COSMOLOGIE. — *Esquisse d'une théorie newtonienne des champs unifiés.*

Note (*) de MM. **Jean-Pierre Petit** et **Guy Monnet**, transmise par M. André Lichnerowicz.

Dans une Note précédente ([1]) on avait étudié la solution générale maxwellienne instationnaire des équations de Vlasov et de Poisson, en montrant comment cette solution s'identifiait à la solution d'Heckman et Sücking ([2]). Dans le présent travail on étudie un système constitué de deux populations où les éléments ont même masse, mais des charges opposées. Le choix de solutions particulières maxwelliennes instationnaires permet de résoudre le système constitué d'une part par les deux équations de Vlasov, d'autre part par les équations de Poisson et de Maxwell. Ainsi cette solution newtonienne a un caractère unitaire. On montre que la dimension caractéristique R (t) obéit à une pseudo-équation de Friedman, où figure le paramètre de Hall.

1. Formulation du problème. — Nous allons considérer un système binaire constitué d'éléments ayant même masse m et des charges opposées $+q$ et $-q$. L'étude se fera à l'aide de deux équations de Vlasov, couplées par les champs, que nous écrirons pour chaque population avec la vitesse d'agitation rapportée au mouvement moyen de celle-ci

$$\frac{\partial \operatorname{Log} f_i}{\partial t} + \vec{C_i} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \operatorname{Log} f_i}{\partial r}} + \overrightarrow{C_{0i}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \operatorname{Log} f_i}{\partial r}}$$
$$+ \left(\frac{\vec{F_i}}{m} - \overrightarrow{\frac{D_i C_{0i}}{Dt}}\right) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \operatorname{Log} f_i}{\partial C_i}} - \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \operatorname{Log} f_i}{\partial C_i} C_i}} : \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial C_{0i}}{\partial r}}} = 0, \qquad i = (1, 2)$$

où nous avons

$$\overrightarrow{\frac{D_i C_{0i}}{Dt}} \equiv \overrightarrow{\frac{\partial C_{0i}}{\partial t}} + \overrightarrow{C_{0i}} \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial C_{0i}}{\partial r}}}. \tag{2}$$

Donnons aux fonctions de distribution la forme maxwellienne

$$\operatorname{Log} f_i^0 \equiv \operatorname{Log} \frac{1}{(2\pi k)^{3/2}} + \operatorname{Log}\left(\frac{n_i}{T_i^{3/2}}\right) - \frac{m\, C_i^2}{2 k T_i}, \qquad i = (1, 2). \tag{3}$$

2. Résultats de calcul. — En résolvant les équations du troisième ordre on trouve que les températures T_1 et T_2 ne dépendent que du temps. Puis en résolvant les équations à l'ordre 2, nous trouvons, pour chaque population, une loi de vitesse macroscopique où se superposent une composante radiale isotrope, proportionnelle à la distance (loi de Hubble) et une rotation instationnaire du type corps solide

$$\overrightarrow{C_{0i}} = -\frac{1}{2 T_i} \frac{dT_i}{dt} \vec{r} + \omega_i(t) (\vec{k_i} \times \vec{r}), \qquad i = (1, 2). \tag{4}$$

Les équations d'ordre 0 donnent

$$\frac{Di}{Dt}\left(\frac{n_i}{T_i^{3/2}}\right) = 0. \tag{5}$$

Nous allons nous orienter systématiquement vers une solution offrant un maximum de symétrie

$$T_1 = T_2;\ n_1 = n_2;\ \vec{k_1} = \vec{k_2} = \vec{k}. \tag{6}$$

Le milieu est alors globalement isotherme, en équilibre thermodynamique, et électriquement neutre. La solution $\omega_1 = \omega_2$ nous ramènerait à la Note ([1]). On prendra donc : $\omega_1 = -\omega_2$.

En combinant (5) et (6) on obtient alors :

$$\overrightarrow{\frac{\partial n_i}{\partial r}} = 0, \qquad i = (1, 2). \tag{7}$$

3. Les équations de Maxwell. — Les équations d'ordre unité, issues des équations de Vlasov, s'écrivent :

$$\overrightarrow{\frac{\partial \psi}{\partial r}} + \frac{q}{m}(\vec{E} + \overrightarrow{C_{01}} \times \vec{B}) - \overrightarrow{\frac{D_i C_{0i}}{Dt}} = 0, \tag{8}$$

$$\overrightarrow{\frac{\partial \psi}{\partial r}} - \frac{q}{m}(\vec{E} + \overrightarrow{C_{02}} \times \vec{B}) - \overrightarrow{\frac{D_2 C_{02}}{Dt}} = 0. \tag{9}$$

Du fait de (6), le champ électrique dû aux charges est nul. Prenons un champ magnétique spatialement constant $B(t)\vec{k}$:

$$\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} . \vec{E} = 0; \tag{10}$$

$$\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} . \vec{B} = 0; \tag{11}$$

$$\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \times \vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + K_0 \overrightarrow{\frac{\partial E}{\partial t}}\right); \tag{12}$$

$$\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \times \vec{E} = -\overrightarrow{\frac{\partial B}{\partial t}} = -\dot{B}\vec{k}. \tag{13}$$

L'équation (13) a pour solution :

$$\vec{E} = -\frac{\dot{B}}{2}(\vec{k} \times \vec{r}). \tag{14}$$

Par ailleurs le milieu est totalement ionisé et non collisionnel. La conductivité électrique y est donc infinie, ainsi que le nombre de Reynolds magnétique. Les lignes de champ magnétique seront donc « gelées » dans le milieu et, si $R(t)$ est une dimension caractéristique, on aura

$$B(t) = \frac{B_0 R_0^2}{R^2}, \tag{15}$$

où B_0 et R_0 sont les valeurs de B et de R à l'instant t_0. Si on explicite les équations (8) et (9) on voit qu'elles dégénèrent en une seule, sous réserve que la vitesse angulaire varie comme la température, ce qui est similaire à la Note ([1]). Posons par commodité :

$$\varphi = \operatorname{Log} T^{-1/2} \qquad \text{et} \qquad \Omega_0 = q\, B_0/m.$$

L'équation à l'ordre unité devient

$$-\frac{\partial \overrightarrow{\psi}}{\partial r} + \left(\omega \frac{R_0^2}{R^2}\Omega_0 + \omega^2\right)\vec{\rho} - (\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)\,\vec{r} = 0, \tag{16}$$

qui a la solution évidente

$$\psi = -(\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)\frac{r^2}{2} + \left(\omega^2 + \omega\,\Omega_0 \frac{R_0^2}{R^2}\right)\frac{\rho^2}{2}. \tag{17}$$

4. L'ÉQUATION DE POISSON. — Celle-ci nous donne

$$-3(\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) + \frac{2\,R_0^4}{R^4}(\omega_0^2 + \omega_0\,\Omega_0) = 4\pi\, G\, m n_0 \frac{R_0^3}{R^3}. \tag{18}$$

Tout y est exprimable en fonction de R (t) : $\dot{\varphi} = \dot{R}/R$; $T \sim R^{-2}$. En faisant apparaître le classique temps de Jeans : $\mathscr{I} = (4\pi\, G\, m n_0)^{-1/2}$, avec

$$\beta_M = \Omega_0\,\mathscr{I}; \qquad \beta_R = \omega_0\,\mathscr{I}; \qquad R = R_0\,\mathscr{R}; \qquad t = \mathscr{I}\,\tau.$$

$$\boxed{\mathscr{R}^2\,\ddot{\mathscr{R}} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3\,\mathscr{R}}(\beta_R^2 + \beta_R\,\beta_M) = 0.} \tag{19}$$

On reconnait là une pseudo-équation de Friedman. Les solutions newtoniennes, introduites par Milne et MacCrea en 1934 ([3]) peuvent être considérées comme tangentes à des solutions de la relativité générale. Le présent travail, qui suggère un mélange de matière et d'anti-matière, pourrait peut-être permettre de remonter à une solution unifiée de la R.G.

(*) Séance du 27 octobre 1976.

([1]) J.-P. PETIT et Y. MONNET, *Comptes rendus*, 280, série B, 1975, p. 733.
([2]) O. HECKMAN et E. SUCKING, *World Models. SEU*, 1958, p. 148-159.
([3]) W. H. MACCREA et E. A. MILNE, *Quart. J. Math.*, 5, 1934, p. 73.

J.-P. P. :
10, *rue Félibre-Gaut*,
13100 *Aix-en-Provence*;

G. M. :
Observatoire de Marseille,
2, *place Le Verrier*,
13000 *Marseille*.