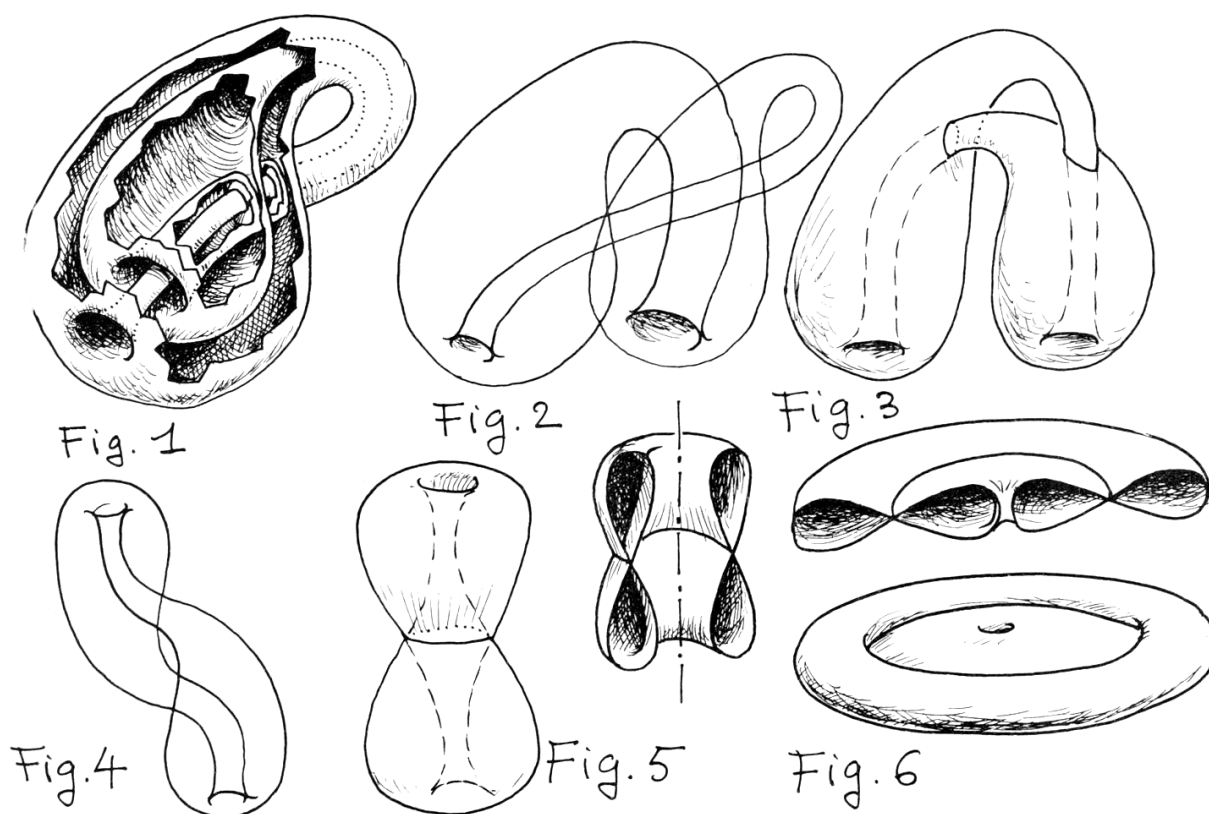


TOPOLOGIE. — *Le retournement non trivial du tore.*Note (*) de **Jean-Pierre Petit**, présentée par M. André Lichnerowicz.

L'auteur présente une homotopie régulière permettant de retourner le tore. Dans cette version le cercle de gorge et le cercle méridien ne sont pas échangés.

A regular homotopy is presented, which allows the reversal of the torus. In this procedure, the throat circle and the generating circle are not exchanged.

1. INTRODUCTION. — La première version du retournement de la sphère, qui fut publiée par A. Phillips (¹), comportait une étape centrale constituée par un double revêtement de la surface de Boy, que le lecteur trouvera décrit dans (²). Phillips, dans cette même Note, montra que le retournement du tore était alors une chose triviale. Voir à ce sujet les dessins 42 de la référence (³). Dans cette version, le cercle générateur et le cercle de gorge se trouvaient échangés.



2. PREMIÈRE ÉTAPE DE CE RETOURNEMENT DU TORE. — L'auteur chercha alors une nouvelle version dont l'étape centrale puisse être un double revêtement de la surface de Klein, que l'on peut voir décrit sur la figure 1 de la présente Note. Il imagina ensuite un ensemble de déformations régulières, esquissées sur les figures 2, 3, 4 conduisant au modèle symétrique de la figure 5, et qui est une immersion du tore. Modèle qui, par roulement, peut être amené dans la situation 6.

3. SECONDE ÉTAPE DE CE RETOURNEMENT DU TORE. — B. Morin suggéra alors que ce modèle central pourrait être relié au tore par une suite de déformations inspirées de sa version du retournement de la sphère. Si on se réfère en effet à la Note (²) on verra que les opérations

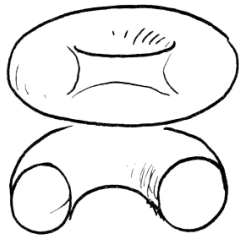


Fig. 7



Fig. 8

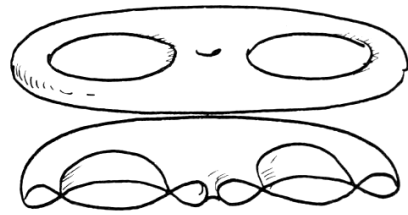


Fig. 9

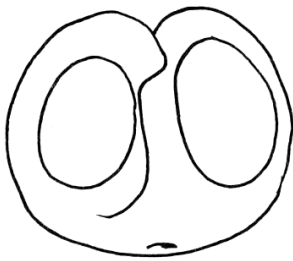


Fig. 10

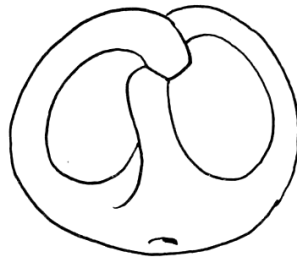


Fig. 11

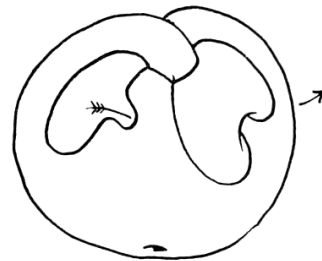


Fig. 12

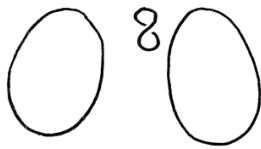


Fig. 13

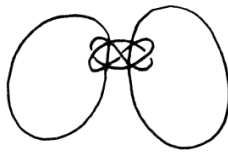


Fig. 14

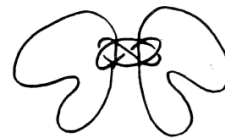


Fig. 15

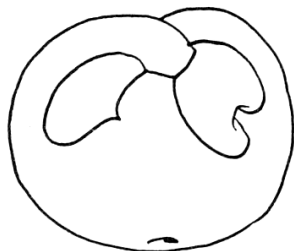


Fig. 16

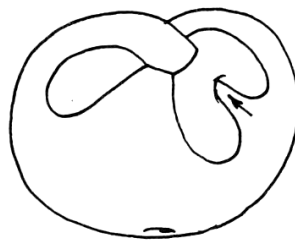


Fig. 17

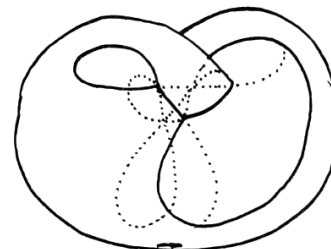
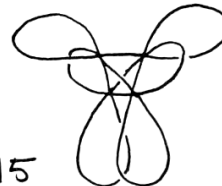


Fig. 18



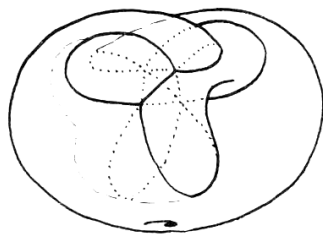


Fig. 19

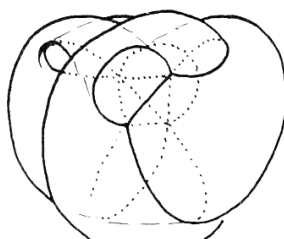


Fig. 20

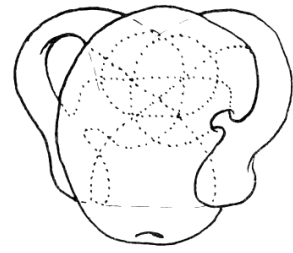


Fig. 21

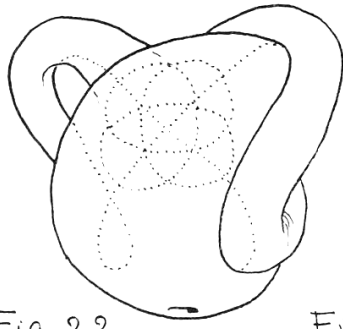
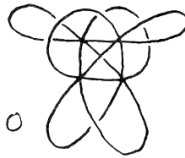


Fig. 22

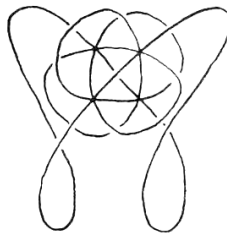


Fig. 23

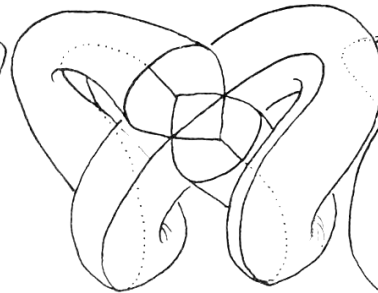


Fig. 24

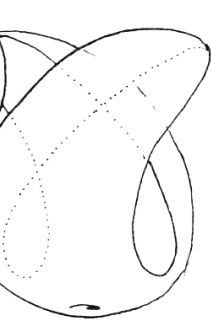


Fig. 25

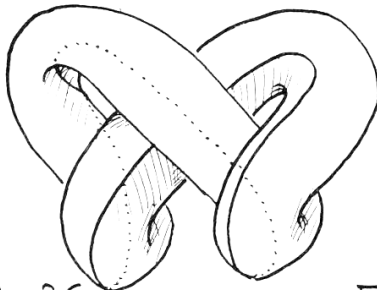


Fig. 26

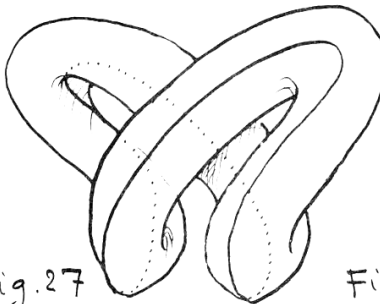


Fig. 27

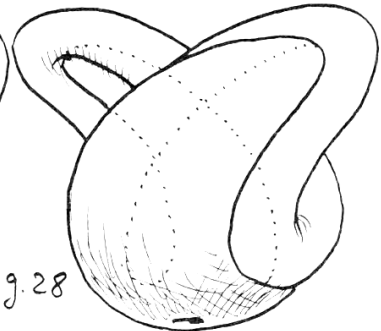


Fig. 28

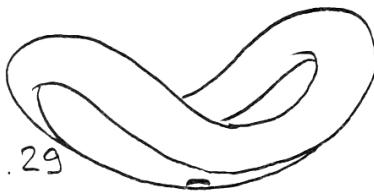


Fig. 29



Fig. 30



Fig. 31

du retournement entraînent un changement de raccordement dans la courbe de self intersection issue du premier (D_0), c'est-à-dire visible sur la figure 6. Un deuxième changement de raccordement est dû au (D_1) évoqué dans les figures 27, 28, 29, de ⁽²⁾.

B. Morin expliqua qu'en remplaçant les deux (D_0) du début, par une suite de trois, et en isolant le col du tore dans la partie inférieure du modèle, on devrait pouvoir parvenir à cette immersion du tore (fig. 5).

Nanti de ces indications, l'auteur réalisa la suite des dessins 7 à 30. Comme on le voit, le tore est d'abord aplati en une sorte de galette, et son col contracté au centre (fig. 8). Puis on opère deux (D_0). Les notations sont évidemment celles de ⁽²⁾. En 10 un troisième (D_0) est effectué, puis deux (T^+). La situation est alors celle de la figure 11. Comme dans le

retournement de la sphère, nous effectuerons alors deux (D_1), le résultat étant la figure 14. Une déformation supplémentaire (sans introduire d'autres modifications génériques) conduit à la figure 15, jugée plus lisible. Les figures 16 et 17 sont un démontage de ce modèle en deux parties. Une modification (Q) est alors effectuée. En 18 le point quadruple est bien visible, au centre du modèle. Ce qui conduit à la situation 19. En 20 : légère déformation de l'immersion, à des fins de meilleure lisibilité. Deux nouveaux (D_1) sont alors effectués, dont le résultat correspond à la figure 22. Cette situation est évidemment délicate à appréhender, puisque l'essentiel du modèle est alors caché. Mais il nous a semblé qu'une rotation du modèle ferait perdre au lecteur le fil du processus. On comparera la courbe de self intersection de la figure 23 à celle de la figure 11. L'élément central est identique. Il correspond au « boudin », passablement distordu, représenté sur les figures 24 et 25. Nous savons que le décroisement d'un tel « boudin » peut être assuré à l'aide de deux (T^-) et d'un (D_2). Après décroisement la nouvelle situation de ce « boudin » correspond à la figure 27, et l'ensemble du modèle à la figure 28. Si l'on excepte le col situé à la partie inférieure, ce modèle est identique à celui de la figure 6 de (³).

On remarquera au passage que ceci évoque un retournement non symétrique de la sphère, dont le schéma directeur serait

$$D_0D_0D_0T^+T^+D_1D_1QD_1D_1T^-T^-D_2D_2 \quad (14 \text{ en tout}).$$

Il n'y a évidemment plus de modèle central. Revenant au tore, considérons les figures 29 et 30. Cette dernière est bien identique à la figure 6 de la présente Note.

4. CONCLUSION. — Les transformations présentées ici conduisent bien à un retournement du tore. On notera qu'ici le cercle de gorge est conservé. L'évolution du cercle méridien demanderait à être analysée en détails. Si l'on poursuit la déformation du tore jusqu'à la figure 1, on obtient un retournement de type Phillips. Nous n'avons pas recensé les catastrophes correspondant au passage de la figure 1 à la figure 5. Dans cette variante, le retournement est assuré par échange des nappes en regard de cette surface (*fig. 1*).

Mais on peut s'arrêter à la situation de la figure 5, effectuer une rotation de 180°, en reprenant ensuite les déformations à rebours. Ce modèle central 5, très simple, à symétrie centrale, va jouer alors le même rôle, dans cette version du retournement du tore que le modèle introduit par B. Morin dans sa version du retournement de la sphère. Dans ces conditions le schéma directeur se lit

$$D_0D_0D_0T^+T^+D_1D_1QD_1D_1T^-T^-D_2D_0T^+T^+D_1D_1QD_1D_1T^-T^-D_2D_2D_2 \quad (26 \text{ en tout}),$$

évidemment symétrique. Bien noter que ce schéma n'est qu'indicatif.

Au delà de ces exercices conduisant au recensement et à l'étude des variantes du retournement de la sphère et du tore, on voit se dégager peu à peu des suites de transformations constituant une sorte d'opérateur géométrique. Considérons par exemple la figure 6. En rééditant cette opération géométrique une seconde fois, on obtiendrait, comme suggéré par B. Morin, la situation de la figure 31, qui débouche sur une transformation du tore, qui n'est pas un retournement.

(*) Séance du 30 octobre 1978.

(¹) A. PHILLIPS, *Sc. Amer.*, 214, mai 1966, p. 112-120.

(²) B. MORIN et J.-P. PETIT, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 767.

(³) B. MORIN et J.-P. PETIT, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 791.