ASTROPHYSIQUE. — *Théorie de la structure spirale de la Galaxie.* Note (*) de M. **Jean-Pierre Petit**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Assimilant le gaz interstellaire à un milieu en régime permanent dont le mouvement de rotation différentielle est imputé à son couplage avec le gaz d'étoiles, on y effectue une analyse de la stabilité gravitationnelle par la méthode de perturbation. On suppose les effets collectifs et locaux découplés, les collisions assurant la maxwellianisation et l'isothermie, les processus collectifs étant cause de la perturbation. Le millieu apparait sensible à une instabilité du type de Jeans. Une équation d'onde apparait, qui produit des structures spirales assez cohérentes avec l'observation.

1. Notations et hypothèses. — Nous adopterons un système de coordonnées cylindriques : $r$, $\theta$, $z$. On appellera $\vec{r}$ le vecteur $(x, y, 0)$ et $\vec{C}_0 = \vec{\omega}(r) \times \vec{r}$ la vitesse macroscopique locale. Donnons-nous un milieu en régime permanent, à symétrie de révolution, constitué de particules identiques de masse $m$, supposé décrit par une fonction de distribution $f^0$, maxwellienne autour d'une température T que l'on prendra constante dans tout l'espace. Soient : $\vec{W}$ la vitesse d'une particule dans le repère fixe $(r, \theta, z)$, $\psi$ et $\vec{g}$ le potentiel et champ gravitationnel.

2. Principe de la méthode. — Nous allons analyser localement la stabilité gravitationnelle de ce milieu par la méthode de perturbation. Nous nous placerons dans le plan de symétrie de la Galaxie. Soit (E) l'ensemble des distributions de vitesse possibles en un point de l'espace. Soit $(E_1)$ le sous-ensemble des distributions maxwelliennes, définies par leurs paramètres macroscopiques $n$, T, $C_0$. Nous introduirons une perturbation notée $\delta f^0$ telle que la distribution perturbée $f^0 + \delta f^0$ appartienne à l'ensemble $(E_1)$. Ce qui se traduit par

$$\delta f^0 = \frac{\partial f^0}{\partial n}\delta n + \frac{\partial f^0}{\partial \mathrm{T}}\delta \mathrm{T} + \frac{\overrightarrow{\partial f^0}}{\partial \mathrm{C}_0}.\overrightarrow{\delta \mathrm{C}_0}. \tag{1}$$

Introduisant (1) dans l'équation de Vlasov différenciée on obtient sans difficulté une expression où figurent les puissances 0, 1, 2 et 3 des composantes de la vitesse $\vec{W}$. En identifiant sur ces puissances, on obtient :

Termes d'ordre 3 :

$$\overrightarrow{\frac{\partial \delta \mathrm{T}}{\partial r}} = 0; \tag{2}$$

Termes d'ordre 2 :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{WW}}} : \left(\frac{1}{2\mathrm{T}}\frac{\partial \delta \mathrm{T}}{\partial t}\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{U}}} - \frac{\delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}}\frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial \mathrm{C}_0}}}{\partial r} + \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial \delta \mathrm{C}_0}}}{\partial r}\right) = 0. \tag{3}$$

Termes d'ordre 1 :

$$(4)\quad -\frac{m}{k\,T^2}\vec{C}_0\frac{\partial\delta T}{\partial t}+\frac{m}{k\,T}\frac{\partial\overrightarrow{\delta C_0}}{\partial t}+\frac{1}{n}\frac{\partial\overrightarrow{\delta n}}{\partial r}-\frac{Sn}{n^2}\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial r}$$
$$+\frac{m}{k\,T^2}\delta T\frac{\overrightarrow{\partial C_0}}{\partial r}.\vec{C}_0-\frac{m}{k\,T}\frac{\overrightarrow{\partial C_0}}{\partial r}.\overrightarrow{\delta C_0}-\frac{m}{k\,T}\frac{\overrightarrow{\partial\delta C_0}}{\partial r}.\vec{C}_0-\frac{m}{k\,T}\overrightarrow{\delta g}+\frac{m\,\delta T}{k\,T^2}\vec{g}=0;$$

Termes d'ordre 0 :

$$(5)\quad \frac{1}{n}\frac{\partial\delta n}{\partial t}-\frac{3}{2\,T}\frac{\partial\delta T}{\partial t}+\frac{m\,C_0^2}{2\,k\,T^2}\frac{\partial\delta T}{\partial t}-\frac{m}{k\,T}\vec{C}_0.\frac{\overrightarrow{\partial\delta C_0}}{\partial t}+\frac{m}{k\,T}\overrightarrow{\delta g}.\vec{C}_0+\frac{m}{k\,T}\vec{g}.\overrightarrow{\delta C_0}=0.$$

(3) est un système d'équations aux dérivées partielles qui va permettre de préciser le champ de vitesse $\overrightarrow{\delta C_0}$. On montre ainsi aisément que

$$(6)\quad \overrightarrow{\delta C_0}=\left(\frac{\delta T}{T}\vec{\omega}+\overrightarrow{\delta\omega_1}(t)\right)\times\vec{r}-\frac{1}{2\,T}\frac{\partial\delta T}{\partial t}\vec{r};\quad \vec{r}=(x,y,z),$$

$\overrightarrow{\delta\omega_1}$ ne dépendant que du temps. Combinant les équations (4) et (5) et introduisant la loi de Poisson on obtient sans difficulté :

$$(7)\quad \boxed{\frac{1}{n}\left(\frac{\partial\delta n}{\partial t}+\vec{C}_0.\frac{\overrightarrow{\partial\delta n}}{\partial r}\right)=\frac{3}{2\,T}\frac{\partial\delta T}{\partial t},}$$

$$(8)\quad \omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Delta\delta\psi+\frac{\delta\psi}{L^2}\right)=\frac{1}{L^2}\left(C_0^2\frac{1}{T}\frac{\partial\delta T}{\partial t}-r\,\omega\frac{\partial\delta\omega_1}{\partial t}\right),$$

où $L=\sqrt{k\,T/4\,G\,nm^2}$ est la longueur de Jeans.

Si l'on suppose le phénomène perturbateur (bras) périodique en $\theta$ le second membre est nécessairement nul et il vient

$$(9)\quad \boxed{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Delta\delta\psi+\frac{\delta\psi}{L^2}\right)=0.}$$

3. Exploitation des résultats. — Les relations (6) et (7) nous montrent d'abord que l'instabilité est corrélative d'une vitesse $\overrightarrow{\delta C_0}$ centripète, proportionnelle à la distance radiale. Introduisons ensuite une solution de la forme

$$(10)\quad \delta\psi=\zeta(t)\,H(r)\,e^{ip\theta}.$$

Il vient

$$(11)\quad \frac{\partial^2\delta\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\delta\psi}{\partial r}-\frac{p^2}{r^2}\delta\psi+\frac{\delta\psi}{L^2}=0.$$

Loin du centre galactique on peut prendre une loi $1/L^2 = \alpha^2/r^2$, $\alpha$ étant une constante. L'équation admet alors des solutions de la forme

$$H(r) = e^{i\mu \log r}. \tag{12}$$

Auxquelles correspondent des spirales logarithmiques telles que la tangente de l'angle formé par la courbe avec le rayon vecteur, soit

$$\boxed{\operatorname{tg} V = \frac{1}{p}\sqrt{\alpha^2 - p^2}.} \tag{13}$$

L'examen de cette relation montre que l'angle V est d'autant plus grand que le nombre $p$ des bras est petit. Par ailleurs, lorsqu'on se rapproche du centre galactique la loi de densité s'écarte de $r^{-2}$, et l'on peut dire, *grosso modo* que $\alpha$ décroît. Par conséquent : à nombre de bras constant l'angle V décroît lorsqu'on approche le centre galactique. Ces deux résultats sont conformes aux observations. Dans le cas général, la solution

$$\delta\psi = \zeta(t)\, F(r)\, e^{ip(\theta + \varphi(r))}, \tag{14}$$

conduit à

$$\left\{\begin{aligned} & F'' + \frac{F'}{r} + F\left(\frac{1}{L^2} - \frac{p^2}{r^2}\right) - \frac{p^2 C^2}{r^2 F^3} = 0, \\ & \varphi' = \frac{C}{r F^2} \qquad (C = \text{Cte}). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Remarque I. — Constitution du milieu galactique. Soient $n_g$, $T_g$ les paramètres macroscopiques du gaz interstellaire et $n_e$, $T_e$ ceux du milieu stellaire. Le calcul des longueurs de Jeans, basé sur des données d'observation, montre que $L_e \gg L_g$. Conclusion : Le gaz interstellaire est beaucoup plus instable que le milieu stellaire, c'est donc lui qui sera responsable des fluctuations.

Remarque II. — Effet d'écran. Considérons un milieu uniforme maxwellien. Isolons une particule test. Elle va être soumise à l'action des particules de champ (les autres particules), qui vont, autour d'elles, créer une fluctuation locale $\psi$ du potentiel gravitationnel autour de la valeur zéro, laquelle correspond à l'uniformité de la distribution. La distribution de la particule test sera par conséquent $f^0 e^{-(m\psi/kT)}$. Il n'y a maintenant pas de raison de différencier la particule test des autres particules et, à un instant donné, la loi de Poisson fournit

$$\Delta\psi = 4\pi G n e^{-\frac{m\psi}{kT}}. \tag{16}$$

La moyenne de la fluctuation étant nulle. En linéarisant on obtient

$$\Delta\psi + \frac{\psi}{L^2} = 4\pi G nm. \tag{17}$$

Cette analyse est l'analogue de celle effectuée par Debye dans le cas des plasmas (« spherical shielding »). Il y aura lieu de rapprocher avec l'équation (9).

*N. B.* — Une analyse avec $f$ non isotrope fera l'objet d'une prochaine publication.

(*) Séance du 17 mai 1971.

(1) CHANDRASEKHAR, *Principles of stellar dynamics*, Dover Publications.

*Laboratoire de Dynamique*
*des systèmes réactifs,*
*Faculté des Sciences*
*de Saint-Jérôme*, 13-*Marseille*,
*Bouches-du-Rhône.*