt. Bei der Einfachheit des Schnittsystems brauchen wir wohl auf die Gestalt der Fläche nicht näher einzugehen. Nur auf einen Umstand wollen wir noch aufmerksam machen. Mit der geometrischen Konstruktion unserer Fläche ist die immerhin befremdliche Möglichkeit der Existenz von singularitätenfreien Funktionen $f(x, y)$ gezeigt, deren reeller Wertevorrat ganz im Endlichen liegt, und die zwei Extreme und ein Maximinimum haben. Die Existenz einer solchen Funktion würde durch ihre Aufstellung zu beweisen sein. Die Gleichung unserer Fläche, wie der folgenden, wird mindestens vom sechsten Grade.

Wählen wir jetzt das Wertsystem $E = 4$, $S = 3$. Diese Anordnung gibt uns die Möglichkeit, der Fläche eine dreizählige Symmetrieachse zu geben, indem wir allen unseren Kurven einen Drehungsmittelpunkt von der Ordnung drei geben — (er ist in den Figuren angedeutet) —, also die drei Minima und die drei Sattelpunkte auf die Ecken gleichseitiger Dreiecke, ein Maximum in die Drehungsachse selbst legen. Auf die Möglichkeit dieser Fläche machte mich Herr Prof. Hilbert aufmerksam, der aus der Gestalt der Doppelkurve der schon beschriebenen Fläche ihre Existenz erschloß. Das in Fig. 18a—g wiederge-

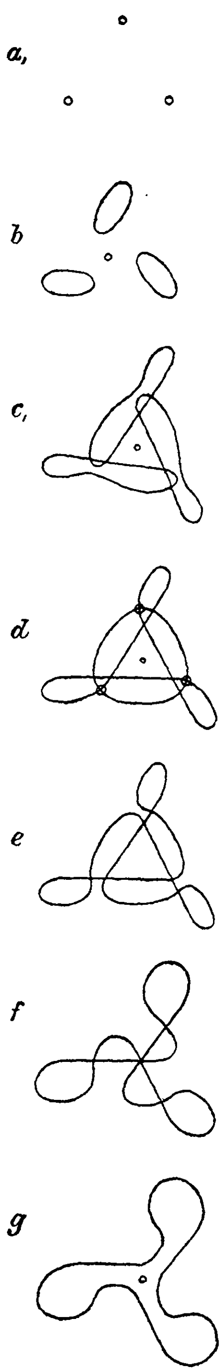

Fig. 18.

gebene Kurvensystem stellt die Schaltung in unserem Falle dar. Fig. 16d zeigt den Augenblick der Berührung in den drei Sattelunkten; in Fig. 18f sehen wir den dreifachen Punkt der Fläche. Die Kurve in Fig. 18g verwandelt sich in ein Oval und verschwindet dann.

Gerade wie die vorige Fläche baut sich auch diese aus dem Querschnittsystem auf. Da dieser Aufbau aber hier der Anschauung größere Schwierigkeiten macht, so wollen wir, wie schon gesagt, die Fläche auf eine der Anschauung zugänglichere Weise entstehen lassen und im Anschluß daran beweisen, daß sie bloß einen Rückkehrschnitt zweiter Art enthält, nach dessen Ausführung sie in ein ebenes Blatt verwandelt werden kann.

§ 7.

Eine spezielle Fläche der Charakteristik 1.

Bei der Erzeugung der dem Querschnittsystem Fig. 18 entsprechenden Fläche bitte ich den Leser, die Operationen an den Figuren 19 *a*—*d* zu verfolgen, die sie viel einfacher darstellen, als es Worte zu tun vermögen.

a. Aufbau der Fläche $K = 1$.

Wir nehmen drei cylinderförmige Schläuche von der Länge l und dem in Fig. 19a sichtbaren Querschnitt, dessen Umfang gleichfalls l sei. Der Querschnitt ist eine geschlossene Kurve, die eine rechtwinklige Ecke hat. An der einen Seite verschließen wir die Schläuche durch ebene „Deckel", die die Erzeugenden der Cylinder rechtwinklig schneiden. Diese Cylinder legen wir mit ihren geradlinigen Kanten („Cylinderkanten" zum Unterschiede von „Deckelkanten") an die negativen Achsen eines rechtwinkligen xyz Koordinatensystems so, dass die an den offenen Schlauchseiten liegenden Enden der Cylinderkanten im Koordinatenanfang liegen, die beiden Tangentialebenen in den Kantenpunkten jede mit einer der Koordinatenebenen zusammenfällt und die Cylinder ganz in einem Oktanten $(-, -, -)$ liegen.

In der Umgebung des Anfangspunktes durchdringen sich die Cylinder. Den Teil jedes Cylinders, der in einem anderen liegt, schneiden wir fort und vereinigen die so entstehenden Ränder. Die dadurch *neu hinzugekommenen* Kanten und Ecken denken wir uns gleichmäßig abgerundet. Die Gerade, die mit den drei Achsen im Koordinatenanfang gleiche Winkel bildet, d. i. die Gerade, die im Koordinatenanfang auf der Ebene $x + y + z = 0$ senkrecht steht, ist dann eine dreizählige Symmetrieachse unserer so erzeugten, einem Dreibein ähnlichen Fläche, d. h. bei einer Drehung um 120^0 um diese Gerade kommt die Fläche mit sich selbst zur Deckung.

Die Randkurven der Deckel zeichnen wir nun dreimal, in jeder Koordinatenebene einmal, und zwar so, daß sie mit den Ecken im Koordinatenanfang liegen, und daß je eine von ihnen dort

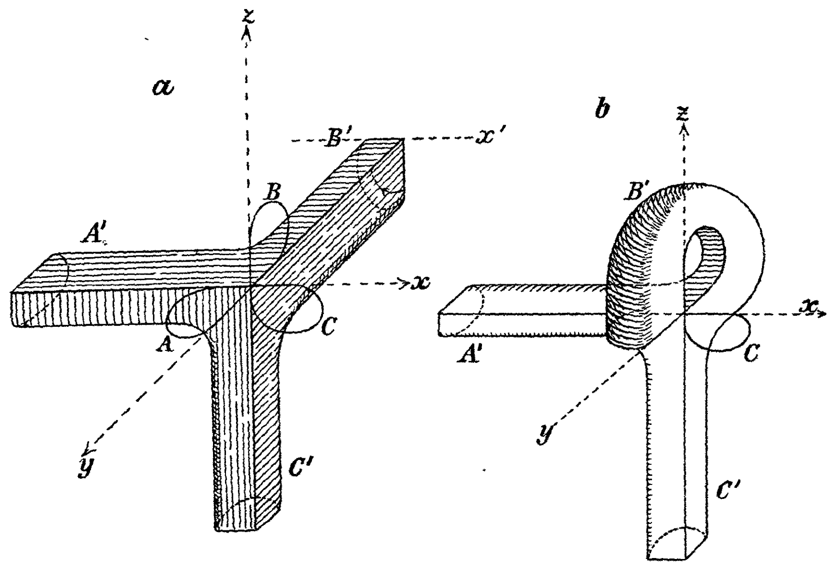

Fig. 19a, b.

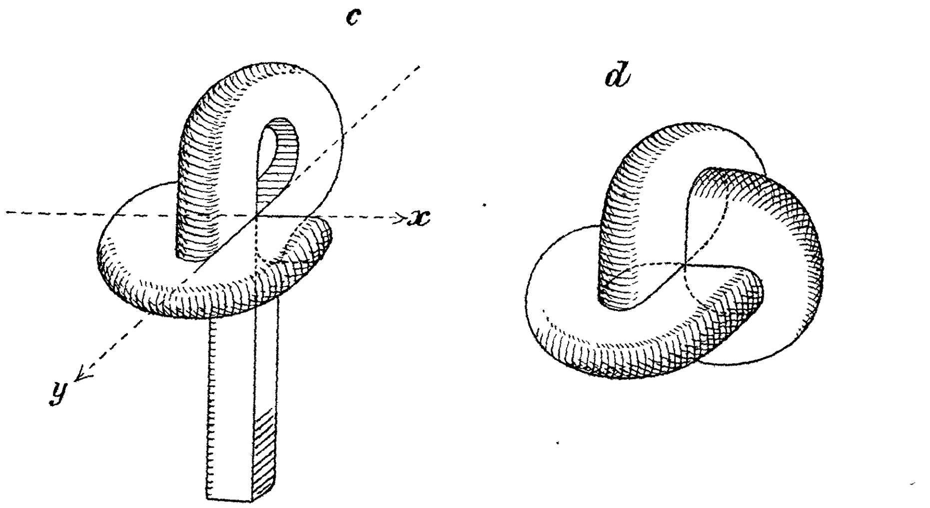

Fig. 19c, d.

die	positive	Y-Achse	und	die	negative	X-Achse,	(A),
„	„	Z	„	„	„	Y	„ , (B),
„	„	X	„	„	„	Z	„ , (C),

zur Tangente hat und zudem die Symmetrie der Figur gewahrt bleibt. Wir nennen diese Kurven entsprechend A, B, C, die an der X, Y, Z-Achse liegenden Schläuche A', B', C'. Die Lage der Kurven A, B, C ist dann eindeutig bestimmt, wenn wir verlangen, daß der Deckel von B' durch eine Drehung um 90^0 auf uns zu um die Fig. 19a gezeichnete Parallele x' zur X-Achse in eine solche Lage kommt, daß sein Rand durch bloßes Verschieben längs der Y-Achse mit A zur Deckung kommt, und die Kurven B, C so liegen, daß die Symmetrie der Figur gewahrt bleibt.

Wir biegen nun den Schlauch B' um die Kurve B herum, so daß die Cylinderkante in B fällt (Fig. 19b). Der Endpunkt der Kante fällt dann in den Koordinatenanfang, da ja die Länge der Kante gleich dem Umfang von B ist. Die Längen der übrigen Erzeugenden dehnen wir so, daß der Deckel gerade in die XY-Ebene, sein Rand also in die Kurve A fällt. In dem Deckelrande soll der Schlauch auf der XY-Ebene senkrecht aufsitzen. Von den zwei Scharen von Tangentialebenen, welche die jetzt in B liegende Cylinderkante hat, soll die eine in die YZ-Ebene fallen, die andere auf dieser Ebene senkrecht stehen (vergl. Fig. 19b). In derselben Weise legen wir den Schlauch A' um die Kurve A, den Schlauch C' um die Kurve C (s. Fig. 19c, d).

In jeder der Kurven A, B, C liegt dann eine Deckelkante und eine Cylinderkante. Der Deckel des Schlauches B' bildet die Fortsetzung des auf der einen Seite der Cylinderkante von A' liegenden Mantelteiles, dessen Grenztangentialebenen ja auch alle in der XY-Ebene liegen. Der Schlauch B' selbst ist die Fortsetzung des anderen Mantelteiles von A'. Entsprechend liegen die Mäntel an den Kurven B und C. Wir zerschneiden nun längs der Kurven A, B, C die sechs Kanten und heften die Ränder kreuzweise aneinander. Damit ist die Fläche fertig, in den Kurven A, B, C durchdringt je ein Cylinder senkrecht ein ebenes Blatt. Der Anfangspunkt ist

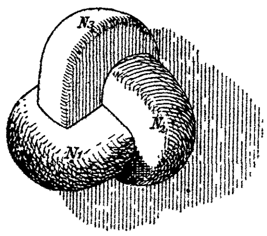

Fig. 20a.

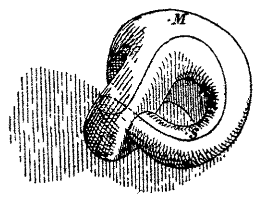

Fig. 20b.

ein dreifacher Punkt der Fläche. Die sich dort durchdringenden Mäntel haben die Koordinatenebenen zu Tangentialebenen. Wir sehen, unsere Fläche ist singularitätenfrei. Die Kurven A, B, C bilden in ihrer Gesamtheit die einzige Doppelkurve unserer Fläche. Gehen wir vom Koordinatenanfang in der Richtung der negativen X-Achse aus, so durchlaufen wir sie in der Reihenfolge A, B, C. Das Kurvensystem Fig. 18, das uns ursprünglich die Fläche lieferte, erhalten wir, wenn wir die Ebene $x + y + z =$ const. über die Fläche hingleiten lassen.

Die Figuren 20a, b veranschaulichen die Fläche von verschiedenen Seiten gesehen. Denken wir uns die Fläche jetzt dem Kurvensystem Fig. 20 entsprechend liegen, d. h. so daß die Symmetrieachse senkrecht steht, so zeigt Fig. 20a die Fläche senkrecht von unten, Fig. 20b von der Seite, aber etwas schräg von oben gesehen. M ist das Maximum, N_1, N_2, N_3 sind die Minima, S einer der Sattelpunkte.

b. Beweis, daß die Fläche die Charakteristik $K = 1$ hat.

Wir wollen nun den Nachweis erbringen, daß unsere singularitätenfreie Fläche wirklich durch einen nicht zerstückenden Rückkehrschnitt in ein ebenes Blatt verwandelt wird. In Fig. 20c ist ein Schnitt, längs dessen sich die Normale umkehrt, eingezeichnet. Wir hätten nun zu zeigen, daß diese Kurve von allen anderen Kurven mit derselben Eigenschaft geschnitten wird. Das würde jedoch bei so einfacher Wahl der Schnittkurve schwierig sein. Wir wählen deshalb die Schnittkurve weniger einfach, aber so, daß wir aus allgemeinen Sätzen leicht folgern können, daß dieser Schnitt der einzige ist. Wir wollen zu dem Zweck die Doppelkurve genauer betrachten.

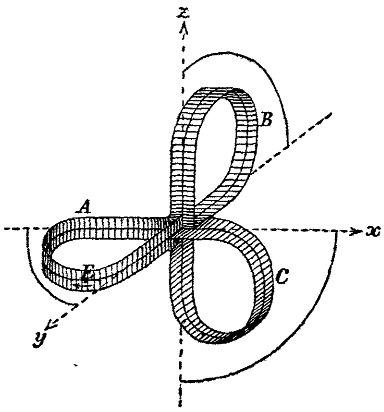

Fig. 21.

Fig. 21 stellt die Doppelkurve unserer Fläche dar. Von den sich in der Doppelkurve durchdringenden Mänteln sind nur die cylinderförmigen gezeichnet, die anderen fallen zusammen mit den Koordinatenebenen. Wir wollen die gezeichneten Cylinderstreifen mit A', B', C', die ebenen Blätter mit A'', B'', C'' bezeichnen. Dann sieht man an der Figur, daß über den Koordinatenanfang

Ebene	A''	in die Streifen	B'	und	C',
„	B''	„ „	C'	„	A',
„	C''	„ „	A'	„	B'

übergeht.

Errichten wir in einem Punkt der Doppelkurve auf einem Mantel die Normale, sagen wir im Punkte E der Kurve A auf dem Streifen A', und lassen wir die Normale die Doppelkurve durchlaufen, so daß wir von E aus zunächst in die X-Achse kommen, so durchläuft die Normale, wie man an der Figur verfolgt:

$$\text{die Kurve}\quad \left.\begin{array}{l} A \perp A' \\ C \perp C'' \\ B \perp B' \\ A \perp A'' \end{array}\right\} \text{ erster Umlauf,}$$

$$\left.\begin{array}{l} C \perp C' \\ B \perp B'' \\ A \perp A' \end{array}\right\} \text{ zweiter Umlauf.}$$

Erst nach zweimaligem Umlauf kehrt die Normale wieder von $\perp A'$ nach E zurück, aber in der der Ausgangsrichtung entgegengesetzten Richtung. Unsere Doppelkurve ist also eine Doppelkurve der Art e. Wenn wir im Punkte E anfangen, den Cylinder längs der Doppelkurve zu zerschneiden, so werden wir, nachdem sich der Schnitt geschlossen hat, beide Mäntel längs der Doppelkurve zerschnitten haben.

Natürlich muß eine singularitätenfreie Fläche ungerader Charakteristik immer mindestens eine Doppelkurve vom Typus e enthalten, (wenn wir die Typen b, c, d durch die in § 3, Figg. 7 geschilderte Deformation beseitigt haben). Denn kommen bloß Kurven vom Typus a vor, so läßt sich durch Umschaltung der Doppelkurven stets eine *zweiseitige* Fläche gleicher Charakteristik finden (§ 3), diese muß also gerade sein.

Durchlaufen wir die Doppelkurve nun noch einmal von E ausgehend, und denken wir uns dabei immer in einem bestimmten Mantel befindlich. Wir kommen dann von A' nach C'', durchlaufen C in C'' und kommen dann zum Koordinatenanfang zurück. Dort schneiden wir unsere frühere Bahn *in demselben Mantel.* Zerschneiden wir den Mantel längs des durchlaufenen Weges, so wird durch den Schnitt längs C aus dem ebenen Blatt C'' ein einfach zusammenhängendes Stück herausgeschnitten, gerade das Stück, das früher den Deckel des Schlauches A' bildete. Zerschneiden wir längs der ganzen Doppelkurve, so trennen wir gerade die drei Deckel aus der Fläche aus. Um dies Zerfallen zu verhüten, schalten wir aus unserem Wege die drei in die ebenen Blätter fallenden Stücke aus, gehen also, wenn wir von E zum erstenmal in den Koordinatenanfang kommen, sofort auf den Streifen B' über usw. Das ändert an der Drehung der Normale nichts, da diese sich auf dem ebenen Blatt stets selbst parallel bleibt und dieser Weg nur dazu dient, die Fortschreitungsrichtung stetig zu ändern. Lassen wir diese Teile des Weges fort, so erhält unser Weg im Koordinatenanfang drei rechtwinklige Ecken. Wir durchlaufen jetzt:

$$A \text{ in } A',$$
$$B \text{ in } B',$$
$$C \text{ in } C'.$$

Längs dieses Weges kehrt sich die Normale um. Wir fassen ihn als Rückkehrschnitt auf und behaupten:

Nach Ausführung dieses Schnittes enthält die Fläche keinen Rückkehrschnitt zweiter Art mehr.

Ein Rückkehrschnitt zweiter Art muß Doppelkurven eine ungerade Zahl von Malen überschreiten. Nun ist die Doppelkurve auf dem Cylinderstreifen unpassierbar, und die in den ebenen Blättern liegenden Doppelkurventeile können nur eine gerade Anzahl mal überschritten werden, da sie die Fläche zerstücken. Rückkehrschnitte zweiter Art sind also unmöglich.

Daß unsere Fläche keine Rückkehrschnitte der ersten Art enthält, folgt nach der Zerschneidung direkt aus der Betrachtung der Fläche, wie auch aus dem Folgenden.

Nach Ausführung eines Rückkehrschnittes der zweiten Art soll unsere Fläche äquivalent sein einem einfach berandeten ebenen Blatte. Wir wollen die zerschnittene Fläche in ein solches deformieren. Eine Fläche wird im Sinne der Analysis situs nicht geändert, wenn wir durch einen Querschnitt, der Punkte desselben Randes verbindet, einfach zusammenhängende Stücke von der Fläche trennen (Fig. 22, Schnitt a). Wir ändern deshalb eine Fläche auch nicht, wenn wir durch einen Querschnitt, der in demselben Randpunkt anfängt und aufhört, einfach zusammenhängende Stücke aus einer Fläche ausschneiden (vergl. Fig. 22, Schnitt b). Wir dürfen deshalb die „Deckel", die durch solche Schnitte von der Fläche getrennt

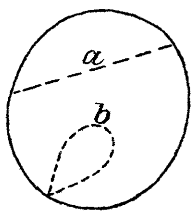

Fig. 22.

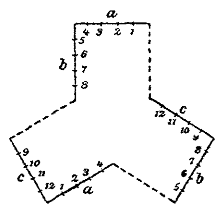

Fig. 23.

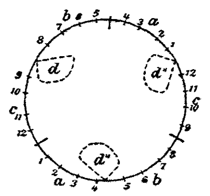

Fig. 24.

werden, aus der Fläche fortnehmen, ohne ihren Charakter zu ändern; wir vergrößern dadurch bloß die Randkurve. Wie wir nun unsere Fläche aus Fig. 19a erhielten, so können wir sie jetzt in die dort dargestellte Fläche zurückverwandeln; nur fehlen die Deckel, und die Fläche ist längs der in den Achsen liegenden Cylinderkanten aufgeschnitten. Infolgedessen können wir nun die Fläche in ein ebenes Blatt von der in Fig. 23 dargestellten Form verbiegen. An der geschlossenen Fläche waren die Randstücke, die gleiche Buchstaben tragen, in der durch die Zahlen angedeuteten Weise aneinandergeheftet. Die punktierten Randstücke waren, jedes in sich selbst, durch die Deckel geschlossen. Deformieren wir noch dies ebene Blatt in ein Kreisblatt, in dem die punktierten Randstücke als Querschnitte wie in Fig. 22b erscheinen, so erhalten wir das in Fig. 24 dargestellte Bild, in dem wir die Räume d, d', d'' wieder durch die Deckel schließen können. Wir haben so nach Ausführung des einen Rückkehrschnittes unsere Fläche in ein ebenes Blatt deformiert, dessen Rand bei der Fläche in sich selbst geschlossen war, und damit ist unabhängig von der Relation $K = E - S = 1$ gezeigt, daß unsere Fläche in der Tat nur einen Rückkehrschnitt zweiter Art enthält.

Wir haben somit durch die Betrachtungen der letzten Paragraphen den Satz gewonnen:

Alle in Bezug auf die Charakteristik möglichen ein- und zweiseitigen Flächen haben singularitätenfreie Repräsentanten.

Oder in anderem Gewande:

Es gibt eine singularitätenfreie ganz im Endlichen gelegene geschlossene Fläche, auf die sich die projektive Ebene umkehrbar eindeutig abbilden läßt.

Wie bildet sich nun die projektive Ebene auf unsere Fläche ab? Da herrscht natürlich große Willkür. Am übersichtlichsten gestaltet sich die Abbildung, wenn wir den in den Cylindermänteln liegenden Teil der Doppelkurve der unendlich fernen Geraden zuordnen. Da ergibt sich sofort: Jeder unpaare Kurvenzug, der ja eine ungerade Anzahl mal durchs Unendliche geht, schneidet die Doppelkurve eine ungerade Zahl von Malen und ist deshalb ein Rückkehrschnitt zweiter Art. Das Entsprechende gilt von den paaren Kurvenzügen.

Damit wollen wir unsere Betrachtung über die Curvatura integra und die Topologie von Flächen schließen.