GÉOMÉTRIE. — *Problématique du retournement de la sphère.*
Note (*) de **Bernard Morin** et **Jean-Pierre Petit,** transmise par M. Paul-André Meyer.

Dans cette Note on pose le problème du retournement de la sphère et on décrit un modèle central conçu par B. Morin à partir d'une suggestion de M. Froissart.

In this paper the problem of the eversion of two spheres is exposed. A central model, suggested by M. Froissart, is described.

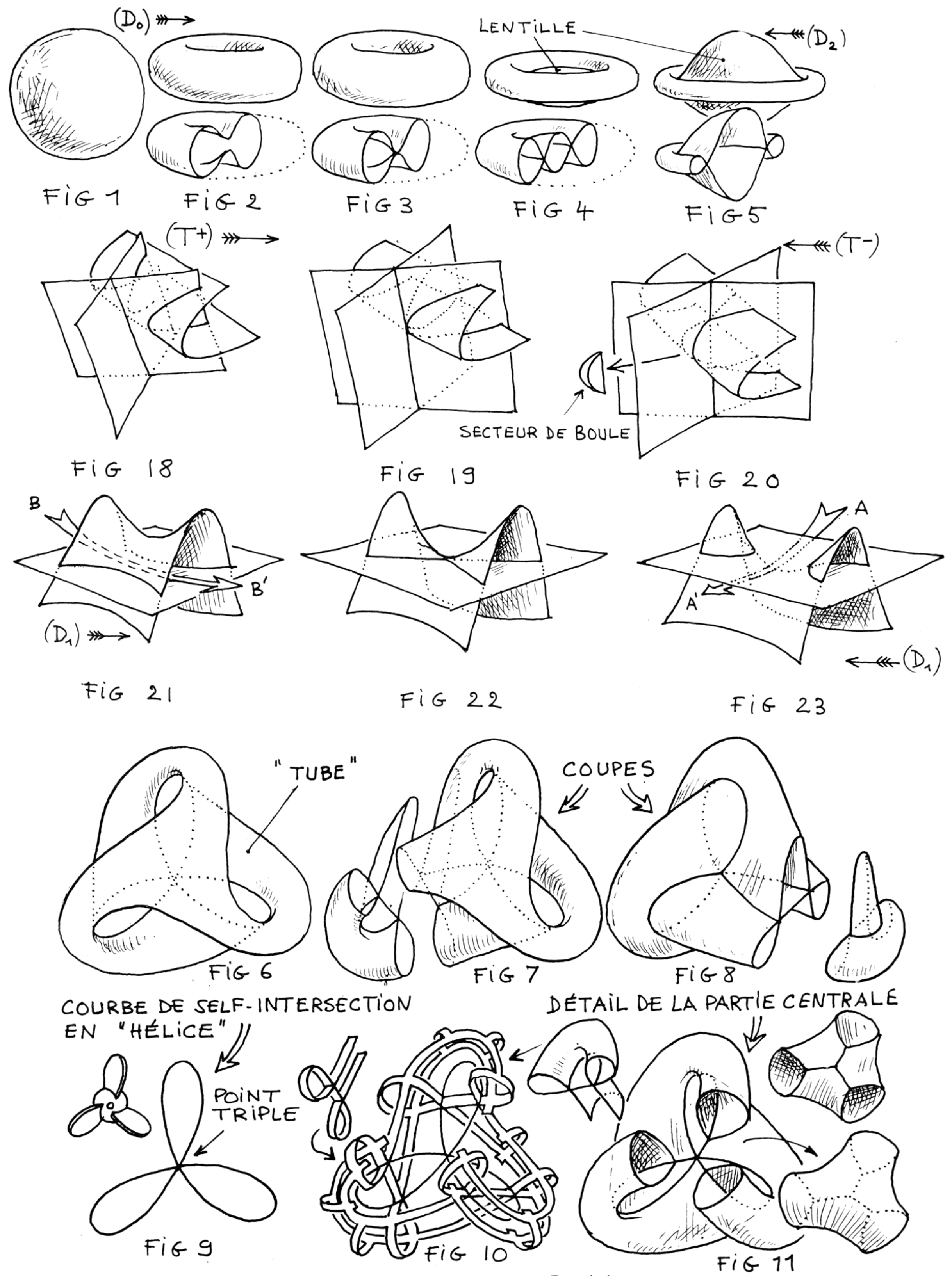
1. Le théorème de Smale. — En 1957, (3) et (4), Stephen Smale présenta un théorème de portée très générale sur les classes d'immersions de sphères. Selon celui-ci il devait être possible de relier le plongement standard de la sphère au plongement antipodal par une déformation régulière. Ceci n'était pas réalisable à l'aide de déformations de plongement mais grâce à une succession continue d'immersions.

Les figures 1 à 5 suggèrent un moyen de retourner la sphère. En effet, dans l'immersion de la figure 5 la presque totalité de la face interne se voit de l'extérieur. En prolongeant cette déformation, on peut faire apparaître la face interne complètement, mais, ce faisant, on est obligé de contracter le tube équatorial, qui dégénère en arête de rebroussement. Or cela nous est interdit par la règle du jeu des déformations régulières. Il se trouve que Smale n'avait pas la moindre idée de ce qu'il fallait faire pour réaliser ce retournement, mais, confiant dans la rigueur de sa démonstration, il était contraint d'affirmer que cela était possible.

2. Les premières constructions explicites. — La première idée qui vint à l'esprit des mathématiciens fut de se servir de la surface construite par l'allemand Boy en 1901 (voir *fig.* 6 à 11). Ce n'est que très récemment qu'une représentation analytique de cette surface a pu être obtenue par B. Morin, ce travail devant faire l'objet d'une autre Note. Cette surface, inorientable et fermée, est connue sous le nom d'espace projectif de dimension deux. En revêtant deux fois celle-ci, on obtient une immersion particulière de la sphère. (On obtiendrait ceci en épaississant la surface de Boy, puis en recouvrant de peinture l'unique face, enfin en enlevant le support.) Si on peut construire une famille continue d'immersions reliant le plongement standard de la sphère à cette immersion, il suffit alors d'échanger les deux feuillets en regard de ce revêtement de la surface de Boy, puis de parcourir en sens inverse le chemin d'immersions précédemment décrit, pour aboutir au plongement antipodal, c'est-à-dire à la sphère retournée.

En 1961 un excellent géomètre, prématurément décédé, Arnold Shapiro, imagina un scénario précis réalisant ce programme. Bien peu nombreux sont ceux qui le connaissent, car, ne disposant pas de formalisme adéquat, Shapiro considéra qu'il ne pouvait mettre ce travail sous une forme publiable.

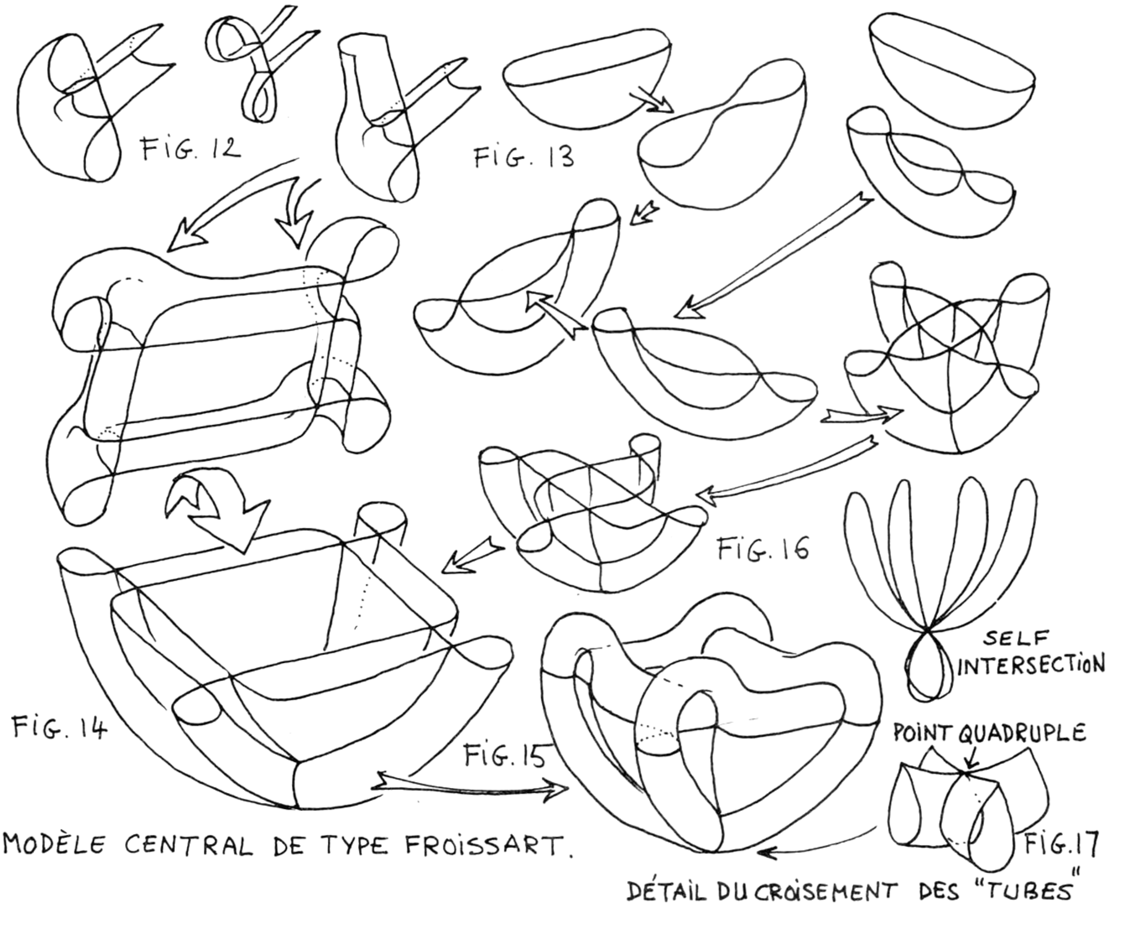
En 1966 Anthony Phillips (2) publia une suite de dessins constituant ce qu'il croyait être la transformation de Shapiro. En réalité, la déformation de Phillips, inspirée par René Thom, n'a en commun avec celle de Shapiro que d'aboutir elle aussi au revêtement de la surface de Boy. Sa solution est voisine d'une idée de Nicolaas Kuiper, signalée dans (1) et dont Phillips n'avait pas connaissance. Si sa démarche est correcte, par contre la suite des dessins publiés dans le *Scientific American* se laisse très malaisément appréhender.



SURFACE DE BOY

La contribution de Marcel Froissart. — Le modèle de Boy représente un agencement de trois « tubes », comme on peut le voir sur les figures 6 à 11. Son revêtement à deux feuillets par la sphère comporte donc six « tubes ». Froissart suggéra que la déformation pourrait s'articuler autour d'un modèle comportant seulement quatre « tubes ». Ce modèle découvert par B. Morin est décrit sur les figures 12 à 17. Il est plus simple que le revêtement à deux feuillets de la surface de Boy. La déformation est plus facile à appréhender, et, comme on le verra dans une prochaine Note, peut être décrite à l'aide d'équations. Chose curieuse, et c'est un des paradoxes de l'imagination spatiale, Froissart n'avait pas vu que la déformation qu'il évoquait devait être symétrique dans le temps.

4. Les six types de modifications génériques intervenant dans le retournement de la sphère. — Une immersion transversale est une immersion dans laquelle la surface ne présente que des lignes de points doubles, le long desquelles les surfaces ne sont jamais tangentes entre



elles et un nombre fini de points triples en lesquels les trois plans tangents aux trois nappes forment un trièdre. Notons qu'un plongement est une immersion transversale dans laquelle la courbe de self-intersection est absente. L'immersion 4 est transversale, alors que la 3 ne l'est pas. La surface de Boy est une immersion transversale. Mais, dans la transformation de Phillips, il se produit un contact entre les deux nappes, précisément le long de cette surface de Boy et cette situation n'est pas transversale. Lorsqu'on déforme une immersion transversale, la courbe de self-intersection se déplace sans changer de structure. Si deux immersions transversales ont des structures différentes, on ne peut espérer passer de l'une à l'autre que si l'on accepte qu'au cours de la déformation, l'immersion cesse d'être transversale. La façon la moins laxiste de s'octroyer cette liberté conduit à décrire les six types de modifications, dites génériques, que peut subir la courbe de self-intersection d'une surface de l'espace de dimension trois. Ces modifications interviendront au cours de la déformation de type Froissart, qui sera décrite dans une Note suivante. Nous passons maintenant à la description des six types de modifications génériques d'immersions transversales.

4.1. La modification (D_0) fait apparaître une courbe de self-intersection (cf. *fig.* 1 à 5). Il se crée ainsi une « lentille » ou région de l'espace en forme de demi-boule.

4.2. La modification (D_2) représente la disparition d'une courbe de self-intersection (figures précédentes lues dans l'ordre inverse).

4.3. La modification (T^+) fait apparaître deux points triples entre trois courbes de self-intersection voisines les unes des autres, ainsi qu'une région de l'espace ambiant en forme de secteur de boule (*fig.* 18 à 20).

4.4. La modification (T^-) est l'opération opposée (disparition de points triples).

4.5. La modification (D_1) peut être expliquée à l'aide de l'image suivante : matérialisons l'une des nappes de la surface par un col de montagne (ou HP), l'autre nappe étant figurée comme un plan mobile, par exemple la surface libre d'un liquide qui inonde progressivement le paysage. Les configurations 21 et 23 découpent l'espace en cinq régions, tandis que la configuration 22 le partage en six. Les flèches que l'on peut voir sur les dessins indiquent comment cette modification change le mode de raccordement des différentes régions. AA′ s'ouvre, BB′ se ferme. La symétrique temporelle de cette modification est en fait sa propre opposée.

4.6. La modification (Q) présente un point quadruple. Le modèle canonique de cette situation peut être analysé comme suit : dans l'espace ordinaire, considérons les trois plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ et un plan mobile perpendiculaire au vecteur (1, 1, 1). Lorsque le plan mobile passe par l'origine on assiste au retournement du tétraèdre défini par les quatre plans de la figure. Il est clair que, comme la modification (D_1), celle-ci est identique à son opposée temporelle.

(*) Séance du 18 septembre 1978.

(1) N. H. Kuiper, *Comment. Math. Helvetici*, 35, 1961, p. 85-92.

(2) A. Phillips, *Scientific American*, 214, 1966, p. 112-120.

(3) S. Smale, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90, 1959, p. 281-290.

(4) S. Smale, *Annals of mathematics*, 69, n° 2, 1959, p. 327-344.

(5) R. Thom, *La classification des immersions* (*Séminaire Bourbaki*, exposé 157, décembre 1957, secrétariat de mathématiques, Paris, 1958, 11 p.).

B. M. : *Département de mathématiques, Université Louis-Pasteur*, 7, *rue René-Descartes*, 67000 *Strasbourg;*

J.-P. P. : *Observatoire de Marseille*, 2, *place Le Verrier*, 13000 *Marseille.*