

GÉOMÉTRIE. — *Le retournement de la sphère.*

Note (*) de **Bernard Morin** et **Jean-Pierre Petit**, transmise par M. Paul-André Meyer.

Dans cette Note on trouvera décrites les déformations permettant de passer du plongement standard de la sphère au plongement antipodal, par l'intermédiaire d'un modèle central de type Froissart.

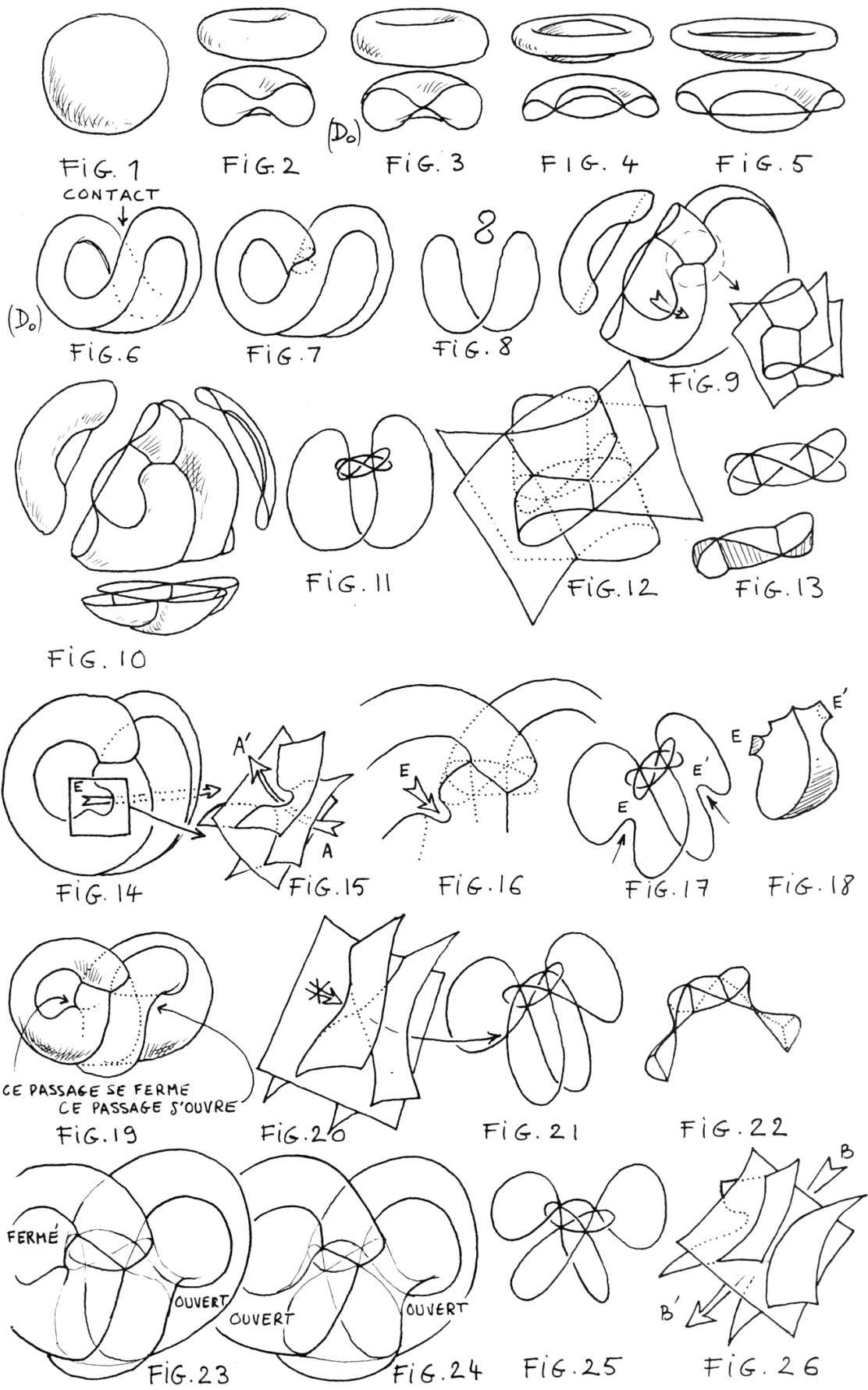
This paper describes the deformations that makes the eversion of the two spheres possible through a central model, as suggested by M. Froissart.

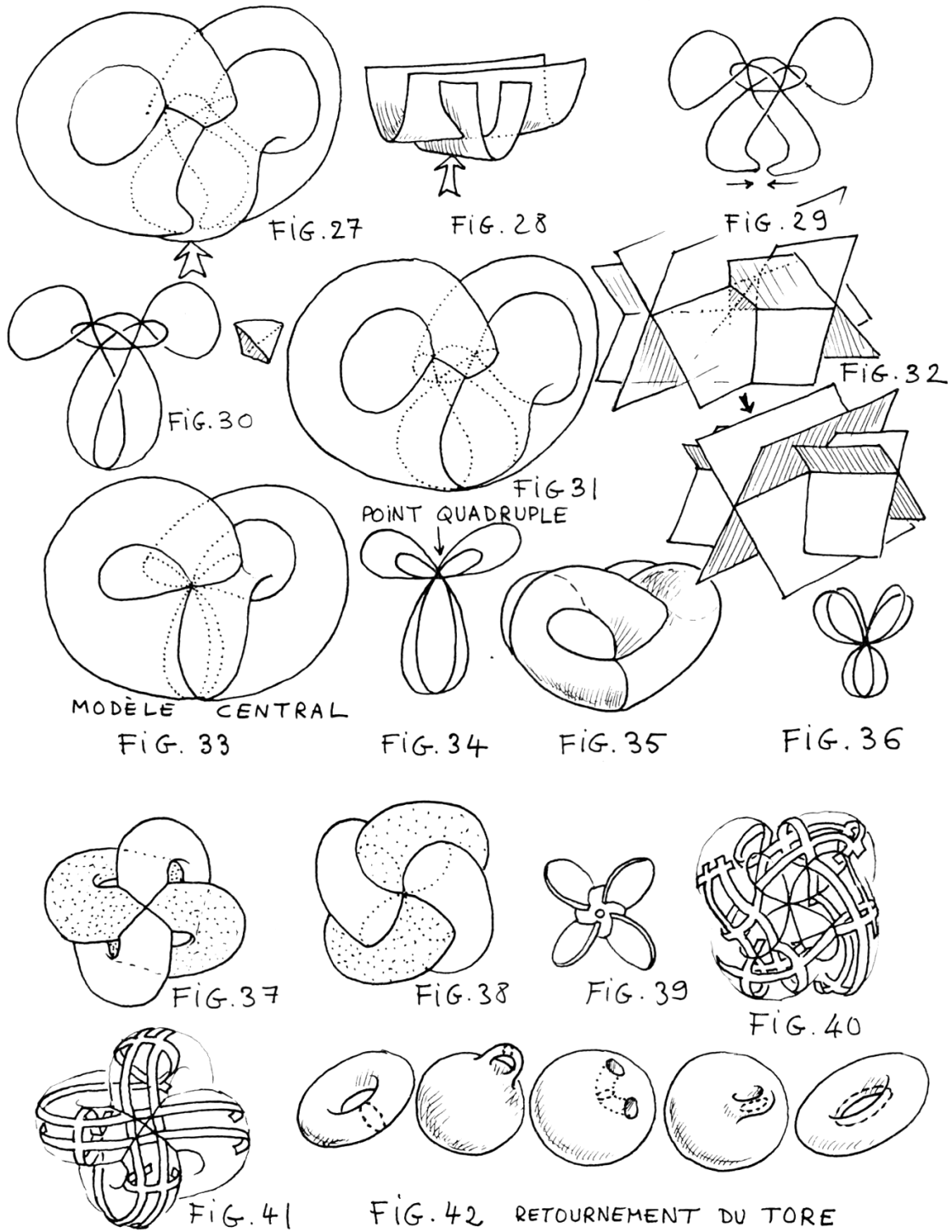
1. INTRODUCTION. — Cette Note fait suite à la Note ⁽¹⁾ dans laquelle se trouvait exposé le problème du retournement de la sphère. Nous invitons le lecteur à s'y référer. En 1967, 1 an après la publication de la solution trouvée par Anthony Philips et publiée au *Scientific American*, eut lieu une rencontre au Batelle Memorial Institute de Seattle où commença à s'élaborer la solution basée sur le modèle central décrit dans la Note ⁽¹⁾, inventé par Bernard Morin, sur une suggestion de Marcel Froissart. En 1968 Bernard Morin avait terminé la construction de deux variantes de l'homotopie régulière conduisant au retournement de la sphère, mais il se heurta à un problème difficile de codage graphique de ces déformations. Un brillant élève de Smale, Charles Pugh, consacra de nombreuses années à construire des modèles en grillage. Grâce au talent de dessinateur du mathématicien Christopher Zeeman, Pugh put bénéficier de l'information contenue dans les modèles définitifs élaborés en France. Grâce à un appui financier puissant, Nelson Max, utilisant les maquettes de Pugh, réalisa un film professionnel en faisant essentiellement appel aux capacités d'animation offertes par l'ordinateur. C'est une des deux variantes imaginées par Morin qui est décrite dans ce film, commercialisé en 1976 ⁽²⁾.

Dès 1972, s'inspirant des études préparatoires de la jeune mathématicienne Harriet Fell, Georges Ricco, alors professeur dans l'enseignement secondaire, réalisa à l'aide d'un magnétoscope semi-professionnel une première ébauche de la version définitive. Le film était basé sur deux modèles en plâtre construits par lui et sur une cinquantaine de dessins exécutés par les étudiants des Beaux Arts de Marseille, sur sa demande. Il est bien regrettable que cette esquisse, très suggestive, n'ait pas été diffusée en son temps.

Les modèles de Pugh, très explicites, ne donnaient rien en photographie, et leur édition avait un caractère problématique. Nelson Max, dans son film, ne montre pas les courbes de self-intersection, indispensables à la lisibilité des modèles. Finalement c'est un travail de dessinateur qui a permis de donner ici le premier codage graphique satisfaisant de la déformation.

2. LE RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE. — Le problème est donc de décrire la suite de déformations permettant de passer du plongement standard de la sphère au modèle central décrit dans la Note ⁽¹⁾. Un premier (D_0) conduit à l'image 5. La figure 6 montre le second (D_0), tandis que sur la figure 8 on peut voir les deux éléments de la courbe de self-intersection, nés de ces deux modifications. La figure 9 montre l'état après la réalisation de deux (T^+). On note qu'un mouvement de vissage a été opéré préalablement au deuxième (D_0) évoqué. La courbe de self-intersection est indiquée sur la figure 11. Sur les figures 12 et 13 on peut voir les deux secteurs de boule et le tétraèdre. Notons que le modèle possède une symétrie binaire.





Deux modifications (D_1) vont alors intervenir, et c'est la partie la plus délicate à représenter. On a cherché à mettre en évidence à l'aide des figures 14 et 15 les nappes qui vont être intéressées par l'un des (D_1). On reconnaît la surface PH et le plan mobile évoqués dans la Note ⁽¹⁾. Le second (D_1) est masqué par le modèle. On ferait apparaître la zone en question par simple rotation de 180° . Sur les figures 14 et 17 le changement de structure de la courbe de self-intersection est ébauché (flèches). Sur la figure 14 une flèche blanche évoque un passage qui existe à ce stade à travers le modèle. Si l'on coulait du plâtre dans la cavité on obtiendrait la figure 18. Cette cavité communiquant avec l'extérieur par les « entrées » E et E'.

Les deux (D_1) vont fermer ces passages, et donc isoler ce volume de l'extérieur. Les figures 19 à 22 se réfèrent à l'instant où ceci se produit. La figure 21 montre clairement le changement de structure de la courbe de self-intersection, achevé sur la figure 25.

Il existe en fait de nombreuses variantes car les modifications ne doivent pas nécessairement se produire simultanément. Par exemple dans les figures 23 et 24 on a représenté la situation lorsque les modifications (D_1) en question se produisent l'une après l'autre.

La base du modèle est alors l'intersection de deux cylindres paraboliques en position générale. Un nouveau (D_1) est alors opéré, qui amène les deux portions cylindriques au même niveau (ce qui est évoqué par la flèche sur les figures 27 et 28). L'amorce de la modification de la courbe de self-intersection est évoquée sur la figure 29. Sur les figures 30 et 31, le (D_1) s'effectue. Pour donner au modèle la symétrie d'ordre quatre il reste à faire disparaître le tétraèdre, à l'aide d'une modification (Q). Les figures 33 à 36 sont le résultat de cette opération. Dans les figures 35 et 36 on a cherché à donner au modèle une allure symétrique. On reconnaît alors le modèle central décrit dans la Note ⁽¹⁾. On identifie bien les quatre tubes prévus par Froissart (au lieu de six dans le cas de la surface de Boy revêtue deux fois). Une partie de la courbe de self-intersection affecte la forme d'une hélice quadripale (voir *fig.* 39) ce qui est à rapprocher de l'hélice de la courbe de self-intersection de la surface de Boy [voir Note ⁽¹⁾].

Si la sphère de départ était par exemple rouge à l'extérieur et verte à l'intérieur, les tubes du modèle central seraient alternativement rouges et verts. Une rotation de 90° inversera donc les couleurs. On conçoit qu'en reprenant à rebours les dessins 1 à 31 on obtiendrait une sphère montrant un extérieur de couleur verte, donc effectivement retournée. Comme on le verra dans une publication ultérieure, l'intérêt de cette déformation est de se prêter à une mise en équations. Comme évoqué dans l'article de Phillips [voir référence dans la Note ⁽¹⁾] on remarquera que le retournement du tore est alors une chose triviale (le cercle de gorge et le cercle générateur étant échangés, ce qui n'a rien d'intuitif).

3. TABLEAU RÉCAPITULATIF DES MODIFICATIONS. — La déformation amenant au modèle central se compose de : Deux (D_0); deux (T^+), deux (D_1), un autre (D_1) et un (Q). La seconde phase, symétrique, se compose de : deux (D_1), deux (T^-) et deux (D_2), suivant les notations définies dans la Note ⁽¹⁾.

(*) Séance du 18 septembre 1978.

⁽¹⁾ B. MORIN et J. P. PETIT, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 767.

⁽²⁾ N. L. MAX, *Turning a Sphere Inside Out*, a guide to the 16 mm color film (23 mn) distributed by International Film Bureau Inc., Chicago, 1976 (12 p).