

GÉOMÉTRIE. — *Équations du retournement de la sphère.*Note (*) de **Bernard Morin**, transmise par M. Paul-André Meyer.

Dans cette Note on donne les équations d'une suite de familles continues à un paramètre d'immersions de la sphère qui relie le plongement standard au plongement antipodal, ainsi qu'une paramétrisation de la surface de Boy.

In this paper we give explicit regular homotopies connecting the standard embedding of the two-sphere to the antipodal embedding and also a parametrization for the Boy surface.

La solution au problème du retournement de la sphère proposée ici se construit en trois étapes. Son efficacité visuelle a été constatée grâce à l'ordinateur par George Francis (Urbana, U.S.A.) qui, ce faisant, a pu redresser une formule incorrecte.

1. CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE D'APPLICATIONS DU CYLINDRE DANS LE PLAN. — Pour la commodité des calculs on identifie le plan \mathbf{R}^2 au plan \mathbf{C} de la variable complexe et l'espace \mathbf{R}^3 à $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Quel que soit $t \in [0, 1]$, la courbe plane Γ_t d'équation

$$\Gamma_t(\theta) = (n-1) i e^{-\theta} \cos \pi t + \left(e^{i(n-1)\theta} + \frac{n-1}{n+1} e^{-i(n+1)\theta} \right) \sin \pi t$$

(où θ parcourt le cercle \mathcal{S}_1 , ensemble des nombres réels modulo 2π) est sans points d'inflexion et n'a qu'un nombre fini de points singuliers, c'est-à-dire de points où la dérivée s'annule.

On pose $t_0 = (1/\pi) \text{Arc tg}(1/2)$. La courbe Γ_t est régulière lorsque $t \in]0, t_0[\cup]1-t_0, 1[$, et admet pour singularités $2n$ points de rebroussement lorsque $t \in]t_0, 1-t_0[$. Lorsque $t = t_0$ (resp. $t = 1-t_0$), la courbe Γ_t admet pour points singuliers les n points

$$\theta_j = \frac{\pi}{2n} + \frac{2j\pi}{n} \quad \left(\text{resp. } \theta_j = -\frac{\pi}{2n} + \frac{2j\pi}{n} \right) \quad (\text{où } 0 \leq j \leq n-1);$$

ces points vérifient en outre les conditions :

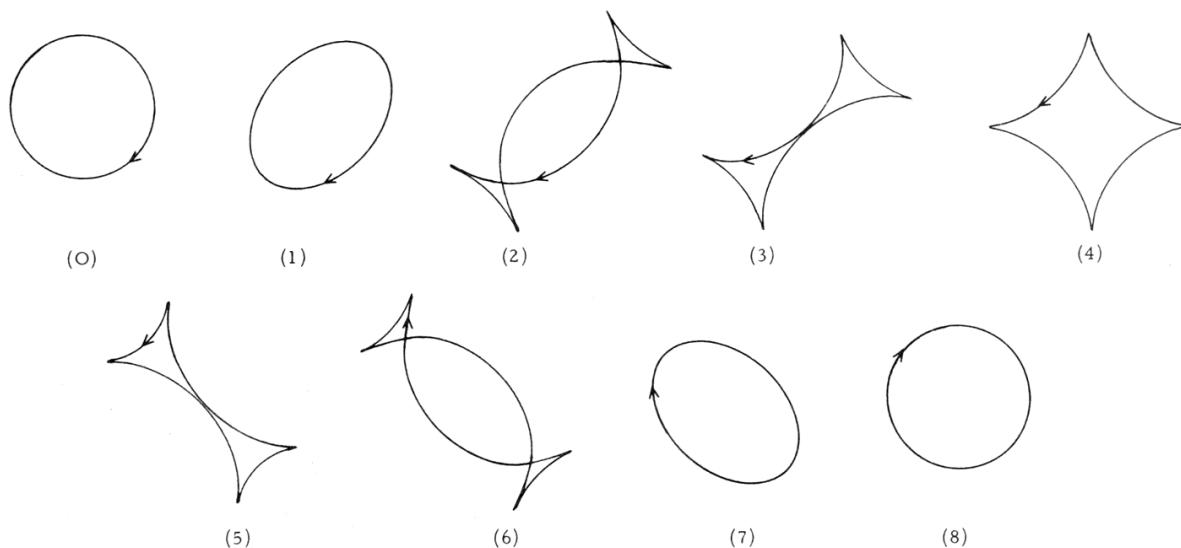
$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Gamma_t(\theta_j) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m \left(\frac{d^3}{d\theta^3} \Gamma_t(\theta_j) \cdot \frac{d^4}{d\theta^4} \bar{\Gamma}_t(\theta_j) \right) \neq 0$$

(singularités du type « queue d'aronde »). Lorsque $t=0$ ou $t=1$, la courbe Γ_t est un cercle parcouru dans le sens rétrograde. Lorsque $t=1/2$, c'est une hypocycloïde (étoilée dès que $n \geq 4$) à $2n$ points de rebroussement parcourue dans le sens direct. En fait, lorsque n est impair, $\Gamma_{1/2}$ est une hypocycloïde à n points de rebroussement parcourue deux fois. Les figures ci-contre décrivent l'évolution en fonction du temps t de la courbe Γ_t lorsque $n=2$ et $n=3$.

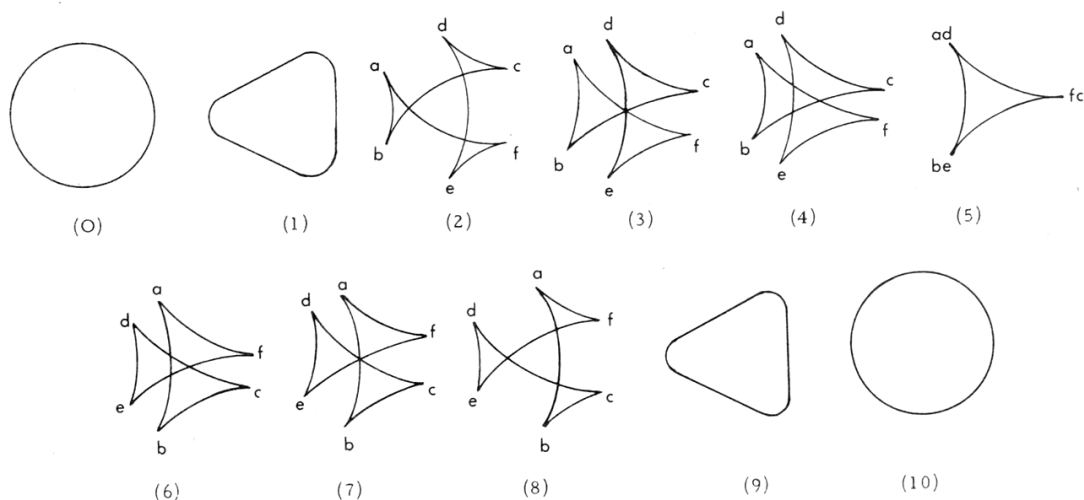
Soit $m : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . L'application $U_{1,t} : \mathcal{S}_1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie, pour tout $(\theta, \zeta) \in \mathcal{S}_1 \times \mathbf{R}$, par $U_{1,t}(\theta, \zeta) = \Gamma_t(\theta) + \zeta m(t) \cdot e^{-i\theta}$, a pour lieu critique le sous-ensemble $\mathcal{S}_1 \times \{0\}$ du cylindre $\mathcal{S}_1 \times \mathbf{R}$ et l'ensemble de ses valeurs critiques est la courbe Γ_t , comme on le voit directement en observant que

$$\frac{d}{d\theta} \Gamma_t(\theta) = (n-1) e^{-i\theta} (\cos \pi t - 2 \sin n\theta \sin \pi t).$$

Evolution de la courbe Γ_t



(cas n = 2)



(cas n = 3)

2. APPLICATION DE LA SPHÈRE DANS ELLE-MÊME ASSOCIÉE A UNE APPLICATION PROPRE DU CYLINDRE DANS LE PLAN. – On identifie la sphère \mathcal{S}_2 à l'ensemble des points $(w, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ tels que $|w|^2 + z^2 = 1$. Soient $\tau : \mathcal{S}_2 - \{(0, \pm 1)\} \rightarrow \mathcal{S}_1 \times \mathbf{R}$ l'application définie en posant $\tau(w, z) = (\arg w, z/|w|)$ pour tout $(w, z) \in \mathcal{S}_2$ tel que $w \neq 0$ (réciproque de la projection centrale du cylindre sur la sphère) et $\sigma : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{S}_2 - \{(0, -1)\} \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ l'application qui à tout $w \in \mathbf{C}$ associe

$$\sigma(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right)$$

(réciproque de la projection stéréographique de pôle sud). Alors l'application

$$U_{0,t} = \sigma \circ U_{1,t} \circ \tau : \mathcal{S}_2 - \{(0, \pm 1)\} \rightarrow \mathcal{S}_2 - \{(0, -1)\}$$

s'écrit :

$$U_{0,t}(w, z) = \left(\frac{2|w|^{n+1} V_t(w, z)}{|V_t(w, z)|^2 + |w|^{2(n+1)}}, \frac{|V_t(w, z)|^2 - |w|^{2(n+1)}}{|V_t(w, z)|^2 + |w|^{2(n+1)}} \right),$$

où

$$V_t(w, z) = (n-1) i \bar{w} |w|^n \cos \pi t + \left(w^{n-1} |w|^2 + \frac{n-1}{n+1} \bar{w}^{n+1} \right) \sin \pi t + m(t) z \bar{w} |w|^{n-1}$$

[quels que soient $t \in [0, 1]$ et $(w, z) \in \mathcal{S}_2$ avec $w \neq 0$].

Sur cette formule on vérifie que $U_{0,t}$ se prolonge par continuité en une application $U_t : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ de classe \mathcal{C}^1 et de rang 2 aux pôles telles que $U_t(0, \pm 1) = (0, -1)$. Le lieu critique de U_t est donc l'équateur de \mathcal{S}_2 et l'ensemble de ses valeurs critiques, la courbe $\sigma \circ \Gamma_t$ de \mathcal{S}_2 . Un calcul de Gérard Barbançon montre que l'application U_t n'est jamais de classe \mathcal{C}^2 aux pôles.

3. RELÈVEMENT DE LA FAMILLE (U_t) EN UNE FAMILLE D'IMMERSIONS DE \mathcal{S}_2 DANS $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$. — Quel que soit $t \in [0, 1]$ soient $\rho_t : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et $\rho_{0,t}$ sa restriction à $\mathcal{S}_2 - \{(0, \pm 1)\}$. Pour que l'application $(U_{1,t} \circ \tau, \rho_0) : \mathcal{S}_2 - \{(0, \pm 1)\} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ soit une immersion, il faut et il suffit que

$$(1) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{1,t}(\theta, 0) & \frac{\partial}{\partial \zeta} U_{1,t}(\theta, 0) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_{0,t} \circ \tau^{-1})(\theta, 0) & \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho_{0,t} \circ \tau^{-1})(\theta, 0) \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{1,t}(\theta, 0) & \frac{\partial}{\partial \zeta} U_{1,t}(\theta, 0) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_t(e^{i\theta}, 0) & \frac{\partial}{\partial z} \rho_t(e^{i\theta}, 0) \end{pmatrix}$$

quel que soit $\theta \in \mathcal{S}_1$.

Posons

$$\rho_t(w, z) = (z + 3 \Re e(w^n)) \cos \pi t - \Im m(w^n)(z + \Re e(w^n)) \sin \pi t,$$

quels que soient $t \in [0, 1]$ et $(w, z) \in \mathcal{S}_2$. Alors la condition (1) est vérifiée lorsque le modulateur $m : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ introduit au paragraphe 1 est la fonction qui à t associe le nombre $((n-1)/n)(\sin \pi t + (1/5))$. Posons $R_t = e^{\rho_t}$, alors l'application $f_t = R_t \cdot U_t$ (produit du vecteur U_t par le scalaire R_t) est une immersion de classe \mathcal{C}^1 de \mathcal{S}_2 dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ dont les coordonnées sont des fonctions analytiques en dehors des pôles. De plus f_0 et f_1 sont des plongements respectivement isotopes au plongement standard et au plongement antipodal par des isotopies qui s'explicitent sans difficulté. La famille $(f_t)_{t \in [0, 1]}$, qui dépend différentiablement du paramètre t , est donc une homotopie régulière réalisant le retournement de la sphère. L'image de l'immersion f_t admet Oz comme axe de symétrie d'ordre n . Elle admet, en outre, une symétrie anallagmatique par rapport à la sphère \mathcal{S}_2 de l'espace but. Enfin le retournement (f_t) est symétrique par rapport au temps $t = 1/2$. L'immersion $f_{1/2}$ (immersion centrale) possède donc une symétrie supplémentaire. Le

cas $n=2$ fournit la déformation la plus facile à décrire à l'aide de modèles; en fait, c'est l'examen de ces modèles, découverts sans le secours du calcul qui a suggéré la description analytique du phénomène.

4. LA SURFACE DE BOY. — Lorsque n est impair, l'immersion centrale $f_{1/2}$ se factorise à travers la projection canonique p de \mathcal{S}_2 sur l'espace projectif réel $\mathcal{P}(2, \mathbf{R})$ de dimension 2 en une immersion $\hat{f}_{1/2}$ de $\mathcal{P}(2, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$. Lorsque $n=3$, l'application $\hat{f}_{1/2}$ est une immersion de Boy (c'est-à-dire une immersion transversale de $\mathcal{P}(2, \mathbf{R})$ dont la courbe de self-intersection peut s'interpréter comme l'image d'une immersion de \mathcal{S}_1 présentant un point triple). Lorsque $n=3$ la déformation qui vient d'être présentée fournit donc une variante des solutions trouvées par A. Shapiro et A. Phillips.

Remarque. — Si l'on remplace la fonction radiale R_t introduite au paragraphe 3 par la fonction $\hat{R}_t = 1 + k \rho_t$ [où la constante positive k doit vérifier l'inégalité $1/k < \sup_{(t, w, z) \in [0, 1] \times \mathcal{S}_2} |\rho_t(w, z)|$] la déformation $(\hat{f}_t) = (\hat{R}_t \cdot U_t)$ est encore un retournement de la sphère. L'image de l'immersion \hat{f}_t perd la propriété de symétrie anallagmatique signalée au paragraphe 3. En revanche, les fonctions coordonnées qui servent à la définir sont algébriques en dehors des pôles et même rationnelles lorsque n est impair et $t=1/2$.

(*) Séance du 23 octobre 1978.

Département de mathématique de l'Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg.