

Le Retournement de la Sphère

7 décembre 2004

Introduction.

On considèrera dans ce qui va suivre des surfaces fermées, comme la sphère, le tore et quelques autres. Ce sont des surfaces au sens où l'entend l'homme de la rue, c'est à dire que ce sont des objets à 2 dimensions qu'on représente dans un espace euclidien à trois dimensions, R^3 , qui est notre espace mental de représentation. Ces surfaces peuvent faire l'objet de plusieurs types de représentations. Si elles ne se recoupent pas elles-mêmes, on dira qu'elles sont *plongées* (dans R^3). Si elle se recoupent on parlera alors *d'immersions* et ce recoupement se traduira alors par la présence d'un *ensemble d'auto-intersection* (self-intersection).

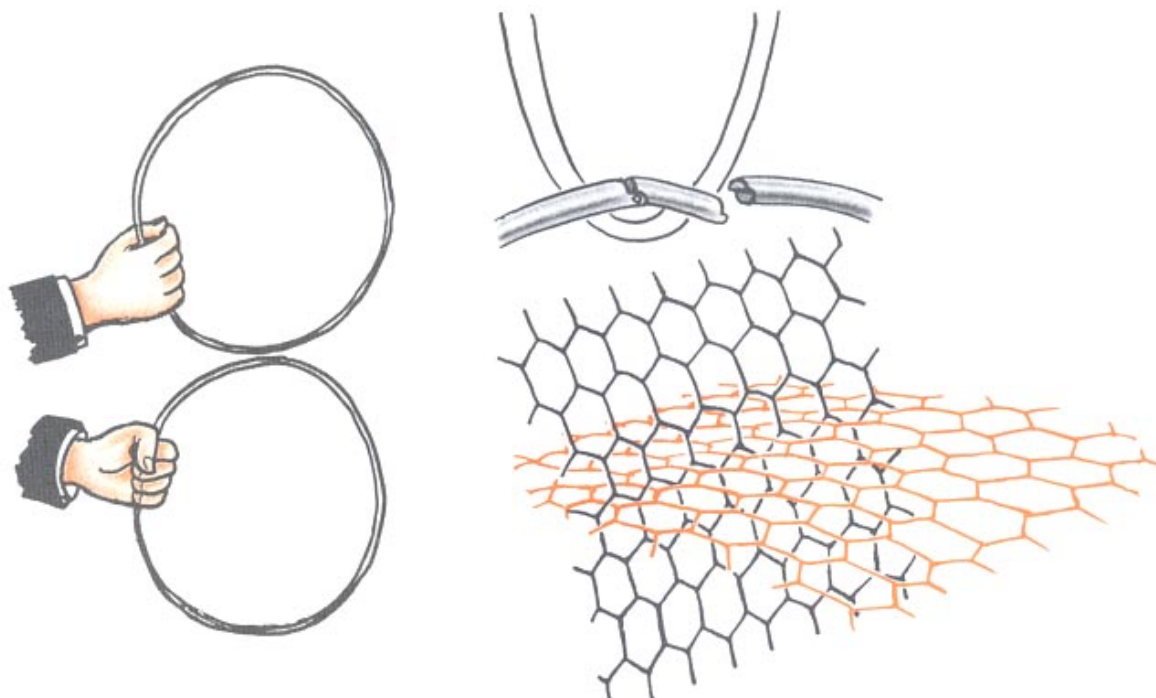
Dans nos plongements on supposera que le plan tangent varie continûment et que la surface est exempte de singularités comme pourrait l'être par exemple le sommet d'un cône. Nos surfaces seront *régulières*.

Dans le cas des immersions on demandera alors à ce que le long des lignes d'auto-intersection les deux plans tangents aux nappes qui se croisent soient distincts.

Le monde la géométrie, tel que le conçoit le mathématicien, est assez différent du monde physique. Le fait que les surfaces puisse s'auto-traverser ne le gêne nullement. Le monde physique ne permet pas ce genre de chose. Mais cela devient possible dans le monde métaphysique. Ainsi dans la Bible on lit que lorsque les morts ressusciteront, cela sera sous la forme de "corps glorieux". Ils pourront alors passer au travers de n'importe quoi et en principe seront capables de se traverser eux-mêmes. Ainsi, quand le temps du Jugement Dernier sera venu, si vous baladez dans Rome sous forme de corps glorieux, que vous êtes perdu et que vous cherchiez la piazza Navona, vous pourrez être tenté de demander votre chemin à un autre mortel ressuscité, ayant la même apparence que vous. Supposons que la personne que vous interrogez se dirige dans la direction opposée par rapport à cette place. Dans l'espace physique ordinaire, pour vous indiquer le bon chemin il lui faudrait pivoter sur lui-même pour pointer son doigt dans cette direction. Mais s'il chemine sous forme de corps glorieux, cette rotation ne sera plus nécessaire. Il pourra pointer son index sur son nombril et se traverser lui-même. Lorsque sa main réapparaîtra en émergeant de son dos il ne lui restera plus qu'à vous dire "c'est par là". En enfonçant son bras au travers de son ventre il aura créé dans son enveloppe corporelle un ensemble d'auto-intersection constitué par deux cercles, qui disparaîtra lorsqu'il reprendra sa configuration normale.

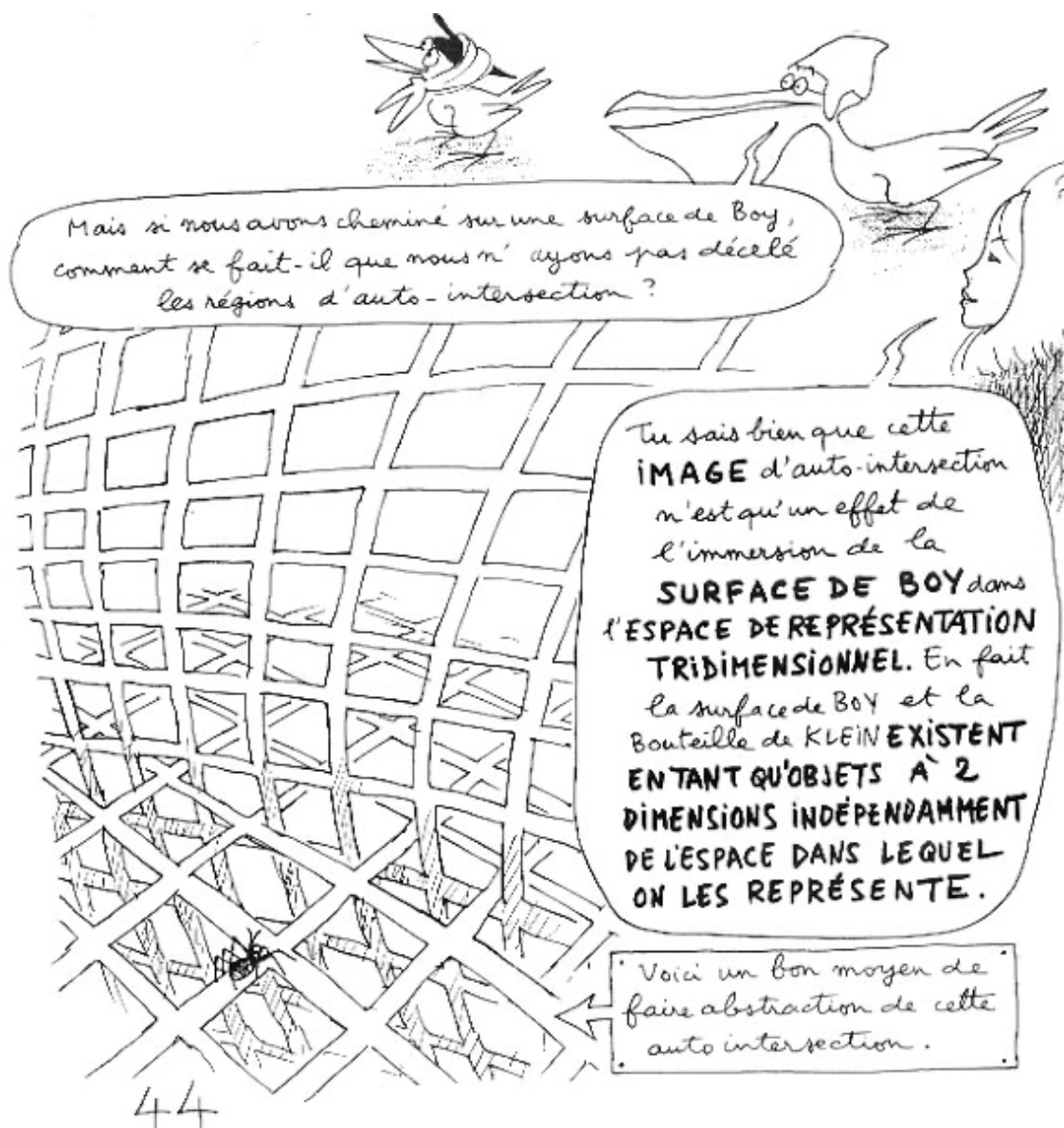
Si un être humain ferme la bouche, met une pince à linge sur ses narines pour les obturer et qu'on fait abstraction de ses autres orifices naturels son enveloppe corporelle adopte alors la topologie de la sphère S^2 . Imaginons un être ressuscité sous forme de corps glorieux dont les orifices naturels seraient ainsi obturés. Nous savons qu'il peut se traverser lui-même, c'est à dire que son enveloppe corporelle peut passer d'une situation de plongement à une situation d'immersion. Un des problèmes métaphysique qui s'est alors posé a été de savoir si un bonhomme resuscité sous forme de corps glorieux pouvait se retourner dans faire de plis.

Une petite remarque en passant. Les prestidigitateurs savent utiliser des "cercles magiques" qui peuvent s'interpénétrer "de façon magique". On pourrait imaginer de représenter des surfaces à l'aide d'une sorte de "grillage magique" tels que les deux nappes, représentées ici l'une en noir et l'autre en rose, puissent se traverser dans difficulté.



Le grillage magique

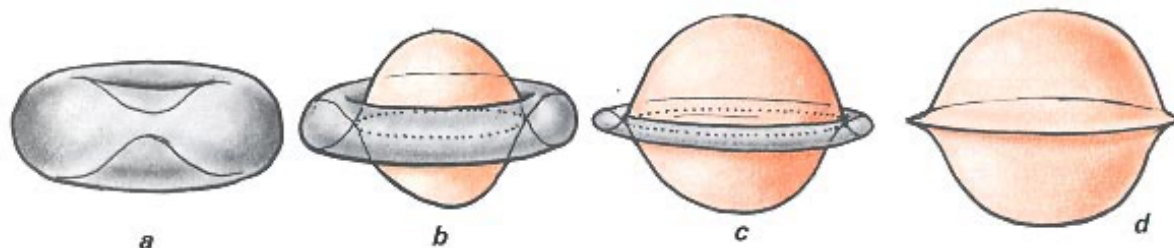
De toute façon, il faut convenir qu'ils n'y a souvent pas beaucoup de différence entre les mathématiques et la magie. J'ai conçu il y a vingt ans une bande dessinée : le Topologicon. Elle est maintenant épuisée et introuvable, sauf sous forme d'objet de collection. Sur l'une des pages on pouvait voir ceci :



Il est bien dommage que les éditions Belin aient décidé d'abandonner cette collection. Il faut dire qu'avec un prix de fabrication d'à peine plus d'un euros, vendre les albums 13 euros (plus le port), en vente par correspondance, en dehors du fait que cela laissait une marge bénéficiaire de 12 euros, c'est à dire avec un bénéfice dépassant 92 pour cent du prix de vente, ne correspond pas à une stratégie commerciale très évidente, surtout pour du noir et blanc.

Considérons une sphère S^2 plongée dans R^3 . Nous supposons que sa surface extérieure est grise et que son intérieur a une couleur vieux rose. Nous pouvons appuyer sur deux points antipodaux, que nous appellerions arbitrairement "pôle nord" et "pôle sud", jusqu'à les mettre en contact selon un point. On peut faire ça par exemple avec un beignet. Quand il s'agit d'un beignet mathématique (on ne sait pas si les beignets ressuscitent ou non sous forme de corps glorieux) les deux régions polaires, après avoir été en contact selon un point, peuvent s'auto-traverser selon une courbe d'auto-intersection qui affecte la forme d'un cercle. En anticipant, nous dirons que cette surface a subi une catastrophe de type Do.

On peut alors être tenté d'essayer de retourner le beignet, la sphère, en poursuivant l'opération. Mais alors un bourrelet va se former, qui va dégénérer selon un vilain pli, ou plus exactement une surface de rebroussement (figure d).



À la fin des années cinquante la grave question de savoir si on pouvait retourner des beignets métaphysiques sans faire de plis restait non résolue. A dire vrai, tout le monde pensait que cela était strictement impossible. Mais en 1957 un mathématicien, Stephen Smale (qui reçut la médaille Field mais pour un tout autre travail) démontra que les différentes immersions de la sphère S^2 dans R^3 constituaient un unique ensemble et qu'il était toujours possible de trouver une suite de déformations continues d'immersions (qu'on appelle aussi homotopie régulière) permettant de passer d'une situation à une autre. Le corollaire était qu'on devait pouvoir passer à l'aide d'une suite continue d'immersion du plongement standard de la sphère S^2 au plongement antipodal. Dit en termes plus simples : on devait pouvoir retourner une sphère sans faire de plis, à condition de lui permettre de se retourner elle-même.

Le patron de Smale s'appelait Raoul Bott. Celui-ci demanda à son élève comment on devait s'y prendre et Smale répondit qu'il n'en avait pas la moindre idée, mais que son théorème était totalement inattaquable. Smale ne voyait pas du tout dans l'espace mais il n'en avait cure (comme c'est le cas chez beaucoup de géomètres). Et, si on est tout à fait franc, après avoir démontré son théorème il se moquait éperdument de la façon dont on pourrait s'y prendre pour concrétiser la chose et s'était empressé de s'intéresser à un autre sujet, laissant ses collègues mathématiciens dans la plus grande perplexité. je trouve que ça n'est pas très sympa de créer comme ça des problème et de laisser ensuite les gens se débrouiller pour trouver la solution, dix ans après.

Il faut dire qu'il est assez difficile d'imaginer des immersions, dans sa tête. Pourtant on connaît des surface qui ne peuvent être représentées dans R^3 que de cette façon. La bouteille de Klein, par exemple.

Bouteille de Klein

On l'a représentée ici avec un système de maillage-système de coordonnées constitué par deux ensembles de courbes fermées, comme le tore. On peut ainsi mailler une bouteille de Klein sans créer de singularité de maillage. Mais comme on peut le voir cette surface s'auto-traverse nécessairement selon une courbe fermée, un cercle. On ne peut donc pas plonger une bouteille de Klein dans R^3 . J'ai essayé, ça ne marche pas. On ne peut que l'immerger. Grâce à mes talents de dessinateur vous arrivez à peu près à vous représenter cet objet. Mais quand il s'est agi de retourner une sphère il a fallu envisager des configurations beaucoup plus compliquées. La façon de les représenter n'était pas des plus commodes. Certains utilisaient de la pâte à modeler. Quand on les voyait discuter entre eux dans des colloques, ils se mettaient généralement à l'écart, et ouvrait devant leurs collègues des boîtes à chaussures ou des cartons à chapeaux, contenant des objets plus ou moins monstrueux. Le dessin ci-dessus évoque la façon la plus commode de construire ces objets et de les manipuler : avec ce qu'on appelle du "fil de fer cuivré", un alliage qui est assez souple pour que l'on puisse le plier sans difficulté, mais qui conserve néanmoins son élasticité. La meilleure façon de procéder consiste alors à matérialiser les points de rencontre des lignes (nous recommandons des tiges de 2 mm de diamètre) en les fixant à l'aide de ligatures de fil. L'avantage est qu'on peut les faire glisser, du moins jusqu'à ce qu'on considère que l'objet a acquis une forme définitive. On peut alors supprimer tout glissement à l'aide d'un point de colle.

Dans la pratique il est assez rare qu'on ait à se servir de bouteilles de Klein. Ci-après, une photographie d'une bouteille de Klein que j'utilise pour mes besoins personnels.



Ces objets, pour peu qu'on ait quelque sens des formes, sont assez beaux. J'en ai fait construire un certain nombre quand j'étais professeur de sculpture à l'Ecole des Beaux-Arts d'Aix en Provence Mais avant que je ne passe à cette technique il y eut bien des tâtonnements où nous mêlions le fil de fer mou et le carton, ce qui donnait des résultats d'une esthétique tout à fait discutable. Je me rappelle qu'un jour j'avais du prendre le train à Marseille pour amener à Paris à mon regretté ami le mathématicien André Lichnerowicz plusieurs surfaces dont j'avais réussi à construire des représentations suffisamment parlantes. Il y avait en particulier la surface de Boy où j'avais plaqué une cartographie centrée sur un pôle unique. Cela a donné à la fin un objet absolument superbe, qui fut exposé pendant vingt ans dans la salle π_1 du Palais de la Découverte de Paris. Mais il y a un an la direction du Musée estima que cette surface était passée de mode et elle repose maintenant dans un grenier ou dans une cave. J'espère qu'elle n'a pas été écrasée dans le transport. Tout cela pour dire que vous ne pourrez maintenant voir de surface de Boy nulle part, sinon dans des livres, ou dans un CD ROM sur lequel j'ai consigné mes 18 bandes dessinées scientifiques en format pdf, dont le Topologicon.

Mais revenons à ce voyage que j'avais entrepris, de Marseille à Paris. J'étais déjà encombré par deux valises et j'avais décidé de prendre avec moi trois modèles. La seule solution avait été de les accrocher autour de mon cou. Mais quand j'ai traversé le hall de la gare et que j'ai vu comment les gens me regardaient j'ai compris qu'ils s'imaginaient avoir affaire à un fou qui avait obtenu de son asile une permission de sortie. Il aurait été totalement vain de tenter de leur expliquer le contraire et j'ai du subir ce calvaire avec toute la dignité possible.

Ce qui est amusant c'est que les gens qui construisent des choses de ce genre sont assez rares. Il y avait en Amérique un mathématicien nommé Charles Pugh, qui travaillait au département de mathématiques de l'université de Berkeley. J'aurai l'occasion de reparler de lui par la suite. Pugh était absolument génial avec le grillage pour les poules, mais personnellement j'ai toujours préféré la technique du fil de fer cuivré.

Revenons à cette histoire de retournement de sphère. Le premier qui réussit à venir à bout de ce problème fut le géomètre Anthony Phillips Il publia son travail, c'est à dire une suite de dessins dans un numéro de Scientific American, en 1967. Il y a plusieurs façons de retourner une sphère. L'une consiste à amener chaque point de la sphère en coïncidence avec son antipode. Elle prend alors la forme d'une surface de Boy. J'ai toujours rêvé de trouver un sponsor pour construire une magnifique sculpture qui représenterait un globe terrestre qui serait replié en surface de Boy. Faute de pouvoir construire l'objet j'en ai fait l'illustration de couverture du Topologicon :

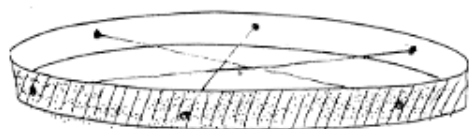


La sphère terrestre recollée sur elle-même selon une surface de Boy

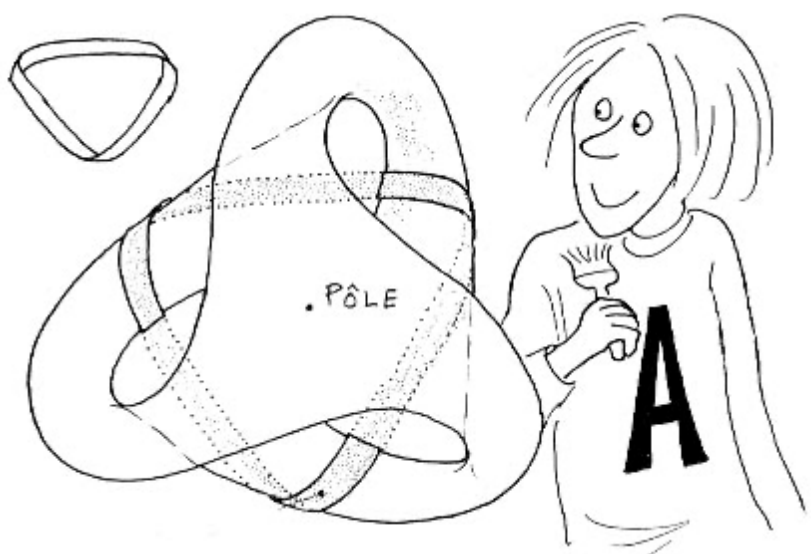
Dans une telle configuration, si on creuse un trou au pôle nord on émerge aussitôt de l'autre côté, au pôle sud, puisque ces deux points sont antipodaux. Un Français qui creuserait un trou dans sa cave se retrouverait en Nouvelle Zélande, etc.

La version trouvée par Anthony Phillips consiste effectivement à décrire la façon dont la sphère se configure en forme de revêtement à deux feuillet de la surface de Boy, qui est bien entendu une surface unilatère. Si on disposait d'un produit magique, *la traversine*, qui donnerait aux surfaces le don de pouvoir se traverser elles-mêmes, il suffirait de joindre chaque à son antipode par un fil, qu'on ferait se rétrécir jusqu'à devenir de longueur nulle. Si on ne peut pas aisément représenter cette transformation on peut néanmoins s'intéresser à une partie de la sphère, par exemple son voisinage équatorial. C'est ce qui a été fait dans les animations qui suivent. Cette surface, dotée de deux bords circulaires ressemble à une jante de roue de bicyclette. On a figuré trois rayons, reliés aux points diamétralement opposés. En

faisant tendre la longueur de ces rayons vers zéro cette bande bilatère se configurera en revêtement à deux feuillets d'un ruban de Moebius à trois demi-tours. Ci-après, deux animations assez grossières. celle de gauche est lente et celle de droite rapide.

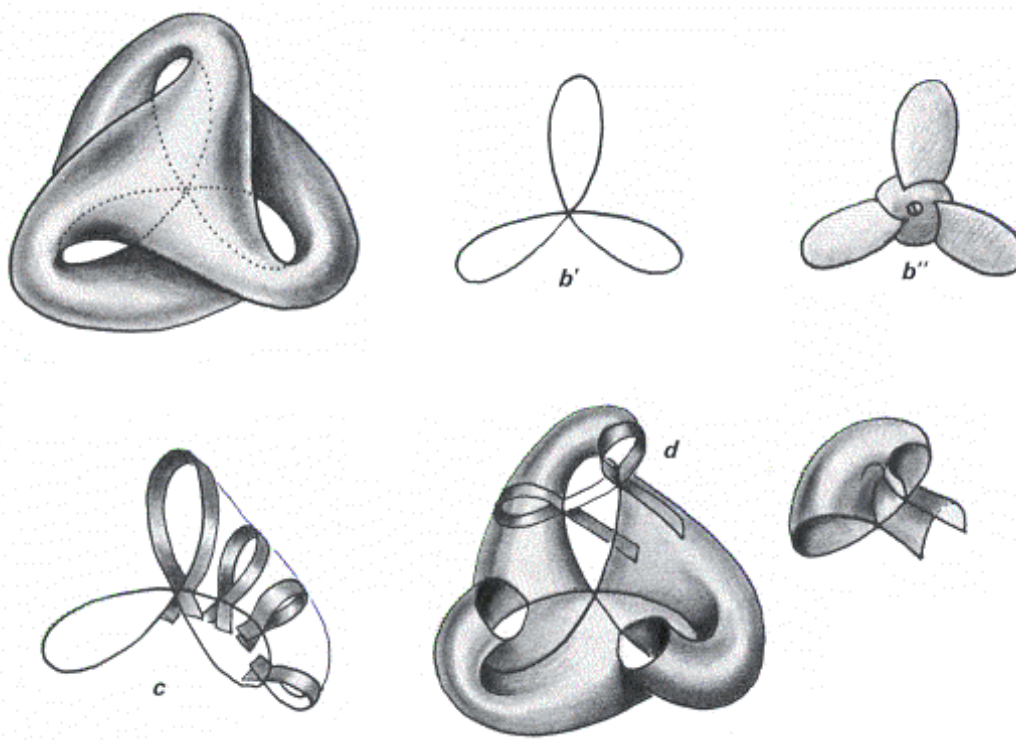


Ce ruban de Moebius à trois demi-tours est le "voisinage équatorial" de la surface de Boy. C'est sur cette bande que vient s'enrouler l'équateur de la sphère.

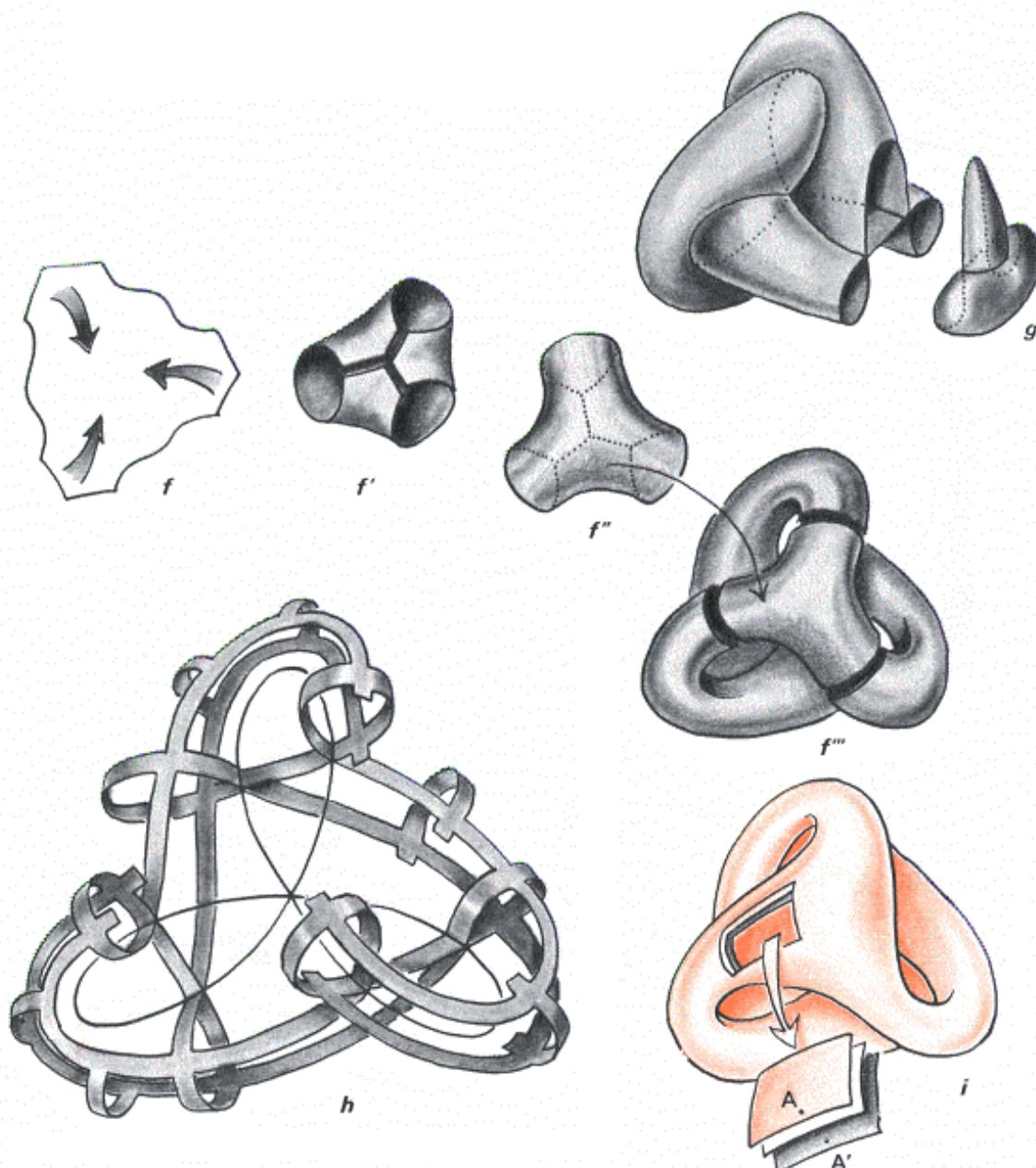


" L'équateur " de la surface de Boy

Quant aux deux pôles de la sphère ils viennent en coïncidence sur le pôle unique de la surface. Celle-ci, comme la bouteille de Klein, ne peut être plongée dans \mathbb{R}^3 . Elle ne peut qu'être représentée sous forme d'une immersion. Elle possède alors un ensemble d'auto-intersection qui a la forme d'une hélice à trois pales dont on aperçoit des extrémités, qui ressemblent aux "tympanes" de trois "oreilles". Dans les planches suivantes on trouvera quelques éléments pour mieux "lire" cette surface. En cas de problème, procurez-vous un Topologicon.



En haut et à gauche une surface de Boy. Comme cette surface est unilatère on ne saurait utiliser deux couleurs. En **b'** l'ensemble d'auto-intersection, trifolié, évoquant les pales d'une hélice en **b''**. La courbe se recoupe en un point triple T. Les dessins suivants sont là pour aider le lecteur à s'y retrouver.



Tout est bon pour tenter d'illustrer la structure d'une surface : des bandelettes, un montage avec des pièces rapportées. On voit qu'un sculpteur trouverait son bonheur avec cet objet réellement fascinant. Un mot au passage sur son histoire. En 1901 un étudiant du grand mathématicien allemand Hilbert, Werner Boy, évoqua devant lui une surface dont personne n'avait eu l'idée auparavant. Les vacances étaient toutes proches. Hilbert dit à son étudiant :

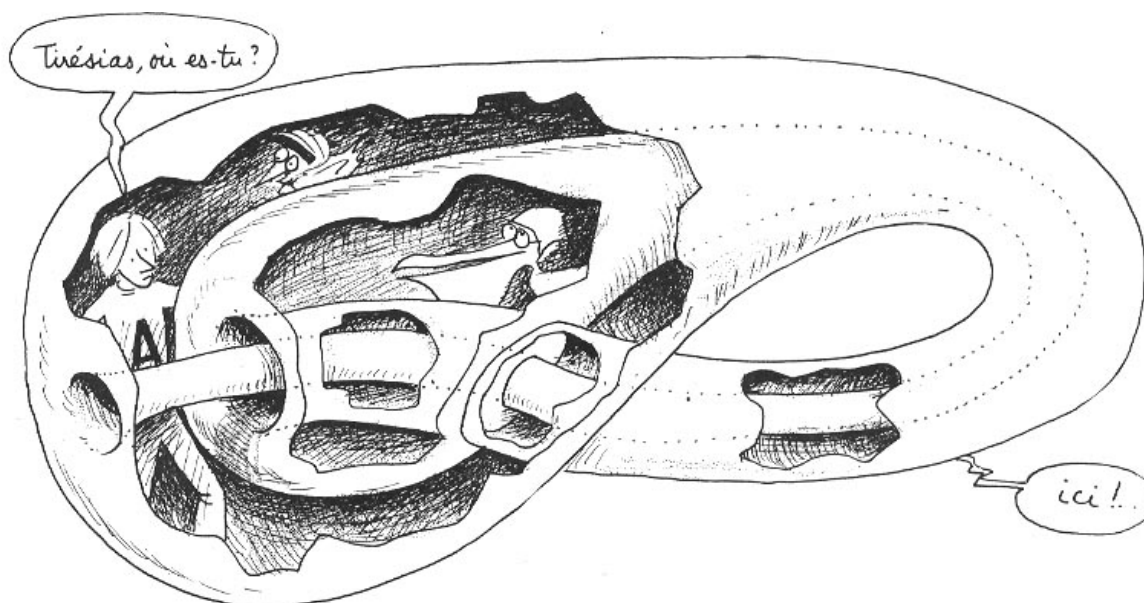
- Ce problème me paraît intéressant. Si vous voulez, revenez me voir à la rentrée, nous en discuterons.

Les vacances passèrent, mais à la rentrée Boy ne réapparut pas. Au bout de deux mois, Hilbert essaya de le trouver. D'autres étudiants lui ayant signalé son adresse, il s'y rendit. Mais la logeuse lui déclara que le jeune Werner Boy lui avait rendu les clés avant l'été et qu'il n'était plus réapparu. Toutes les recherches menées pour le retrouver s'avèrent vaines, de

même que celles de retrouver des membres de sa famille. Il se volatilisa littéralement. Si vous vous rendez en Allemagne, n'espérez pas vous rendre sur la tombe de cet illustre inventeur : elle n'existe pas.

Sur la dernière figure, en bas et à droite, on a fait figurer, en blanc, la surface de Boy proprement dite et avec des couleurs grises et roses les deux côtés de la sphère qui la revêt. Les points A et A' sont, sur cette sphère, antipodaux. On comprend en tout cas comment ce revêtement à deux feuillets de la surface de Boy peut être utilisé pour retourner la sphère. Supposons que nous disposions de la suite de transformations, de l'homotopie régulière qui ait permis de transformer une sphère rose à l'extérieur, grise à l'intérieur en cette figure en bas et à droite. Il suffirait alors d'échanger les deux nappes (en les faisant s'auto-traverser), entre autre les points A et A' et d'opérer les mêmes transformations, effectuées à rebours, pour tomber sur le plongement antipodal de cette sphère, présentant cette fois sa couleur grise à l'extérieur.

Dans la même logique on peut s'attendre à ce qu'un tore puisse se configurer en revêtement à deux feuillets d'une ... bouteille de Klein. Voici à quoi ressemble ce revêtement.



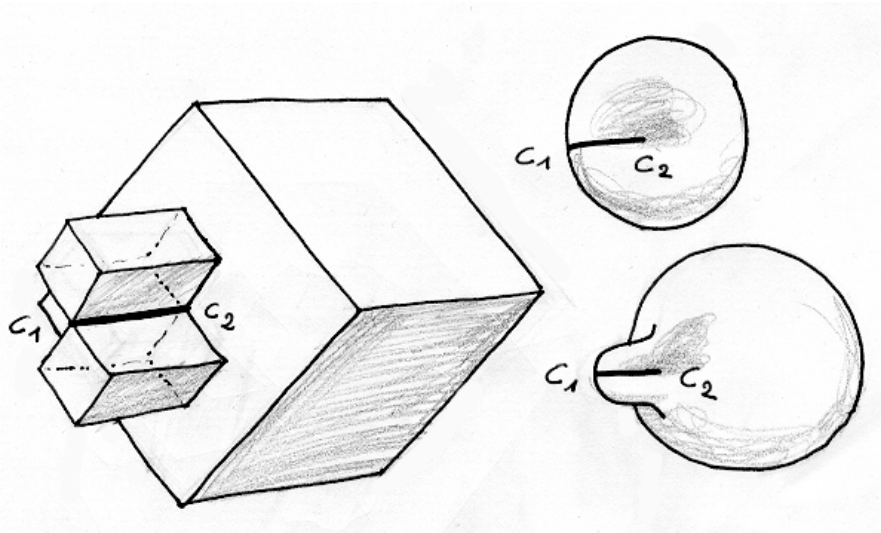
Revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein

Si on parvient à configurer un tore de cette façon il suffit encore une fois d'échanger les nappes adjacentes, situées de part et d'autres de la bouteille de Klein (non représentée ici), puis d'opérer les opérations en sens inverse pour tomber sur le tore retourné. Ce travail a été présenté dans le numéro de janvier 1979 de Pour la Science dans un article signé B. Morin et J.P.Petit. Je me suis chargé de la partie dessine et Morin du texte. Bien qu'il ait cité beaucoup de monde dans ce papier, il m'a oublié au passage, comme il a oublié de mentionner que j'étais l'inventeur de cette partie du travail, présenté sur les pages 46 et 47. Mais ce sont des choses qui arrivent quand on collabore étroitement avec un collègue. Vous savez comment c'est : on est tellement habitué à sa présence depuis des années et on est tellement soucieux de n'oublier personne qu'on finit par l'oublier lui, comme s'il faisait partie du mobilier. Pour plus de détails ce travail a été publié sous mon nom aux Comptes Rendus de l'Académie des

Sciences de Paris le 20 novembre 1978, sous le titre "Retournement non-trivial du tore", l'article ayant été présenté par l'Académicien André Lichnérowicz.

Permutation des points cuspidaux d'une crosscap

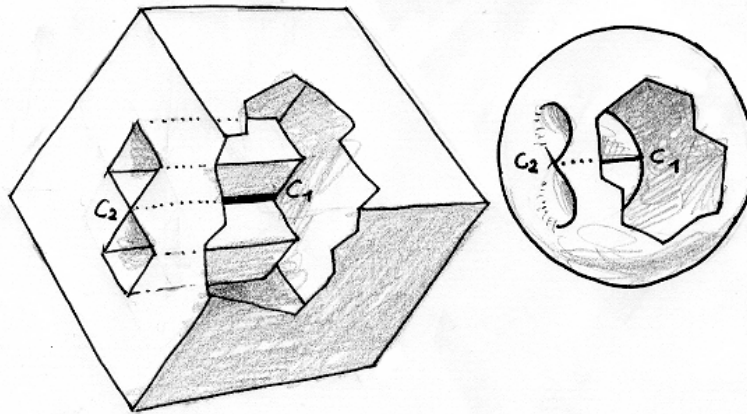
Ceci va constituer un petit intermède, sur le mode "à quoi peut servir le retournement de la sphère ? ". Ici : à permutation des deux points cuspidaux d'une Crosscap, ce qui pouvait sembler a priori impossible. J'ai inventé ce petit truc il y a une bonne douzaine d'années. Ca n'a jamais été publié. Mais où publier ce genre de chose? On ne sait pas trop. Il ne s'agit pas "d'un résultat majeur en mathématiques", mais c'est un exercice quand même assez séduisant. Dans ce qui va suivre on va faire usage de représentations polyédriques. A droite la Crosscap "ronde" et à gauche une de ses multiples représentations polyédriques possibles.



La Crosscap avec une de ses multiples représentations polyédriques.

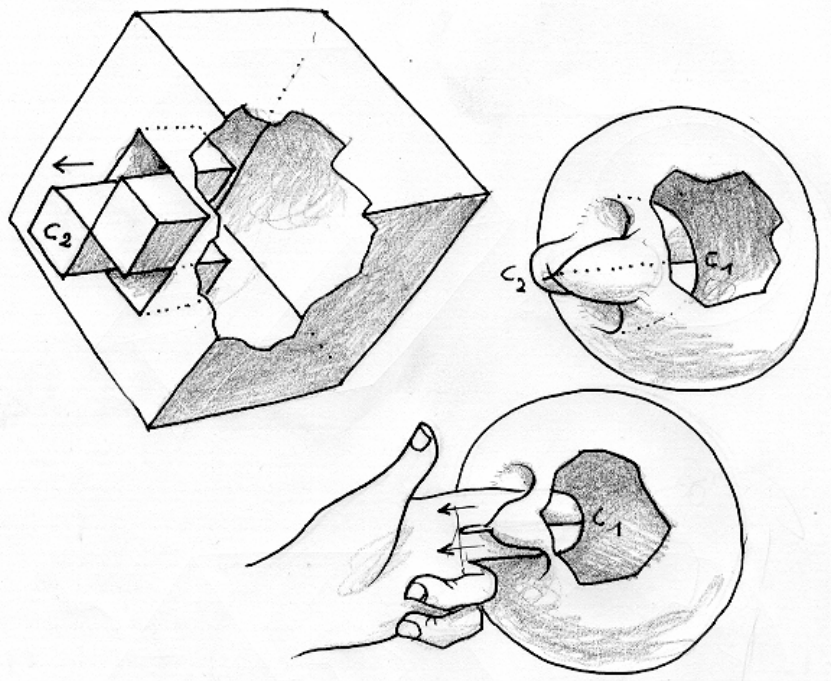
Dans la figure en bas et à droite on s'est arrangé pour loger les deux points cuspidaux C_1 et C_2 situés à l'extrémité de sa ligne d'auto-intersection dans ce qu'on peut considérer comme une portion de sphère. Nous savons que nous pouvons retourner une sphère. Donc nous pouvons faire subir à cet objet le même traitement, sans nous préoccuper des différentes étapes de cette transformation. En polyédrique cela consistera à retourner le cube.

Tout ce que nous savons c'est qu'en fin d'opération on aura deux sortes d'invaginations qui se présentent comme ce que verrait un observateur qui se situerait "à l'intérieur" de la Crosscap initiale (ce qui est une expression impropre puisque cette surface est unilatère).



Après retournement, du cube à gauche, de la sphère à droite

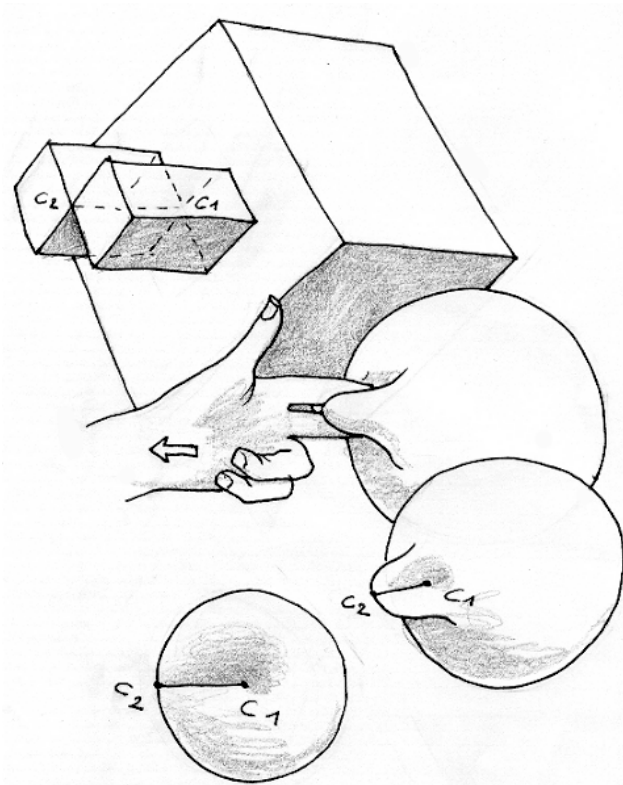
La représentation polyédrique est quand même sacrément commode pour ne pas perdre le fil de ces opérations. Il ne reste plus qu'à enfiler deux doigts dans ces invaginations et de tirer le tout vers l'extérieur :



Tirer le point cuspidal C2 "à l'extérieur"

Si cela vous amuse, vous pourrez construire les modèles polyédriques avec du carton. A moins qu'un courageux ne construise ces modèles en vrml pour qu'on puisse les manipuler.

Il ne reste plus qu'à finaliser l'opération.



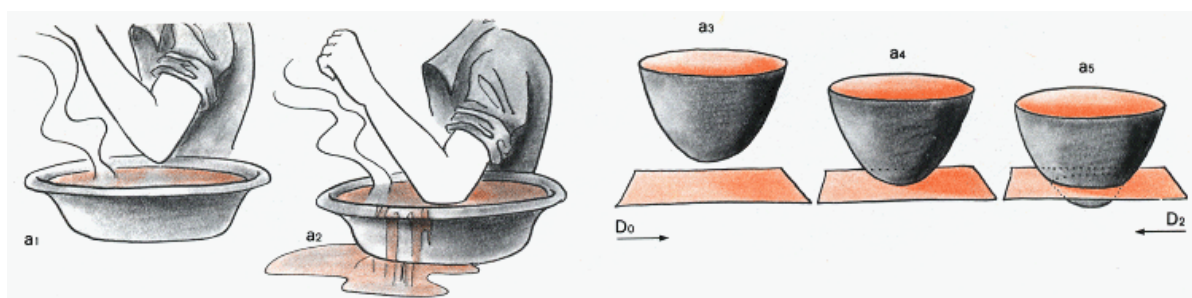
Passage à une immersion identique à celle du départ, avec les points cuspidaux permutés.

J'ai promis, un jour, de faire un dossier racontant mes rencontres avec le psychanalyste Jacques Lacan. La Crosscap lui avait servi pour modéliser le "fantasme fondamental". Il s'était polarisé sur le "point cuspidal central" et négligeant simplement le second. En cette région centrale Lacan avait localisé le "phallus linguistique" ou "objet petit a". Je vous raconterai le reste une autre fois. Toujours est-il que Lacan n'avait pas prévu que ces points puissent être "père - mutés". En fait, quand il m'avait parlé de cette modélisation linguistico - géométrico - psychanalytique j'avais froncé les sourcils en imaginant que dans cette Crosscap les deux points cuspidaux puissent jouer les rôles différents et, dans la seconde qui suivait, simplement en m'étant posé la question, j'avais trouvé comment les échanger. Lacan en fut assez sidéré, je me rappelle. Son fantasme fondamental avait deux phallus linguistiques au lieu d'un seul. Toute son affaire avait été articulée autour de cet objet. Mais je lui ai aussitôt proposé une solution de rechange en situant le phallus linguistique au pôle (unique) d'une surface de Boy. Ainsi, tout rentra dans l'ordre à sa grande satisfaction.

Cet épisode se situe assez peu de temps avant sa mort. A ce que j'ai pu constater, ce redéploiement psychanalytico-géométrique n'a apparemment pas encore diffusé au sein de la communauté des psychanalystes lacaniens.

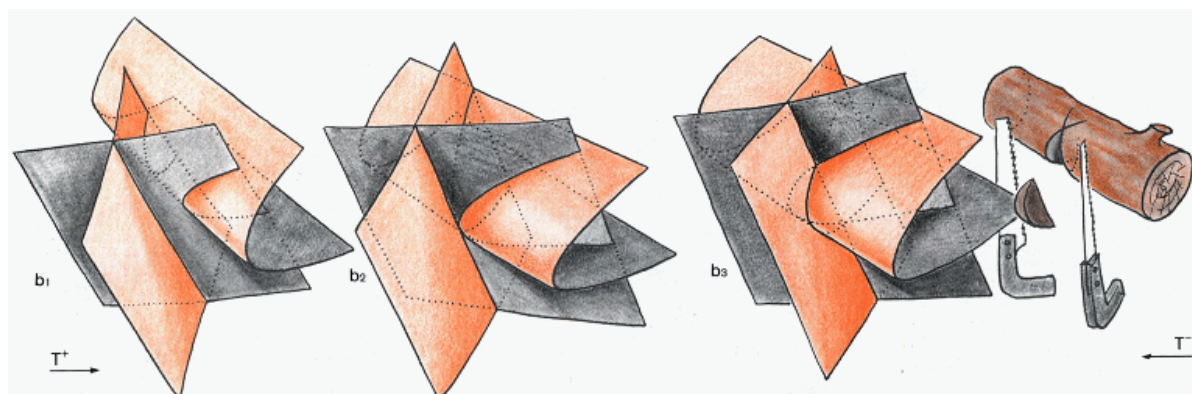
Les catastrophes élémentaires.

Nous avons déjà dit plus haut que les immersions que nous considérons étaient telles que les plans tangents le long de leurs ensembles d'auto-intersection, quand celles-ci en étaient dotées, restaient distincts. Il est alors possible de passer d'une immersion à une autre à l'aide de quatre catastrophes élémentaires. Morin leur avait donné des noms, qui figurent sur les dessins ci-après. La première conduit à la création d'une courbe fermée (et son annihilation, opération inverse). C'est ce qui se passe lorsqu'on plonge son coude dans l'eau d'une cuvette pour apprécier sa température (à gauche). Figure a4 : les surfaces sont en contact en un point. En a5 la courbe d'auto-intersection a été créée. Dans la suite du texte nous appellerons cette opération "la catastrophe du coude".



La " catastrophe du coude" : création - décréation d'une courbe fermée

La seconde catastrophe est celle de la "tranche de mandarine" :

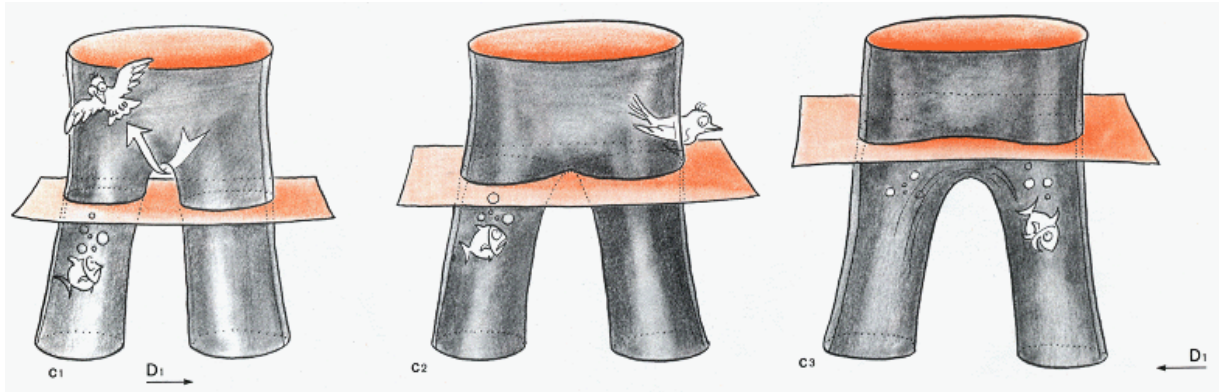


La catastrophe consistant en la création-décréation d'une "tranche de mandarine".

Si on regarde bien ces images, de la gauche vers la droite on verra qu'un cylindre parabolique s'approche d'un dièdre. L'ensemble d'auto-intersection est constitué par deux courbes d'allure parabolique, disjointes, plus évidemment l'arête du dièdre. Dans la figure du centre l'arête du dièdre est en contact avec une des génératrices du cylindre. Cette arête est tangente au cylindre en ce point. L'ensemble d'auto-intersection est constitué par deux courbes d'allure parabolique, tangentes en un point, et à l'arête du dièdre. Figure de droite : le cylindre parabolique a poursuivi son mouvement. La courbe d'auto-intersection s'est modifiée. Elle est constituée par l'arête du dièdre, plus les courbes paraboliques qui se recoupent en deux points, situés sur l'arête du

dièdre. On peut considérer à l'inverse que le cylindre parabolique est immobile et que ce sont les deux "plans de coupe" qui se déplacent. La figure de droite évoquerait alors deux coups de hache, ou deux découpes effectuées à la scie. Le copeau est également figuré. Morin le compare à une "tranche de mandarine", image très parlante.

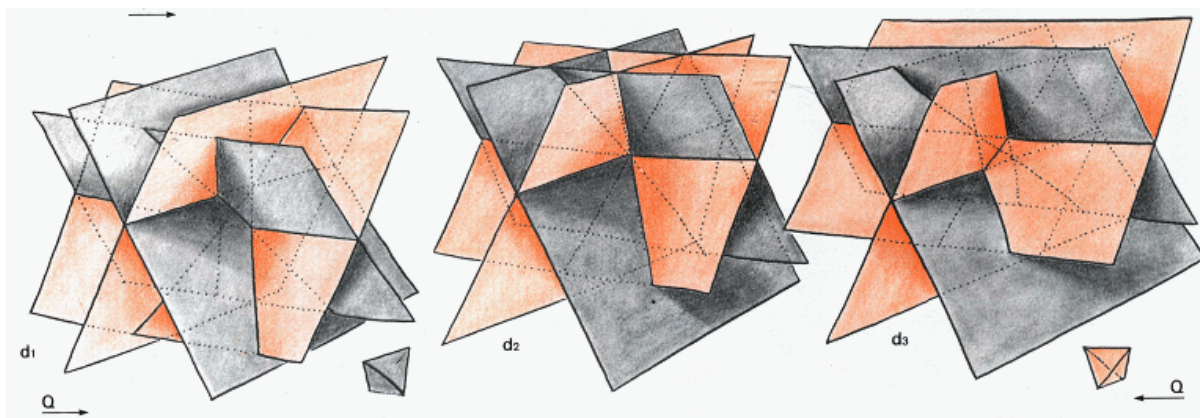
La troisième catastrophe est celle "du pantalon".



La catastrophe "du pantalon"

Les images sont suffisamment parlantes. On descend de gauche à droite un pantalon dans l'eau. A gauche l'oiseau passe sous l'entre-jambe mais le poisson reste confiné dans une des jambes. A droite le poisson passe, mais le passage qu'empruntait l'oiseau a disparu. Au centre la situation intermédiaire. Ce qui compte c'est la modification locale de la courbe d'intersection, qui correspond à ce qu'on appelle une "chirurgie", un changement de raccordement d'arcs de courbe. Essayez de bien intégrer cette transformation qui s'avérera la plus difficile à mettre en oeuvre et à bien voir dans l'homotopie du retournement de la sphère. Retenez bien que cette catastrophe ferme un passage en même temps qu'elle en ouvre un autre dans la direction perpendiculaire.

La quatrième et dernière catastrophe est celle de " l'inversion d'un tétraèdre " :



La catastrophe inversant un tétraèdre

La courbe d'auto-intersection est constituée par quatre "droites" qui sont les prolongements des quatre côtés d'un tétraèdre. Dans la figure de gauche on a isolé ce tétraèdre qui montre ses faces grises vers l'extérieur. A droite, c'est l'inverse : les faces sont roses. Au centre, situation intermédiaire : le tétraèdre est réduit à un point Q (quadruple, puisqu'il est à l'intersection que quatre nappes).

A l'aide de ces quatre catastrophes nous allons envisager de retourner une sphère selon une suite continue d'immersions transverses. Cette variante est due au mathématicien (aveugle) Bernard Morin. Notre rencontre vaut la peine d'être contée. Un jour un technicien de la faculté des lettres me demanda d'apporter mes talents de dessinateur à un conférencier qui devait parler de géométrie. Je vins à ce rendez-vous sans aucune méfiance. J'avais toujours été assez habile pour voir les objets dans l'espace et lorsque notre professeur de mathématiques supérieures nous donnait à traiter un problème de géométrie descriptive je traçais l'intersection et je fournissais une vue en perspective en même temps qu'il produisait son énoncé. Mais là, les choses allaient se passer différemment.

Je n'eus aucune difficulté à dessiner les figures ci-dessus. Mais quand il fallut les intégrer dans un schéma impliquant le retournement de la sphère je finis par perdre complètement les pédales, confronté à tout un ensemble de nappes situées les unes derrière les autres. Piqué au vif je revins voir ce personnage étrange qui, bien que prové de la vue semblait plus à l'aise que moi dans ce déploiement de formes. Je suivis alors ses cours pendant plusieurs mois. Le dialogue était assez compliqué. De son côté il n'avait que le recours à la parole. Du mien je pouvais soit lui décrire mes dessins, soit mettre entre ses mains des maquettes réalisées en rentrant chez moi, ou par la suite sur place. Il aurait fallu enregistrer ces dialogues, absolument surréalistes, du genre :

- Essaye d'imaginer deux courbes qui viendraient se rejoindre en constituant une sorte de fouet à battre les oeufs.

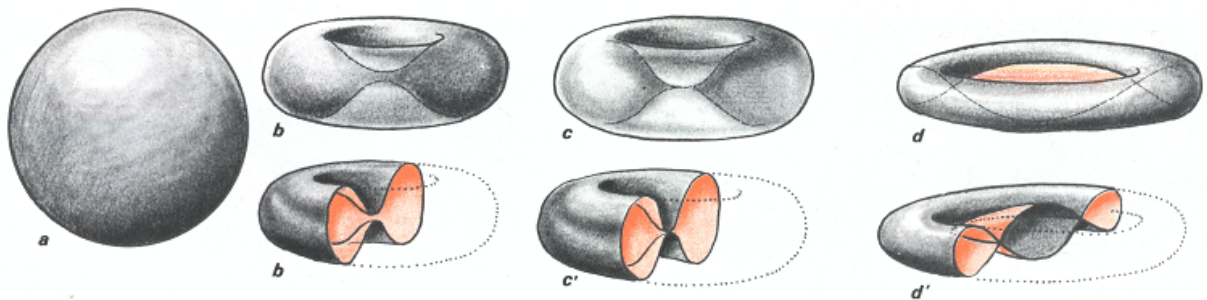
En dépit de la personnalité difficile du personnage ces rencontres restèrent pour moi inoubliables. Je finis seulement par prendre l'habitude d'avalier deux aspirines avant nos séances de travail, à titre préventif. Son caractère peut être résumé dans le sobriquet dont son épouse l'avait qualifié : "Foudre bénie", lequel est un personnage de la bande dessinée d'Hergé "Tintin au Tibet". Ses rancunes de Morin avaient un caractère aussi légendaire qu'irréversible. Il lui arrivait d'évoquer certains de ses ennemis, qui avaient passé l'arme à gauche, en lançant à leur propos :

- Je leur jette parfois une petite malédiction dans l'au-delà, en me disant que si ça ne leur fait pas de mal, au moins ça ne peut pas leur faire de bien.

:

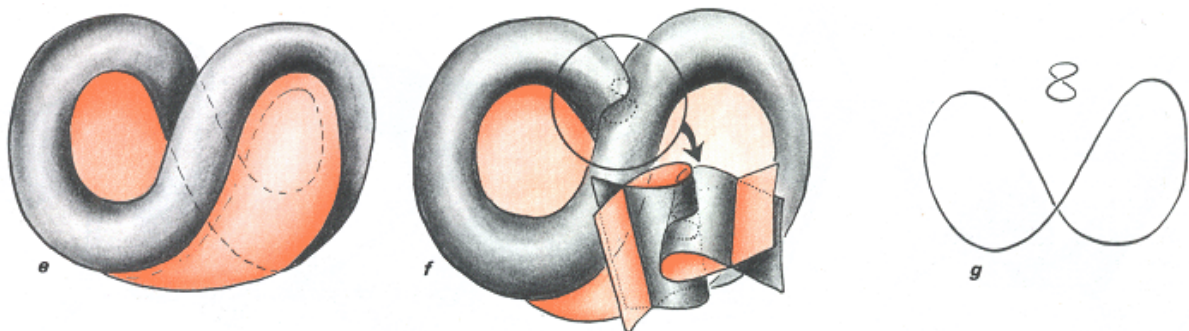
La version de Bernard Morin

On va partir d'une sphère qui présente sa face grise vers l'extérieur et sa face rose à l'intérieur. En **b** et **c** on amène ses pôles en contact. Puis les nappes s'interpénètrent selon un "catastrophe du coude". Il y a création d'une courbe fermée d'auto-intersection. En bas et à droite trois demi-coupes permettent de mieux de rendre compte de la configuration obtenue. A ce stade la sphère ressemble à une sorte de "canot pneumatique" circulaire, avec un "boudin" et un "plancher" à double paroi.



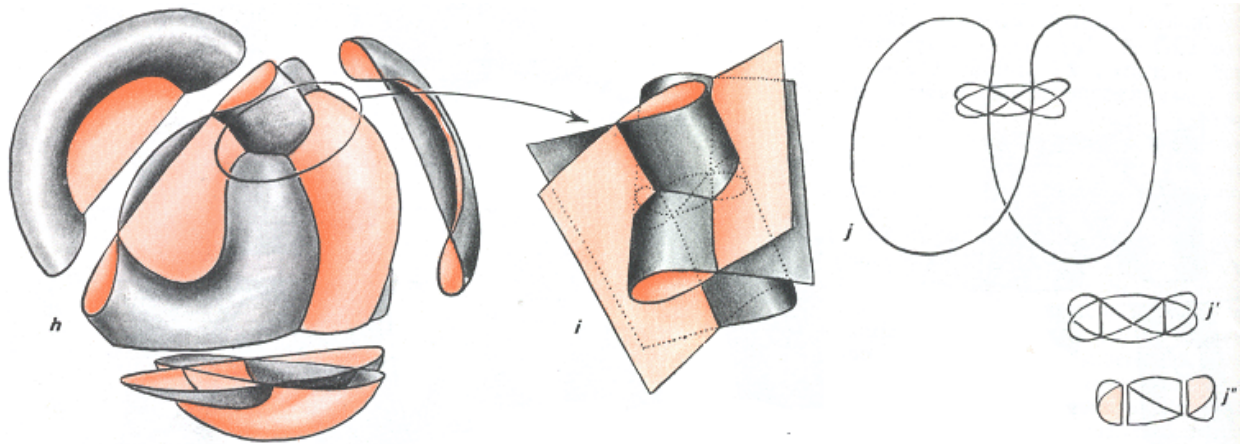
Première étape : une "catastrophe du coude". Création d'une courbe fermée d'auto-intersection

Deuxième opération : nouvelle catastrophe du coude, création d'une seconde courbe fermée.



Seconde création d'une courbe fermée d'auto-intersection.

Pour ce faire le "canot pneumatique" s'est plié, avec un mouvement de vrillage, ce qui a permis d'amener deux parties du "boudin", diamétralement opposées, en contact. L'image suivante est le résultat de deux catastrophes conduisant à la création de "tranches de mandarine".



Après création de deux "tranches de mandarine"

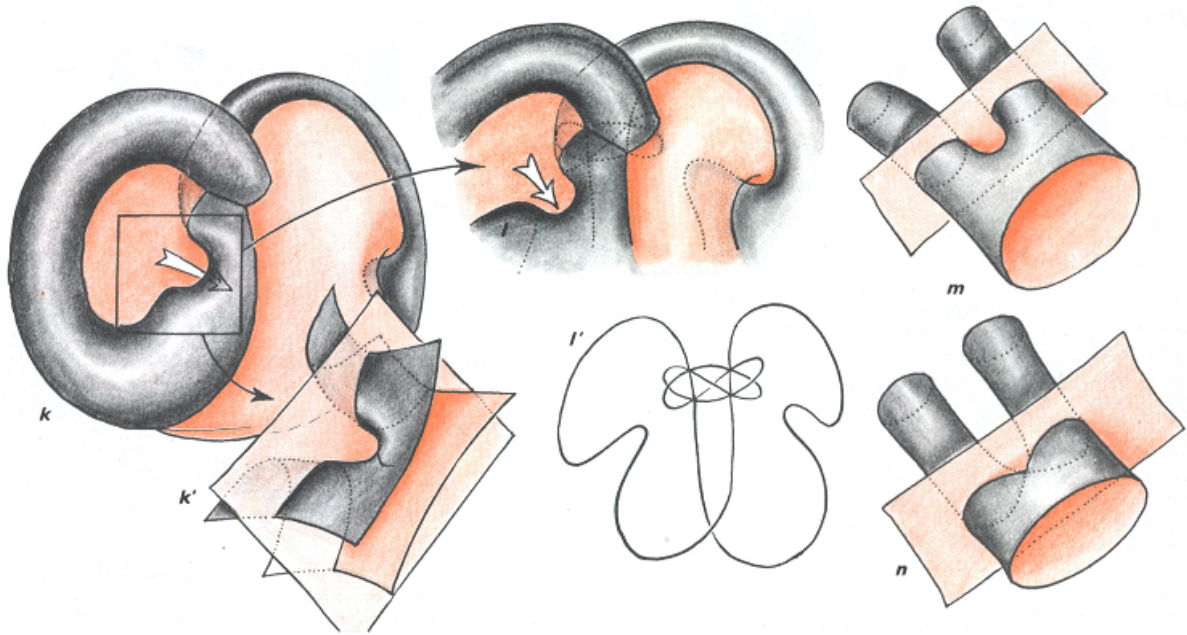
À gauche on a opéré des coupes dans le modèle. Au centre la façon dont les deux cylindres dont, localement, la section affecte la forme de la lettre grecque "gamma" se sont interpénétrés. On se rappelle que la catastrophe de création de "tranches de mandarines" s'opérait en coupant une "bûche" avec deux plans formant un dièdre. Chacune des structures cylindriques dont la section est en "gamma" comporte à la fois la section arrondie et le dièdre. Regardez avec attention la figure *i*. En *j* on a dessiné l'ensemble d'auto-intersection. La portion de courbe fermée la plus grande provient de la première "catastrophe du coude" qui avait transformé la sphère en "canot pneumatique". Après création des deux tranches de mandarines on obtient un ensemble plus complexe dont *j'* est un sous-ensemble. En *j''* on voit que cette structure peut être comparée à l'assemblage de deux "tranches de mandarine" sur deux arêtes d'un tétraèdre, non adjacentes.

Tout cela sera un jour beaucoup plus simple à appréhender quand j'aurai pu produire des animations. Cela ne me pose aucun problème technique a priori. C'est une simple question de temps. Rares sont les gens qui peuvent non seulement voir dans l'espace, c'est à dire lire ce codage utilisant des lignes, des pointillés, des couleurs, des ombres et des reflets mais aussi enchaîner dans leur tête des transformations en imaginant le mouvement suggéré. J'espère avoir un jour le temps de faire toutes ces choses. Remarquons au passage qu'on pourrait utiliser des modèles polyédriques, comme je l'ai fait pour montrer comment on peut transformer une Crosscap en Surface de Boy. Là est l'avenir. Mais ces modèles, il faut les inventer. On trouvera plus loin la version polyédrique optimisée du modèle central de cette transformation imaginée par Bernard Morin (rappelons que c'est un aveugle !), avec la façon de la construire soi-même à partir d'un découpage.

Pourquoi n'ai-je pas poussé ces choses plus loin ? Je dirais : faute de "débouchés". Il n'y a pas de revues de mathématiques qui acceptent de publier de tels travaux. Nous avons pu le faire en 1975-78 à travers quelques notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, qui n'ont sans doute pas dues être lues par grand monde. Mais c'était parce que l'académicien André Lichnérowicz s'intéressait personnellement à ces travaux. Il est aujourd'hui décédé. Comme ces travaux avaient complètement abouti dès 1975 il aurait été souhaitable de produire un film d'animation à partir de mes dessins. Ayant travaillé dans le dessin animé j'étais tout à fait capable de coordonner une telle entreprise. Mais il fut impossible de trouver un financement au Cnrs et c'est finalement le mathématicien américain Nelson Max qui, s'inspirant de maquettes construites par son collègue Charles Pugh (de cette même version du retournement

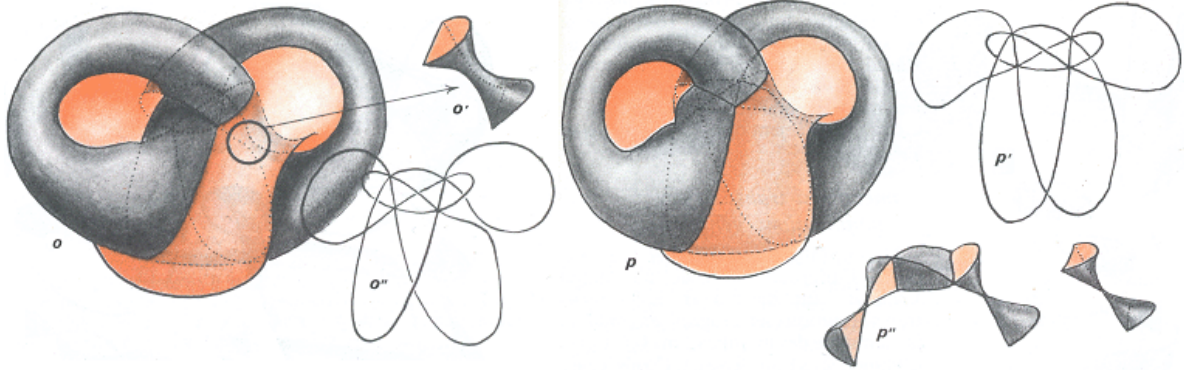
de la sphère), et utilisant un puissant ordinateur parvint à produire le premier un film. Mais ce n'est ni la première, ni la dernière fois que des Français, ne recevant aucun écho à leurs efforts se font ainsi coiffer au poteau par des collègues étrangers mieux organisés et mieux soutenus.

Passons à la troisième phase, la plus difficile à saisir.



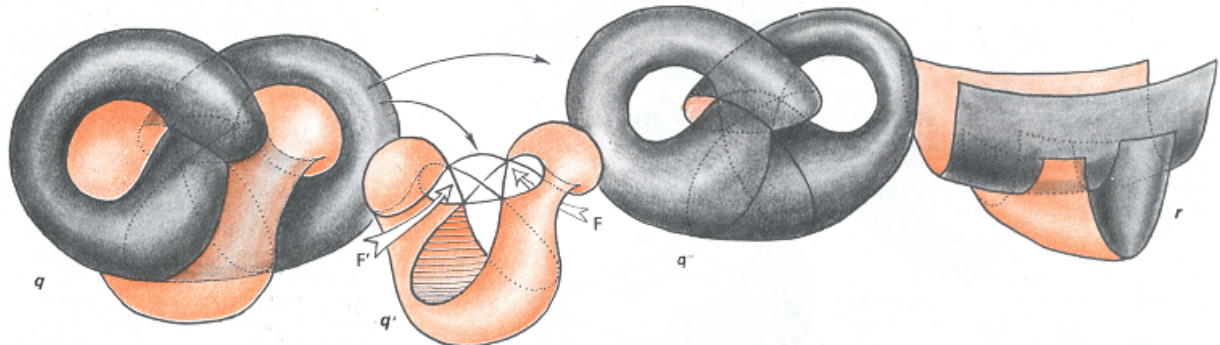
Préparation de deux catastrophes "du pantalon"

Dans la figure **k** on distingue bien les deux bouts de "jambes de pantalon", dont le détail figure dans un avant-plan **k'**. La flèche blanche indique le passage "dans l'entre-jambes". Cette transformation est vraiment difficile à appréhender. J'ai ajouté le dessin **m** pour tenter d'être mieux compris. En **l** j'ai représenté à l'aide de pointillés la courbe d'auto-intersection, qui figure dans son ensemble en **l'**. Un passage (celui emprunté par la flèche blanche) va se refermer. Ce mouvement de fermeture va avec la montée d'une partie de la courbe d'intersection, en deux endroits. Ces bouts de courbe vont venir au contact, chacune, sur l'une des lignes appartenant à des "tranches de mandarine". Quand le contact s'effectuera, la chirurgie s'opérera. La difficulté vient du fait que lorsqu'on a vu les quatre catastrophes élémentaires, dans la page précédente, il faut être capable de les transposer sous toutes les angles, en se dévissant les vertèbres du cou, au besoin. En **n** on a figuré le *moment critique* où la chirurgie s'opère (la "*situation médiane*" de la transformation) et où le mode de raccordement des bouts de courbe va être modifié. On sait que cette catastrophe "du pantalon" *ferme un passage et en ouvre un autre*. Le passage initial est figuré par la flèche blanche. Mais il en existe un autre qu'on apercevrait sous le même angle en faisant tourner le modèle de 180° sur lui-même autour d'un axe vertical. Ces flèches n'en forment qu'une. Avant que ces catastrophes ne s'opèrent il est encore possible de circuler dans ce "canot pneumatique replié". Quand ces catastrophes auront fait leur effet ce passage ne sera plus possible. Par contre deux autres passages se seront créés. Mais où, quelles parties de l'espace sont-elles concernées ? Ces passages mettront l'intérieur des tranches de mandarines en communication avec l'extérieur. En **l'**, ces tranches de mandarines, vous les voyez. Passons à l'étape suivante.



Fermeture du passage. Vers une double situation critique

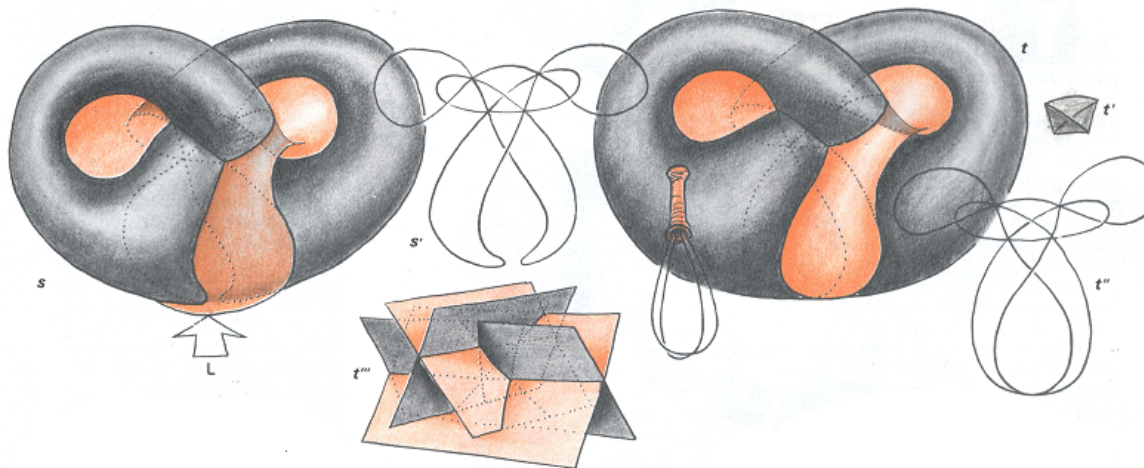
En **o** on a représenté les deux catastrophes "du pantalon" à deux stades différents. L'un des passages est complètement fermé. On est en situation critique, juste avant que les arcs de courbe voient leur mode de raccordement changer. A droite (détail sur la figure **o'**) le passage est seulement en train de se refermer. Ainsi l'allure de la courbe d'auto-intersection **o''** est-elle différente à droite et à gauche. Sur les figures **p**, **p'** et **p''** la criticité (situation "médiane" de la transformation) est atteinte des deux côtés. Sur la planche ci-après les chirurgies ont fait leur effet. Les tubes qu'on voyait s'amorcer sur la figure **p''**, mettant en communication les "tranches de mandarine" avec l'extérieur sont maintenant formés :



Les deux "catastrophes du pantalon" ont fait leur effet. Les passages (flèches blanches) sont ouverts.

Les choses vont maintenant se poursuivre en travaillant sur la partie inférieure du modèle, dont le détail est indiqué en **r**. Regardons cette portion de surface avec attention. Nous voyons deux portions de cylindres paraboliques qui se croisent, en étant dirigé selon deux directions orthogonales. Il existe un passage à la partie inférieure de **r** qui fait face au lecteur. Nous allons envisager de faire glisser ces deux cylindres l'un par rapport à l'autre. Ceci aurait alors pour effet de fermer ce passage et d'en ouvrir un autre courant selon la direction perpendiculaire ("de droite à gauche"). Nous reconnaissons ici une nouvelle "catastrophe du pantalon". Si ce glissement vertical de ces portions de cylindres paraboliques s'opère, nous déboucherons de nouveau sur une situation critique, avec changement du mode de raccordement des nappes.

Mais en fait, par simple souci d'économie, nous stopperons le "process" à la criticité, en "situation médiane" lorsque le passage dirigé vers le lecteur se refermera et que le passage situé dans la direction perpendiculaire ne sera pas encore ouvert. Faisons cela.

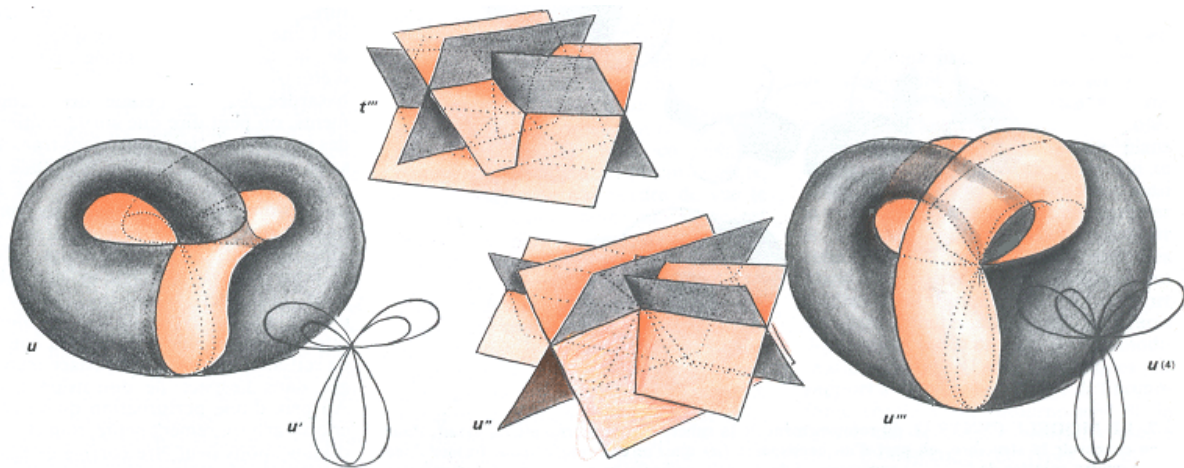


Nouvelle catastrophe du pantalon, amorcée en L, stoppée à droite, à la criticité.

On va opérer en L une "pression" sur le cylindre qui présente sa couleur rose vers l'extérieur et le faire monter. En c' on voit l'impact qu'a ce mouvement sur l'ensemble d'auto-intersection : les arcs de courbe commencent à se rapprocher. Quand la criticité sera atteinte cette partie de l'ensemble ressemblera à "un fouet pour battre les oeufs", représenté sur la figure. Figures de droite, t , t', t'' : la criticité est atteinte, c'est à dire "l'instant médian de la catastrophe". En t''' l'allure de l'ensemble d'auto-intesection dont la partie inférieure s'identifie à celle de notre fouet à battre les oeufs. La figure t' représente le petit volume tétraédrique. En t''' on a figuré le croisement des quatre nappes.

Allez avaler une aspirine.

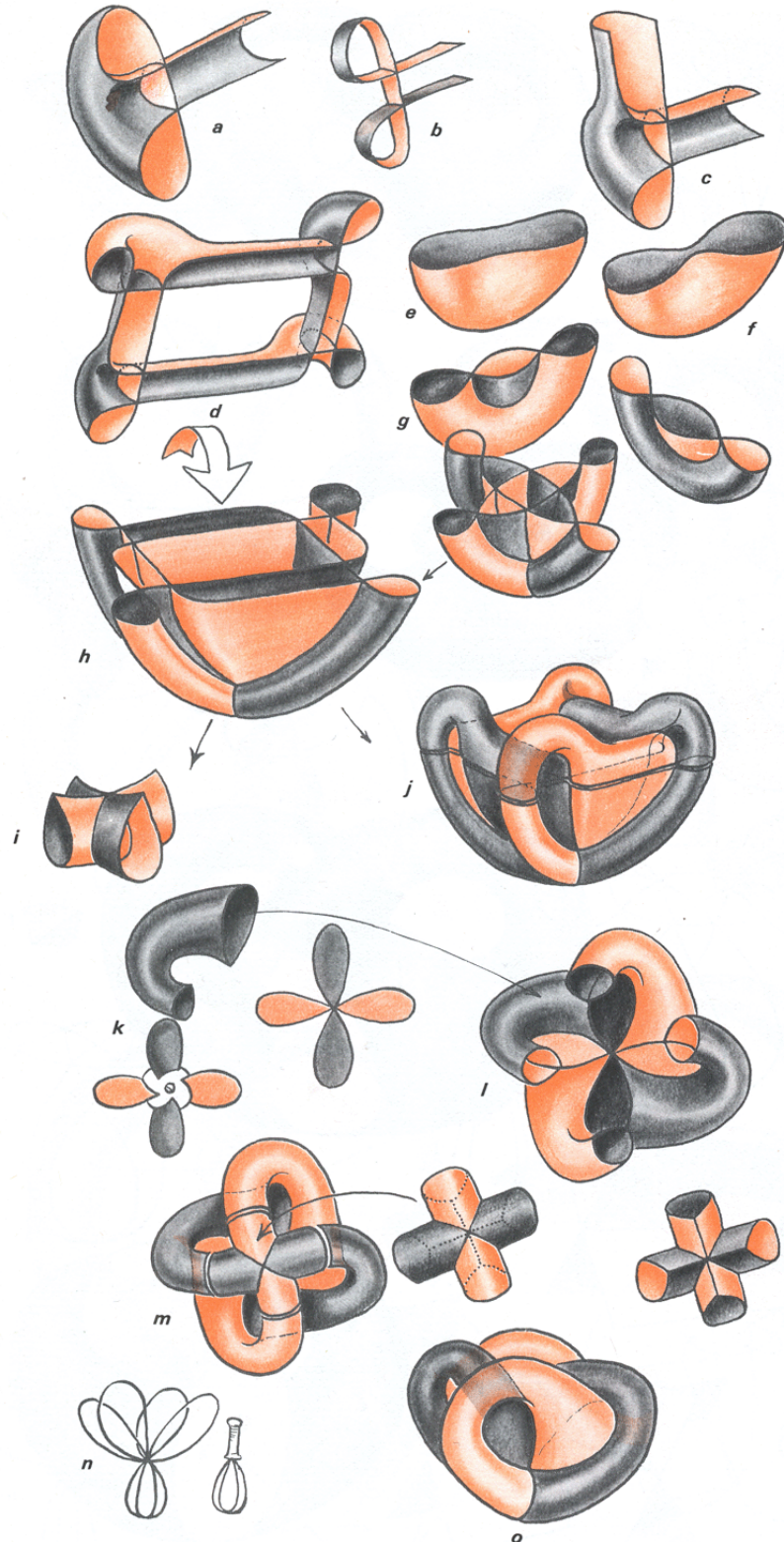
Dans cette version du retournement de la sphère toutes les transformations, les catastrophes devraient être amenées à leur terme. Mais on va bloquer celle que nous venons d'évoquer dans sa configuration médiane, "critique". Nous allons ensuite amorcer une catastrophe que nous n'avons pas encore utilisée : *celle qui inverse un tétraèdre*. Mais là encore nous nous arrêterons à la situation "médiane", quand ce tétraèdre est réduit à un point. Allons-y !



Dernière catastrophe, bloquée à son stade médian : quand le tétraèdre est réduit à un point quadruple Q

En t''' une évocation de la configuration des quatre nappes dont l'ensemble d'auto-intersection contient un volume affectant la forme d'un tétraèdre. En u'' ce tétraèdre a été réduit à un point (quadruple, puisqu'il y a quatre nappes qui se croisent). A gauche le "modèle à quatre oreilles de Morin" est constitué. En avant plan l'ensemble d'auto-intersection avec, en bas, le "fouet pour battre les oeufs" et en haut quatre ganse évoquant des "oreilles de lapin". En déformant un peu la surface, mais sans opérer de nouvelles catastrophes on débouche à droite sur *le modèle central à quatre oreilles de Morin*. Celui ci a une symétrie d'ordre quatre. Si on effectuait une rotation de 90° autour de son axe de symétrie vertical, on obtiendrait le même dessin, mais avec des couleurs échangées. Le gris devient rose et vice-versa. Alors nous pouvons dire que le travail est terminé. En effet, si nous voulions dessiner l'homotopie complète il suffirait, à l'aide d'une animation, de faire tourner de 90° ce modèle central. Puis nous pourrions reprendre tous les dessins que nous avons faits, à rebours, avec des couleurs échangées. A bout du compte nous obtiendrions un plongement de la sphère où celle-ci présente sa couleur rose à l'extérieur. Mais les mathématiques sont une école de paresse, ou d'économie, selon le regard que l'on porte à la chose. Dans la mesure où le travail nous a amené à un objet présentant cette symétrie d'ordre quatre nous pouvons en rester là en disant que l'opération a été menée à bien.

Dans la planche suivante je me suis efforcé de décrire ce modèle central ouvert de Morin avec le maximum de détails. Il existe un modèle avec "oreilles fermées", que j'ai décrit dans une autre nos à l'Académie, mais je vous en ferai grâce.



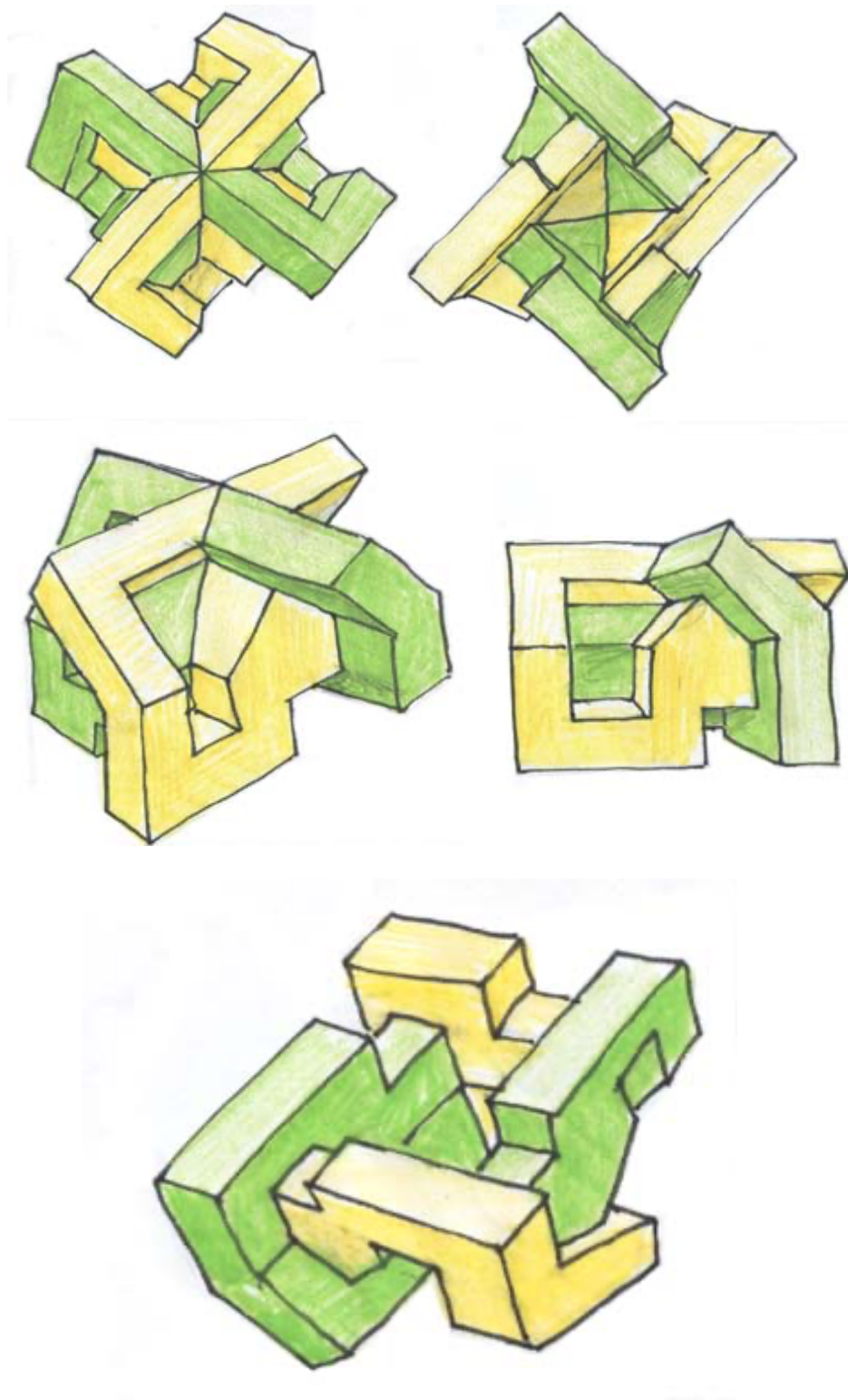
Description détaillée du modèle central de Morin, à quatre oreilles

Par la suite j'ai trouvé une représentation polyédrique du modèle central à quatre oreilles. En fait un tel modèle n'a ni "haut", ni "bas". Pour des commodités de dessin et d'animation (j'ai obtenu ces images avec un logiciel de conception assistée par ordinateur que j'avais développé,

sans le début des années quatre vingt) le gif animé suivant montre ce modèle en présentant le point double vers le haut. Le point quadruple est également visible :

Ma version polyédrique du modèle à quatre oreilles

Dans l'animation initiale l'objet était "en miroir" par rapport à la vue ci-dessus. Ainsi, "vu d'en haut" il affectait la forme d'une croix gammée, l'ensemble pouvant évoquer une sorte de "maison de la culture pour parti néo-nazi". J'ai préféré inverser l'objet pour ne pas donner à des architectes d'extrême-droite des mauvaises idées. Pour finir, quelques vues de cet objet.



Je finirai cette évocation du retournement de la sphère par une anecdote étonnante quoique parfaitement authentique. A l'époque où ces transformations n'étaient connues que par un nombre infime d'initiés un mécène offrit un prix d'un million de dollars à la personne qui parviendrait à construire des modèles suffisamment explicites. A Berkeley, le mathématicien Charles Pugh s'attela à ce travail et le mena à bien. Avec l'argent il put acquérir une maison. Ces modèles, réalisés avec du grillage à poules et mesurant chacun un bon mètres de diamètre (Pugh parvenait avec une dextérité étonnante à couper et à rattacher les mailles de ses structures

en permettant l'auto-traversement) ornèrent pendant des années le plafond de la cafétéria du département de mathématiques de Berkeley. Puis, une nuit, ils furent volés et on ne les retrouva jamais. On ne sut jamais qui avait fait le coup. Commercialement c'eût été plus difficile à vendre que la Joconde du Louvre. Peut-être un amateur les détient-il dans une cave secrète en se réjouissant chaque soir d'y descendre en se disant "je suis le seul à pouvoir les contempler".

Il y a une autre anecdote qui se réfère cette fois à la surface de Boy, dont j'ai été le premier à situer les courbes méridiennes, en les identifiant à une famille d'ellipses. Ce travail fut effectué de manière totalement empirique, à partir d'un modèle en métal que j'avais réalisé. Un des fils du mathématicien Jean-Marie Souriau, Jérôme, poursuivait alors des études de physicien. En utilisant le micro ordinateur Apple II de son père il parvint à construire la première représentation paramétrique de cet objet, du type :

$$X = X (\alpha, \mu)$$

$$Y = Y (\alpha, \mu)$$

$$Z = Z (\alpha, \mu)$$

À l'aide de dix lignes de programme BASIC nous pûmes faire apparaître sur l'écran pour la première fois, en 1981 des images "fil de fer" de la surface de Boy. Si vous trouvez d'ailleurs des images de synthèse de cet objet dans des sites, elles auront toujours été obtenue à partir de ce travail publié à l'Académie des Sciences (tome 293 , séance du 5 octobre 1981, série 1 pp. 269-272). Comme ce travail est signé J.P.Petit et J.Souriau, les (rares) lecteurs pensent que J. Souriau est le mathématicien bien connu. En fait il s'agit de son fils Jérôme, qui ne termina jamais sa licence de physique et préféra exercer le métier d'informaticien. Il est facile de se rendre compte que les images de synthèse, dont beaucoup ont été créées par le polytechnicien Colonna à l'Ecole Polytechnique sont basées sur ces équations que nous avons trouvées, Jérôme et moi. Elles demanderaient à être améliorées et, faut de ce travail de finition, la surface présente trois plis assez inesthétiques au voisinage de son pôle. Voici le programme permettant de construire ces représentations "fil-de-fer".

Le programme, extrait du Topologicon :

ANNEXE SCIENTIFIQUE

BOY, élève de Hilbert, découvre sa surface en 1902.
La première représentation analytique en fut donnée en 1981 par Jérôme SOURIAU (fils du mathématicien J.M. SOURIAU) et l'auteur. La méthode, semi-empirique, consiste à assimiler les méridiens de la surface à des ellipses, qui sont ensuite paramétrées. Le point courant est donné par :

$$\begin{cases} x = X_1 \cos \mu - Z_1 \sin \alpha \sin \mu \\ y = X_1 \sin \mu + Z_1 \sin \alpha \cos \mu \\ z = Z_1 \cos \alpha \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} X_1 = \frac{A^2 - B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + A \cos \theta - B \sin \theta \\ Z_1 = \sqrt{A^2 + B^2} + A \cos \theta + B \sin \theta \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \sin 3\mu \quad \begin{cases} A(\mu) = 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) + 1,98 \sin(3\mu - \pi/6) \\ B(\mu) = 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) - 1,98 \sin(3\mu - \pi/6) \end{cases}$$

Méridiens : courbes $\mu = \text{cte}$; θ variant de 0 à 2π , μ variant de 0 à π .

Le programme BASIC ci-après donne le tracé figuré sur les pages de garde :

```

100 PI=3.141592 (Apple II)
110 HGR
120 HCOLOR=3
130 FOR MU=0 TO PI STEP 0.1
140 D=10+1.41*SIN(6*MU-PI/3)
150 E=1.98*SIN(3*MU-PI/6)
160 A=D+E
170 B=D-E
180 AL=(PI/8)*SIN(3*MU)
190 C1=A*A-B*B
200 C2=SQR(A*A+B*B)
210 CM=COS(MU)
220 SM=SIN(MU)
230 FORTE=0 TO 6.283 STEP 06
240 X1=C1/C2+A*(COS(TE)-B*SIN(TE))
250 Z1=C2+A*COS(TE)+B*SIN(TE)
260 REM COORDONNEES

```

```

270 X=X1*CM-Z1*SIN(AL)*SM
280 Y=X1*CM+Z1*SIN(AL)*CM
290 Z=Z1*COS(AL)
300 REM DESSIN
310 HPLLOT 140+3.3*X+3.3*Y
320 NEXT TE
330 NEXT MU

```

quelle honneur!

du semi-empirique



La dernière anecdote est plus étonnante. Il y a une vingtaine d'années je participais à une expédition sous-marine au sud de Bahamas, avec le plongeur Jacques Mayol. Le but était de découvrir une "pyramide engloutie" dont l'existence avait été mentionné par Charles Berlitz dans son célèbre ouvrage "le Triangle des Bermudes", best seller planétaire. Pour être précis cette pyramide aurait du se trouve au sud du récif Cay Sal Bank, à mi-distance entre la Floride

et Cuba, une région infestée de requins de haute mer, passablement dangereux. Mais en matière de recherche il faut parfois savoir prendre des risques.

Nous ne trouvâmes pas plus de pyramide que de beurre en broche. Nous avons été amenés à pied d'oeuvre par un financier italien très riche, sur un yacht magnifique, de trente mètres de long, équipé de très puissants moteurs. Faute de pyramide, je me mis à parler à ce milliardaire de géométrie en lui précisant qu'en sponsorisant la création de surface mathématiques il trouverait là un moyen de dépenser son argent, encore plus inutilement qu'en invitant à dîner des girls du Lido de Paris. L'homme, dont je tairai le nom, mais dont le véritable prénom est Carlo accepta de financer la réalisation de quelques modèles, qui furent "mis au net" par un plasticien plus adroit que moi dans la manipulation du fil de fer cuivré. A terme ce financier voulait faire réaliser des modèles faits avec du fil d'or, pour les mettre dans son salon.

Un jour, soudain, le contact se trouva rompu. Je finis par tenter de le joindre dans ses bureaux de Milan. Mais j'appris qu'il avait été incarcéré, ayant été identifié comme le numéro deux de l'affaire de la " Loge P2 " en Italie. Il put sortir de prison quelques mois plus tard en achetant ses juges. A mon grand regret l'italien se détourna désormais des mathématiques. Au passage ceci nous permit de comprendre quel avait été le but réel de l'expédition aux Bahamas. En fait son magnifique Yacht avait servi à transporter d'Italie à Nassau, au Bahamas, de l'argent sale, probablement issu du trafic de drogue. Lorsque nous avons fait escale dans ce port le propriétaire du bateau, notre hôte, avait disparu dans une cachette qu'il avait aménagée dans celui-ci, d'où il émergea quand la police du port, ayant effectué son inspection et vérifié l'identité des personnes présentes à bord, était retourné à terre. Il prit alors la direction de sa banque de Nassau, porteur d'un attaché case au contenu visiblement très pesant, qui devait sans doute contenir une véritable fortune en argent liquide. A cette époque, nous nous demandions comment nous allions faire pour ne pas nous faire dévorer par les requins à Cay Sal Bank nous n'avions pas sur le moment accordé de l'importance à ce détail, qui ne m'est revenu en mémoire que par la suite.

Au retour en France je fis cependant l'erreur de raconter au responsable du département de mathématiques du Palais de la Découverte de Paris, situé au Grand Palais, que le modèle que je lui proposai d'exposer, et qui le fut effectivement pendant une vingtaine d'années, avait été réalisé avec de l'argent issu du commerce de la drogue. Par précaution, celui-ci s'abstint d'apposer à côté de l'objet une mention quelconque, pas même le nom de son inventeur, où le mien. Celui-ci trôna ainsi au centre de la "salle pi" pendant deux décennies, de manière totalement énigmatique.

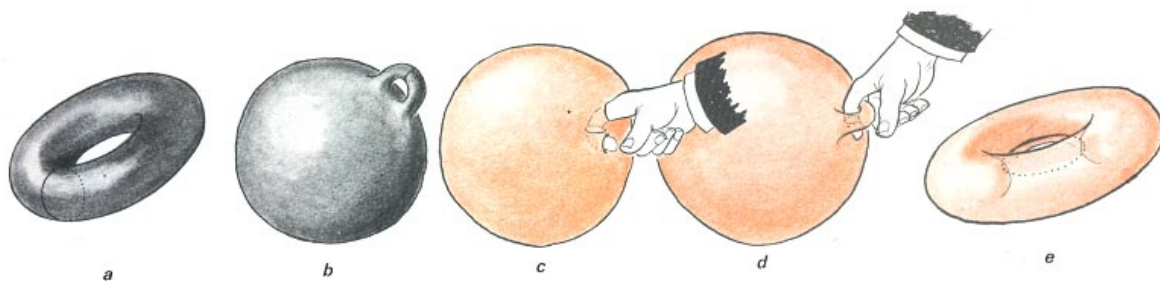
On a parlé jadis d'une malédiction attachée à la découverte du tombeau de Tout Ankh Amon. Je ne sais pas s'il existerait une " Malédiction de la Surface de Boy ". Toujours est-il (et cela est parfaitement authentique) que son inventeur se volatilisa mystérieusement et que cet objet, tel le Faucon Maltais du film avec Humphrey Bogart resta attaché à des histoires liées à la Mafia sicilienne. Je me demande si le retrait de celui-ci et son placement dans une cave du bâtiment ne fut pas de la part de la Direction du Musée une simple mesure de prudence.

Les réserves du Palais de la Découverte, non accessibles au public, sont semblables à un tombeau pharaonique souterrain de la Vallée de Rois égyptienne. Peut être un explorateur, des années après que la II^e guerre mondiale ait atomisé Paris, découvrira-t-il par hasard cet objet, qui fera peut-être de nouvelles victimes, qui sait ?

Une retombée de ces travaux : le retournement trivial du tore

S'il s'était avéré si compliqué de retourner une sphère, par contre, partant de là, il est extrêmement facile de retourner un tore. On peut même dire que c'est à la portée d'un enfant de dix ans. Celui-ci n'est après tout d'une sphère munie d'une anse. On procède comme cela fut fait pour permuter les deux points cuspidaux d'une Crosscap, c'est à dire qu'on retourne la sphère sans se poser de questions. L'anse se retrouve alors à l'intérieur. Disons que ce "pont", se transforme en "passage souterrain". Or, tous les ingénieurs des travaux publics le savent, tout passage souterrain, dans un réseau routier, peut être transformé en point à l'aide d'une homotopie régulière.

Quand la sphère est retournée il suffit alors de glisser un doigt dans ce passage et de tire un coup sec. Voir les dessins ci-après.



Le retournement trivial du tore

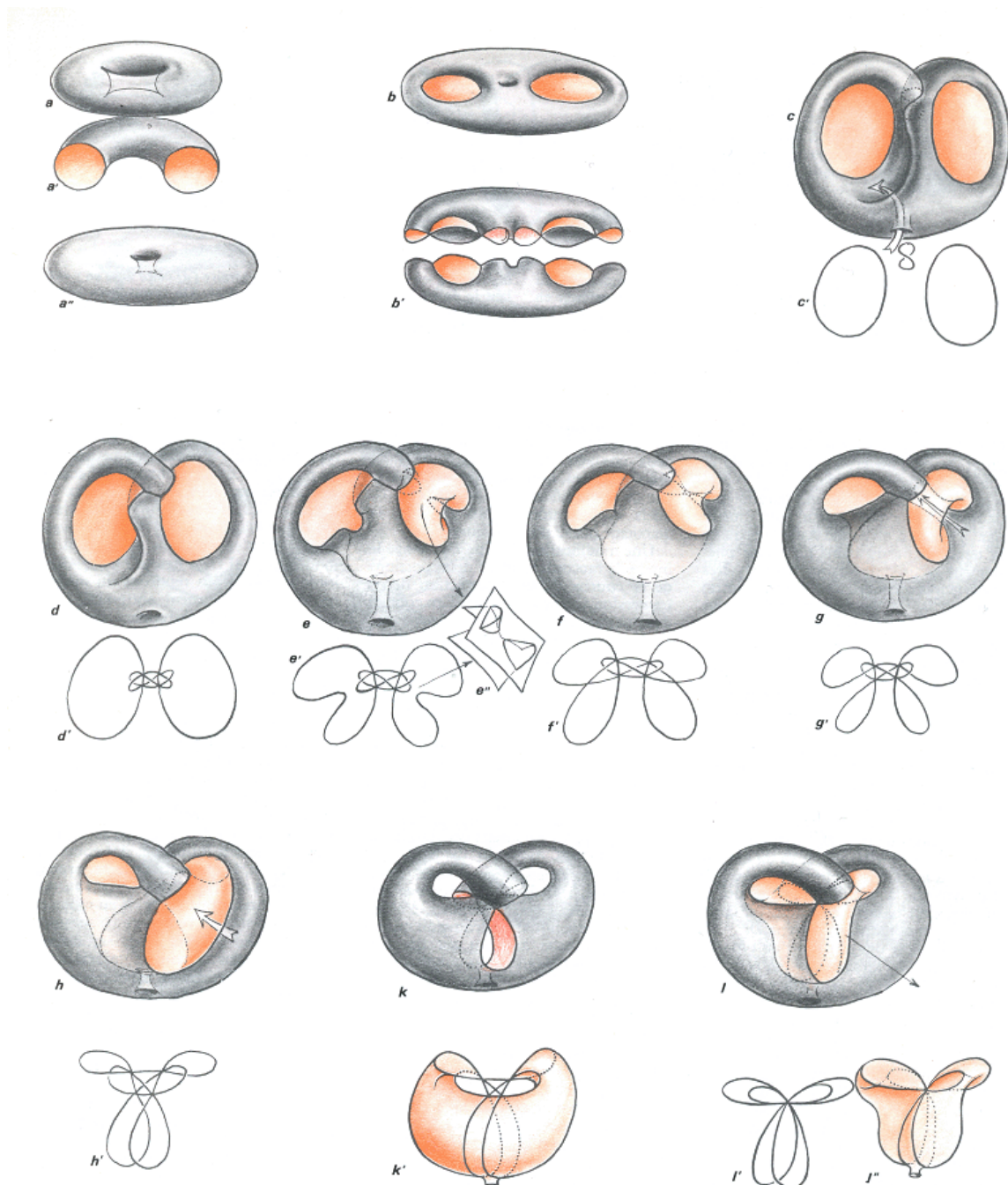
Bien que cela se voie assez mal sur ce dessin on a fait figurer en **a** un des cercles générateurs du tore, ceux-ci constituant une des deux familles de cercles permettant de le cartographier sans créer de singularité de maillage (voir le Topologicon). Lorsque l'anse a été concentrée dans une région d'une sphère ansée **b** la courbe est toujours visible. Quand la sphère ansée a été retournée, en **c**, et que l'opérateur glisse son doigt dans le passage, cette courbe entoure son doigt. Quand il "extraie" l'anse, en **d**, on voit (image finale **e**, celle du tore retourné) que ce cercle est devenu le .. cercle de gorge de la surface. Ainsi, quand on part d'un tore cartographié à l'aide d'un double réseau de cercles méridiens et de cercles parallèles (le cercle de gorge appartenant à cette seconde famille) on voit que l'opération de retournement *échange ces deux familles*. Cela a quelque chose de magique et j'avoue que cela dépasse mon entendement personnel. Chacun doit apprendre à connaître ses limites. Je pense personnellement qu'il y a certaines démarches mentales où le cerveau devrait être équipé d'un fusible.

Le retournement non trivial du tore

J.P.Petit :

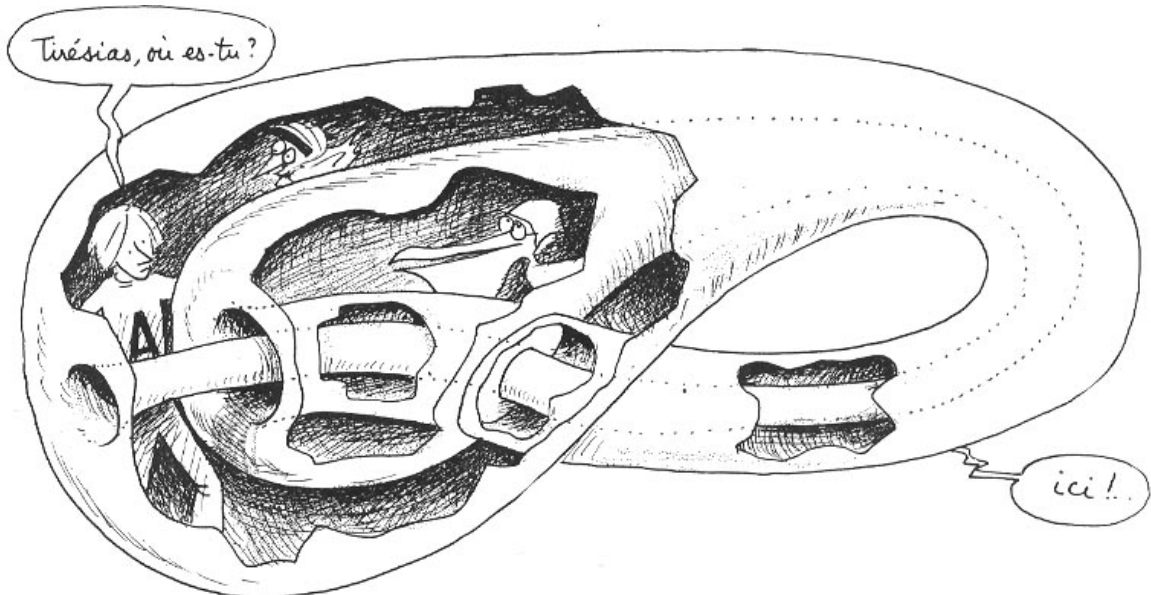
Comptes Rendus Académie des Sciences.
tome 293 , séance du 5 octobre 1981, série 1 pp. 269-272

Je me contenterai de présenter la suite des dessins, sans les commenter.

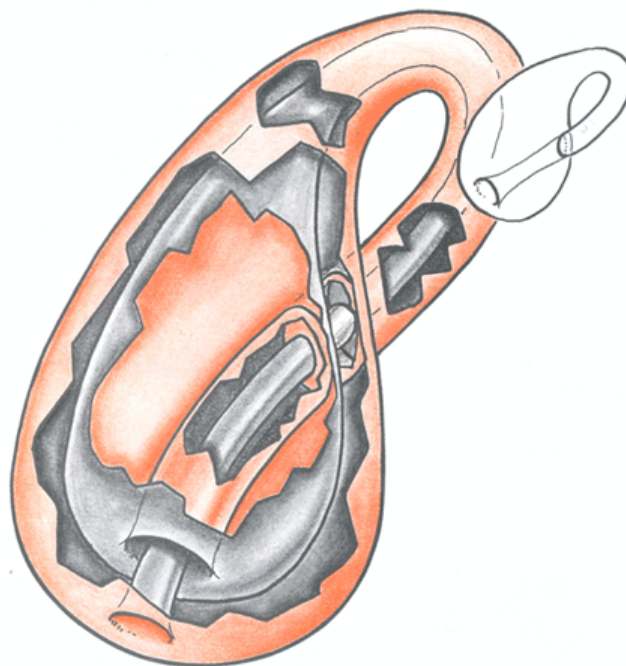


Retournement non trivial du tore. Seconde partie de la transformation

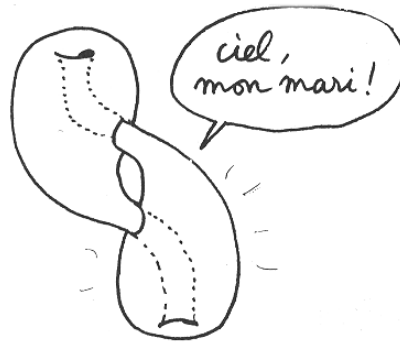
Quand on arrive à la figure v on voit qu'il est alors aisé de faire coïncider la structure grise et la structure rose pour transformer cet objet en revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein.



Le retournement s'opère alors par échange des nappes en regard. Ci-après, le même dessin avec un codage chromatique.



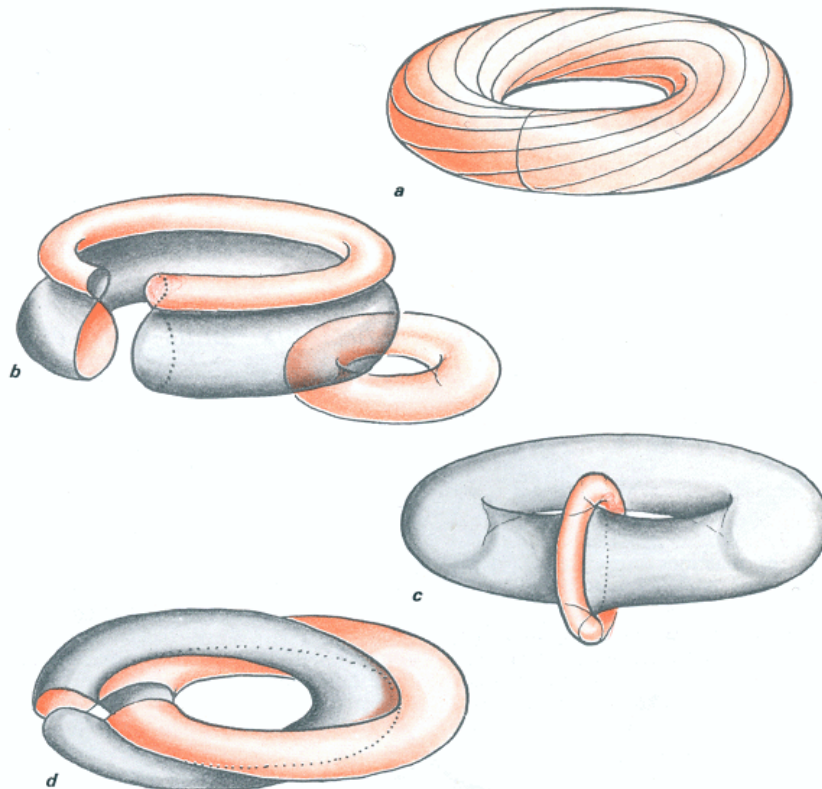
Revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein, avec codage chromatique



(ce dessin ne faisant pas partie de mon rapport annuel au Cnrs. On le trouvera dans le Topologicon)

Les différentes familles de tores.

Ce qu'avait démontré Stephen Smale en 1957 c'était qu'il n'y avait qu'une seule famille d'immersions de la sphère et que toutes celles-ci pouvaient être reliées entre elles par une homotopie. Celles-ci formaient un groupe dont l'élément neutre consistait à laisser l'objet en l'état. On se demanda s'il pourrait en être de même pour le tore. Les mathématiciens Ioan James et Emery Thomas ont montré que les immersions du tore se répartissaient en quatre continents entre lesquels il était impossible de passer à l'aide d'une homotopie régulière.



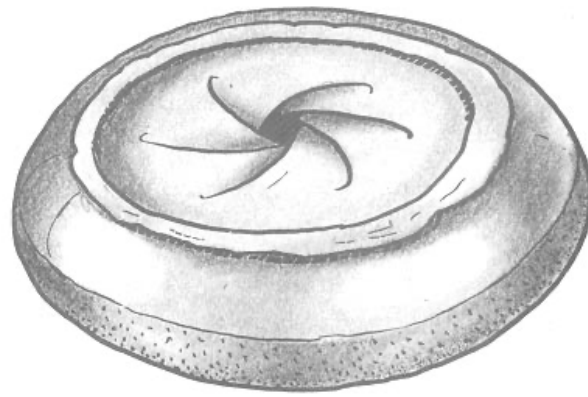
Les quatre familles de tores

Le "tore standard", dessiné au centre de la feuille, appartient à la même famille que l'objet figuré en **b**. C'est ce que j'ai au passage montré dans la version du retournement du tore que j'ai inventée en 1980. La famille évoquée en a représente un tore qui a subi un vrillage de 360° . Il ressemble au tore standard mais les deux se définissent à partir de leur système de cartographie, à l'aide de deux familles de courbes. Dans le tore standard on utilise deux ensembles de cercles assimilés à des méridiens et à des parallèles. Sur le tore a on devrait compléter la famille de cercles collée dessus par une seconde famille, se vrillant en sens inverse. Ce qu'on peut montrer alors c'est qu'il est impossible, à l'aide d'une homotopie régulière d'amener le maillage de ce tore a en coincidence avec le maillage du tore standard (cercles méridiens plus cercles parallèles). C'est en ce sens que ce sont des objets différents. Tous ces objets peuvent évidemment se configurer selon un revêtement à deux feuilletés de la bouteille de Klein.

La puissance des outils du géomètre est *de pouvoir prédire ce qui est possible et ce qui ne l'est pas*. Transformer le tore standard en tore de la figure **b** : oui. Passer de **c** à **d** : non.

Ça évite de perdre son temps bêtement et ça incite surtout à rechercher des choses qui ne sont en rien évidentes, comme de retourner une sphère. Il en est de même dans toutes les sciences. Il arrive que les gens passent à côté de démarches fécondes, pendant des années ou même des siècles, simplement parce qu'ils les croyaient impossibles à effectuer. J'ai consacré quelques années de ma vie à construire une théorie de la suppression des ondes de choc autour d'un objet se déplaçant à vitesse supersoniques dans un gaz, à l'aide d'un champ de forces de Laplace, de la " MHD ". Un étudiant a même fait sa thèse sur ce sujet sous ma direction et nous avons publié ces travaux dans différentes revues à comité de lectures et colloques scientifiques. C'est un thème qui commencent seulement à faire surface, trente ans après. On subodore que les Américains disposeraient d'avions hypersoniques capables d'évoluer à Mach 10 sans créer d'onde de choc (et en particulier sans subir les formidables contraintes thermiques liées à la recompression de l'air derrière ces "bangs". C'est le fameux mythe de l'Aurora, appareil croisant à l'altitude où se produisent les aurores boréales, entre 80 et 150 km d'altitude. Aurora est aussi la préfiguration des futurs lanceurs spatiaux qui, s'appuyant sur l'air, seront beaucoup plus économiques que les fusées du Cnes. Il a été impossible, en France, d'initier de telles recherches (j'ai eu ces idées en 1975), parce que les gens, en particulier au Cnrs, les trouvaient totalement déraisonnables. Le résultat représente trente années de retard vis à vis des Etats Unis, à mon avis totalement irrattrapables.

La blague à tabac



Pour être complet il faut citer les versions du retournement de la sphère ayant pour objet central une blague à tabac. C'était un objet qui était courant quand j'étais jeune, mais qu'on ne doit plus guère rencontrer aujourd'hui. Le premier qui ait dessiné ces séquences est Georges Francis. Depuis quelques années je travaille sur une version polyédrique de ces versions, qui a déjà donné un modèle central assez joli. Mais, pour vous le montrer, il faudra que j'arrive à remettre la main dessus. Assez vite, j'espère, car c'est un des objets les plus fascinants que j'aie jamais créé.