3^e CYCLE DENSEIGNEMENT SUPERIEUR

N° d'Ordre

THESE

Présentée à l'UNIVERSITE de POITIERS (U.F.R. C.E.A.T.)

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

Diplôme National : arrêté du 23 Novembre 1988

Spécialité : AERODYNAMIQUE

par

Bertrand LEBRUN

APPROCHE THEORIQUE DE LA SUPPRESSION DES ONDES DE CHOC SE FORMANT
AUTOUR D'UN OBSTACLE EFFILE PLACE DANS UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE
D'ARGON IONISE A L'AIDE DE FORCES DE LAPLACE

- CAS D'UN ECOULEMENT EN REGIME QUASI-UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE POUR UN GAZ REEL ET UN GAZ PARFAIT
 - CAS D'UN ECOULEMENT EN REGIME BIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE: METHODE DES CARACTERISTIQUES.
- CAS D'UN ECOULEMENT EN REGIME QUASI-UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE POUR UN GAZ REEL ET UN GAZ PARFAIT
 - CAS D'UN ECOULEMENT EN REGIME BIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE: METHODE DES CARACTERISTIQUES.

Soutenue le 24 Février 1989 devant la Commission d'Examen:

Avant de rentrer dans les détails de la théorie, je désirerai présenter ici mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé à mener à bien ce mémoire.

Tout d'abord Mr Petit, mon directeur de thèse, que j'ai rencontré peu de temps après ma sortie d'école d'ingénieur, et qui, devant mon désir d'étudier la physique, m'a dirigé sur ce sujet et m'a apporté son soutien amical et ses nombreux conseils éclairés.

Ensuite, je tiens à remercier Mr Combarnous, qui me fait l'honneur de présider ma thèse et d'en être rapporteur. Je remercie également tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux, et particulièrement Mr Fontaine qui a suivi ces études depuis leurs débuts.

Que Mr Coirier trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour son soutient actif qui m'a permis de présenter ma thèse à l'Université de Poitiers.

Jan rencondre peu de temps apres ma sorde d'école d'ingénieur, et qui, devant mon désir d'écudier la physique, m'a dirigé sur ce sujet et m'a apporté son soutien amical et ses nombreux conseils éclairés.

Ensuite, je tiens à remercier Mr Combarnous, qui me fait l'honneur de présider ma thèse et d'en être rapporteur. Je remercie également tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux, et

Ν°	Titre	page
38	Définition du maillage de calcul du champ de potentiel dans la tuyère	102
39	Définition du maillage de calcul du champ de potentiel autour du profil en forme d'aile mince.	103
40	Allure du champ électrique dans la tuyère (écoulement interne) Lignes de potentiel et lignes de champ électrique.	104
41	Allure du champ électrique autour de l'aile (écoulement externe) Lignes de potentiel, lignes de champ électrique	105
42	Ecoulement dans une tuyère bidimensionnelle convergente en l'absence de champ de force JxB . Intersection des caractéristiques. Mach amont = 1.6.	107
43	Ecoulement externe autour de l'aile mince. Intersection des caractéristiques en l'absence du champ de force JxB. Mach amont = 1.6.	107
44	Ecoulement dans une tuyère bidimensionnelle convergente. Champ de force présent dans toute la section convergente. Mach amont = 1.6.	108
45	Ecoulement dans une tuyère bidimensionnelle convergente. Champ de force pariétal. Mach amont = 1.6.	109
46	Ecoulement externe autour de l'aile mince . Action du champ de force JxB . Mach amont = 1.6 .	97
47	Allure de la géomérie du champ de force autour de l'aile . Mach = 1.6; F _{moyen} = 4 10 ⁶ N/m ³ .	111
48	Evolution de la traînée autour du profil en fonction de la valeur du champ magnétique	114
48 t	ois Représentation de l'obstacle dièdre analogue à l'obstacle effilé.	114
49	Evolution des paramètres thermodynamiques le long de l'obstacle dièdre	115
50	Montage expérimental de simulation hydraulique d'un tube à ch∞	119
51	Simulation hydraulique. Onde de choc iniliale. Champ de force présent dans toute la section convergente. Mach amont = 1 6	120 108

TABLE DES MATIERES

	page
LISTE DES SYMBOLES	
LISTE DES FIGURES	
INTRODUCTION	1
I - ETUDE DES CONDITIONS D'INTERACTION MHD	. 13
I.1 - Description d'un tube à choc.	13
I.2 - Description sommaire des caractéristiques principales d'un plasma.	16
 I.2.1 - Définition d'un plasma. I.2.2 - Les effets de gaz réels. I.2.3 - Plasma collisionnel et plasma collectif. I.2.4 - Fréquence de collision. I.2.5 - Plasma coulombien et non coulombien. 	16 18 19 21 23
I.3 - Caractéristiques d'un écoulement de plasma obtenu en tube à choc.	24
I.4 - Interaction MHD.	26
 I.4.1 - Conductivité électrique scalaire du plasma. I.4.2 - L'effet Joule. I.4.3 - L'effet d'hors équilibre thermodynamique. I.4.4 - L'effet Hall. I.4.5 - Le nombre de Reynolds magnétique. 	27 29 31 32 35
II - EQUATIONS GENERALES ET ANALYSE DES TRAVAUX ANTERIEURS	. 36
II.1 - Equations générales.	36
 II.1.1 - Les équations de conservation. ([8] p.296). II.1.2 - Les lois de l'électromagnétisme. I.2.5 - Plasma coulombien et non coulombien. 	37 38 23
I.3 - Caractéristiques d'un écoulement de plasma obtenu en tube	

II.2 - Modèle quasi-unidimensionnel stationnaire pour un gaz parfait: modèle de Sutton ([8] p.390).	40
 II.2.1 - Hypothèses simplificatrices: écoulement en régime stationnaire pour un gaz parfait. II.2.2 - Modèle quasi-unidimensionnel stationnaire. II.2.3 - Conclusion. 	40 42 43
II.3 - Simulation hydraulique de suppression des ondes de choc: expérience de Petit [6].	44
III - MODELE QUASI-UNIDIMENSIONNEL POUR UN GAZ REEL	49
III.1 - Développement des équations à travers une approche bidimensionnelle stationnaire.	50
II.1.1 - Hypothèses de travail. II.1.2 - Equations générales en régime bidimensionnel	50
stationnaire. II.1.3 - Equations dans un repère lié au laboratoire. II.1.4 - Equations dans un repère lagrangien.	51 52 53
III.2 - Etablissement du modèle quasi-unidimensionnel stationnaire.	54
 III.2.1 - Linéaristion des équations de la mécanique des fluides. III.2.2 - Condition de régime quasi-unidimensionnel imposé par la pression. III.2.3 - Variation des paramètres thermodynamiques en préser d'un champ de force JxB d'orientation quelconque. III.2.4 - Condition de suppression des ondes de choc: parallèlisme des caractéristiques issues de la paroi. III.2.5 - Expression de la variation des paramètres 	56 ace 58
thermodynamiques dans le cas d'un gaz parfait.	62
III.3 - Etude du blocage thermique. III.4 - Résultats numériques et conditions expérimentales.	63 66
IV - MODELES BIDIMENSIONNELS STATIONNAIRES POUR UN GAZ PARFAIT	69
par la pression.	56
III.2.3 - Variation des paramètres thermodynamiques en préses d'un champ de force JxB d'orientation quelconque. III.2.4 - Condition de suppression des ondes de choc:	58
parallèlisme des caractéristiques issues de la paroi.	59

sionnel stationnaire dans un repère lié à l'écoulement. IV.1.2 - Cas d'un écoulement à pression constante. IV.1.3 - Etude de deux écoulements particuliers.	70 71 71
IV.2 - Etude d'un écoulement supersonique bidimensionnel plan ou à symétrie de révolution non isentropique en régime stationnaire Méthode des caractéristiques.	: 7 5
IV.2.1 - Hypothèses simplificatrices: effet Hall et champ électrique induit.	75
IV.2.2 - Etablissement des équations générales pour un gaz parfait en régime stationnaire IV.2.2.1 - Les équations de conservation en régime	79
stationnaire IV.2.2.2 - Formulation non isentropique de ap/ax	79 79
IV.2.2.3 - Equation de Crocco pour un écoulement en interaction MHD	82
IV.2.2.4 - Equation de St Venant pour un écoulement en interaction MHD IV.2.3 - Méthode des caractéristiques appliquée à un écoulement	84
supersonique bidimensionnel plan ou à symétrie de révolution en interaction avec un champ croisé JxB . IV.2.4 - Critère de maintient du parallélisme des caractéristiques	85
IV.3 - Méthode de résolution numérique.	96
IV.3.1 - Calcul d'un point courant de l'écoulement. IV.3.2 - Calcul d'un point sur le profil.	96 100
IV.4 - Détermination du champ de force dans la tuyère convergent et autour du profil mince	101
IV.5 - Résultats numériques.	105
IV.5.2 - Ecoulements en l'abscence de champ de force JxB. IV.5.3 - L'écoulement interne.	105 106 108 110
IV.6 - Calcul de la trainée autour d'une aile mince	110
IV.7 - Estimation de la puissance électrique consommée	114
IV.8 - Conclusion.	116

96

IV.3 - Méthode de résolution numérique.

V - SIMULATION HYDRAULIQUE D'UN TUBE A CHOC	. 118
V.1 - Simulation hydraulique du tube à choc: écoulement instationnaire.	118
 V.1.1 - Dispositif expérimental V.1.2 - Onde de choc initiale. Temps de rafale V.1.3 - Formation de l'onde de choc secondaire en régime 	118 119
instationnaire	121
V.2 - Ecoulement en régime stationnaire	122
V.2.1 - Montage expérimental V.2.2 - Ondes de choc et blocage de tuyère	122 123
V.3 - Conclusion	127
CONCLUSION GENERALE	129
Annexe 1 : Modèle simplifié pour de l'argon une fois ionisé (d'après Norman [10])	133
Annexe 2 : Détermination des caractéristiques du plasma d'argon une ionisé obtenu en tube à choc (d'après Billiotte et Guénoche [14])	fois 137
Annexe 3 : Formulation de l'équation de l'énergie avec effets de gaz réc	els 139
Annexe 4 : Programme de calcul de l'écoulement interne dans une tuyère convergent en présence de forces de Laplace	141
Annexe 5 : Programme de calcul du champ électrique dans une tuyère convergente	153
Annexe 6 : <i>Superconducting subs : Twice as deadly, half the size</i> : extra Navy News , Eté 1987	uit de 160
BIBLIOGRAPHIE	162
Annexe 2 : Détermination des caractéristiques du plasma d'argon une ionisé obtenu en tube à choc (d'après Billiotte et Guénoche [14])	fois

LISTE DES SYMBOLES

Alphabet latin

1

I

K

```
= (1+Z_t)/(\gamma-1): paramètre de gaz réel
Α
     vitesse locale du son
     induction magnétique
В
b<sub>90</sub> paramètre d'inpact
C_{\mathbf{S}}
     vitesse associée à la particule "s"
     chaleur spécifique à pression constante
C_{\mathbf{p}}
C_{\mathbf{v}}
     chaleur spécifique à volume constant
Б
     champ électrostatique appliqué au plasma
E*
     = E + VxB : champ électrique vu par les électrons
Ei
     énergie d'ionisation
     = 1.6021 10<sup>-19</sup> C : charge élémentaire de l'électron
e
     énergie interne
е
     = JxB: champ de force de Laplace
F
     = ]B/pV<sup>2</sup>: terme rendant compte de l'action du champ de force
Ŧ
fs.
     fonction de distribution des vitesses de la population "s"
     poids statistique
G
Η
     variable thermodynamique quelconque
h
     enthalpie
     = 6.6262 \ 10^{-34} \ J.s: constante de Plank
h
     hauteur du profil
h
```

= J²/σpV²A : terme rendant compte de l'effet Joule

vecteur densité de courant

= E/V B: facteur de charge

```
coordonnée épicicloidale associée à la direction n
μ
     = 4 \pi 10^{-7} H/m : perméabilité magnétique du vide
\mu_0
     mobilité électronique
μe
٧
     fréquence de collision
      masse volumique
ρ
     conductivité électrique scalaire
\sigma_0
     temps de rafale utile
τ
θ
     angle compris entre le champ électrique et le vecteur densité de
     courant
Indices
   caractérise les atomes
                 les électrons
е
i
                 les ions
                 les neutres
n
                 le gaz
g
                 une population de particules "s"
S
\Delta H
                 les variations de la variable thermodynamique H
G,H,I,H,N,W,O caractérisent des points de l'écoulement
                 des indices de maillage
i,j
<u></u>ξ
                 la composante perpendiculaire à l'axe &
                 la composante perpendiculaire à l'axe n
\pm \eta
1
                 l'état du gaz avant le passage de l'onde de choc initiale
2
                 l'état du gaz après le passage de l'onde de choc initiale
```

LISTE DES FIGURES

N°	Titre	page
1	Visualisation des surfaces caractéristiques : ondes de Mach.	1
2	Tracé des ondes de Mach : réseau des caractéristiques	2
3	Les caractéristiques : enveloppes des perturbations sonores.	2
4	Résultat du calcul du champ de caractéristiques d'un écoulement supersonique dans un convergent	3
5	Résultat du calcul du champ de caractéristiques d'un écoulement supersonique autour d'un profil lenticulaire.	3
6	Déferlement des caractéristiques dans une région convergente.	4
7	Champ des caractéristiques dans une tuyère à section constante, en l'absence de forces de volume.	6
8	Schéma d'un accélérateur linéaire de Faraday.	6
9	Effet de l'accélération du gaz par le JxB sur les caractéristiques.	7
10	Effet de la décélération du gaz par le JxB sur les caractéristiques.	7
11	Les différents types d'ondes de choc.	10
12	Représentation schématique d'un tube à choc.	14
13	Diagramme x-t d'un tube à choc.	16
14	Evolution de y et de "A" dans l'argon sous une pression de 1 bar en fonction de la température.	19
15	Représentation des champs dans une configuration unidimensionnelle.	28
16	Action du champ magnétique sur la direction de la densité de courant.	33
17	Allure de la densité de courant au voisinage d'une électrode	
9	Effet de l'accélération du gaz par le JxB sur les caractéristiques.	7

N°	Titre	page
18	Tuyère disque de convertion MHD à effet Hall fort [20].	34
19	Ecoulement normal autour d'un obstacle émoussé cylindrique.	44
20	Disparition du sillage turbulent par l'action du champ de force JxB.	45
21	Disparition de la vague d'étrave par l'action du champ de force JxB.	45
22	Allure du champ de force autour du cylindre.	46
23	Allure du champ de caractéristiques autour du cylindre.	47
24	Orientation des champs croisés en régime bidimensionnel stationnaire.	52
25	Différents repères de projections.	53
26	Orientation du vecteur densité de courant en régime quasi-unidimensionnel stationnaire avec et sans effet Joule.	57
27	Parallèlisme des caractéristiques issues d'un convergent infinitésimal.	60
28	$f(B) = B^2 / (1 + \beta^2)$	64
29	Montage expériental de suppression d'onde de choc pour soufflerie à rafale.	67
30	Redressement des caractéristiques autour d'un profil de faible épaisseur relative.	68
31	Allure des lignes de courant et du champ de force dans un écoulement convergent-divergent à pression constante.	73
32	Allure des lignes de courant et du champ de force dans un écoulement circulaire à pression constante.	74
33	Circuit d'alimentation des électrodes en montage générateur de courant.	77
34	Différents repères de projection et projection du champ de force.	87
35	Critère de suppression des ondes de choc.	90
36	Graphe du mode de résolution numérique pour un point courant.	97
29	Montage expériental de suppression d'onde de choc pour soufflerie à rafale.	67
30	Redressement des caractéristiques autour d'un profil de faible	

N°	Titre	page
52	Simulation hydraulique. Rafale	121
53	Simulation hydraulique. Arrivée de la rafale dans le convergent. Formation de l'onde de choc secondaire	121
54	Simulation hydraulique. Onde de choc secondaire pleinement développée.	122
55	Montage expérimental en régime stationnaire.	123
56	Simulation hydraulique. Convergent symétrique. Débit faible: Mach = 1.3.	124
57	Simulation hydraulique. Convergent symétrique. Débit moyen: Mach = 1.7.	124
58	Simulation hydraulique. Convergent symétrique. Débit fort : Mach = 1.9.	124
58	Simulation hydraulique. Convergent simple. Simulation hydraulique. Convergent symétrique. Débit fort : Mach = 1.9.	124
59	Simulation hydraulique. Convergent simple. Débit moyen : Mach = 1.7.	125
60	Simulation hydraulique. Convergent simple. Débit fort : Mach = 1.9.	125
61	Simulation hydraulique. Convergent symétrique: blocage de tuyère . Débit faible.	126
62	Simulation hydraulique. Convergent symétrique: blocage de tuyère . Débit moyen.	126
63	Simulation hydraulique. Convergent simple: blocage de tuyère . Débit faible	126
64	Simulation hydraulique. Convergent simple: blocage de tuyère . Débit moyen.	127

INTRODUCTION

INTRODUCTION

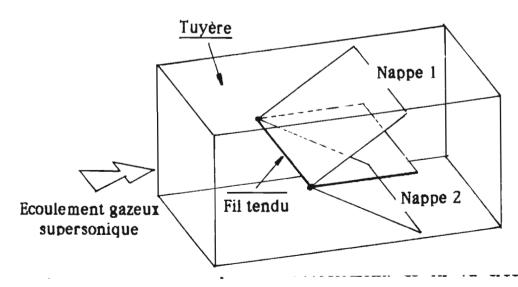
L'étude théorique faisant l'objet de ce mémoire concerne la suppression des ondes de choc dans les écoulements supersoniques à l'aide de forces de Laplace.

Position générale du problème.

Présentation des ondes de choc.

Les équations de la mécanique des fluides permettent de déterminer l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle immergé dans celui-ci. Ces équations différentielles forment un système qui peut être abordé par la méthode générale des caractéristiques. Lorsque l'écoulement est supersonique ces caractéristiques sont réelles.

Au point de vue physique, ces caractéristiques ont une signification très claire. Considérons un écoulement bidimensionnel plan et tendons un fil très fin perpendiculairement au plan de l'écoulement. Ce fil va créer une perturbation de pression infinitésimale qui se propagera et se localisera selon deux nappes (ondes de Mach) faisant avec le vecteur vitesse un angle α , dit angle de Mach.



perturbation de pression infinitésimale qui se propagera et se localisera selon deux nappes (ondes de Mach) faisant avec le vecteur vitesse un angle α , dit angle de Mach.

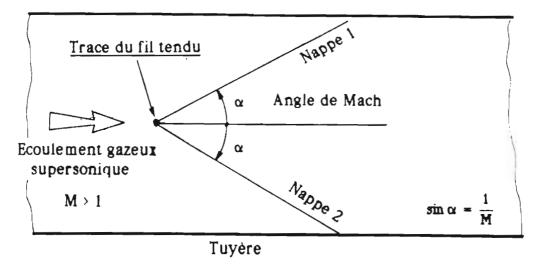


Figure 2 : Tracé des ondes de Mach : réseau des caractéristiques.

Les surfaces caractéristiques sont également les enveloppes des perturbations sonores, lesquelles se propagent à la vitesse du son "a".

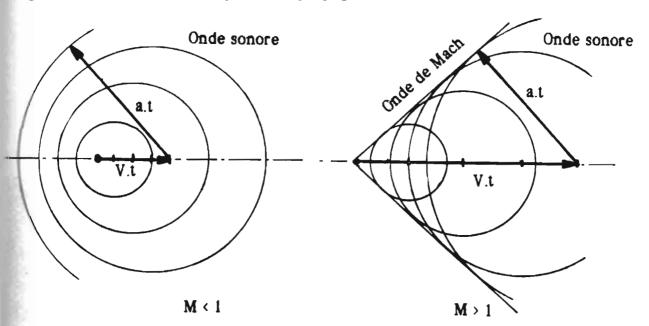
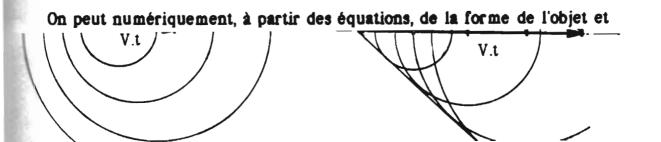


Figure 3: Les caractéristiques: enveloppes des perturbations sonores.

On introduit ainsi le nombre de Mach et l'angle de Mach tels que :

$$M = \frac{\nabla}{a}$$
 et $\sin \alpha = \frac{1}{M}$ (1) et (2)



Les figures suivantes montrent le champ des caractéristiques obtenu par calcul numérique. On constate que, dans une tuyère convergente (Fig. 4) et autour d'un profil mince (Fig. 5), les caractéristiques d'une même famille se recoupent.

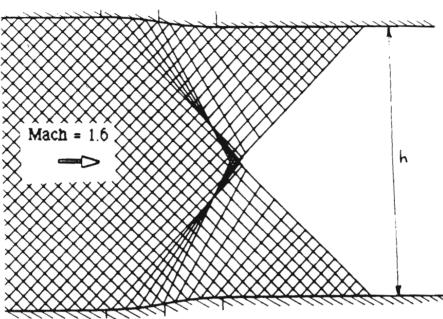
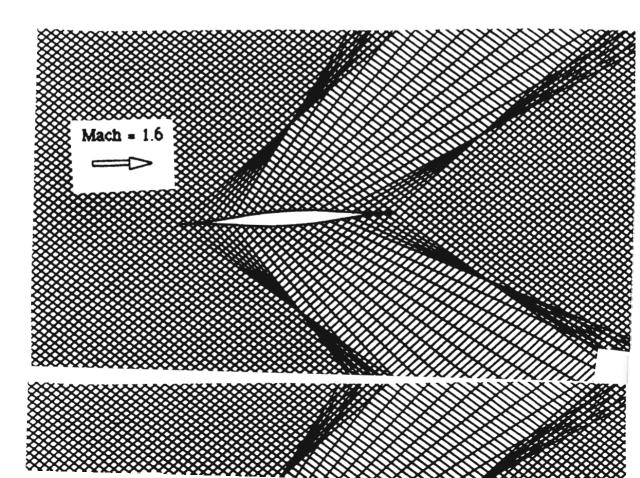


Figure 4 : Résultat du calcul du champ de caractéristiques d'un écoulement supersonique dans un convergent.



Ces solutions n'ont pas de réalité physique. En effet, l'accumulation d'ondes caractéristiques est synonyme d'accumulation de perturbations de pression. En mécanique des fluides ceci va se traduire par la naissance d'un front d'onde appelé onde de choc. Il s'agit d'une catastrophe de type fronce.

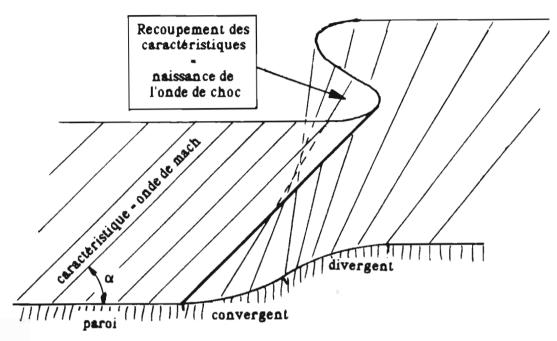


Figure 6 : Déferlement des caractéristiques dans une région convergente.

L'onde de choc est une discontinuité dans l'écoulement. Sur une distance très faible, de l'ordre de quelques libres parcours moyens moléculaires, les paramètres macroscopiques (intensité et direction de la vitesse, température, pression, masse volumique) changent brutalement.

Inconvénients liés à la présence d'ondes de choc.

La présence d'ondes de choc et d'éventails de détente autour d'un objet modifie profondément la distribution de la pression à la paroi, ce qui produit très faible, de l'ordre de quelques libres parcours moyens moléculaires, les paramètres macroscopiques (intensité et direction de la vitesse, température, pression, masse volumique) changent brutalement.

Inconvénients liés à la présence d'ondes de choc.

La présence d'ondes de choc et d'éventails de détente autour d'un obiet

la locomotion aérienne. L'accroissement de la trainée d'onde et du flux de chaleur sur les bords d'attaque des machines volantes limitent les possibilités d'évolution en basse altitude à un nombre de Mach voisin de l'unité.

Les avions dits supersoniques évoluent à des nombres de Mach atteignant mach 2,5 à des altitudes importantes. Dans ces régions l'abaissement de la densité de l'air diminue le flux de chaleur, la trainée d'onde et les contraintes mécaniques affectant la structure.

Une évolution en haut supersonique ou en hypersonique en air dense impliquerait un refroidissement ablatif extrêmement intense, ou une réfrigération par circulation d'hélium liquide. La négociation de la trainée d'onde nécessiterait un propulseur très important.

Il existe une similitude très étroite entre les ondes sonores, les ondes de choc et les mécanismes ondulatoires dans les écoulements à surface libre (analogie hydraulique). Les rides de surface sont les analogues des ondes sonores tandis que les ondes de choc sont comparables aux vagues déferlantes.

Quand un navire fend la mer, la turbulence crée une dissipation localisée de l'énergie dans son sillage, alors que ses vagues déferlantes d'étrave et de poupe peuvent transporter l'énergie à plusieurs kilomètres.

Dans un contexte de mécanique des fluides classique tous ces aspects ont semblé jusqu'ici inéluctables. La motivation initiale du travail qui va suivre a été de voir si que le phénomène onde de choc pouvait être tout simplement évité.

Suppression des ondes de choc à l'aide d'un champ de force de Laplace.

La naissance d'une onde de choc découle donc du recoupement des caractéristiques. Peut-on agir sur la géométrie de ces caractéristiques pour empêcher leur accumulation et ainsi empêcher la formation des ondes de choc?

L'action de forces de volume JxB ou forces de Laplace modifie la géométrie des caractéristiques d'un écoulement. Considérons par exemple un poupe peuvent transporter l'énergie à plusieurs kilomètres.

Dans un contexte de mécanique des fluides classique tous ces aspects ont semblé jusqu'ici inéluctables. La motivation initiale du travail qui ve aujure a

parallèles et le champ d'ondes de Mach est uniforme.

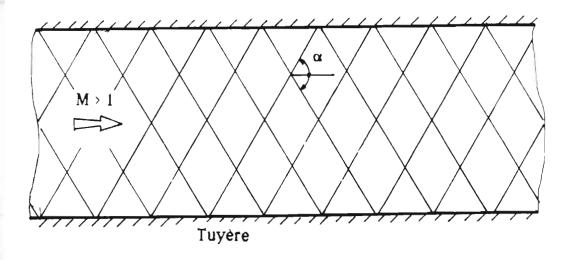


Figure 7: Champ des caractéristiques dans une tuyère à section constante, en l'absence de forces de volume.

On peut à volonté accélérer ou ralentir ce fluide à l'aide de forces de Laplace JxB. Pour ce faire on créera un champ magnétique et une décharge de courants transverses, correspondant au schéma de la figure 8.

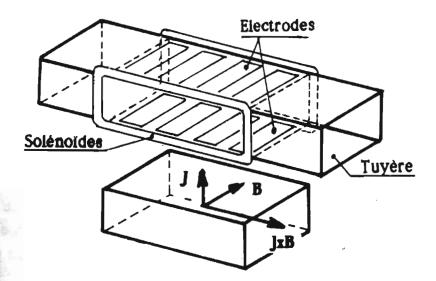
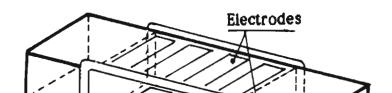


Figure 8 : Schéma d'un accélérateur linéaire de Faraday.



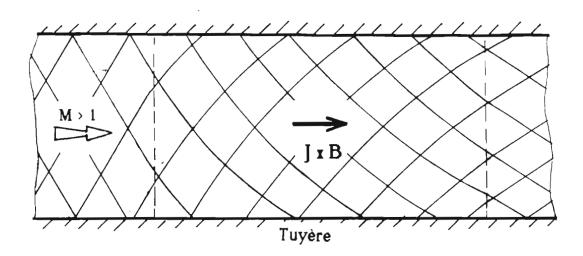


Figure 9 : Effet de l'accélération du gaz par le JxB sur les caractéristiques. 1

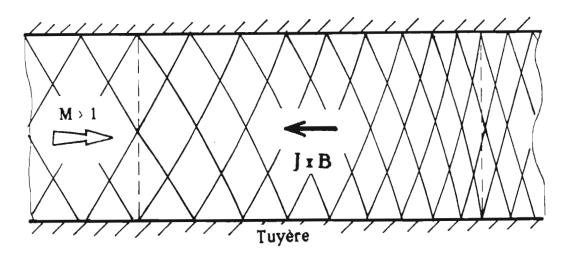


Figure 10 : Effet de la décélération du gaz par le JxB sur les caractéristiques.

C'est cette action des forces de Laplace sur la géométrie des caractéristiques que nous utiliserons systématiquement pour rechercher l'annihilation totale des ondes de choc dans une tuyère et autour d'un profil mince.

Tuyère

¹ En fait, pour être plus précis, il faudrait tenir compte du fait que la variation du dessin des caractéristiques (qui ici découle directement du

Cadre théorique.

En 1984 et 1987, deux recherches bibliographiques sur banques de données internationales ont permis de compulser un grand nombre de publications récentes, sans résultats. Les ondes de choc apparaissent comme un phénomène tantôt avantageux, tantôt génant, mais toujours obligatoire.

On peut citer pour mémoire les tentavives faites dans les années 60 pour modifier la forme des ondes de choc se formant devant les ogives lors de leur entrée dans l'atmosphère [1]. Il s'agissait, à l'aide d'un champ magnétique et du courant induit créé, d'uniformiser les conditions au point d'arrêt et de ralentir l'ogive. Ces recherches qui ne portaient pas sur la suppression des ondes de choc mais sur leur modification, ont été abandonnées car la qualité des manteaux protecteurs était devenue suffisante pour encaisser le choc thermique.

L'étude de l'interaction entre un écoulement supersonique et un champ croisé nécessite la compréhention d'un grand nombre de phénomènes liés à différents domaines de la physique:

- la mécanique des fluides, et la thermodynamique : analyse des écoulements supersoniques et de la formation des ondes de choc. La présente étude est principalement axée sur ce domaine;
- l'électromagnétisme : étude du champ croisé JxB et de son interaction avec l'écoulement;
- la physique des plasmas : la nécessité de faire passer un courant électrique de forte intensité dans un gaz conduit à l'utilisation de gaz ionisés, relativement froids et denses.

L'étude générale d'une application concrète de suppression des ondes de choc n'est pas encore envisageable, étant donné l'état d'avancement de nos concretant par l'entre d'un est principalement avée sur ce domaine;

- l'électromagnétisme : étude du champ croisé JxB et de son interaction avec l'écoulement;
 - la physique des plasmas : la nécessité de faire passer un courant

Nombre de Reynolds magnétique faible.

Concernant le travail présenté dans la thèse, nous nous en tiendrons à l'étude des écoulements supersoniques en interaction avec un champ croisé JxB à nombre de Reynolds magnétique faible c'est à dire Rm<1. Ce critère permet d'évaluer l'intensité du couplage entre le champ magnétique et l'écoulement: si Rm est élevé, les lignes de force du champ magnétique sont figées dans l'écoulement et se déforment avec lui, entrainant des contraintes magnétiques. Dans le cas contraire, le champ magnétique et l'écoulement sont découplés.

Cette hypothèse de travail apporte d'importantes simplifications au niveau des calculs théoriques. Elle est justifiée théoriquement et expérimentalement par les résultats des travaux réalisés par Fontaine [2] et Forestier [3] en tube à choc à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille (IMFM) dans les années 1970.

Obstacle effilé.

Par ailleurs, les études générales des écoulements supersoniques présentées par Carrière [4] ou par Courant et Friedrichs [5] suggèrent trois types d'obstacle auxquels sont associé trois types d'ondes de choc (Fig. 11):

- les ondes de choc attachées formées par un obstacle pariétal présentant une paroi à rayon de courbure constant;
- les ondes de choc attachées formées par un obstacle présentant un point d'arrêt singulier à rayon de courbure nulle: angle ou biseau;
- les ondes de choc détachées apparaissant devant les obstacles émoussés possédant un point d'arrêt à grand rayon de courbure.

Comme le montre la figure 11, l'obstacle émoussé crée ainsi une onde de choc localement assimilable à une onde de choc plane en amont du point d'arrêt, l'écoulement devenant subsonique en avail de celle-ci.

Pour expliquer ce phénomène, plaçons nous dans un référentiel lié au fluide. Un objet de ce type ne peut pas pénètrer dans un fluide au repos plus vite que la vitesse de propagation des ondes de pression: ce sont elles qui transportent l'énergie et modifient la distribution des lignes de courant au

- les ondes de choc attachées formées par un obstacle pariétal présentant une paroi à rayon de courbure constant;
- les ondes de choc attachées formées par un obstacle présentant un point d'arrêt singulier à rayon de courbure nulle: angle ou biseau;
 - les ondes de choc détachées apparaissant devant les obstacles

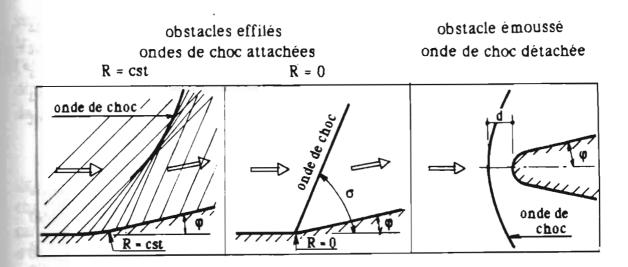


Figure 11 : Les différents types d'ondes de choc.

L'objet arrivant plus vite que la vitesse de propagation de ces ondes nombre de Mach M=V/a > 1), les particules n'auraient logiquement pas le temps de s'écarter avant son arrivée. L'onde de choc réalise alors une adaptation brutale des paramètres thermodynamiques du fluide: la température augmente, et la vitesse diminue de telle sorte que la vitesse de propagation des ondes de pression devient localement supérieure à la vitesse de l'obstacle (M<1).

Pour parvenir à supprimer l'onde de choc en amont d'un obstacle émoussé, il faudra que le champ de force réalise l'adaptation de l'écoulement en créant egalement une zone subsonique en amont de l'obstacle.

Ce mécanisme a été mis en évidence par Petit [6] à travers des expériences en analogie hydraulique autour d'un obstacle émoussé (cylindre) placé dans un écoulement d'eau salée. Cette expérience revêt un caractère fondamental à plusieurs points de vues. Ce fut une expérience de simulation cruciale, car elle permit d'envisager que les ondes de choc puissent être

Pour parvenir à supprimer l'onde de choc en amont d'un obstacle émoussé, il faudra que le champ de force réalise l'adaptation de l'écoulement en créant egalement une zone subsonique en amont de l'obstacle.

Ce mécanisme a été mis en évidence par Petit [6] à travers des expériences en analogie hydraulique autour d'un obstacle émoussé (cylindre) placé dans un écoulement d'eau salée. Cette expérience revêt un caractère fondamental à plusieurs points de vues. Ce fut une expérience de simulation

CHAPITRE I

ETUDE DE CONDITIONS D'INTERACTION MHD EXPERIMENTALEMENT REALISABLES

CHAPITRE I

ETUDE DE CONDITIONS D'INTERACTION MHD EXPERIMENTALEMENT REALISABLES

On utilise des souffleries, appelées tubes à choc, pour obtenir des écoulements supersoniques de gaz ionisé de brève durée. Ces écoulements sont obtenus par la propagation d'une onde de choc dite "onde de choc initiale", qui va jouer le rôle de l'onde d'amorçage de cette "soufflerie à onde de choc". Cette onde se propage dans un milieu basse pression (1 à 10 torrs) constitué ici d'argon. Dans les calculs théoriques envisagés, préfigurant une expérience, la rafale d'argon ionisée qui suit l'onde de choc initiale va être soumise, au niveau de la tuyère, à des variations de section entrainant des ondes de choc secondaires dans la rafale. Ce sont ces ondes de choc secondaires que le champ de force devra modifier et éventuellement supprimer.

Le tube à choc sert de support expérimental à l'étude théorique, et la compréhention des phénomènes liés à la formation des plasmas en tube à choc est donc indispensable. C'est là un des intérêts de cette analyse théorique: elle débouche de fait sur des critères permettant de guider le choix d'une expérimentation en tube à choc.

Ce chapitre est constitué de brefs rappels concernant le fonctionnement des tubes à choc, les caractéristiques des plasmas obtenus, et les différents phénomènes intervenant lors de l'interaction MHD.

I.1 - DESCRIPTION D'UN TUBE A CHOC

Le tube à choc est un dispositif permettant de créer des écoulements

Le tube à choc sert de support expérimental à l'étude théorique, et la compréhention des phénomènes liés à la formation des plasmas en tube à choc est donc indispensable. C'est là un des intérêts de cette analyse théorique: elle débouche de fait sur des critères permettant de guider le

l'électricité. Ceci permet d'éviter les problèmes majeurs des interactions MHD, liés à la très faible conductivité électrique des gaz froids. On peut ainsi utiliser des gaz rares monoatomiques, le plus souvent de l'argon, qui, en dépit de son énergie d'ionisation élevée (E_i=15.7 eV) permet d'obtenir des conductivités électriques de l'ordre de 3000 mhos/mètre (T=10000°K, p=1bar). Les phémonènes radiatifs restent modérés, et le calcul des paramètres du plasma sont simplifiés (conductivité, taux d'ionisation).

Une description schématique d'un tube à choc est proposée sur la figure 12.

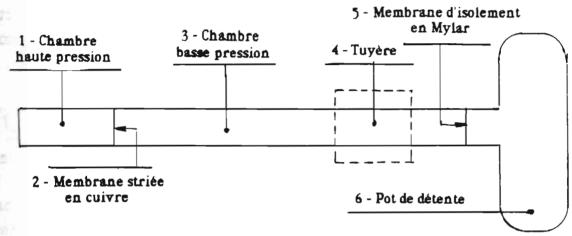


Figure 12: Représentation schématique d'un tube à choc.

Il est composé d'une chambre haute pression (1) qui contient soit un gaz léger sous pression (H₂ ou H_e), soit un mélange détonant, le plus souvent O₂ + 2 H₂ + 8 H_e. Dans ce cas, un ensemble de bougies est disposé hélicoïdalement sur le pourtour de la chambre afin d'assurer une combustion simultanée dans tout son volume.

Une membrane préstriée (2), généralement en cuivre de quelques millimètres d'épaisseur isole initialement la chambre haute pression de la chambre basse pression (3). Celle-ci contient le gaz d'essai (ici de l'argon) au repos sous une faible pression (de 1 à 10 torrs). Sa longueur et celle de la chambre haute pression sont ajustées de sorte que le temps de rafale du gaz d'essai soit maximum.

Cette chambre est prolongée par la tuyère d'essai [4] au piveau de 2 H₂ + 8 He. Dans ce cas, un ensemble de bougies est disposé hélicoïdalement sur le pourtour de la chambre afin d'assurer une combustion simultanée dans tout son volume.

Une membrane préstriée (2), généralement en cuivre de quelques millimètres d'épaisseur isole initialement la chambre haute pression de la

zone d'interaction. L'énergie électrique est fournie aux électrodes et aux bobines magnétiques par des batteries de condensateurs commandées par des ignitrons.

Une membrane en mylar (5) sépare la chambre haute pression du pot de détente (6) d'un volume d'une centaine de litres dans lequel un vide primaire est réalisé (0.1 à 0.01 torr). Ce pot est chargé d'absorber l'onde de choc initiale.

La longueur totale d'un tube à choc est en général d'une dixaine de mètres. La section du tube doit être suffisante pour éviter les problèmes de viscosité générant des effets de paroi (développement d'une couche limite).

Dans la chambre haute pression, on réalise une pression suffisante pour faire éclater la membrane striée soit par augmentation de la pression, soit par combustion du mélange. La rupture de cette membrane met alors brutalement en contact le milieu haute pression avec l'argon raréfié. Une onde de choc se développe très rapidement et va se propager dans la chambre basse pression. Au passage de cette onde de choc, le gaz d'essai acquiert une vitesse supersonique et une température élevée. Si le choc est suffisamment intense, il s'ionise. Puis l'écoulement de gaz ionisé propre est perturbé par l'arrivée des gaz de la haute pression qui se détendent. La durée de l'écoulement du gaz propre devant un point fixe est appelée temps de rafale.

Simultanément, une onde de détente se développe dans la chambre haute pression et va se réfléchir dans le fond de celle-ci. L'onde de détente se propageant plus rapidement que la surface de discontinuité, va très rapidement venir perturber l'écoulement. La longueur de la chambre haute pression détermine donc la longueur optimum du tube d'essai.

La figure 13 représente le diagramme x-t des processus se produisant dans un tube à choc.

Un ensemble d'appareils de mesure est disposé le long du tube à choc. Il s'agit de sondes de pression, de montages interférentiels permettant de mesurer les paramètres du plasma. Au niveau de la tuyère, la formation de perturbé par l'arrivée des gaz de la haute pression qui se détendent. La durée de l'écoulement du gaz propre devant un point fixe est appelée temps de rafale.

Simultanément une onde de détente se dévelonne dans la chambre haute

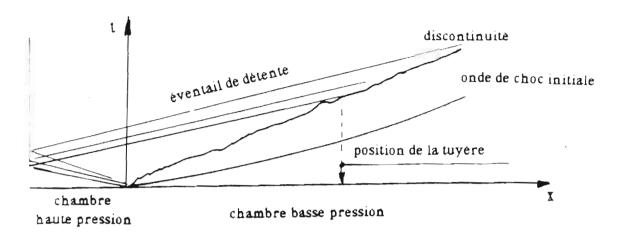


Figure 13: Diagramme x-t d'un tube à choc.

1.2 - DESCRIPTION SOMMAIRE DES CARACTERISTIQUES PRINCIPA-LES D'UN PLASMA.

1 2 1 - Définition d'un plasma.

Un gaz est composé de particules en mouvement. Si le gaz est à l'équilibre thermodynamique, l'énergie cinétique moyenne d'agitation est identique pour chaque espèce, et les fonctions de distribution de vitesses sont marwelliennes [9].

$$f_s = N_s \left(\frac{M_s}{2\pi k T_g}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{M_s c_s^2}{2k T_s}\right)$$
 (I.1)

ou c_s est la vitesse d'une particule d'espèce "s", N_s le nombre de ces particules par mètre cube, M_s leur masse atomique, T_s leur température absolue, et k la constante de Boltzmann. On définit ainsi l'énergie cinétique moyenne et la vitesse moyenne d'agitation:

$$\langle E_g \rangle = \frac{1}{N_g} \iiint E_g f_g du_g dv_g dv_g = \frac{1}{2} M_g \langle c_g^2 \rangle$$
 (1.2)

pour chaque espece, et les lonchons de distribution :

$$f_s = N_s \left(\frac{M_s}{2\pi k T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{M_s c_s^2}{2k T_s}\right)$$
 (I.1)

La vitesse d'agitation est ainsi définie en fonction de la température du gaz:

$$\langle c_{s} \rangle = \sqrt{\frac{8 k T_{s}}{\pi M_{s}}}$$
 (I.4)

La masse volumique est associée au nombre de particules par unité de volume:

$$\rho = \sum_{s} N_{s} M_{s} = \sum_{s} \rho_{s}$$
 (I.5)

La pression correspond à de la densité d'énergie. Dans cette optique, elle peut s'exprimer en Joules par unité de volume.

$$p = \sum_{s} N_{s} k T_{s} \tag{1.6}$$

A l'équilibre thermodynamique, les températures de toutes les espèces sont égales d'où:

$$p = \sum_{S} N_{S} kT = \rho RT \quad \text{avec} \quad R = k \frac{\sum_{S} N_{S}}{\sum_{S} N_{S} M_{S}}$$
 (I.7)

Pour l'argon ionisé, la masse des électrons est négligeable et on obtient R = 207.

L'énergie introduite dans un gaz, si elle est suffisament importante, va entrainer l'apparition de nouvelles espèces à partir des particules neutres: les ions et les electrons. L'équation de réaction s'écrit:

$$\mathbf{n} \iff \mathbf{i}^{+} + \mathbf{e}^{-} \tag{1.8}$$

$$p = \sum_{S} N_{S} kT = \rho RT \quad \text{avec} \quad R = k \frac{\sum_{S} N_{S}}{\sum_{S} N_{S} M_{S}}$$
 (1.7)

$$N = N_n + N_e + N_i = N_a + N_e = N_a (1 + \alpha) = ZN_a$$
 (I.9)

Entre les particules chargées, il existe un champ de force de nature electromagnétique (forces de Coulomb) à long rayon d'action (potentiel variant comme 1/r) qui donne aux plasmas leurs propriétés de conduction électrique et de sensibilité aux champs électriques et magnétiques.

Etant donné le rapport des masses importants, on peut considérer en première approximation que seuls les électrons sont mobiles dans le plasma. Les caractéristiques du plasma dépendront donc essentiellement de la température électronique, dans le cas d'un gaz bi-température.

I.2.2 - Les effets de gaz réels

Les variations de densité de chacune de ces espèces, obéissant à la loi de Le Chatelier, entrainent également des variations des propriétés thermodynamiques du gaz.

Les effets de gaz réels, par opposition aux gaz parfaits, proviennent essentiellement des variations du nombre de particules et de la redistribution de l'enthalpie en énergie interne et en énergie cinétique d'agitation: l'énergie interne d'ionisation et les états excités des particules neutres absorbent l'énergie cinétique des particules les plus rapides, entrainant une augmentation du nombre d'électrons libres et d'ions, et du même coup une modération de la montée en température du gaz. L'énergie introduite dans le plasma, par exemple par effet Joule, se distribue en energie calorifique, et en énergie d'ionisation. On observe également une diminution du rapport des chaleurs spécifiques qui rend compte de laugmentation des degrés de liberté sur lesquels l'énergie se répartie. Dans largon sous 1 bar, ces effets sont sensibles à partir de 8000°K, ce qui correspond également à la température limite au dessus de laquelle le plasma d'argon est coulombien.

Lanalyse des effets de gaz réels a été réalisé par Norman [10]dans le cas de l'argon. Il s'agit d'un modèle simplifié, dans lequel le gaz est supposé une rédistribution de l'énéralisé en l'énérgie interné et en enérgie cinétique d'agitation: l'énergie interne d'ionisation et les états excités des particules neutres absorbent l'énergie cinétique des particules les plus rapides, entrainant une augmentation du nombre d'électrons libres et d'ions, et du

15000°K et pour des pressions comprises entre 0.1 et 10 atmosphères.

L'évolution de γ en fonction de la température pour une pression de 1 Bar d'après Norman [9] est représentée sur la figure 14. Est représentée également l'évolution du facteur $A = (1+Z_t)/(\gamma-1)$ qui joue un rôle important dans la prise en compte des effets de gaz réels.

Tel qu'il apparait au \$ III.1.2, il détermine le rapport entre l'énergie. attribuée à l'ionisation et celle attribuée à l'agitation thermique lors de l'échauffement du plasma par l'effet Joule.

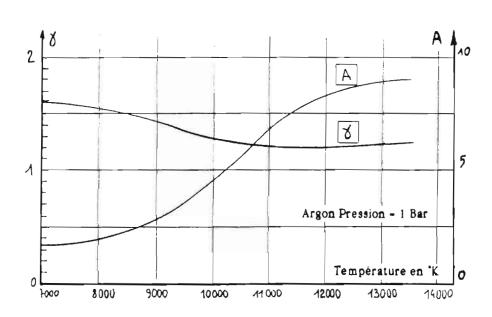


Figure 14 : Evolution de y et de A dans l'argon en fonction de la température sous une pression de 1 bar.

I.2.3 - Plasma collisisonnel et plasma collectif.

La longueur de Debye correspond à la distance sur laquelle l'énergie cinétique d'un électron lui permet de se déplacer librement dans le champélectrostatique créé par l'ensemble des ions. Un électron isolé a théoriquement un rayon d'action infini, et la section efficace de collision électron-ion (Qei) devrait également être infinie.

Dans un plasma neutre (pe-pi), la charge d'espace engendrée par la population ionique est statistiquement compensée par celle des électrons Mais localement l'électron est soumis à un effet d'écran électrostatique

mitant le rayon d'action de sa charge élementaire à la longueur de Debye :

$$Ld = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T}{N_e e^2}}$$
 (I.10)

👊 🗞 est la constante diélectrique du vide, et "e" la charge d'un électron.

Dans la pratique, la longueur de Debye est comparée au paramètre d'impact b₉₀, paramètre indépendant de la densité électrique. Il correspond à l'écartement entre les trajectoires de deux particules e-i en interaction entrainant une déflection de 90° de l'électron.

$$b_{90} = \frac{e^2}{4\pi \, \mathcal{E}_0 \, m_e < c_e^2}$$
 (1.11)

d'où:

$$\Lambda = \frac{Ld}{b_{90}} = \frac{12 \pi \ E_0^{3/2}}{e^3} \ \frac{(kT)^{3/2}}{N_e^{1/2}} = 1.27 \ 10^7 \ \frac{T^{3/2}}{N_e^{1/2}} \tag{I.12}$$

Quand le plasma est suffisamment dense et ionisé, A devient faible ce qui signifie que les électrons sont alors en interaction avec un grand nombre de charges simultanément. Le plasma a alors un comportement collectif qui est décrit par l'équation de Fokker-Plank.

Pour des valeurs importantes de A les interactions ne se produisent que entre deux particules à la fois. Le plasma est dit collisionnel

Cet aspect a été mis en évidence par Spitzer et Harm [11] et il est admis que si le rapport A est supérieur à 100, le plasma est considéré comme collectif, et pour des valeurs inférieures, il a un comportement collisionnel.

Quand le plasma est suffisamment dense et ionisé, A devient faible ce qui signifie que les électrons sont alors en interaction avec un grand nombre de

1.2.4 - Fréquence de collision.

Dans un plasma, les particules entrent périodiquement en collision. Ces interactions correspondent à un transfert de quantité de mouvement (grandeur vectorielle) et d'énergie cinétique (grandeur scalaire).

Dans un gaz en équilibre thermodynamique global, toutes les populations possèdent la même énergie cinétique moyenne. Les électrons étant beaucoup plus légers que les autres particules (pour l'argon Ma/Me = 7.3 104), on considère en première approximation qu'ils sont seuls en mouvement. Les particules lourdes sont alors fixes par rapport aux électrons. La fréquence de collision est définie par:

$$V_e = \langle c_e \rangle (N_n \langle Q_{en} \rangle + N_i \langle Q_{ei} \rangle)$$
 (1.13)

Pour un plasma une fois ionisé, le nombre d'ions est égal au nombre d'électrons, ce qui correspond, dans le cas de l'argon à une température inférieure à 15000 °K sous une pression de 1 bar.

La difficulté principale du calcul de la fréquence de collision réside dans l'estimation des sections efficaces de collision entre l'électron avec les autres particules. Pour les interactions coulombiennes, la longueur Debye donne une bonne estimation de la limite d'action du champ électrique autour de l'électron, et c'est la valeur de borne supérieure d'intégration couramment admise. La section efficace de collision e-i de l'argon une fois ionisée est alors décrite par:

$$Q_{ed} = \frac{\pi^3 \operatorname{Ln}(\Lambda)}{16} \left(\frac{e^2}{4\pi \, \mathcal{E}_0}\right)^2 \frac{1}{\left(kT\right)^2} = 5.4141 \, 10^{-10} \, \frac{\operatorname{Ln}(\Lambda)}{T^2} \tag{I.14}$$

La section efficace de collision entre les électrons et les atomes neutre d'argon a été déterminé par Dukowicz [12] qui en donne la formulation suivante:

$$Q_{em} = 9.612 \cdot 10^{-21} \left(\frac{T}{11600} \right)^{1.35}$$
 (I.15)

particules. Pour les interactions coulombiennes, la longueur de Debye donne une bonne estimation de la limite d'action du champ électrique autour de l'électron, et c'est la valeur de borne supérieure d'intégration couramment admise. La section efficace de collision e-i de l'argon une fois ionisée est alors

exprime l'équilibre de réaction au sein d'un plasma une fois ionisé (relation (1.8)). Le calcul des fonctions de partition associées à chaque mode d'énergie pour chacune des espèces conduit à l'expression suivante de la loi de Saha (18) p. 227):

$$\frac{N_e N_i}{N_n} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{2 G k T}{p} \left(\frac{2 \pi M_e k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_i}{kT} \right)$$
 (I.16)

 E_i est le potentiel d'ionisation de l'élément considéré ($E_i/k = 182900$ pour l'argon). "G" est le poids statistique. Il correspond à la dégénérescence des états d'énergie et vaut pour l'argon une fois ionisé:

$$G = 4 + 2 \exp(-\frac{2060}{T})$$
 (I.17)

Après évaluation des constantes, on obtient:

$$\frac{1}{\alpha^2} = 1 + \frac{p}{6.666 \cdot 10^{-2} \,\mathrm{G} \,\mathrm{T}^{5/2} \,\mathrm{exp}(-\frac{182900}{\mathrm{Te}})} \tag{I.18}$$

Le taux d'ionisation est ainsi exprimé en fonction de la température et de la pression qui sont les paramètres intervenant dans l'évaluation des écoulements de plasma.

La loi de Saha peut être étendue à une situation hors d'équilibre thermodynamique, à condition que les fonctions de distribution des différentes espèces soient encore suffisamment proches des formes maxwelliennes, avec $T_e = T_g$. Il s'agit d'un état d'équilibre thermodynamique local (quasi équililibre). Dans un plasma, pour que les électrons réalisent un tel état, il faut que leur nombre ainsi que leur énergie soient suffisants, et l'étude de validité faite par Daniel et Tamor [13] montre que ces conditions sont remplies pour:

$$\begin{array}{c}
T_e > 4000 \text{ K} \\
N_{e} > 10^{20} \text{ } / \text{m}^3 \\
\alpha^2 \qquad 6.666 \text{ } 10^{-2} \text{ G } \text{ } T^{5/2} \exp(-\frac{182900}{\text{Te}})
\end{array} \tag{I.18}$$

Quand un plasma est bi-température, c'est la température électronique qui détermine les caractéristiques du plasma.

I.2.5 -Plasma coulombien et non coulombien.

Les électrons en mouvement dans les plasmas collisionnels sont soumis à des interactions de deux sortes:

- les collisions entre particules chargées e-i ou e-e de type coulombiennes à long rayon d'action (Champ de force variant comme 1/r²);
- les collisions électron-neutre (e-n) de section efficace beaucoup plus faible, de l'ordre de la section de l'atome (1 barn = 10⁻²⁰ m²). En première approche, elles peuvent être schématisées par des forces évoluant comme 1/r⁵.

Un plasma est dit coulombien ou complètement ionisé si les interactions coulombiennes dominent, c'est à dire, en première approche, si la fréquence de collision e-i est plus élevée que la fréquence de collision e-n ($\mathbf{V_{e-n}} \leftrightarrow \mathbf{V_{e-i}}$).

De même, on dira que le plasma est partiellement ou faiblement ionisé si ces fréquences de collision sont du même ordre ou si $V_{e-n} \rightarrow V_{e-i}$.

Le critère de plasma coulombien est donné par:

$$\frac{\mathbf{V}_{e-i}}{\mathbf{V}_{e-n}} = \frac{\alpha}{\alpha \cdot 1} \frac{\langle \mathbf{Q}_{ei} \rangle}{\langle \mathbf{Q}_{en} \rangle} >> 1$$
(I.19)

soit:

$$\alpha \gg \frac{\langle Q_{en} \rangle}{\langle Q_{ei} \rangle + \langle Q_{en} \rangle} \tag{1.20}$$

($V_{e-n} \ll V_{e-i}$).

De même, on dira que le plasma est partiellement ou faiblement ionisé si ces fréquences de collision sont du même ordre ou si V_{e-n} » V_{e-i}.

1.3 - CARACTERISTIQUES D'UN ECOULEMENT DE PLASMA D'ARGON OBTENU EN TUBE A CHOC.

Au passage de l'onde de choc initiale, le gaz basse pression est fortement échauffé et l'écoulement devient supersonique. Cette modification d'état se produit en plusieures étapes.

Au passage de l'onde de choc, les particules du gaz subissent d'abord une impulsion longitudinale, puis, par le jeu des collisions, le gaz se thermalise. L'ionisation n'est pas encore développée et la température est très élevée.

Ce n'est qu'après un certain temps de relaxation que l'énergie cinétique d'agitation des particules lourdes est transformée en énergie d'ionisation et répartie sur les électrons. Ce temps de relaxation d'ionisation dépend des conditions tube à choc et varie de quelques microsecondes à quelques centaines de microsecondes.

L'ionisation se développe par excitations successives des atomes. Le plasma est enfin à l'équilibre thermodynamique.

Simultanément, et pendant toute la durée de la rafale, le gaz se désionise par recombinaison avec une émission radiative. Le bremstrahlung résultant de l'interaction des particules chargées produit également une émission radiative continue.

Cependant, en considérant les résultats des travaux expérimentaux [2] [3] [14] on peut admettre en première approximation que la densité électronique de même que les caractéristiques du plasma restent constantes dans la rafale une fois l'état d'équilibre atteint (en générale, variation de N_e de -20 à -30%), ce qui revient à négliger les pertes par rayonnement.

Le temps de rafale (T_r) mesuré par Fontaine [2] et Forestier [3] est de 150 microsecondes pour un temps de relaxation (t_r) de 30 microsecondes avec les conditions tubes à choc suivante: $M_{oc}=10.5$ p₁=5 torrs. Ils ont obtenu également $T_r=50$ microsecondes et $t_r=5$ micro-secondes pour $M_{oc}=16$ et p₁=1 torr.

Ce temps de rafale est suffisamment long pour permettre de réaliser une expérience de suppression de l'onde de choc secondaire, mais ne permettra radiative continue.

Cependant, en considérant les résultats des travaux expérimentaux [2] [3] [14] on peut admettre en première approximation que la densité

tube à choc ont été calculées en fonction de la température initiale de la chambre basse pression, et de la pression et la température après passage de l'onde de choc d'amorçage. Les détails de ces calculs sont présentés en Annexe 2. Les paramètres de l'écoulement de plasma derrière l'onde de choc sont calculées pour une pression de 1 bar:

M ₂	Mach écoul.	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Moc		9.4	10	10.5	11	11.7	12.2	12.6
ρ ₁ ρ ₁	bar x 10-3 kg/m ³ x10-3		7.9 13	7 12	6.2 10	5.5 9	4.9 8	4.3 7.2
T_2	° K	8200	8950	9500	10000	10450	10780	11100
V ₂	m/s	2240	2410	2575	2770	2990	3180	3390
ρ2	kg/m³	0.059	0.053	0.050	0.047	0.045	0.043	0.041
σ	Mhos/m	2085	25 4 0	2900	3245	3570	3810	4050
γ		1.50	1.38	1.31	1.27	1.24	1.23	1.22
٧e	/s x 10 ¹⁰	4.9	10.2	16.1	23	31	38	45
αi		0.0021	0.0061	0.012	0.020	0.032	0.044	0.058
Zŧ		0.026	0.070	0.13	0.21	0.31	0.41	0.48

Tableau 1 : Caractéristiques de l'écoulement en tube à choc : argon, $p_2 = 1$ bar

Pour des Mach d'écoulements inférieurs à 1.4, le plasma n'est pas coulombien.

ρ2	kg/m ³	0.059	0.053	0.050	0.047	0.045	0.043	0.041
п	Mhos/m	2085	2540	2900	3245	3570	3810	4050

I.4 - INTERACTION MHD.

En appliquant à l'écoulement de plasma un champ croisé formé d'un champ électrique E et d'un champ magnétique B transversal, les particules chargées sont soumises à deux types de force:

- <u>la force électrostatique</u> créée par le champ électrique : **F** = q **E** . La cathode émet alors des électrons qui sont ensuite accéléré par ce champ vers l'anode.
- la force électromagnétique de Laplace $\mathbf{F} = \mathbf{q} \ \mathbf{V} \mathbf{x} \mathbf{B}$. Celle-ci agit sur les électrons accélérés par le champ électrique et les dévie perpendiculairement à leur trajectoire. Le jeu des collision entraine alors la redistribution de cette énergie cinétique aux espèces lourdes se traduisant par une accélération de l'écoulement ($\mathbf{F} = \mathbf{J} \mathbf{x} \mathbf{B}$). La force de Laplace agit également sur les électrons transportés par l'écoulement de plasma. Il en résulte un champ électrique induit contre-électromoteur ($\mathbf{E}_{cem} = \mathbf{V} \mathbf{x} \mathbf{B}$).

Les principaux phénomènes observés lors de l'interaction MHD sont provoqués par l'énergie cinétique acquise par les électrons dans les divers champs de forces, et les modalités de la redistribution de cette énergie à la population des lourds.

Dans les conditions expérimentales envisagées, l'analyse de l'action du champ électrique $E^x = E + VxB$ sur les électrons fait ressortir principalement trois phénomènes :

- Les électrons accélérés par le champ électrique rentrent périodiquement en collision avec les particules lourdes. Ces collisions successives freinent le passage des électrons et introduisent une résistance électrique, d'où découle la résistivité et la conductivité électrique du plasma.
- Lors des collisions, les électrons transmettent un peu de leur énergie cinétique acquise dans le champ E^{*} à la population des lourds. Cela amène une augmentation de la température du gaz, dépendant de l'intensité du population des lourds.

Dans les conditions expérimentales envisagées, l'analyse de l'action du champ électrique $E^x = E + VxB$ sur les électrons fait ressortir principalement trois phénomènes :

proportionnel au rapport des masses des deux particules en interaction. Ce rapport étant très faible $(M_e/M_s=1.36\ 10^{-5})$, les électrons ne vont redistribuer à la population des lourds que peu de l'énergie cinétique qu'ils ont acquis dans les champs de force, et leur température va augmenter indépendamment de celle du gaz.

La densité et la fréquence de collision des électrons, dépendant de la température électronique, va corrélativement augmenter, et ceci jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre entre l'énergie acquise et celle redistribuée par les électrons. Par contre, les collisions e-e assurent une répartition maxwellienne de la fonction de distribution électronique, conférent au gaz d'électrons un état d'équilibre thermodynamique local. Le plasma est alors dans un état hors d'équilibre thermodynamique $(T_e z T_g)$

En ce qui concerne l'action du champ magnétique, on observe un phénomène secondaire consécutif à l'enroulement des électrons dans les lignes de force de ce champ: les électrons émis par la cathode ont, entre chaque collision, une trajectoire circulaire de telle sorte que le vecteur lié à la densité de courant J n'est plus collinéaire au champ électrique E^x. Il s'agit de <u>l'effet Hall</u>.

Ces quatres phénomènes (conductivité, effet Joule, hors équilibre et effet Hall), ainsi que le nombre de Reynolds magnétique, vont maintenant être analysés plus en détail,

I.4.1 - Conductivité électrique scalaire du plasma.

La densité de courant électrique correspond à un transfert de charges électriques et est déterminée à partir de la relation générale:

$$J = \sum_{s} N_{s} Z_{s} \Psi_{s}$$
 (I.21)

où V_s est la vitesse acquise par les particules dans le champ électrique et Z_s

Ces quatres phénomènes (conductivité, effet Joule, hors équilibre et effet Hall), ainsi que le nombre de Reynolds magnétique, vont maintenant être analysés plus en détail, .

$$J = -e N_e \nabla_e$$
 (1.22)

D'autre part, la loi d'Ohm s'écrit:

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \left(\mathbf{E} + \mathbf{V} \mathbf{x} \mathbf{B} \right) = \sigma_0 \mathbf{E}^+ \tag{1.23}$$

Dans la configuration de la figure 15, elle s'exprime par:

$$J = \sigma_0 (E - VB) = \sigma_0 VB (K-1)$$
 (I.24)

où le coefficient K = E/VB est, par définition, le facteur de charge. Il est supérieur à l'unité pour une accélération et inférieur à l'unité dans le cas de la conversion.

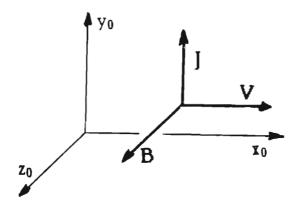


Figure 15 : Représentation des champs dans une configuration unidimensionnelle.

Il en résulte que:

$$\sigma_{0} = \frac{N_{e} e^{2}}{M_{e} V_{e}}$$
(1.25)

Figure 15 : Représentation des champs dans une configuration unidimensionnelle.

Il en réquite que

$$\sigma_0 = \frac{(4\pi \, E_0)^2 \, (2k \, T_e)^{3/2}}{\pi^{5/2} \, M_e \, e^2 \, Ln \, (\Lambda)} = 2.83 \, 10^{-2} \, \frac{T_e^{3/2}}{Ln \, (\Lambda)}$$
 (I.26)

Par ailleurs, Spitzer et Harm [11] proposent une relation dans laquelle ils considèrent la fréquence collision e-e comme étant proportionnelle à la fréquence de collision e-i. Ils obtiennent:

$$\sigma_{SH} = 0.582 \ \sigma_{0} = 1.51 \ \frac{T_{e}^{3/2}}{Ln(\Lambda)}$$
 (1.27)

Ces relations ne sont valables que pour un plasma complètement ionisé, pour lequel la conductivité varie pratiquement linéairement en fonction de la température. Par contre, il est à noter que pour les plasmas faiblement ionisés, la conductivité varie de façon exponentielle en fonction de la température [16] [17].

I.4.2 - L'effet joule.

L'effet Joule résulte des collisions entre les électrons et les particules lourdes qui entrainent un échauffement du gaz et une baisse du rendement de l'interaction MHD.

Dans une formulation unidimensionnelle, la puissance dissipée par effet Joule est exprimée par:

$$P_{J} = J. E^{a} = \frac{J^{2}}{\sigma_{0}} = \sigma_{0} E^{a^{2}}$$
 (1.28)

En première approximation, on peut considérer que l'augmentation de température se produit à volume constant dans la tuyère ce qui correspond à un ΔT maximum. La variation de quantité de chaleur est alors de:

L'effet Joule résulte des collisions entre les électrons et les particules lourdes qui entrainent un échauffement du gaz et une baisse du rendement de l'interaction MHD.

Dans une formulation unidimensionnelle, la puissance dissipée par effet Joule est exprimée par: tuyère et V la vitesse de l'écoulement, les relations (I.28) et (I.29) conduisent

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{J^2 L}{\sigma_0 \rho \, \forall \, C_{\star} T} \tag{I.30}$$

D'autre part, le rendement énergétique est donné par:

$$\eta = \frac{JVB}{JVB + \frac{J^2}{\sigma_0}} \tag{I.31}$$

On constate que l'accroissement de B entraine une montée du rendement, ce qui conduit à envisager des interactions à champ magnétique élevé donc à effet Hall fort.

Des conditions expérimentales mises en œuvre par Fontaine [2] et Fortestier [3] étaient les suivantes:

P = 1 bar T = 10000 °K V = 2500 m/s ρ = 0.05 kg/m³ σ = 3000 mhos/m γ = 1.275 => C_V = 756 J/kg °K B = 1 tesla J = 106 A/m²

En considérant une longueur d'interaction L égale à 0.1 mètre, l'augmentation de température est de :

$$\frac{\Delta T}{T} = 0.035$$

 $\rho = 0.05 \text{ kg/m}^3$ $\sigma = 3000 \text{ mhos/m}$ $\gamma = 1.275 \implies C_v = 756 \text{ J/kg *K}$ B = 1 tesia $J = 106 \text{ A/m}^2$ Le rendement très élevé de l'interaction et la faible augmentation de température provoquée par l'effet Joule justifient le fait que ce dernier soit négligé dans les développements théoriques.

I.4.3 - L'effet d'hors équilibre thermodynamique:

Les électrons sont accélérés par le champ électrique E* dans une direction préférentielle. Cependant à chaque collision, on peut admettre que la quantité de mouvement des électrons soit statistiquement redistribuée dans toutes les directions. Le temps caractéristique de retour à une distribution maxwellienne des vitesses de la population électronique est de l'ordre de l'inverse de la fréquence de collision.

Par contre, le transfert d'énergie est proportionnel au rapport des masses entre les particules en interaction. Ce rapport étant très faible $(2M_c/M_a=2,77\ 10^{-5})$, les électrons vont céder peu d'énergie aux lourds et leur température va s'élever jusqu'à ce que s'établisse un équilibre entre l'énergie acquise par les électrons dans le champ électrique et l'énergie perdue lors des collisions. Cet équilibre énergétique s'écrit :

$$\frac{J^2}{\sigma} = \frac{3}{2} N_e k (T_e - T_g) \sum_s \frac{2 M_e}{M_s} V_{es} \delta_s$$
 (1.32)

Le paramètre δ_3 rend compte des pertes par rayonnement dues aux collisions inélastiques. L'argon étant monoatomique, ce paramètre est de l'ordre de l'unité. Par contre, pour le gaz carbonique, il prend des valeurs très élevées de l'ordre de 3000. Il est alors possible, pour minimiser un état d'hors équilibre indésirable, d'introduire dans le gaz d'essai une faible proportion de dioxyde de carbone.

perque ioi s des comologe.

$$\frac{J^2}{\sigma} = \frac{3}{2} N_e k (T_e - T_g) \sum_{s} \frac{2 M_e}{M_s} V_{es} \delta_s$$
 (I.32)

conductivité ne permet pas de réaliser des régimes de conversion avec un rendement acceptable. On peut par contre envisager un fonctionnement hors d'équilibre en régime coulombien.

Ce saut d'état, mis en évidence expérimentalement par Petit [18] dans des expériences de conversion MHD permet d'éviter dans certaines conditions l'instabilité d'ionisation qui apparaît normalement quand un plasma bitempérature est soumis à un fort champ magnétique. Ce phénomène d'instabilité découvert par Velikhov [19] a bloqué les progrès sur la conversion MHD depuis environ 20 ans.

I.4.4-L'effet Hall.

L'effet Hall se manifeste quand un champ magnétique important est appliqué au plasma. Il est caractérisé par le rapport de la fréquence cyclotronique sur la fréquence de collision.

$$\beta = \frac{e B}{M_e V_e} = \mu_e B \tag{I.33}$$

où µe représente la mobilité électronique.

La loi d'Ohm s'exprime alors avec une conductivité tensorielle et doit être considérée à travers une formulation bidimensionnelle:

$$= J = \sigma (E + \nabla x B)$$
 (I.34)

avec.

$$\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\sigma_0}{1+\beta^2} \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{vmatrix}$$
 (I.35)

La direction de la densité de courant forme par rapport à la direction du où µe représente la mobilité électronique.

La loi d'Ohm s'exprime alors avec une conductivité tensorielle et doit être

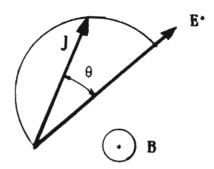


Figure 16 : Action du champ magnétique sur la direction de la densité de courant.

Il en résulte une déformation du potentiel électrique qui entraine une forte intensité de courant à l'une des extrémités des électrodes. ([8] p.366):

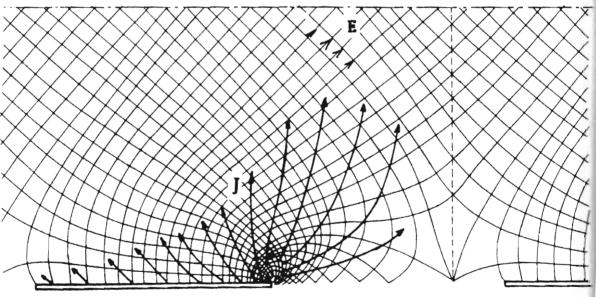
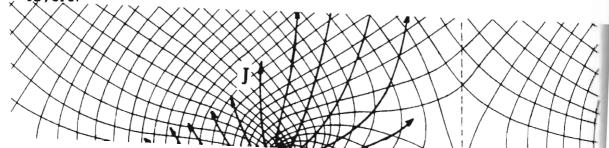


Figure 17 : Allure de la densité de courant au voisinage d'une électrode dans le cas d'un effet Hall fort $(\beta = 1)$.

L'utilisation d'électrodes segmentées permet alors d'obtenir une répartition homogène du champ électrique dans toute la longueur de la tuyère.



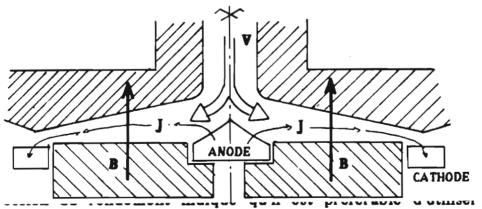
Par ailleurs, quand celui-ci a une action indésirable, il est possible d'en minimiser l'importance par adjonction dans le gaz d'essai d'un certain pourcentage d'un gaz rare à plus bas potentiel d'ionisation, par exemple du rénon ($E_i = 12 \text{ eV}$) et de masse volumique 5.86 kg/m³, au lieu de 1.78 kg/m³ pour l'argon. Pour une température de 10000 $^{\circ}$ K sous 1 bar, le rénon a un taux d'ionisation de 0.17, contre 0.02 pour l'argon, ce qui permet d'augmenter la densité électronique ainsi que la fréquence de collision e-i.

Avec un mélange à 80% d'argon et 20% de xénon, le paramètre de Hall est ramené à 0.4 pour un champ magnétique de 1 tesla, au lieu de 1 avec de l'argon pur. La masse volumique du gaz d'essai est alors augmentée d'un facteur 1.5, ce qui nécessiterait un J d'autant plus intense entrainant une légère situation d'hors équilibre du plasma. Ceci est également favorable à l'abaissement du paramètre de Hall.

Dans des conditions entrainant un effet Hall non négligeable, les pertes ohmiques sont exprimées par:

$$P_{J} = J \cdot E^{+} = \frac{\sigma_{0} E^{+^{2}}}{1 + \beta^{2}} = \frac{J^{2}}{\sigma_{0}}$$
 (I.36)

L'expression du rendement indique qu'il est préférable d'utiliser des champs magnétiques les plus intenses possible. De ce fait, les recherches en conversion MHD se sont orientées vers des tuyères à effet Hall fort [20] [21]. Ce sont des tuyères disques à symétrie de révolution.



champs magnétiques les plus intenses possible. De ce fait, les recherches en conversion MHD se sont orientées vers des tuyères à effet Hall fort [20] [21]. Ce sont des tuyères disques à symétrie de révolution.

Il est fort probable que les recherches sur la suppression des ondes de choc vont être amenées à s'orienter vers de telles géométries d'accélérateurs, du fait de l'utilisation de champs magnétiques de plus en plus importants. Cet accroisement des champs magnétiques va par ailleurs se trouver favorisé par l'apparition de supra-conducteurs à température relativement élevée, et d'un coût de mise en œuvre très accessible.

I.4.5-Le nombre de Reynolds magnétique.

Le nombre de Reynolds magnétique est introduit par l'analyse dimensionnelle de l'équation de Maxwell:

$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{1.37}$$

qui donne:

$$Rm = \frac{\Delta B}{B} = \frac{\mu_0 J L}{B} \tag{I.38}$$

La forme classique de ce paramètre est obtenu pour un facteur de charge nul c'est à dire quand $J = -\sigma V B$.

Lorsque K n'est pas nul, comme dans notre cas, on obtient:

$$Rm = \mu_0 \sigma \nabla L(K-1) \tag{I.39}$$

Avec une longueur d'interaction L de 0.1 mètre, les valeurs numériques proposées au § 1.5.2 conduisent à Rm = 0.12. Cette valeur est faible devant l'unité et justifie l'hypothèse du découplage entre le champ magnétique et l'écoulement.

ani doman

CHAPITRE II

EQUATIONS GENERALES ET ANALYSE DES TRAVAUX ANTERIEURS

HISBUT.

CHAPITRE II

EQUATIONS GENERALES ET ANALYSE DE TRAVAUX ANTERIEURS

L'étude des phénomènes liés à la MHD dans les gaz fait intervenir un très grand nombre de paramètres qui sont liés à l'électromagnétisme, à la mécanique des fluides, et à la physique des gaz ionisés. Il est très difficile d'analyser ces phénomènes à partir des équations générales, et des solutions ne peuvent être proposées que moyennant de nombreuses approximations justifiées.

Dans ce chapitre, les équations générales de la MHD sont présentées. Ce sont principalement les équations de conservation et les équations de Maxwell.

Les caractéristiques principales des plasmas et les conditions d'interaction MHD, présentées au chapitre précédent, permettent de situer le cadre de l'étude et d'appliquer les simplifications nécessaires correspondant au cas analysé.

Sur la base de ces équations générales, l'étude en régime quasiunidimensionnel stationnaire pour un gaz parfait, développée par Sutton [8], est présentée à travers les hypothèses simplificatrices quelle nécessitent.

Dans un tout autre aspect, l'expérience de Petit [6] basée sur l'analogie hydraulique des écoulements à surface libre met en évidence le phénomène de suppression des ondes de choc. Cette expérience au caractère fondamental est décrite en fin de ce chapitre.

II.1- EQUATIONS GENERALES.

Sur la base de ces équations générales, l'étude en régime quasiunidimensionnel stationnaire pour un gaz parfait, développée par Sutton [8], est présentée à travers les hypothèses simplificatrices quelle nécessitent.

Dans un tout autre aspect, l'expérience de Petit [6] basée sur l'analogie

- L'électromagnétisme est décrit par les équations de Maxwell. Dans le présent travail, ces équations sont en fait très peu utilisées. L'électromagnétisme apparaît principalement à travers le nombre de Reynolds magnétique. Comme ce critère reste faible, tous les phénomènes liés à la propagation des ondes dans les plasmas sont négligés.
- La physique des gaz ionisés intervient à travers la description des différentes caractéristiques des plasmas. La connaissance de ces caractéristiques permet de prévoir les propriétés et le comportement du gaz lors de son interaction avec un champ croisé. Elles ont été décrites au chapitre I.

Dans cette présentation, nous partirons de la formulation la plus générale des équations afin de bien dégager les hypothèses simplificatrices qui permettent d'établir un système exploitable.

II.1.1 - Les équations de conservation. ([8] p.296)

- Equation de conservation de la masse: elle exprime que le flux de masse est conservatif:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \Psi) = 0 \tag{II.1}$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho \frac{D \Psi}{D t} = - \Psi p + \Psi + \rho_e E + J x B$$
(II.2)

Dans le membre de droite, le gradient du tenseur de contraintes dynamiques est présenté sous forme de la somme du gradient de la pression statique (Vp) et des forces de viscosité (Y). Ce tenseur rend compte des forces de surface appliquées sur les frontières d'un élément du fluide. Il serit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \Psi) = 0 \tag{II.1}$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{II.9}$$

$$\nabla x \mathbf{B} = \mu_{o} (\mathbf{J} + \mathbf{E}_{o} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla x \mathbf{M}_{p})$$
(II.10)

OÙ

- ρe est la densité volumique de charges;
- Eo la permitivité du vide;
- μ_O est la perméabilité magnétique du vide.

Le terme ∇ x \mathbf{M}_p rend compte de la magnétisation du plasma induite par le mouvement circulaire des particules chargées dans le champ magnétique appliqué.

En associant à ce système de 7 équations (II.1) (II.2) (II.5) (II.7) (II.8) (II.9) (II.10) la loi d'Ohm (I.23) et l'équation d'état (I.7), ainsi que les relations de détermination des paramètres du plasma (coefficients de transport, densité de particules, fréquence de collision), on obtient un ensemble fermé de 15 équations à 15 inconnues qui sont:

- les variables thermodynamiques décrivant l'écoulement:
 ρ, ρ, Τ, V, e.
- les variables électromagnétiques:
 E, B, J.
- les paramètres décrivant le milieu ionisé:

$$\sigma$$
, K , η , N_e , N_i , N_n , V_e .

Une première série de simplifications peuvent déjà être envisagées immédiatement:

- pour des fréquences d'oscillation du champ électrique inférieures à 10^{12} Hertz, le champ magnétique induit par les variations du champ
 - les variables électromagnétiques:

- les paramètres décrivant le milieu ionisé:

$$\sigma$$
 , K , η , N_e , N_i , N_{n_i} Ve .

la faible densité électronique (ici $N_e \approx 10^{20} / m^3$).

II.2 - MODELE QUASI-UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE POUR UN GAZ PARFAIT: MODELE DE SUTTON ([8] p.390).

Une première étude théorique de la suppression des ondes de choc a été présentée par Sutton [8] et a débouchée sur des cas particuliers traités par Resler et Sears [22]. Ces études traitent de l'interaction entre un écoulement de plasma confiné dans un canal et un système de champs croisés. Ces études sont à notre connaissance les seules traitant du problème de suppression des ondes de choc.

Il est intéressant de voir rapidement comment elles s'articulent au niveau des hypothèses simplificatrices et de leur mise en forme, afin de pouvoir les comparer avec les études de la thèse.

II.2.1 - Hypothèses simplificatrices: écoulement en régime stationnaire pour un gaz parfait.

Une première série d'hypothèses a été faite par Sutton [8] concernant les paramètres du plasma et de l'écoulement:

- l'écoulement est stationnaire:
- le plasma est un fluide non visqueux;
- le plasma est considéré comme un gaz parsait: il n'est pas tenu compte de la variation des espèces dans l'équation d'état, ni de l'énergie d'ionisation;
- le plasma est globalement neutre, c'est à dire que la longueur de Debye est faible devant les dimensions de l'expérience;
- les phénomènes de transport d'énergie tels que la convection ou la diffusion sont négligeables;
 - le nombre de Reynolds magnétique est faible;
 - l'écoulement est stationnaire;
 - le plasma est un fluide non visqueux;
- le plasma est considéré comme un gaz parfait: il n'est pas tenu

l'écoulement n'est pas isentropique.

L'ensemble des équations devient:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{II.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{II.12}$$

$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{E} = 0 \tag{II.13}$$

$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{B} = 0 \tag{II.14}$$

$$\nabla \cdot (\rho \, \Psi) = 0 \tag{II.15}$$

$$\rho \, \Psi \, . \, (\nabla \otimes \Psi) \, + \, \nabla \, p \, = \, \mathbf{J} \mathbf{x} \, \mathbf{B} \tag{II.16}$$

$$\rho \, \nabla \cdot \nabla \left(e + \frac{\nabla^2}{2} \right) = \mathbb{E} J - p \, \nabla \cdot \nabla \tag{II.17}$$

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \; (\mathbf{E} + \mathbf{V} \mathbf{x} \mathbf{B}) \tag{II.18}$$

$$p = \rho R T \tag{II.19}$$

$$de = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right) \tag{II.20}$$

$$\sigma_0 = \sigma_0(\rho, T) \tag{II.21}$$

Le terme (♥ ♥ V) apparaissant dans l'équation (II.16) représente le produit tensoriel de l'opérateur ♥ (nabla) et de V. On obtient ainsi la matrice jacobienne de V.

Ce système d'équations, déjà grandement simplifié comparé aux équations sénérales, est ramené à un problème quasi-unidimensionnel stationnaire en

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{R} \mathbf{T} \tag{II.19}$$

$$de = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right) \tag{II.20}$$

- Le champ électrique est dirigé suivant l'axe y : E = Ey
- Le vecteur vitesse de l'écoulement est dirigé suivant l'axe des x.

En toute rigueur, il faut également négliger les effets de bord, c'est à dire considérer que le rapport (longueur d'interaction / largeur de la tuyère) est grand devant l'unité.

II.2.2 - Modèle quasi-unidimensionnel stationnaire pour un gaz parfait.

Les équations de Maxwell ont été simplifiées définitivement. Les équations de conservation deviennent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\rho\,\nabla\,\mathbf{A}\right)=0\tag{II.22}$$

$$\rho \, \forall \, \frac{d \, \forall}{d \, x} = - \, \frac{d \, p}{d \, x} + \, J_{y} \, B \tag{II.23}$$

$$\rho \, \forall \, (C_{y} \, \frac{d \, T}{d \, x} + \forall \, \frac{d \, \forall}{d \, x}) = J_{y} \, E \tag{II.24}$$

et la loi d'Ohm s'écrit:

$$J = \sigma_0 \left(E_y - \nabla_x B_z \right) = \sigma_0 \nabla_x B_z \left(K - 1 \right) \tag{II.25}$$

A partir de ce système d'équations, il est possible d'obtenir une solution analytique de l'évolution des écoulements compressibles en soufflerie MHD. Les variations des différentes grandeurs thermodynamiques le long de la tuyère sont exprimées en fonction des variations de section A:

$$\frac{d\nabla}{dx} = \frac{1}{M^2 - 1} \left(\frac{\nabla}{A} \frac{dA}{dx} - \frac{\sigma B^2}{p} (\nabla - \nabla_3) (\nabla - \nabla_1) \right)$$
 (II.26)

V - 1 .

et la loi d'Ohm s'écrit:

$$J = \sigma_0 (E_y - \nabla_x B_z) = \sigma_0 \nabla_x B_z (K-1)$$
 (II.25)

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{M^{2}-1} \left(\frac{\nabla^{2}}{A C_{p}^{2}} \frac{dA}{dx} - (\nabla \cdot \nabla_{3}) \left(\frac{\sigma B^{2} \nabla}{p C_{p}} (\nabla \cdot \nabla_{1}) - \frac{\sigma B^{2} \nabla_{3} (M^{2}-1)}{\rho \nabla C_{p}} \right) (II.28)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{M^2-1} \left(\frac{\rho \nabla^2}{A} \frac{dA}{dx} - (\nabla - \nabla_3) \left(\frac{\gamma \sigma B^2 M}{a} (\nabla - \nabla_1) - \sigma B^2 (M^2-1) \right) \right) \quad (II.29)$$

avec:

$$\nabla_{1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{E_{y}}{B_{z}} \qquad \nabla_{2} = \frac{1 + \gamma M^{2}}{2 + (\gamma - 1) M^{2}} \nabla_{1} \qquad \nabla_{3} = \frac{E_{y}}{B_{z}} \qquad (II.30)$$

En l'absence d'un champ de force JxB, la convergence de la tuyère entraine l'apparition d'une onde de choc, avec passage à un régime subsonique. Ce phénomène est caractérisé dans les équations (II.26) (II.27) (II.28) (II.29) par le terme en $1/(M^2-1)$, qui introduit une discontinuité pour M=1.

En premier lieu, Sutton [8] considère un champ de force qui maintient la vitesse du gaz constante dans le convergent (dV/dx = 0) et il montre que le terme en $1/(M^2-1)$ disparait des expressions des variations des paramètres thermodynamiques, traduisant la non apparition de l'onde de choc. De la même manière, on montre qu'en maintenant constant les autres paramètres thermodynamiques tels que la pression, la température, ou la masse volumique, le résultat est analogue.

A partir de ces développements, Resler et Sears [22] ont étudié ce type découlement à section constante. Dans le cas général, le ralentissement de l'écoulement jusqu'à un régime subsonique n'est pas possible sans choc. Les termes en 1/(M²-1) subsistent dans les équations quand on applique dA/A=0. Ces auteurs ont montré qu'en considérant une interaction MHD ralentissant l'écoulement sous certaines conditions de vitesse et de facteur de charge, il existait des conditions 'tunnel' qui permettaient le passage d'un écoulement supersonique à un écoulement subsonique sans onde de choc.

U.2.3. Conflusion ters que la pression, la temperature, ou la masse volumique, le résultat est analogue.

A partir de ces développements, Resler et Sears [22] ont étudié ce type d'écoulement à section constante. Dans le cas général, le ralentissement de l'écoulement jusqu'à un régime subsonique n'est pas possible sans choc. Les

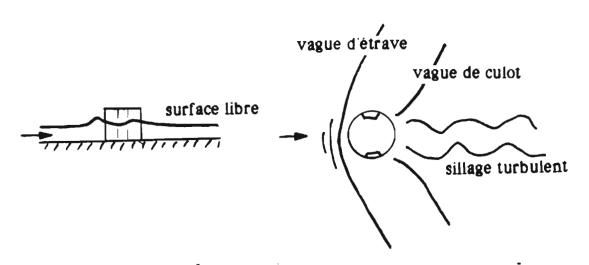
Les conditions prisent en compte ne correspondent pas exactement à des conditions 'tube a choc', pour lesquelles il est difficile de négliger les effets de gaz réel.

L'approche quasi-unidimensionnelle est abordée en considérant le fait que les tubes de courant subissent une légère variation de section dA. En partant de ce modèle, il est impossible de définir ce qui se passe au voisinage d'une paroi présentant une faible variation de direction $d\Phi$ variable. C'est ce que se propose de résoudre le modèle quasi-unidimensionnel présenté dans le chapitre suivant.

II.3 - SIMULATION HYDRAULIQUE DE SUPPRESSION D'ONDES DE CHOC: EXPERIENCE DE PETIT [6].

Petit [6] a réalisé une expérience en écoulement à surface libre où il a obtenu la suppression de la vague d'étrave et du sillage turbulent autour d'un obstacle placé dans un écoulement d'eau salée, au moyen d'un champ de force de Laplace. L'analogie théorique existant entre ce type d'écoulements $(\gamma=2)$ et les écoulements supersoniques nous autorise à en tirer des conclusions pour les écoulements gazeux.

Un obstacle cylindrique a été placé dans un écoulement d'eau salée. En l'absence de tout champ de force, il se forme autour de la maquette une vague d'étrave à l'avant et une vague de culot à l'arrière suivit par le sillage turbulent. L'objet ayant une forme émoussée, la vague d'étrave est assimilable à une onde de choc détachée.



vague d'étrave à l'avant et une vague de culot à l'arrière suivit par le sillage turbulent. L'objet ayant une forme émoussée, la vague d'étrave est assimilable à une onde de choc détachée.

Un champ de force électromagnétique est alors appliqué autour de la maquette. Le champ électrique est réalisé par deux électrodes diamétralement opposées et le champ magnétique de l'ordre du tesla est placé perpendiculairement à l'écoulement. La densité de courant est limitée à 10^4 A/m² du fait de l'électrolyse de l'eau, qui se manifeste par un bouillonnement au voisinage des électrodes et vient alors perturber l'expérience.

Plusieurs phénomènes peuvent être observés en fonction de l'intensité du champ de force appliqué.

Tout d'abord, il se produit le recollement des filets d'eau et la disparition du sillage turbulent en aval de la maquette.

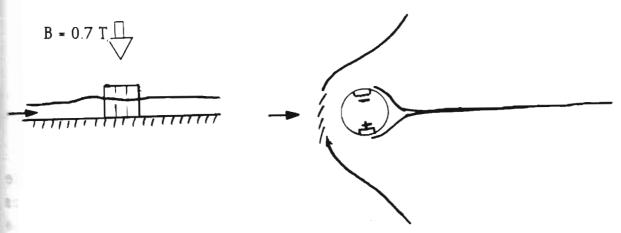
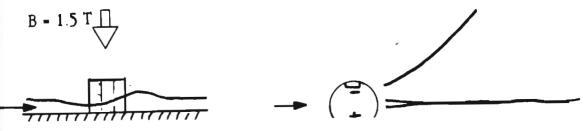


Figure 20: Disparition du sillage turbulent par l'action du champ de force JxB.

Puis, quand la force JxB croît, la vague frontale disparait et l'eau se creuse en amont. La maquette reçoit alors une poussée due à la différence des pressions entre l'amont et l'aval, et se comporte comme un propulseur. Simultanément, l'onde de culot reparait en étant renforcée.



Puis, quand la force JxB croît, la vague frontale disparait et l'eau se creuse en amont. La maquette reçoit alors une poussée due à la différence des pressions entre l'amont et l'aval, et se comporte comme un propulseur. Simultanément, l'onde de culot reparait en étant renforcée.

A partir de la forme des lignes de courant électrique, on peut en déduire la forme du champ de force autour de la maquette:

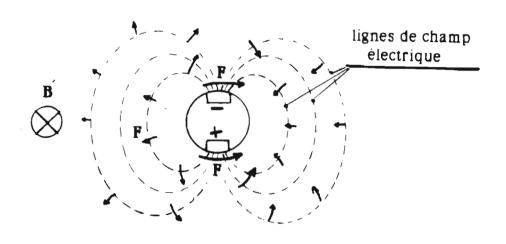


Figure 22 : Allure du champ de force autour du cylindre.

On constate que l'action du champ de force consiste à raientir et écarter le fuide avant son arrivée sur la maquette. Celui-ci se substitue ainsi aux forces de pression. Pour des intensités suffisantes, le choc disparait, indiquant que la pression reste sensiblement constante en amont de la maquette. Puis, le fluide est accélèré pour passer l'obstacle sans que les forces de pression ne soient sollicitées, et le champ de force referme les lignes de courant en aval de la maquette, empêchant ainsi la formation du régime dissipatif turbulent.

Tout se passe comme si le champ de force se substituait aux forces de pression pour compenser les forces d'inertie et diriger l'écoulement. C'est effectivement la conclusion à laquelle nous conduisent les études menées en régime quasi-unidimensionnel stationnaire et bidimensionnel stationnaire qui sont présentées dans les chapitres suivants. La suppression des ondes de choc passe par l'uniformisation de la pression autour de l'obstacle à l'aide du champ de force JxB. Ces résultats théoriques sont obtenus pour un profil d'obstacle effilé, et l'expérience hydraulique laisse supposer qu'il en est de même autour des obstacles émoussés.

la pression reste sensiblement constante en amont de la maquette. Puis, le fluide est accélèré pour passer l'obstacle sans que les forces de pression ne soient sollicitées, et le champ de force referme les lignes de courant en aval

est ralenti de la vitesse V à la vitesse nulle au point d'arrêt, sur une distance d'orrespondant à la distance de détachement de l'onde. Le ralentissement est associé à un saut de pression Δp qui est de l'ordre de:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \, \nabla^2 \tag{II.31}$$

On fait ainsi apparaître une force caractéristique:

$$F_{e} = \frac{\Delta p}{d} \tag{II.32}$$

Le champ de force aura une action sur le système d'onde si son intensité satisfait à:

$$F_1 = JB \ge \frac{\Delta p}{d} = \frac{\rho \nabla^2}{2 d} \tag{II.33}$$

D'où le paramètre d'interaction:

$$S = \frac{2JBd}{\rho V^2} \ge 1 \tag{II.34}$$

Si S est grand devant l'unité, l'onde de choc sera affectée par le champ de force. Ce critère est bien vérifié par l'expérience où les conditions étaient :

> B = 1.5 teslas $J = 10^4 \text{ A/m}^2$ d = 0.002 m $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ V = 0.08 m/s

S est de l'ordre de 10 et l'onde frontale disparait.

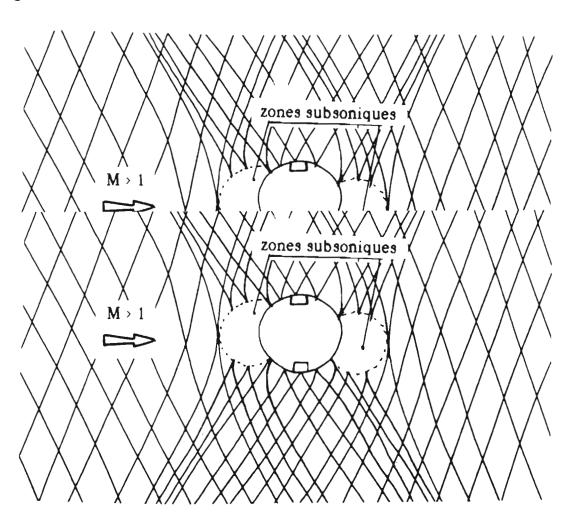
Cette expérience est riche sur le plan fondamental et montre les avantages que peut présenter un écoulement guidé par les forces de Laplace. Elle met en évidence la possibilité de diminuer de facon notable la force de trainée à

Si S est grand devant l'unité, l'onde de choc sera affectée par le champ de force. Ce critère est bien vérifié par l'expérience où les conditions étaient :

$$B = 1.5 \text{ teslas}$$

$$J = 10^4 \text{ A/m}^2$$

Il est possible d'imaginer la forme du champ de caractéristiques (Fig.15) équivalent à l'expérience réalisée par Petit [6]. Ce type d'écoulement doit présenter deux zones subsoniques pour les raisons énoncées dans l'introduction: une en amont et une en aval de la maquette. Sur la ligne de raccordement entre l'écoulement subsonique et l'écoulement supersonique, les faisceaux des deux familles de caractéristiques montantes et descendantes se rejoignent en un point de rebroussement (nombre de Mach égal à 1)



CHAPITRE III.

MODELE QUASI-UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE

POUR UN GAZ REEL

L'étude qui va être développée maintenant correspond également à une approche quasi-unidimensionnelle stationnaire, mais l'approche diffère de celle de Sutton [8]. Les hypothèses sont d'abord plus générales, les effets de gaz réels et l'effet Hall étant pris en compte. D'autre part, la mise en forme de ce modèle passe par l'établissement d'un système d'équations en régime bidimensionnel stationnaire établi dans le repère lié aux directions caratéristiques, système qui est linéarisé ensuite pour aboutir au modèle quasi-unidimensionnel. L'annihilation des ondes de choc est alors supposée être obtenue à l'aide d'un champ de force JxB conservant le parallèlisme des caractéristiques. Cette étude a fait l'objet d'une publication au Journal de Mécanique Théorique et Appliquée [23].

Au cours des développements, l'effet Joule est négligé, car la complexité qu'il introduit dans les calculs n'est pas en corrélation avec son importance. Les résultats des calculs montrent en effet à postériori que lors d'expériences en tubes à choc, il est négligeable. Mais il serait tout à fait possible de le prendre en compte dans des études ultérieures à partir des bases du modèle présenté ici.

La simplicité des résultats sur lesquels débouchent ces calculs est remarquable. Tout d'abord, on démontre la condition utilisée comme hypothèse par Sutton [8], à savoir que, dans le cas d'un gaz parfait, la suppression des ondes de choc passe par la constance de certains paramètres thermodynamiques tels que la pression, la température et la masse volumique. Ensuite, une utilisation insoupsonnée de l'effet Hall est mis en évidence. Ce phénomène permet d'obtenir une composante du champ de force perpendiculaire à la paroi et on montre que cette composante semble pouvoir jouer un rôle important dans l'annihilation des ondes de choc. Ces calculs débouchent sur une relation très simple permettant de déterminer l'internation des developpements, l'ellet joule est neglige, cai la compleance.

qu'il introduit dans les calculs n'est pas en corrélation avec son importance. Les résultats des calculs montrent en effet à postériori que lors d'expériences Pour finir, cette étude permet d'aborder le problème du blocage thermique qui se produit lorsque l'effet Joule est suffisamment important pour créer une onde de choc au sein de l'écoulement. Ce phénomène a essentiellement été mis en évidence par Fontaine [2] et Forestier [3] lors d'expériences réalisées à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille (IMFM) dans les années 1970.

III.1 - DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS A TRAVERS UNE APPROCHE BIDIMENSIONNELLE STATIONNAIRE.

III.1.1 - Hypothèses de travail.

Le modèle développé ici reprend les conditions de définition de l'écoulement proposées par Sutton [7], à savoir:

- l'écoulement est supposé stationnaire;
- le plasma est un fluide non visqueux;

Lors de son étude, cet auteur n'a pas posé le problème de l'obtention du plasma ni du calcul et de l'évolution de ses caractéristiques. Dans la présente approche, ces paramètres vont être pris en compte, et notamment en ce qui concerne les effets de gaz réels. Ils interviennent principalement au niveau de l'équation d'état, de la conservation de l'énergie, et du calcul de la vitesse de son.

Ces effets, présentés au chapitre I, ont été étudiés par Normann [9] (voir Annexe 1) dans le cas de l'argon et c'est son modèle qui est utilisé ici.

Ces conditions correspondent à celles mises en œuvre par Fontaine [2] et Forestier [3] lors de leurs expériences en tube à choc. En s'appuyant sur les travaux de ces auteurs et en envisageant des conditions similaires d'expérimentation, les hypothèses simplificatrices suivantes sont justifiées:

- les plasmas d'argon sont collisionnels et coulombiens;
- la longueur de Debye est faible devant les dimensions caractéristiques de l'expérience. On peut donc considérer le plasma comme un milieu électriquement neutre;
- concerne les effets de gaz réels. Ils interviennent principalement au niveau de l'équation d'état, de la conservation de l'énergie, et du calcul de la vitesse de son.

Ces effets, présentés au chapitre I, ont été étudiés par Normann [9] (voir

- l'ionisation peut être déduite de la loi de Saha
- les processus d'excitation/ désexcitation radiative peuvent être négligées au sein du plasma;
- les phénomènes de transport d'énergie tels que la convection ou la diffusion sont négligeables.

Il n'est pour l'instant fait aucune supposition quant à l'importance de l'effet Hall.

III.1.2- Equations générales en régime bidimensionnel.

Les équations de Maxwell (II.11) (II.12) (II.13) (II.14) sont maintenant définitivement simplifiées. Moyennant les hypothèses précédemment définies, les équations de la mécanique des fluides deviennent :

Equation de conservation de la masse:

$$\nabla \cdot (\rho \nabla) = 0 \tag{III.1}$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho \, \Psi \, . \, (\nabla \, \otimes \, \Psi) \, + \, \nabla \, p \, = \, J \, x \, B \tag{III.2}$$

L'équation de l'énergie est formulée à partir de l'expression de l'énergie interne proposée par Fontaine [2], qui a établi ses propres calculs thermodynamiques sur la base des travaux théoriques de Norman [9]:

Ces calculs, présentés en Annexe 3, conduisent à:

$$a^{2} \nabla \cdot \nabla - \nabla \cdot (\nabla \cdot (\nabla \otimes \nabla)) = TS \nabla^{3} \tag{III.3}$$

Pour des raisons pratiques, on introduit "TS" qui représente les Termes Sources produits par l'interaction MHD. Ce sont l'effet Joule et le travail du champ de force JzB:

Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho \Psi \cdot (\nabla \otimes \Psi) + \nabla p = JxB \tag{III.2}$$

E* est le champ électrique appliqué aux électrons. Les termes J et F sont de la dimension de l'inverse d'une longueur.

- J.L correspond au rapport du travail des forces de Laplace comparé à l'énergie cinétique de l'écoulement;
- F.L représente le rapport entre la puissance introduite par effet Joule et transformée en chaleur comparée au flux d'énergie cinétique.

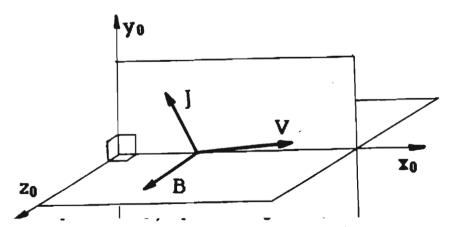
Les effets de gaz réels apparaisssent dans l'expression de "A" qui s'écrit :

$$A = \frac{1 + Z_t}{\gamma - 1} \quad \text{avec} \quad Z_t = \frac{\alpha_i}{2} (1 - \alpha_i) (\frac{5}{2} + \frac{E_t}{kT})$$
 (III.5)

Le paramètre α_i représente le taux d'ionisation, et E_i le potentiel d'ionisation de l'élément considéré ($E_i/k = 182900$ pour l'argon). Z_t est défini comme étant le rapport de compressibilité à température constante [9].

III.1.3 - Equations dans un repère lié au laboratoire.

Une première formulation des équations de conservation est faite en considérant un repère fixe R_0 , représenté figure 24, d'axes de coordonnées x_0 , y_0 , z_0 , liés au laboratoire. Le champ magnétique B est placé perpendiculairement au plan formé par V et J.



 z_0 , y_0 , z_0 , liés au laboratoire. Le champ magnétique B est placé perpendiculairement au plan formé par V et J.

Les équations deviennent:

$$\rho \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} \right) + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial y_0} = 0$$
 (III.6)

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \frac{1}{0} \frac{\partial p}{\partial x_0} = \frac{Jy_0 B}{0}$$
(III.7)

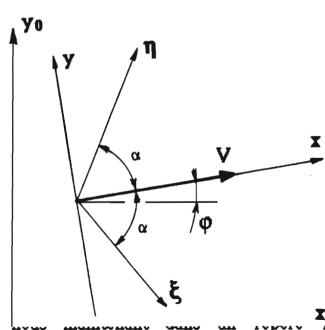
$$\mathbf{u}_{0} \frac{\partial \mathbf{v}_{0}}{\partial \mathbf{x}_{0}} + \mathbf{v}_{0} \frac{\partial \mathbf{v}_{0}}{\partial \mathbf{y}_{0}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}_{0}} = -\frac{J\mathbf{x}_{0} B}{\rho} \tag{III.8}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} \left(a^2 - u_0^2 \right) - u_0 v_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} \left(a^2 - v_0^2 \right) = TS \left(u_0^2 + v_0^2 \right)^{3/2}$$
 (III.9)

Dans ce repère, le vecteur vitesse V a deux composantes (u_0, v_0) , et "a" représente la vitesse du son dans un gaz réel (Annexe 1 - Relation (21)).

III.1.4 - Equations dans un repère lagrangien.

Plaçons nous maintenant dans un repère Lagrangien R(x,y,z). L'hypothèse de stationnarité étant faite, ce repère est lié aux lignes de courant, x étant dirigé suivant une ligne de courant comme le montre la figure 25.



L'hypothèse de stationnarité étant faite, ce repère est lié aux lignes de courant, x étant dirigé suivant une ligne de courant comme le montre la figure 25.

Soit ϕ l'angle entre les directions \mathbf{x}_0 et \mathbf{x} . Dans ces conditions, on montre que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}$$
 $d\mathbf{u} = d\mathbf{V}$ (III.10)
 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ $d\mathbf{v} = \mathbf{V} d\mathbf{\Phi}$

et les équations de conservation deviennent:

$$\rho \left(\frac{\partial \nabla}{\partial x} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \nabla \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{III.11}$$

$$\rho \nabla \frac{\partial \nabla}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = J_y B \qquad (III.12)$$

$$\rho \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = -J_x B \tag{III.13}$$

$$\frac{\partial \nabla}{\partial x} (a^2 - \nabla^2) + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial y} a^2 = Ts \nabla^3$$
 (III.14)

III.2 - ETABLISSEMENT DU MODELE QUASI-UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE.

III.2.1 - Linéarisation des équations de la mécanique des fluides.

Pour finir, ces équations peuvent être exprimées dans un repère lié aux directions caractéristiques η et ξ , qui sont respectivement les caractéristiques montantes et descendantes (Fig. 25). Ce changement de coordonnées s'effectue en remarquant que, pour toute variable thermodynamique H donnée, on a:

$$dx = \cos \alpha (d\eta + d\xi)$$

$$dy = \sin \alpha (d\eta - d\xi)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial \eta} = \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y}$$
(III.15)
$$= \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y}$$
STATIONNAIRE.

III.2.1 - Linéarisation des équations de la mécanique des fluides.

A partir du système formé par les équations (III.11), (III.12), (III.13), (III.14) et (III.15), il est possible de passer à un modèle quasiunidimensionnel.

La condition de quasi-unidimensionnalité consiste à imposer à une quelconque variable thermodynamique "H" de rester constante le long d'une caractéristique montante n c'est à dire

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = 0$$
 d'où $dH = \frac{\partial H}{\partial \xi} d\xi$ (III.16)

Les caractéristiques montantes sont alors des droites. Dans ces conditions, l'équation de conservation de l'énergie donne:

$$\frac{1}{\nabla} \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{2 \text{ Ts}}{\cos \alpha} - \text{ tg } \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$$
(III.17)

La conservation de la masse conduit alors à:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{1}{\nabla} \frac{\partial \nabla}{\partial \dot{\xi}} + \frac{1}{\nabla \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\xi}}$$
(III.18)

La relation caractérisant les variations de pression est obtenue en combinant les deux équations de conservation de quantité de mouvement (III.12) et (III.13) à travers:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{dp}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta \qquad (III.19)$$

On obtient alors une relation déterminant les variations de la pression lors d'un déplacement suivant t:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \int_{\gamma} B \cos \alpha + \int_{\gamma} B \sin \alpha + \frac{\rho \nabla^{2}}{\cos \alpha} T_{0} + \rho \nabla^{2} \chi \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$$
 (III.20)

ainsi qu'une condition sur le champ de force imposée par la condition d'unidimensionnalité:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \eta} = 0 \tag{III 21}$$

III.2.2 - Condition de régime quasi-unidimensionnel imposé par la pression.

Le calcul des variations de la pression à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement entraîne une condition sur la direction de la densité de courant.

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \implies \frac{J_x^2}{\sigma_0 \nabla A \cos \alpha} \cdot J_x B \sin \alpha \cdot J_y B \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{J_y^2}{\sigma_0 \nabla A \cos \alpha} = 0 \quad (III.22)$$

Du fait que Jy soit positif par définition (Fig. 24), cette équation du second degré n'admet qu'une seule solution physique qui est:

$$J_{x} = (-B \sin \alpha + \sqrt{\Delta}) \frac{\sigma_{0} \nabla A \cos \alpha}{2} = f(J_{y})$$
 (III.23)

avec:

$$\Delta = B^2 \sin \alpha + 4 \frac{J_y B \sin^2 \alpha}{\sigma_0 \forall A \cos \alpha} - 4 \frac{J_y^2}{(\sigma_0 \forall A \cos \alpha)^2} > 0$$
(III.24)

Ces équations étant établies, on suppose à priori que l'effet joule est régligeable, ce qui revient à considérer l'interaction MHD à entropie constante. Le terme source TS de la relation (III.4) se simplifie pour donner:

$$Ts = -\frac{J_y B}{\rho \nabla^2} \qquad (III.25)$$

* la condition (III.22) devient:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \implies \frac{J_{y}}{J_{z}} = -\frac{1}{g \alpha} = -\sqrt{M^{2} \cdot 1}$$
(III.26)

Cela revient à imposer un vecteur densité de courant perpendiculaire aux caractéristiques montantes η , donc un champ de force parallèle à cette direction. Dans le cas d'un effet Joule non négligeable, la relation (III.23) indique que le champ de force doit compenser le gradient de pression dû à l'échauffement par effet Joule. Cela se traduit par une composante F_x du champ de force plus importante que sans effet Joule (voir Fig. 26). Dans la suite des développements, nous supposerons que l'effet Joule est négligeable.

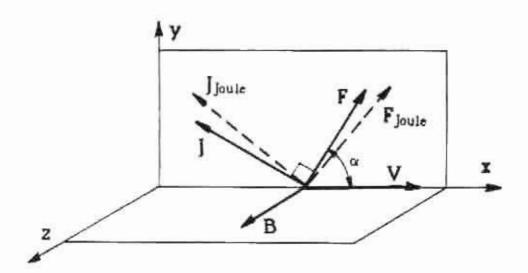


Figure 26 : Orientation du vecteur densité de courant en régime quasi-unidimensionnel stationnaire avec et sans effet Joule.

La condition sur la pression amène deux remarques importantes:

Remarque 1:

- Le champ de force doit agir en accélérant et en écartant l'écoulement de la paroi dans un convergent, et en freinant et en resserrant l'écoulement vers la paroi dans un divergent. L'étude bidimensionnelle à pression constante présentée au chapitre IV conduit également à cette conclusion, tout en explicitant le rôle joué par ces deux composantes du champ de force.

Remarque 2:

Pour réaliser un champ de densité de courant électrique qui ne soit

pas perpendiculaire à la surface de la paroi des électrodes, c'est à dire non colinéaire au champ électrique, il faut que l'effet Hall intervienne. Ce phénomène, résultant de l'enroulement des électrons libres dans les lignes de force du champ magnétique, est caractérisé par le facteur de Hall:

$$\beta = \frac{e B}{M_e V_e} = \mu_e B \tag{III 27}$$

La fréquence de collision électronique est représentée par V_e , "e" est la charge électrique et m_e la masse de l'électron, μ_e est la mobilité électronique. L'orientation de la densité de courant par rapport au champ électrique forme alors l'angle θ tel que tg θ = β (Fig. 16 Ch I).

Pour obtenir une telle orientation du vecteur densité de courant J, il convient donc de prendre une valeur de B telle que:

$$g \alpha = \beta \Rightarrow B = \frac{M_e V_e}{e \sqrt{M^2 - 1}} = \frac{g \alpha}{\mu_e}$$
 (III.28)

La valeur du champ magnétique est donc conditionnée par les paramètres de l'écoulement et du plasma

III.2.3 - Variation des paramètres thermodynamiques en présence d'un champ de force JzB quelconque.

Les conditions (III.17) (III.18), (III.19), et (III.25), associées à un déplacement suivant x défini par:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}} = \cos \alpha$$
 (III.29)

conduisent aux expressions finales des variations des paramètres thermodynamiques:

(111.30

(III 32

$$\frac{d \, \nabla}{\nabla} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \left(\frac{2 \, M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \frac{J_y \, B}{\rho \, \nabla^2} \, dx - d \, \Phi \right)$$

$$\frac{d\rho}{p} = \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(-\frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{J_y B}{\rho V^2} dx + d\Phi \right)$$
(III.31)
$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{(1 + Z_1) \sqrt{M^2 - 1}} \left(-\frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{J_y B}{\rho V^2} dx + d\Phi \right)$$
(III.32)

D'après [10], l'équation d'état pour un gaz réel s'écrit:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} \frac{1 + Z_p}{1 + Z_i} - \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{1 + Z_i}$$
 (III.33)

avec Z_p = α_i/2 (1-α_i), le facteur de compressibilité à pression constante, α qui donne l'expression suivante pour les variations de température:

$$\frac{dT}{T} = \frac{M^2(\gamma \cdot 1)}{(1+Z)\sqrt{M^2-1}} \left(-\frac{2}{\sqrt{M^2-1}} \frac{J_y B}{\rho V^2} dx + d\Phi\right)$$
 (III.34)

Le système d'équations (III.30), (III.31), (III.32) et (III.34) permet d décrire le comportement du gaz lorsqu'il est soumis à une légère variation d la direction de la paroi do, ainsi qu'à un champ de force [xB]. On remarqu que l'on retrouve, si on supprime le champ de force, les expressions de variations des paramètres dans le cas d'une détente de Prandit-Mayer [4]

III.2.4 - Condition de suppression des ondes de choc: parallèlism des caractéristiques.

La suppression de l'onde de choc est obtenue en conservant le parallèlism des caractéristiques montantes issues de la paroi. Celui-ci est conservé si d est égal à -dφ, comme le montre la figure 27, ce qui s'écrit en différentia la relation (2):

$$\frac{dM}{M} = \sqrt{M^2 - 1} d\Phi \qquad (III.35)$$

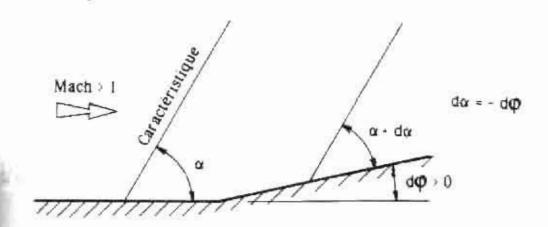


Figure 27 : Parallèlisme des caractéristiques issues d'un convergent infinitésimal.

D'autre part, la vitesse du son dans un gaz réel est d'après Norman [9] :

$$a = \sqrt{\frac{\gamma R T}{1 + Z_p}}$$
 (III.36)

Les effets de gaz réels se caractérisent par des variations de γ et Z_p , ce associé aux relation (1) et (111.36) differenciées, entraine:

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{1}{2} \left(\frac{dT}{T} + \frac{dY}{Y} - \frac{dZ_p}{1 + Z_p} \right) \tag{III.37}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{M^{2}(\gamma + 2Z_{1} + 1)}{(M^{2}-1)(1+Z_{1})} \frac{J_{y}B}{\rho V^{2}} dx - (\frac{M^{2}(\gamma - 1)}{2(Z_{1} + 1)} + 1) \frac{d\phi}{\sqrt{M^{2}-1}} - \frac{1}{2}(\frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dZ_{y}}{1+Z_{y}}) \quad (III.38)$$

Les variations relatives de Z_p (0 < Z_p < 0.02 pour une température d'argon mérieure à 12000 °K) peuvent être négligées devant celles de γ (5/3 < γ <

1.275) Appliquons la condition de parallélisme (III.35) pour déterminer le critère sur le champ de force à appliquer au voisinage de la paroi pour supprimer l'onde de choc:

$$\frac{J_{y}B}{\rho v^{2}} dx = \frac{\sqrt{M^{2}-1}}{2} d\phi + \frac{\sqrt{M^{2}-1}}{2M^{2}(\gamma+2Z_{1}+1)} \frac{d\gamma}{\gamma}$$
(III.39)

En remarquant que:

$$J = \sqrt{J_y^2 + J_z^2} = J_y \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}}$$
 (III.40)

et que dφ/dx correspond à l'inverse du rayon de courbure de la paroi R, la relation (III.39) devient:

$$\frac{JBR}{\rho V^{2}} = \frac{M}{2} + \frac{R\sqrt{M^{2}-1}(Z_{1}+1)}{2\gamma M(\gamma+2Z_{1}+1)} \frac{d\gamma}{\gamma}$$
(III.41)

C'est une expression permettant le calcul de l'intensité du champ de force à appliquer au fluide en fonction des paramètres du plasma et de la paroi. La densité de courant J doit être orientée perpendiculairement à la direction des caractéristiques montantes, ces droites étant toutes maintenues parallèles par ce champ de force. On obtient:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Z_1 + 1}{Z_p + 1} \frac{d\gamma}{\gamma + 2Z_1 + 1}$$
 (III.42)

$$\frac{dT}{T} = -\frac{Z_1+1}{Z_p+1} \frac{\gamma \cdot 1}{\gamma + 2Z_1+1} \frac{d\gamma}{\gamma}$$
(III.43)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{Z_1+1}{\gamma+2Z_1+1} \frac{d\gamma}{\gamma} \tag{III.44}$$

$$\frac{d Y}{Y} = \sqrt{M^2 - 1} d \phi + \frac{Z_t + 1}{Y + 2Z_t + 1} \frac{d Y}{Y}$$
(III.45)

Les variations des paramètres doivent intervenir uniquement pour compenser les modifications du milieu qu'entrainent l'effet Joule et les effets de gaz réel. Pour les conditions envisagées au paragraphe III.4, ces effets restent modérés, avec un rapport des chaleurs spécifiques sensiblement constant dans la zone d'interaction.

III.2.5 - Expression de la variation des paramètres thermodynamiques dans le cas d'un gaz parfait.

Dans le cas d'un gaz parfait, la valeur du champ de force à appliquer pour supprimer les ondes de choc est telle que:

$$\frac{JBR}{\rho \nabla^2} = \frac{M}{2} \tag{III.46}$$

Dans ce cas, les variations des paramètres thermodynamiques de l'écoulement sont finalement nulles:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{III.47}$$

$$\frac{d \nabla}{\nabla} = \frac{d M}{M} = \sqrt{M^2 \cdot 1} d \Phi \qquad (III.48)$$

On retrouve ainsi la condition proposée par Sutton [8], à savoir que pour supprimer les ondes de choc, il faut maintenir un des paramètres de l'écoulement constant.

Dans cette présente étude, l'hypothèse d'isentropie entraine la constance des paramètres p. T et p pour un gaz parfait. Il est à remarquer que la condition de constance des paramètres n'est pas posée ici comme hypothèse, mais est le résultat de la condition de parallèlisme des caractéristiques. La simplicité de ces résultats est remarquable.

Une des incidences, et non des moindres de ce maintien de la constance des paramètres thermodynamique est <u>l'annulation</u> de la trainée d'onde

III. 3 - ETUDE DU BLOCAGE THERMIQUE.

Le blocage thermique se manifeste lorsque les intensités de courant sont très importantes et que le plasma est très fortement chaussé par esset Joule. Fontaine [2] a effectué des décharges avec des intensités atteignant 107 ampères/m² dans la zone d'interaction d'un tube à choc à argon de section de 5 10-3 m², ce qui lui a permis de saire apparaître le blocage de tuyère lors de la rafale.

A partir de l'étude théorique précédente, il est possible d'établir un critère simple de non-blocage thermique. Pour obtenir une accéleration notable de l'écoulement par le champ de force JxB, il faut que FL soit de l'ordre de l'unité. Par contre, pour éviter le blocage thermique, l'échauffement doit rester faible donc J.L doit être petit devant l'unité. Plaçons nous dans le cas d'un effet Hall modéré mais non négligeable:

$$J_y = J \cos \theta$$
 (III.49)

$$F L = \frac{J_y B L}{\rho V^2} \approx 1$$
 (III.50)

$$J L = \frac{J^2 L}{\sigma_0 \rho \nabla^3 A} \ll 1$$
 (III.51)

La loi d'Ohm s'écrit:

$$J = \frac{\sigma_0}{1+\beta^2} \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{vmatrix} \quad (E + \forall xB) \tag{III.52}$$

Pour une configuration des champs croisés tels qu'ils sont représentés figure 24, et en considérant un montage où E est perpendiculaire à B, on obtient:

$$|\mathbf{J}| = \frac{\sigma_0 \, \forall \, \mathbf{B}}{\sqrt{1+\beta^2}} \, (K-1) = \sigma_0 \, \forall \, \mathbf{B} \, (K-1) \cos \theta \tag{III.53}$$

où K désigne le facteur de charge. En remplaçant J dans la relation (111.52) par des expressions de J obtenues à partir de (111.50) et (111.53), on obtient un critère sur le facteur de charge caractérisant la non apparition du blocage thermique.

$$K \ll A + 1 = K_L$$
 (III.54)

Ce critère est indépendant de l'effet Hall. On peut d'autre part introduire dans la relation (III.51) deux fois l'expression de J obtenue à partir de (III.50) On obtient alors un critère mettant en valeur les paramètres favorables à la non apparition du blocage thermique:

$$\mathbf{N} = \frac{\sigma_0 B^2 L(Z_t + 1)}{\rho \nabla (\gamma - 1)(1 + \beta^2)} \gg 1$$
(III.55)

Il faut donc une conductivité électrique élevée, une dimension taractéristique importante, un γ faible. L'effet Hall et le champ magnétiques interviennent en sens inverse. La figure 28 montre l'évolution de B²/(1+β²) en fonction de B.

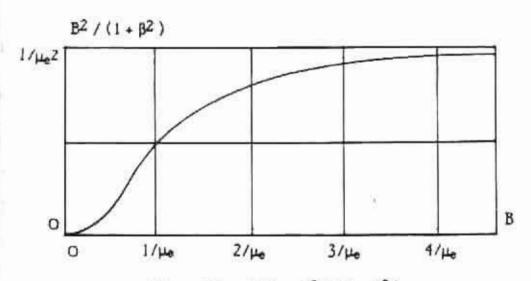


Figure 28: $f(B) = B^2/(1+\beta^2)$

On voit que ce terme tend asymptotiquement vers $(1/\mu_e)^2$ pour les fortes valeurs de B et s'annule pour B faible:

- B faible

$$\mathbf{N} = \frac{\sigma_0 B^2 L(Z_t + 1)}{\rho \Psi(\gamma - 1)}$$
(III.56)

- B fort .

$$\mathbf{H} = \frac{\sigma_0 L(Z_t + 1)}{\rho \nabla (Y \cdot 1)} \mathbf{M}_e \mathbf{V}_e$$
 (III.57)

Nous pouvons donc en déduire que dans une configuration de champs croisés telle qu'elle est décrite plus haut l'accroissement de B n'est pas déterminant pour éviter le blocage thermique.

On constate également que pour de grandes valeurs de B, le critère N varie comme N_eV_e. Dans le cas d'un plasma coulombien, c'est à dire complètement ionisé, N variera comme N_e², et dans le cas d'un plasma faiblement ionisé, donc non coulombien, N variera comme N_e. Sachant que N_e varie exponentiellement en fonction de la température dans la plage non coulombienne [7] (T < 6000 °K pour de l'argon sous l bar), on en déduit que le blocage thermique doit être très sensible aux variations de température dans cette plage.

Par contre, dans la plage coulombienne où Ne varie linéairement en fonction de la température, le blocage thermique sera moins sensible aux variations de température.

Les effets de gaz réels, qui se concrétisent par une diminution de γ ont une action favorable et le champ de force agit d'autant mieux qu'il est dirigé suivant la direction de la vitesse (J_x nul).

Deux cas particuliers sont donc intéressants à développer:

- 1 perpendiculaire à la direction de l'écoulement (θ = 0):

$$K \ll \frac{1+Z_1}{\gamma-1} = K_L$$
 of $N = \frac{\alpha_0 B^2 L(1+Z_1)}{\rho V(\gamma-1)} >> 1$ (III.58)

- J perpendiculaire aux caractéristiques (θ = α):

$$K \ll \frac{1+Z_1}{\gamma + 1} = K_L \text{ et } N = \frac{M^2 - 1}{M^2} \frac{\sigma_0 B^2 L (1+Z_1)}{\rho V (\gamma - 1)} >> 1$$
(III.59)

Le cas envisagé dans les développements théoriques correspond à la deuxième solution

On constate une bonne confirmation de ces résultats théoriques dans les travaux de Forestier [3], lequel a calculé différemment la valeur limite du facteur de charge K_L . Il a obtenu K_L = 4.5 pour γ = 1.275, tandis que le critère (III.54) donne K_L = 4.6.

II.4 - RESULTATS NUMERIQUES ET CONDITIONS EXPERIMENTALES.

Envisageons tout d'abord le problème de l'effet Hall. Nous avons vu que pour obtenir un champ de force parallèle aux caractéristiques montantes, il fallait $\theta = \alpha$.

On peut ensuite calculer le champ de force JxB à appliquer au fluide en fonction des caractéristiques de l'écoulement du plasma obtenu en tube à choc, pour une pression constante p=1 bar et un rayon de courbure de 0.2 m. Le plasma d'argon est en régime coulombien. J est calculé en accord avec la relation (III.46). A partir des conditions plasma définies dans le tableau 1 (\$1.4), on obtient:

Tableau 2 : Paramètres d'interaction MHD en tube à choc pour une pression de 1 bar

Mach		1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
В	Testa	0.28	0.51	0.73	0.96	1.2	1.3	1.6
j	A/m2x 10-6	4.8	3	2.4	2.1	2	2	2.1
JΒ	N/m3 x 10-6	1.3	1.5	1.7	2	2.4	2.6	3.4
β		1	0.89	0.8	0.73	0.66	0.62	0.58
KL		3	3.7	4.6	5.5	6.5	7.2	7.8
K		4.6	1.9	1.4	1.2	1.16	1.1	1.1
FL		0.40	0.50	0.53	0.57	0.60	0.63	0.66
1 L		0.80	0.17	0.055	0.031	0.018	0.013	0.01

On constate tout d'abord que les valeurs du champ magnétique, de l'ordre du tesla, ainsi que celles de la densité de courant, de l'ordre de 2106 A/m², sont relativement faibles et ne présentent pas de difficultées majeures de mise en œuvre Ces intensités ont déjà été réalisées par Fontaine [2] et Forestier [3]

Ensuite, on remarque que du fait des faibles valeurs de B aux nombres de Mach faibles, J doit être important, et de ce fait l'effet Joule est fort. Il y a même risque de blocage thermique pour un écoulement à Mach 14, comme le montrent les valeurs du facteur de charge K (K = J/oVB + 1) comparées à K_L.

Par contre pour les écoulements plus rapides, l'effet Joule devient très faible et le blocage thermique n'est pas à craindre. On constate ainsi que l'énergie introduite pas effet Joule est négligeable devant le travail des forces de volume.

Ces conditions permettent de définir une expérience de suppression d'ondes de choc réalisable en soufflerie à rafale. La figure 29 montre le schéma d'un tel montage, composé d'un coude simple. Les conditions tube à choc devront se situer de préférence autour d'un écoulement de Mach 1.6, afin de réaliser des conditions où l'effet Joule est peu important avec un champ magnétique relativement faible.

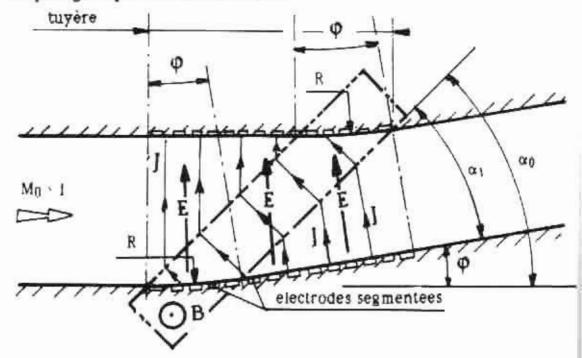


Figure 29 : Montage expérimental de suppression d'onde de choc pour soufflerie à rafale.

Dans une optique plus générale, le redressement des caractéristiques autour d'un obstacle pariétal de faible épaisseur relative en forme de bosse, conduit à distinguer trois zones autour du profil, comme le montre la figure 30 il s'agit des deux zones amont et avai qui sont convergentes, et dans lesquelles le champ de force doit accélérer le fluide, et de la zone centrale, divergente, dans laquelle l'écoulement doit être ralenti.

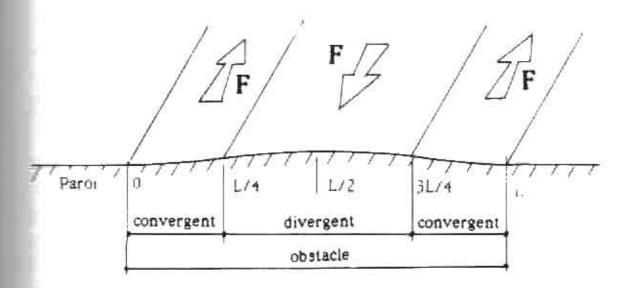


Figure 30 : Redressement des caractéristiques autour d'un profil de faible épaisseur relative.

CHAPITRE IV

MODELES BIDIMENSIONNELS STATIONNAIRES POUR UN GAZ PARFAIT

CHAPITRE IV

MODELES BIDIMENSIONNELS STATIONNAIRES

POUR UN GAZ PARFAIT

Dans ce chapitre, deux études indépendantes sont présentées. La première, relativement courte, concerne une étude bidimensionnelle stationnaire à pression constante qui complète en quelque sorte l'étude en régime quasi-unidimensionnel. Elle permet d'expliciper le rôle de chacune des deux composantes du champ de force mises en évidence dans ces premiers développement.

Dans la seconde partie sont présentés les développements d'un modèle de calcul bidimensionnel stationnaire des écoulements supersoniques en présence de forces de Laplace, basé sur la méthode générale des caractéristiques. L'approche quasi-unidimensionnelle a nécessité le développement d'un premier modèle bidimensionnel, qui a été mené en correspondance avec la réalité physique des phénomènes. C'est ainsi, par exemple que les directions caractéristiques ont été présentées comme les directions de propagation des perturbations de pression, ou ondes de Mach.

L'approche bidimensionnelle qui va maintenant être développée s'appuie uniquement sur la résolution mathématique de systèmes d'équations différentielles, sans faire le lien avec les phénomènes physiques. Cette résolution va être abordée dans le cas d'écoulements plans ou à symétrie de révolution, en interaction MHD non isentropique. Cela signifie que l'effet Joule est pris en compte dans ces développements théoriques. Ce phénomène restant malgré tout négligeable, il ne sera plus pris en compte dans l'étude numérique.

Cette étude conduit à l'établissement d'un critère 'anti-choc' basé sur la condition de parallélisme des caractéristiques. Ce critère permet d'évaluer la géométrie du champ de force à appliquer en fonction des dimensions caractéristiques de l'obstacle pariétal, et des paramètres de l'interaction.

Enfin une étude de simulation numérique est développées pour des écoulements isentropiques, permettant d'approcher les phénomènes à prendre en compte pour d'éventuelles expériences en tube à choc. Deux types d'écoulements sont ainsi simulés

- l'écoulement dit interne qui correspond à un écoulement arrivant dans la tuyere convergente d'un tube à choc;
- l'écoulement dit externe, qui correspond à l'écoulement autour d'une aile mince entièrement plongé dans le fluide

IV.1 - ETUDE EN REGIME BIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE ISEN-TROPIQUE A PRESSION CONSTANTE.

Dans l'étude quasi-unidimensionnelle stationnaire, nous avons montré que le champ de force doit être dirigé suivant la direction des caractéristiques montantes et qu'il admettait deux composantes F_{χ} et F_{ψ} . Dans cette première étude bidimensionnelle, le rôle de chacune de ces composantes est explicité.

IV.1.1 - Système d'équations générales pour un régime bidimensionnel stationnaire dans un repère lié à l'écoulement.

Dans un écoulement maintenu à pression constante par un champ de force [1B], les ondes de choc qui correspondent à la focalisation des ondes de pression dans un écoulement supersonique, ne peuvent pas apparaître. Associée à cette condition, l'hypothèse d'isentropie, justifiée du fait d'un effet Joule négligeable, entraîne également la constance de la température et de la masse volumique. Les conclusions de l'étude quasi-unidimensionnelle sont ainsi reconstituées. Les équations de conservation s'écrivent donc:

$$\rho \nabla \frac{\partial x}{\partial x} + \rho \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \nabla^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$
 (IV.1)

$$\rho \, \forall \, \frac{\partial \, \forall}{\partial \, x} \, + \, \frac{\partial \, p}{\partial \, x} \, = \, J_{p} \, B \, = \, F_{z} \tag{IY.2}$$

$$\rho \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = -J_x B = F_y \tag{IV 3}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}}{\rho \, \nabla \, \mathbf{T}} = 0 \tag{IV.4}$$

L'équation de l'entropie remplace celle de l'énergie

IV 1.2 - Cas d'un écoulement à pression constante.

En remarquant que

$$V^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = M^2 \frac{\partial p}{\partial x} \tag{IV 5}$$

et en introduisant (IV.1) dans (IV.2), on obtient;

$$J_{y}B = -\rho \nabla^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \langle M^{2} - 1 \rangle \frac{\partial P}{\partial x}$$
 (IV 6)

$$J_{A}B = -\rho \nabla^{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{IV.7}$$

Dans le cas d'un écoulement à pression constante, le résultat final est :

$$J_z B = -\frac{\gamma p}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{IV.8}$$

$$J_{y}B = -\frac{\gamma p}{sm^{2}\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$
 (IV 9)

Il apparait ainsi que le champ de force est directement lié à la forme des tubes de courant, lesquels sont déterminés à partir de leur courbure, λΦ/λα, et de leur variation de section, correspondant à λΦ/λγ

IV.1.3 - Etudes de deux écoulements particuliers.

Deux études analytiques simples permettent alors d'étudier l'écoulement et le champ de force correspondant pour chacune de ces deux conditions aux limites.

C1 - Dans un convergent-divergent simple.

La première considére un écoulement tel que les lignes de courant forment un faisceau de droites concourantes. Cet écoulement est décrit sur la figure 31 . Le point fosal est un point singulier auquel ne correspond pas de solution physique.

Dans le repère Ro lié au laboratoire, l'équation des lignes de courant est

$$y_0 = m x_0 - m x_y + y_y$$
 (IV.10)

où le paramètre "m" correspond à la pente des droites et décrit l'ensemble des réels, x_F et y_F sont les coordonnées du point focal F. L'angle ϕ formé par la direction de l'écoulement et l'axe x_0 du repére se déduit de:

$$\Phi = \operatorname{Arcw}\left(\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \cdot} = \frac{\partial}{\partial \cdot} \left(\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}\right)^2} \tag{IV.11}$$

ce qui conduit à:

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \cdot \cdot \cdot} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \cdot \cdot \cdot} \frac{1}{1 + \mathbf{m}^2} \tag{IV.12}$$

d'ou

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\sin(\mathbf{\Phi})}{1}$$
 et $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{y}_0} = \frac{\cos(\mathbf{\Phi})}{1}$ (IV.13)

T' représente la distance entre le point consideré et le point focal. T'est positif dans le divergent et négatif dans le convergent.

Les relations de passage du repère R₀ au repère R lié aux lignes de courants sont les suivantes:

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = \cos(\phi) \qquad \frac{\partial x_0}{\partial y} = -\sin(\phi) \qquad (IV.14)$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial y} = \sin(\phi) \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y} = \cos(\phi)$$

Après changement d'axes, les variations de l'angle Φ deviennent

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{1} \qquad (19.15)$$

Le champ de force se réduit alors à:

$$F_{x} = -\frac{\rho \, \nabla^{2}}{1}$$
 et $F_{y} = 0$ (IV 16)

On trouve que champ de force est dirigé suivant les lignes de courant.

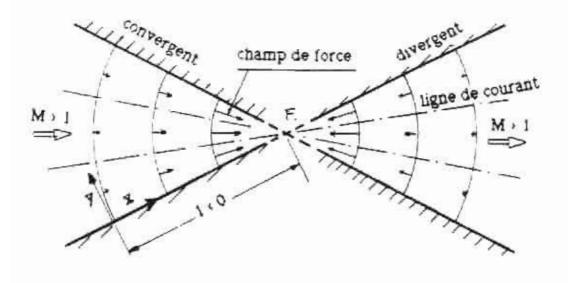


Figure 31 : Allure des lignes de courant et du champ de force dans un écoulement convergent-divergent à pression constante.

C2- Dans un coude circulaire.

Dans la deuxième étude, l'écoulement n'est plus soumis à des variations de section, mais uniquement à des changements de direction, comme décrit sur la figure 32. Pour cela, les lignes de courant sont assimilées à des cercles concentriques de rayon "r", et d'équations dans le repère R₀:

$$\mathbf{r}_0 = -r \sin(\mathbf{\Phi}) \tag{IV 17}$$

De façon similaire au paragraphe précédant, nous obtenons la valeur du champ de force à appliquer

$$F_z = 0$$
 et $F_{\psi} = -\frac{\rho \, \nabla^2}{I}$ (IV 18)

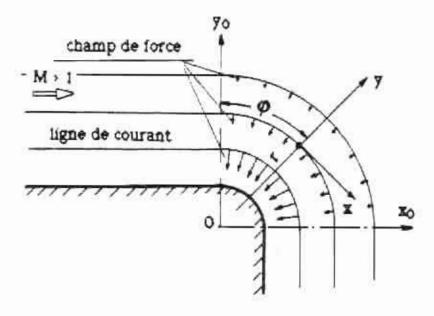


Figure 32. Allure des lignes de courant et du champ de force dans un écoulement circulaire à pression constante.

Le champ de force est alors dirigé perpendiculairement au vecteur vitesse.

Cette étude bidimensionnelle permet d'expliciter, en accord avec l'étude quasi-unidimensionnelle, le rôle des deux composantes du champ de force. Considérons un élément de volume 'dv' d'un fluide compressible. Il est soumis à trois types de forces si on tient pas compte des forces de gravitation les forces d'inertie, les forces de pression, et les forces électromagnétiques. Pour éviter les variations de pression, et donc la formation des ondes de choc, le champ de force JxB doit équilibrer exactement les forces d'inertie comme le montrent (IV.16) et (IV.17). Pour se faire, la composante Fx du champ de force doit compenser les effets des accélérations rectilignes dues aux variations de section des tubes de courant et la composante Fy doit compenser les accélérations centripètes dues aux changements de direction de l'écoulement.

IV.2 - ETUDE D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE BIDIMENSIONNEL PLAN OU A SYMETRIE DE REVOLUTION NON ISENTROPIQUE EN REGIME STATIONNAIRE: METHODE DES CARACTERISTIQUES.

Cette nouvelle approche nécessite de reprendre entièrement les développements théoriques à partir des équations de conservation. La prise en compte de l'effet Joule conduit alors à une formulation particulière des equations de Crocco et de St Venant qui sont ainsi établies

Cependant, la correspondance entre cette approche et des expériences menées en tube à choc n'est pas parfaite, et entraîne un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui vont tout d'abord être abordées

IV.2.1 - Hypothèses simplificatrices: effet Hall et champ électrique induit.

- L'effet Hall;

La complexité des calculs nous ont amené en premier lieu à restreindre le champ d'application du modèle à des interactions MHD à effet Hall faible. Les paramètres de l'interaction pour une expérience en tube à choc décrits aux Chapitres I et III indiquent que pour des expériences de ce type, un champ magnétique de l'ordre du tesla conduit à un effet Hall de l'ordre de l'unité $(\beta \approx 1)$, ce qui, tout en n'étant pas un effet Hall important, n'est cependant pas négligeable.

Ce modèle de calcul ne s'applique donc pas strictement aux conditions d'expériences définies au Chapitre I.

Cependant, on a également montré qu'une adjonction d'un faible pourcentage de xénon dans le gaz d'essai pouvait conduire à une augmentation de la fréquence de collision électronique et ainsi entrainait une diminution de la valeur du paramètre de Hall. (§ 1.5.4 : pour un mélange à 20% de xénon, β diminue d'un facteur 2.5)

Dans les expériences faites par Fontaine [2] et Forestier [3], les densités de courant importantes (J = 107 A/m²) entraînaient une mise en situation d'hors équilibre thermodynamique du plasma, conduisant également à une augmentation de la fréquence de collision d'où une diminution du paramètre

de Hall (β = 0.4)

Avec un mélange au xénon, la densité volumique du gaz étant plus importante que pour de l'argon pur, les forces appliquées devront être plus importantes, et en augmentant la valeur de J, on peut envisager également une mise en situation d'hors équilibre du plasma entrainant encore une diminution de B

Il doit être ainsi possible de trouver des conditions plasma et champ croisé en tube à choc conduisant à un effet Hall négligeable

Dans le cas de l'analogie hydraulique résultant de l'écoulement d'eau salée, l'effet Hall est négligeable. La conductivité électrique de l'eau est créée par le déplacement des ions dans le champ électrique, et du fait de leur masse importante, le champ magnétique les dévie peu de leur trajectoire rectiligne

- Le champ électrique induit

Un autre phénomène d'une certaine importance n'est également pas pris en compte. Il s'agit du champ contre électromoteur ViB qui intervient à travers la loi d'Ohm. La prise en compte de ce phénomène réclamerait de très longs temps de calcul sur ordinateurs du fait des nombreuses itérations que nécessiterait le calcul du champ électrique modifié en chaque point de l'écoulement par ce champ contre-électromoteur.

Dans le cas d'expériences en analogie hydraulique, la faible conductivité électrique de l'eau salée, entrainant l'application de champs électriques relativement importants, associée à des vitesses d'écoulement lentes (V = 10-1 m/s), font que le champ contre-électromoteur est effectivement négligeable. Dans ce cas, on obtient un VxB négligeable quelque soit la direction de l'écoulement.

Pour des écoulements d'argon en tube à choc, si la tension aux bornes des électrodes est constante tout le long de la zone d'interaction, la longueur sur laquelle le plasma subit une accélération est limitée. L'augmentation de la vitesse entraîne une augmentation du ViB qui vient équilibrer la tension appliquée aux électrodes (K=1). Forestier [3] (pl.3.27) qui a étudié plus particulièrement l'accélération des écoulements d'argon obtenus en tube à choc par un champ de force JiB a montré que cette accélération était limitée à une longueur de 0.04 in dans sa tuyère, pour des conditions de plasma

équivalentes à celles de Fontaine [2] et décrites au $$1.5.2 (M_{00}=10.5, p_1=5)$ torr .B=1.3 testa .E=9880 V/m , longueur de la tuyére L=0 .Im)

Pour compenser l'effet du champ électrique induit, on peut alorsalimenter les paires d'électrodes opposées à l'aide d'un montage de puissance fonctionnant en générateur de courant et non en générateur de tension Dans ces conditions, la tension entre chaque paire d'électrodes est adaptée automatiquement de manière à délivrer un courant constant dans toute la longueur de la tuyère, pratiquement indépendamment de la vitesse Ce montage peut être réalisé en équipant le circuit de puissance d'une Torte résistance (environ 1 Ohm).

Dans le cas des simulations numériques décrites sur les figures 44 et 45, le champ ViB et le champ E sont quasiment colinéaires, rendant la situation proche des conditions quasi-unidimensionnelles. Entre les électrodes, le circuit électrique en régime stationnaire est le suivant:

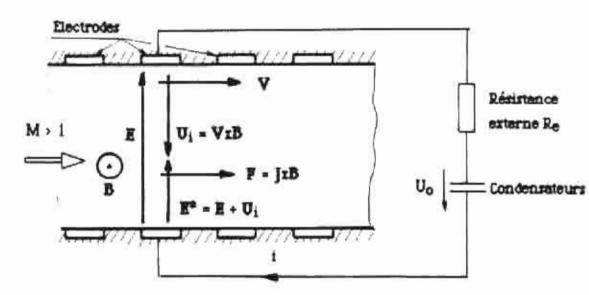


Figure 33 : Circuit d'alimentation des électrodes en montage générateur de courant.

La loi d'Ohm décrivant ce circuit est:

$$U_0 - VBh = (R_e + R_p) I \qquad (IV.19)$$

et on obtient en dissérentiant:

$$\frac{dI}{dV} = -\frac{Bh}{(R_0 + R_p)} \tag{IV.20}$$

Les condition du tube à choc peuvent être les suivantes

- B = I tesla
- Section de la tuyère h x l = 0 l x 0 05 m2
- longueur d'interaction L = 0 l m
- σ = 2900 mhos/m

Elles donnent une résistance du plasma de Rp= h/o s = 7 10-2 Ohm.

Pour que la vitesse intervienne faiblement sur l'intensité (Al/AV + -0 1).

Il faut, en accord avec la relation (IV 20), équiper le circuit de puissance d'une résistance Re de l'ordre de 1 Ohm.

Dans le cas où le champ induit VrB ne serait pas compensé par un montage en générateur de courant, il se comporterait comme un régulateur sur la vitesse de l'écoulement. Dans les régions convergentes, où l'écoulement est raienti par la paroi, E* augmenterait, entraînant une augmentation de l'action de IrB

Par contre, dans les régions divergentes où la vitesse augmente, on obtiendrait une augmentation du VxB On pourrait même envisager le cas où l'accélération due au divergent serait telle que VxB devienne supérieur à E. L'interaction passerait alors en mode convertisseur, et l'écoulement serait ralenti par le champ de force. On voit ainsi que le champ de force peut jouer un rôle favorable dans la suppression des ondes de choc, en agissant comme régulateur du champ de force, limitant de ce fait les variations de pression.

Dans les cas où le champ électrique induit n'est pas colinéaire au champ électrique appliqué, comme dans les solutions de type externes (Fig.46), la non prise en compte de VxB est difficilement justifiable pour les conditions d'interaction du tube à choc. De même que pour l'effet Hall, l'action du champ induit doit entraîner une déformation du potentiel électrique, rendant la géométrie du champ de force asymétrique.

Ces hypothèses ne conviennent donc pas exactement pour décrire une interaction du type externe avec les conditions d'écoulement obtenus en tube à choc et décrites au chapitre I, mais elles sont satisfaisantes pour tous les cas où VxB est soit négligeable, soit compensé par les variations du champ électrique appliqué, et que l'effet Hall est faible.

Néanmoins, cet avertissement étant fait, le courant contre-électromoteur a

été négligé dans les calculs d'écoulements autour de l'aile et les résultats obtenus avec cette hypothèse doivent être considéré comme une approche qualitative de ce type d'écoulements.

IV.2.2 - Etablissement des équations générales pour un gaz parfait en régime stationnaire.

IV.2.2.1 Les équations de conservation en régime stationnaire.

Au chapitre II, les équations de la mécanique des fluides ont été développées puis simplifiées. Rappellons rapidement ces résultats en régime stationnaire:

- conservation de la masse:

$$\nabla \cdot \rho \nabla = 0 \tag{IY.21}$$

- conservation de la quantité de mouvement:

$$\nabla \cdot \nabla \otimes \nabla + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{J \times B}{\rho}$$
 (IV.22)

- conservation de l'énergie : cette équation prend deux formes équivalentes : L'expression générale qui vaut d'après Sutton [7] p.121:

$$\rho \nabla \cdot \nabla e + p \nabla \cdot \nabla = \mathbf{E}^{+} \cdot \mathbf{J}$$
 (IY.23)

L'équation de Bernouilli obtenue en remplaçant ∇ .V à travers l'équation de conservation de la masse puis en introduisant la quantité de mouvement . Elle s'écrit, en régime stationnaire (h = e + p/p):

$$\rho \, \nabla \cdot \nabla \, (h + \frac{v^2}{2}) = J \cdot E \qquad (IV.24)$$

VI.2.2.2 - Formulation non isentropique de dp/dx.

ICHICO . L'EXPIESSION BEHELOIE QUI TOUC & après successi (1) p. 10 1.

$$\rho \nabla \cdot \nabla e + p \nabla \cdot \nabla = \mathbf{E}^{+} \cdot \mathbf{J}$$
 (IY.23)

L'équation de Bernouilli obtenue en remplaçant V.V à travers l'équation de conservation de la masse puis en introduisant la quantité de mouvement.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s = cst} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{p = cst} \frac{ds}{dx}$$
 (IV.25)

L'effet Joule fait apparaître une variation d'entropie qui vaut d'après Sutton [8]: -

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{JE^*}{\rho YT} \tag{IY.26}$$

Il faut alors expliciter le terme $(\partial \rho/\partial s)_p$. Pour cela, prenons le cas général d'un gaz réel. L'équation d'état s'écrit d'après Norman [10]:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} (1 + Z_p) - \frac{dT}{T} (1 + Z_t)$$
 (IV.27)

Les coefficients Z_p et Z_t sont respectivement les facteurs de compressibilité à pression et à température constante. Exprimons la loi d'état (IV.27) en fonction de la pression 'p' et de l'entropie 's' :

$$\rho = \rho(p,s) \implies d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p ds \tag{IV.28}$$

$$T = T(p,s) \Rightarrow dT = (\frac{\partial T}{\partial p})_s dp + (\frac{\partial T}{\partial s})_p ds$$
 (IV.29)

donc:

$$\frac{d\rho}{\rho} = dp \left(\frac{1+Zp}{p} - \frac{1+Zt}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \right) - \frac{1+Zt}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p ds \qquad (IV.30)$$

C'est à dire que :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s} = \rho \left(\frac{1+Z_{p}}{p} - \frac{1+Z_{t}}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{s}\right) = \frac{1}{a^{2}}$$
 (IV.31)

et surtout:

$$T = T(p,s) \Rightarrow dT = (\frac{\partial T}{\partial p})_s dp + (\frac{\partial T}{\partial s})_p ds$$
 (IV.29)

donc:

rechercher une formulation explicite. Une des expressions les plus générale de l'entropie est :

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho}$$
 (IV.33)

et pour un gaz réel, dh vaut d'après [9] :

$$dh = C_p dT - Z_t \frac{dp}{\rho}$$
 (IV.34)

La combinaison de ces deux expressions conduit à :

$$dT = \frac{T}{C_p} ds + \frac{1+Z_t}{\rho C_p} dp$$
 (IV.35)

d'où l'expression recherchée :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{p} = \frac{T}{C_{p}}$$
 et en même temps $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{s} = \frac{1+Z_{t}}{\rho C_{p}}$ (IV.36)

Introduisons dans la relation (IV.25) les relations (IV.26), (IV.31), (IV.32) et (IV.36) pour obtenir finalement les variations de la masse volumique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{J^2 (1+Z_t)}{\sigma \nabla C_p T}$$
(IY.37)

Les coefficients Z_p et Z_t qui apparaissent dans les relations précédentes sont nuls pour un gaz parfait, donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{J^2}{\sigma \nabla C_p T}$$
 (IY.38)

Quand l'effet Joule est négligeable, l'écoulement peut être considéré comme isentropique, et les équations décrivant ce type d'écoulements sont obtenues en posant simplement :

introduisons dans la relation (IV.25) les relations (IV.26), (IV.31), (IV.32) et (IV.36) pour obtenir finalement les variations de la masse volumique :

Ces considérations thermodynamiques étant faites, revenons aux équations de conservation: à l'origine d'un repère lagrangien (u=V, v=0), l'équation de continuité s'écrit donc en régime bidimensionnel:

$$- \rho a^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + V \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{J^{2} a^{2}}{\sigma C_{p} T}$$
(IV.40)

IV.2.2.3 - Equation de Crocco pour un écoulement en interaction MHD.

L'équation de Crocco s'obtient en explicitant le gradient de l'enthalpie . V h est obtenu à partir de l'équation de Bernouilli qui s'écrit en régime stationnaire, avec effet Joule et champ de force:

$$\rho \ \nabla \cdot \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = J \cdot E^* + \nabla \cdot J x B \tag{IV.41}$$

On voit qu'il est nécessaire de faire apparaître le produit scalaire par V dans le terme Joule. Pour cela, remarquons que l'énergie Joule introduite dans l'écoulement est exprimée par :

$$W_{J} = JE^* dt = JE^* \frac{dx}{V}$$
 (IV.42)

Considérons un déplacement 'ds' (dx, dy) quelconque dans l'écoulement, indépendant du fluide. L'énergie Joule transmise au le fluide reste proportionnelle au déplacement parallèle au vecteur vitesse, ce qui s'écrit :

$$W_{J} = JE^{*} \frac{\Psi \cdot ds}{V^{2}}$$
 (IV.43)

Le coefficient significatif faisant intervenir la vitesse dans le terme d'énergie Joule est donc V.ds. L'équation de Bernouilli peut alors s'écrire (expression scalaire):

$$W_{J} = JE * dt = JE * \frac{dx}{\nabla}$$
 (IV.42)

ce qui donne le gradient de l'enthalpie 'h' (expression vectorielle) .

$$\nabla (h) = -\nabla (\frac{\nabla^2}{2}) + J \cdot E * \frac{ds}{\rho \nabla \cdot ds} + \frac{J \times B}{\rho}$$
 (IY.45)

L'entropie 's' est introduite à partir de l'équation (IV.33) qui permet d'écrire :

$$T \nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho}$$
 (IY.46)

Transformant dans (IV.45) ∇ h avec (IV.45) ainsi que ∇ p avec (IV.22) et en remarquant que :

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \nabla \cdot \left(\nabla \otimes \nabla\right) = \nabla \mathbf{x} \text{ rot } \nabla \tag{IV.47}$$

l'équation de Crocco incluant l'effet Joule est finalement:

$$\rho T \nabla s + \nabla x \operatorname{rot} \nabla = \frac{J_{\perp} E^{+}}{\rho \nabla_{\perp} ds} ds$$
 (IV.48)

Nous constatons que l'effet Joule agit sur l'entropie et sur le rotationnel, c'est à dire sur la courbure des lignes de courant.

Le long d'une ligne de courant, où le déplacement ds (dx,dy) dans un repère lié au laboratoire est tel que dy/dx = v/u, cette relation devient :

$$T \nabla s + \nabla x \operatorname{rot} \nabla = \frac{J \cdot E^*}{\sigma \cdot (n^2 + \sigma^2)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
 (IY.49)

et à l'origine d'un repère lagrangien (u = V, v = 0), on obtient :

$$T \nabla s + \nabla x \operatorname{rot} \nabla = \frac{J \cdot E^*}{0 \cdot T^2} \begin{pmatrix} \nabla \\ 0 \end{pmatrix}$$
 (IY.50)

On remarque que le champ de force n'apparait pas dans l'équation de Crocco. Seul l'effet Joule intervient, et cette expression est valable pour un écoulement non isentropique avec ou sans champ de force.

Nous constatons que l'effet Joule agit sur l'entropie et sur le rotationnel.

IV.2.2.4 - Equation de St Venant pour un écoulement en interaction MHD.

Cette équation permet de déterminer la vitesse du son 'a' en un point quelconque de l'écoulement en interaction avec le champ croisé. Le point de départ est la relation (IV.45) qui s'écrit, en considérant un déplacement ds le long d'une ligne de courant et en se localisant à l'origine d'un repère lagrangien :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{y^2}{2} \right) = \frac{J \cdot E^*}{\rho y} + \frac{F_x}{\rho} \tag{IY.51}$$

Pour un gaz parfait, on a alors:

$$h = Cp T = \frac{1}{\gamma - 1} a^2 \qquad (IV.52)$$

ce qui donne, le long d'une ligne de courant :

$$\frac{2 a da}{\gamma - 1} + V dV = \left(\frac{J^2}{\sigma \rho V} + \frac{J_y B}{\rho}\right) dx$$
 (IV.53)

L'intégration de cette expression le long d'une ligne de courant, avec a_0 et V_0 respectivement les vitesses du son et de l'écoulement en amont de la zone d'interaction, s'écrit :

$$\frac{1}{\gamma - 1} a^2 + \frac{v^2}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} a_0^2 + \frac{v_0^2}{2} + \int_{M_C} \frac{J^2}{\sigma \rho v} dx + \int_{M_C} \frac{F_x}{\rho} dx$$
 (IV.54)

Cette équation permet, connaissant la vitesse locale et la distribution du champ de force et de l'effet Joule, de calculer la vitesse du son. Les caractéristiques du champ de force sont déterminées par la position des électrodes et la géométrie du champ magnétique, la vitesse est déterminée par la résolution du systèmes hyperbolique formé par les équations (IV.21) et (IV.22).

$$\frac{1}{\gamma - 1} + \gamma \, d\gamma = \left(\frac{1}{\sigma \rho \, V} + \frac{\gamma}{\rho} \right) \, dx \qquad (IV.53)$$

IV.2.3 - Méthode des caractéristiques appliquée à un écoulement supersonique bidimensionnel plan ou à symétrie de révolution, en interaction avec un champ croisé JxB.

La méthode consiste à écrire une combinaison linéaire des équations de conservation, et à rechercher ensuite les directions le long desquelles les différentielles des variables sont totales. Ce sont les directions caractéristiques, qui réintroduites dans la relation formée par la combinaison linéaire donne les conditions sur les variables relatives à chacune de ces directions. La conservation de l'énergie conduisant à la détermination de la vitesse du son, il reste un système de trois équations ((IV.21) et (IV.22)) à trois inconnues qui sont la pression "p" la vitesse V ainsi que sa direction Φ .

La prise en compte de la symétrie de révolution est obtenue en considérant une formulation tridimensionnelle stationnaire de ces équations (IV.21) et (IV.22) dans un repère cylindrique R_0 (x_0 , y_0 , z_0) lié au laboratoire, le vecteur vitesse V ayant trois coordonnées (u_0 , v_0 , w_0), et en imposant ensuite les conditions :

$$\frac{\partial}{\partial z_0} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_0 = 0 \tag{IY.55}$$

Plaçons nous ensuite à l'origine d'un repère R (x,y,z) lié à l'écoulement (v = 0 et u = V). La combinaison de (IV.34) et (IV.55) conduit à:

$$\rho a^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v_{0}}{v_{0}} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{J^{2} a^{2}}{\sigma C_{D} T} = 0$$
 (IY.56)

où v_0 est la projection de la vitesse suivant l'ordonnée y_0 du repère R_0 . On obtient ensuite avec l'équation (IV.22), toujours dans le repère R:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{0} \frac{\partial p}{\partial x} = J_y B_z - J_z B_y = F_x \qquad (14.57)$$

$$n \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{d^2 z_0} \frac{\partial p}{\partial x} = J B - J B = F_{max}$$

Plaçons nous ensuite à l'origine d'un repère R (x,y,z) lié à l'écoulement (v = 0 et u = V). La combinaison de (IV.34) et (IV.55) conduit à:

On remarque que les équations de conservation de la quantité de mouvement sont inchangées par rapport aux expressions bidimensionnelles. La seule modification se trouve dans l'équation de continuité (IV.56) qui contient le terme supplémentaire v_0/y_0 . Pour traiter les deux cas simultanément, nous introduisons un coefficient δ devant ce terme (δ v_0/y_0) qui vaut 0 dans le cas d'un écoulement plan et 1 dans le cas d'un écoulement à symétrie de révolution.

L'équation de l'énergie est traduite par l'équation de St Venant qui peut s'écrire en remarquant que a = V/M:

$$\frac{dM}{M} - \frac{dV}{V} (M^2 (\frac{\gamma - 1}{2}) + 1) = - (J_y B + \frac{J^2}{\sigma V}) \frac{M^2 (\gamma - 1)}{2 \sigma V^2} dx$$
 (IV.60)

La combinaison linéaire des relations (IV.56), (IV.57), et (IV.58), et la décomposition de $(\partial_x/\partial x = d_x/\partial x - \partial_x/\partial x)$ faisant apparaître les différentielles totales conduit à:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}(\lambda_{1}\rho\mathbf{v}^{2}+\lambda_{2}\mathbf{v})+\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}}(\lambda_{3}\mathbf{v})+\frac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{x}}(\lambda_{1}\mathbf{v}+\frac{\lambda_{2}}{\rho})+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}}(-\lambda_{1}\rho\mathbf{a}^{2}\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}-\lambda_{2}\mathbf{v}\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}})+\\ \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{y}}(-\lambda_{3}\mathbf{v}\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}+\lambda_{1}\rho\mathbf{a}^{2})+\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{y}}(-\lambda_{1}\mathbf{v}\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}-\frac{\lambda_{2}}{\rho}\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}+\frac{\lambda_{3}}{\rho})+(\lambda_{1}(\frac{\delta\rho\mathbf{a}^{2}\mathbf{v}_{0}}{\mathbf{y}_{0}}-\frac{J^{2}\mathbf{a}^{2}}{\sigma\mathbf{C}_{0}T})-\lambda_{2}\frac{F_{\mathbf{x}}}{\rho}-\lambda_{3}\frac{F_{\mathbf{y}}}{\rho})=0$$
 (IV.61)

Les coefficients λ_1 , λ_2 , λ_3 doivent être tels que les facteurs des dérivées partielles $\partial_-/\partial x$ soient nuls. On obtient un système de Cramer qui, pour accepter une solution $(\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3)$ différente de $(0, \ 0, \ 0)$ doit avoir un déterminant principal nul. Cette condition conduit à trois directions particulières dites directions caractéristiques qui sont, avec $a^2=V^2\sin^2\alpha$,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{v^2 - a^2}} = \pm tg \alpha \qquad (IV.62)$$

La première direction entraı̂ne λ_1 et λ_2 nuls, et λ_3 indéterminé, donc :

$$\nabla du + \frac{dp}{\rho} = \frac{J_y B}{\rho} dx \qquad (IV.63)$$

Les coefficients λ_1 , λ_2 , λ_3 doivent être tels que les facteurs des dérivées partielles $\partial t/\partial x$ soient nuls. On obtient un système de Cramer qui, pour accepter une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ différente de (0, 0, 0) doit avoir un

$$\frac{dY}{V}\frac{dx}{dy} + \frac{dp}{\rho V^{2}}\frac{1}{v^{2}\alpha} = (-\delta \frac{v_{0}}{V y_{0}} + \frac{J^{2}}{\sigma \rho V C_{x}T} - \frac{F_{x}}{\rho V^{2}} + \frac{dx}{dy}\frac{F_{y}}{\rho V^{2}}) dx \qquad (IY.64)$$

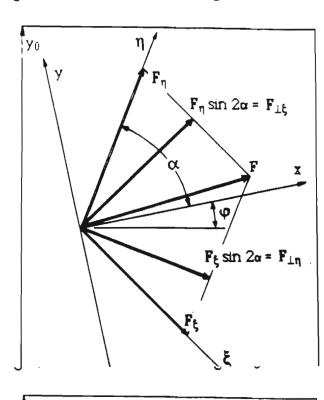
En conclusion, les conditions de compatibilité sur les directions caractéristiques sont les suivantes:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V du + \frac{dp}{\rho} = \frac{J_y B}{\rho} dx \qquad (IV.65)$$

$$\frac{dy}{dx} = + tg \alpha \implies \frac{dp}{dx} = \cos \alpha + \frac{dv}{v} = \left(-\delta \frac{v_0}{v_y} \sin \alpha + \frac{J^2 \sin \alpha}{\sigma \rho v C_n T} - \frac{F_x \sin \alpha}{\rho v^2} - \frac{F_y \cos \alpha}{\rho v^2}\right) \frac{dx}{\cos \alpha} \quad (IV.6)$$

$$\frac{dy}{dx} = + tg \alpha \implies \frac{dp}{dx} = \sin \alpha \cos \alpha - \frac{dv}{v} = \left(-\delta \frac{v_0}{v_y} \sin \alpha + \frac{J^2 \sin \alpha}{\sigma \rho v C_n T} - \frac{F_x \sin \alpha}{\rho v^2} + \frac{F_y \cos \alpha}{\rho v^2}\right) \frac{dx}{\cos \alpha} \qquad (IV.67)$$

Reprenant les notations de Carrière [4], nous noterons η la direction caractéristique correspondant à (+tg α) et ξ la direction caractéristique correspondant à (-tg α) comme décrit sur la Figure 34.



On peut toujours introduire le nombre de Busemann P défini par:

$$d \mathbf{P} = dp \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma p}$$
 (IV.72)

Mais ce paramètre ne dépend plus uniquement de l'angle de Mach a, car l'équation de St Venant (IV.60) combinées à la relation (IV.64) conduit à :

$$d \alpha = d P \frac{\gamma - \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} - (J_y B + \frac{J^2 (\gamma - 1)}{\sigma V \sin^2 \alpha}) \frac{vg \alpha}{\rho V^2} dx \qquad (IV.73)$$

En l'absence d'interaction MHD, on retrouve ainsi l'expression permettant d'intégrer P en fonction de α , suivant la méthode de Busemann [4] qui donne alors:

$$\mathbf{P} = -\alpha - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad \text{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}} \right)$$
(IV.74)

Dans la zone d'interaction, et après celle-ci, le nombre de Mach n'est plus lié au nombre de Busemann P, et doit être calculé par intégration de l'équation de St Venant le long de la ligne de courant.

Dans tous les cas, P et ϕ restent liés aux coordonnées épicycloïdales par l'intégration des relations (IV.70) et (IV.71). En un point quelconque de l'écoulement, on écrira donc :

$$\Phi = \mu - \lambda \tag{IY.75}$$

$$\mathbf{P} = \mu + \lambda \tag{IV.76}$$

En considérant les équations (IV.70) et (IV.71), on constate que pour que l'effet Joule soit négligeable, la densité de courant doit être telle que :

Dans tous les cas, P et ϕ restent liés aux coordonnées épicycloïdales par l'intégration des relations (IV.70) et (IV.71). En un point quelconque de l'écoulement, on écrira donc :

$$\mathbf{\phi} = \mu - \lambda \tag{IY.75}$$

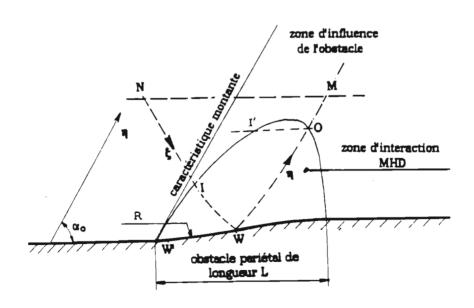
isentropique (]/]c ≈ 10⁻¹).

IV.2.4 - Critère de maintient du parallélisme des caractéristiques.

Un obstacle pariétal placé dans un écoulement supersonique va induire le redressement et le recoupement des caractéristiques issues de la paroi, générant ainsi une onde de choc. Un champ de force appliqué alors dans cette région doit permettre d'agir localement sur le fluide et de reconstituer le parallélisme des caractéristiques loin de la paroi.

C'est cette condition, proposée par Petit qui sert de base aux développements du critère anti-choc. Elle revient à considérer ϕ + α constant dans tout l'écoulement non perturbé.

Considérons dans l'écoulement le cheminement suivant, décrit sur la figure 35: partons d'un point N situé en amont de l'obstacle, et suivons la caractéristique descendante ξ passant par ce point, pénétrant dans la zone d'interaction en I (In), se réfléchissant sur la paroi en W (Wall), repartant en caractéristique montante η , et sortant de la zone d'interaction en O (Out) pour arriver en M dans l'écoulement aval .



Fimira 35 - Critàra de cumprección des ondes de choc



champ de force est nul, de l'écoulement perturbé, où le champ de force agit. On peut, en première estimation, considérer que c'est la géométrie du champ magnétique, perpendiculaire au plan de l'écoulement, qui délimité le champ de force. Dans le cas d'un champ de force évanescent, l'écoulement passe insensiblement de la zone non perturbé à la zone perturbée, sans que l'on puisse déterminer de frontière précise. Dans ce cas, les point I et 0 ne sont pas définis.

L'écoulement autour de l'obstacle doit être exempt d'ondes de choc, ce qui entraîne que dans toute la zone non perturbée, qui est notée ∞, les caractéristiques soient parallèles. On écrira alors à la frontière du champ de force en 0 :

$$\alpha + \Phi = Cst$$
 (IY.78)

et la direction de l'écoulement en 0 et le nombre de Busemann sont déterminée par :

$$\Phi_0 = \mu_0 - \lambda_0 \tag{IV.79}$$

$$\mathbf{P}_0 = \mu_0 + \lambda_0 \tag{IV.80}$$

On supposera tout d'abord que la caractéristique descendante ξ pénètre dans la zone d'interaction en O. Cela permet d'écrire :

$$\lambda_{H} = \lambda_{N} = \lambda_{I} = \lambda_{O} = \lambda_{OO}$$
 (IY.81)

La coordonnée épicycloïdale λ vaut au point W de la paroi, en suivant la caractéristique descendante de I à W :

$$\lambda_{\Psi} = \lambda_{I} + \int_{I}^{\Psi} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} d\xi = \lambda_{I} + \Delta \lambda_{I\Psi}$$
 (IV.82)

De même, on écrit en 0, en suivant la caractéristique montante de W à 0:

$$\mu_{\circ} = \mu_{\mathbf{W}} + \int_{\mathbf{W}}^{\bullet} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} d\eta = \mu_{\mathbf{W}} + \Delta \mu_{\mathbf{W}}$$
 (IV.83)

On supposera tout d'abord que la caractéristique descendante ξ pénètre

paroi ($\phi_{W} = \mu_{W} - \lambda_{W}$), et on obtient la valeur de μ_{0} en fonction du chemin parcouru le long des caractéristiques, en combinant les relations (IV.82) et (IV.83):

$$\mu_{O} = \lambda_{\infty} + \Phi_{\mathbf{w}} + \Delta \lambda_{\mathbf{I}\mathbf{w}} + \Delta \mu_{\mathbf{w}O}$$
 (IV.84)

ce qui conduit à :

$$\Phi_{0} = \Phi_{\mathbf{w}} + \Delta \lambda_{\mathbf{i}\mathbf{w}} + \Delta \mu_{\mathbf{w}0}$$
 (IY.85)

$$\mathbf{P}_{0} = \mathbf{P}_{\infty} - \boldsymbol{\phi}_{\infty} + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{W}} + \Delta \lambda_{\mathbf{IW}} + \Delta \mu_{\mathbf{W}0}$$
 (IV.86)

Maintenant, considérons l'évolution de l'angle de Mach le long de la ligne de courant passant par 0. Son évolution est définie de l' à 0 par la relation (IV.73) qui s'écrit alors, en première approximation:

$$\alpha_0 - \alpha_{\infty} = (P_0 - P_{\infty}) \frac{\gamma - \cos 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha} + (\frac{J_{\gamma}^B}{\rho v^2} v \alpha + \frac{J^2(\gamma - 1)}{\sigma \rho v^3}) \Delta x_{10} = \phi_{\infty} - \phi_0$$
 (IV.87)

La combinaison des relations (IV.85), (IV.86), et (IV.87) aboutit alors à :

$$\phi_{\infty} - \phi_{\mathbf{W}} = \Delta \lambda_{\mathbf{IW}} + \Delta \mu_{\mathbf{W}0} - \left(\frac{J_{\mathbf{y}}^{\mathbf{B}}}{\rho V^{2}} \mathbf{w} \alpha + \frac{J^{2}(\gamma - 1)}{\sigma \rho V^{3}}\right) \frac{2 \cos^{2} \alpha}{\gamma + 1} \Delta x_{\mathbf{I} \cdot 0}$$
 (IV.88)

Ceci correspond au critère général de suppression d'ondes de choc. Pour que le champ de force soit parfaitement adapté à l'obstacle, il faut qu'il vérifie ce critère.

Tout le problème de la suppression des ondes de choc revient donc à trouver un champ de force réaliste vérifiant ce critère. Dans le cas d'un champ de force non évanescent, il est toujours possible de jouer sur la forme de la frontière, pour obtenir un tel champ de force, dès l'instant où il se trouve confiné dans la zone d'influence de l'obstacle, comme indiqué sur la figure 35.

Sous la forme générale (IV.88), le critère ne permet pas de déterminer de facon explicite l'intensité du champ de force, ni sa géométrie. Il est La combinaison des relations (IV.85), (IV.86), et (IV.87) aboutit alors à :

indispensable d'avoir recours aux simulations numériques. Pourtant, sous certaines hypothèses simplificatrices, il est possible de dégager des formulations simples du critère mettant en évidence le caractère pariétal du champ de force.

Considérons un point W' proche de la limite amont de la zone d'influence comme indiqué sur la Figure 35. On peut admettre que dans cette région :

$$\Delta \lambda_{NW} < < \Delta \mu_{WH}$$
 et $\Delta x_{IO} < < \Delta \mu_{WH}$ (IV.89)

et en prenant un champ de force F = JxB d'orientation quelconque 8 par rapport à l'axe 'x', et tel que $F_{L\eta}/\rho V^2$ soit constant, on peut écrire:

$$F_{\chi} = J_{\gamma} B = F \cos \theta \qquad (IV.90)$$

$$F_{y} = -J_{x}B = F \sin \theta \qquad (IV.91)$$

En accord avec la relation (IV.69), l'expression de F_{in} devient :

$$F_{11} = F \sin(\alpha - \theta)$$
 (IV.92)

Pour un champ de force possédant une frontière, la caractéristique montante franchit cette frontière en O. On peut alors définir en première approximation la hauteur de la zone d'interaction 'h' par:

$$\Delta \eta_{\Psi 0} = \frac{h}{\sin \alpha} \tag{IV.93}$$

Introduisons les relations (IV.89), (IV.92) et (IV.93) dans la relation (IV.88) pour aboutir à un critère permettant de déterminer la hauteur de la zone d'interaction en fonction de l'angle à la paroi, des conditions d'écoulement et des champs croisés. Près de la paroi, sinΦ/yo=1/R d'où:

$$\frac{\int B h}{\rho V^2} = 2 \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)} \left(\Phi_{\Psi} + \frac{\int^2 h}{\sigma \rho V C_{P} T} - \delta \frac{h}{R} \right)$$
 (IV.94)

Trois cas d'orientation du champ de force sont particulièrement intéressants à développer dans le cas d'un écoulement plan isentropique.

Pour un champ de force possédant une frontière, la caractéristique

- F parallèle à l'axe des x ($\theta = 0$):

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = 2 \Phi_{W}$$
 (IY.95)

Cette orientation du champ de force correspond pratiquement aux conditions d'interaction dans une tuyère symétrique telle qu'elle est décrite au § IV.5.3. Cette version simplifiée du critère permet de déterminer les dimensions de la tuyère en fonction des paramètres MHD désirés: pour un rayon de courbure de la paroi convergente R de 0.2 m sur une longueur de 0.03 m, l'angle maximal de la paroi est de 8,5°. Par ailleurs la densité de courant J doit être de l'ordre de 2 106 A/m² et le champ magnétique de l'ordre du Tesla. Dans les conditions correspondant à Mach 1.6, on obtient la demi hauteur de la tuyère h de l'ordre de 0.05 m. Il faut donc que la tuyère ait une hauteur minimale de 10 cm pour pouvoir agir avec un tel champ croisé.

- F parallèle à la direction des caractéristiques montantes ($\theta = \alpha$).

Cette condition introduit l'étude quasi-unidimensionnelle comme un cas particulier de l'étude bidimensionnelle. Elle entraı̂ne automatiquement la constance des paramètres le long des caractéristiques montantes.

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = \infty \tag{IV.96}$$

La hauteur d'interaction est effectivement, dans ce cas, théoriquement illimitée.

- F perpendiculaire à la direction des caractéristiques montantes : $(\theta = \alpha - \pi/2)$:

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = \frac{2}{M} \Phi_{\Psi} \tag{IV.97}$$

Il est à noter que la hauteur d'interaction minimale est obtenue pour cette orientation du champ de force. Cette conclusion parait logique étant donné que les variations de vitesse se font perpendiculairement aux parattimes de recotéritionnes commentére la constance des paramètres le long des caractéristiques montantes.

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} d\Phi$$
 (IV.98)

Il est normal que le champ de force perpendiculaire aux caractéristiques ait une action optimale sur l'écoulement.

Cette approche permet également de dégager un critère indiquant la valeur minimale du champ de force à appliquer en fonction du rayon de courbure de l'obstacle. Ce critère est applicable dans le cas de l'écoulement externe. En effet, en se plaçant toujours sous la condition (IV.89), la longueur maximale d'interaction est, d'après la figure 35:

$$\Delta \eta_{\text{Maxi}} = \frac{L}{\sin \alpha} = L M \tag{IV.99}$$

où L désigne la longueur de l'obstacle. Il faut donc, pour supprimer les chocs, que sur cette longueur An_{Maxi} le critère (IV.94) soit vérifié, c'est à dire que :

$$\Phi_{\Psi} \leq \int_{\Psi}^{0} \frac{F_{11}}{2 \rho V^{2}} d \eta$$
 (IY.100)

En prenant encore une fois un champ de force F d'orientation quelconque θ par rapport à l'axe des 'x', et tel que $F_{\perp q}$ / ρV^2 soit constant, on obtient :

$$\frac{JBL}{\rho V^2} \geq 2 \Phi_{\Psi} \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)}$$
 (IY.101)

En première approximation, on peut admettre que L/ϕ est de l'ordre du rayon de courbure R . On obtient finalement, en considérant un champ de force parallèle à la paroi :

$$\frac{\text{JBR}}{\rho \, \text{V}^2} \, \geq \, 2 \tag{IV.102}$$

Si l'intensité du champ de force n'est pas suffisante et que ce critère n'est pas satisfait, alors les ondes de choc ne seront pas supprimées autour

En prenant encore une fois un champ de force F d'orientation quelconque 8 par rapport à l'axe des 'x', et tel que $F_{\perp\eta}$ / ρV^2 soit constant, on obtient :

IV.3 - METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE.

ie

r

Le champ de force correspond à une distribution de courant électrique combinée à un champ magnétique transversal B supposé constant, dans une lue configuration décrite sur la figure 24.

Le champ électrique est créé par des électrodes pariétales segmentées. Il a été calculé en résolvant l'équation de Poisson sur un maillage hexagonal ou carré suivant le cas. Les détails de la détermination des champs électriques sont donnés au § IV.4. La conductivité électrique est prise constante dans tous les cas.

L'interaction est supposée isentropique. Tous les termes faisant apparaître l'effet Joule sont alors négligés. L'écoulement peut être calculé de proche en proche, en accord avec les équations de compatibilités sur les directions caractéristiques, et en fonction des conditions initiales et des conditions aux limites.

La détermination de l'écoulement est ainsi résolu à travers un schéma numérique du second ordre qui nécessite plusieurs itérations pour le calcul des paramètres en chacun des points du maillage.

IV.3.1 - Calcul d'un point courant de l'écoulement (Fig. 36).

Supposons qu'aux points courants I et K, tous les paramètres soient connus: position, pression, angle de déviation ϕ , ainsi que la valeur des coordonnées épicycloïdales $\lambda_{\rm I}$, $\mu_{\rm I}$, $\lambda_{\rm K}$, $\mu_{\rm K}$. (voir Fig. 36). La caractéristique descendante issue de I et la caractéristique montante issue de K se coupent au point H, fixant ainsi les déplacements $\Delta \eta_{\rm KH}$ et $\Delta \xi_{\rm IH}$.

On détermine d'abord les coordonnées du point d'intersection H, suivant la méthode proposée par Carrière [4] pour les schémas du second ordre:

$$S_{IH} = \sin\left(\frac{(\phi_I - \alpha_I) + (\phi_H - \alpha_H)}{2}\right) \qquad t_{IH} = \psi\left(\frac{(\phi_I - \alpha_I) + (\phi_H - \alpha_H)}{2}\right) \qquad (IV.103)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{K}\mathbf{H}} = \sin\left(\frac{(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{K}} + \mathbf{\alpha}_{\mathbf{K}}) + (\mathbf{\Phi}_{\mathbf{H}} + \mathbf{\alpha}_{\mathbf{H}})}{2}\right) \qquad \mathbf{t}_{\mathbf{K}\mathbf{H}} = \mathbf{w}\left(\frac{(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{K}} + \mathbf{\alpha}_{\mathbf{K}}) + (\mathbf{\Phi}_{\mathbf{H}} + \mathbf{\alpha}_{\mathbf{H}})}{2}\right)$$

Puis:

$$I = y_{I} - t_{IH} x_{I}$$

$$K = y_{K} - t_{KH} x_{K}$$

$$X_{H} = \frac{I - K}{t_{KH} - t_{K}}$$

$$y_{H} = \frac{I t_{KH} - K t_{IH}}{t_{KH} - t_{K}}$$

$$I$$

$$\Delta \xi_{IH} \Rightarrow [C_{1}]$$

$$L$$

$$\Delta \chi_{LH} \Rightarrow [C_{3}] \text{ et } [C_{4}]$$

$$C_{3} \text{ et } p_{H} \Rightarrow V_{H}$$

$$C_{4} \text{ et } p_{H} \Rightarrow M_{H}$$

$$C_{4} \text{ et } p_{H} \Rightarrow M_{H}$$

Figure 36 : Graphe du mode de résolution numérique pour un point courant.

On obtient finalement la valeur des déplacements suivant les caractéristiques:

$$\Delta \xi_{\underline{IH}} = \frac{\underline{y_H} - \underline{y_I}}{\underline{s_{IH}}} \qquad \Delta \eta_{\underline{KH}} = \frac{\underline{y_H} - \underline{y_K}}{\underline{s_{KH}}}$$
 (IV.105)

Ensuite, les composantes du champ de force sont déterminées à partir du champ de potentiel électrique.

$$F_{\mathbf{x}} = F_{\mathbf{x}_0} \cos \Phi + F_{\mathbf{y}_0} \sin \Phi \qquad F_{\pm \xi} = F_{\mathbf{x}} \sin \alpha - F_{\mathbf{y}} \cos \alpha \qquad (IV.106)$$

$$F_{\mathbf{y}} = -F_{\mathbf{x}_0} \sin \Phi + F_{\mathbf{y}_0} \cos \Phi \qquad F_{\pm \xi} = F_{\mathbf{x}} \sin \alpha - F_{\mathbf{y}} \cos \alpha \qquad (IV.106)$$

On obtient finalement la valeur des déplacements suivant les

(IV.70) et (VI.71), les coordonnées épicycloïdales valent en H:

$$\lambda_{H} = \lambda_{I} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin^{2} \alpha_{I}}{\gamma p_{I}} F_{I\xi_{I}} + \frac{\sin^{2} \alpha_{H}}{\gamma p_{H}} F_{I\xi_{H}} \right\} \Delta \xi_{IH}$$
 (IV.107)

$$\mu_{\mathbf{H}} = \mu_{\mathbf{K}} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin^2 \alpha_{\mathbf{K}}}{\gamma p_{\mathbf{K}}} F_{1 \eta_{\mathbf{K}}} + \frac{\sin^2 \alpha_{\mathbf{H}}}{\gamma p_{\mathbf{K}}} F_{1 \eta_{\mathbf{H}}} \right\} \Delta \eta_{\mathbf{K} \mathbf{H}}$$
 (IV.108)

Les conditions (IV.70) et (IV.71) suivant les directions caractéristiques η et ξ se simplifient et deviennent :

[C1]
$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma_p} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = -\frac{F_{\perp \eta}}{\rho v^2} = 2 \frac{\partial \mu}{\partial \eta}$$
 (IV.109)

[C2]
$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\gamma_p} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -\frac{F_{L\xi}}{\rho v^2} = 2\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}$$
 (IV.110)

Les valeurs de λ et μ sont ainsi déterminés en fonction du champ de force, pour de petits déplacements successifs suivant les directions de η et ξ . Ensuite, les valeurs de la pression et de la direction de l'écoulement sont obtenus en discrétisant les conditions [C1] et [C2] :

$$\Phi_{H} = \frac{\Phi_{I} + \Phi_{K}}{2} - \frac{P_{I} - P_{K}}{2} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma P_{H}} + \Delta \mu_{KH} - \Delta \lambda_{IH}$$
 (IV.111)

$$p_{H} = \frac{p_{I} + p_{K}}{2} + \left(-\frac{\phi_{I} - \phi_{K}}{2} + \Delta \mu_{KH} + \Delta \lambda_{IH}\right) \frac{\gamma p_{H}}{\sin \alpha \cos \alpha}$$
 (IV.112)

La position du point L est déterminée par:

$$x_{L} = \frac{y_{H} - y_{K} + x_{K} \psi \theta - x_{H} \psi (\phi_{H} - \phi_{K})}{\psi \theta - \psi (\phi_{H} - \phi_{K})}$$
(IV.113)

Iorce, pour de Peuis de partenents successifs surrant les condement sont obtenus en discrétisant les conditions [C1] et [C2]:

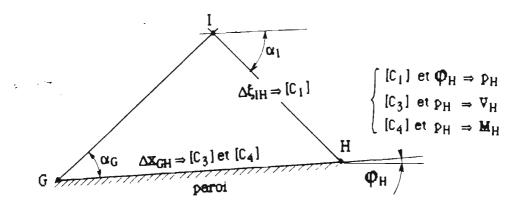


Figure 37 : Graphe du mode de résolution numérique pour un point du profil.

Ensuite, les coordonnées du point H et les déplacements sont déterminés en posant:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{IH}} = \sin\left(\frac{(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{I}} - \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{I}}) + (\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{H}})}{2}\right) \qquad \mathbf{t}_{\mathbf{IH}} = \mathbf{g}\left(\frac{(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{I}} - \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{I}}) + (\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{H}})}{2}\right)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{GH}} = \sin\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{H}}}{2}\right) \qquad \mathbf{t}_{\mathbf{GH}} = \mathbf{g}\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{H}}}{2}\right)$$

$$(1\forall .120)$$

puis:

$$H = y_I - t_{IH} x_I$$

$$G = y_G - t_{GH} x_G$$

$$(I \forall .121)$$

$$x_H = \frac{H - G}{t_{GH} - t_{IH}}$$

$$y_H = \frac{H t_{GH} - G t_{IH}}{t_{GH} - t_{IH}}$$

$$\Delta \xi_{IH} = \frac{y_H - y_I}{s_{IH}}$$
 (IV.122)

$$\mathbf{S}_{GH} = \sin\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_{G} + \boldsymbol{\phi}_{H}}{2}\right) \qquad \qquad \mathbf{t}_{GH} = \mathbf{g}\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_{G} + \boldsymbol{\phi}_{H}}{2}\right)$$

puis:

$$\lambda_{\mathbf{H}} = \lambda_{\mathbf{I}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\sin^2 \alpha_{\mathbf{I}}}{\gamma p_{\mathbf{I}}} F_{\mathbf{I}\xi_{\mathbf{I}}} + \frac{\sin^2 \alpha_{\mathbf{H}}}{\gamma p_{\mathbf{H}}} F_{\mathbf{I}\xi_{\mathbf{H}}} \right) \Delta \xi_{\mathbf{I}\mathbf{H}}$$
 (IV.123)

L'angle à la paroi est calculé à partir de la fonction de la paroi f(x):

$$\Phi_{\mathbf{H}} = \operatorname{acrtg} \left(\frac{d f}{d \mathbf{x}} (\mathbf{x}_{\mathbf{H}}) \right)$$
 (IY.124)

La pression est calculée uniquement à partir de la condition [C2] (IV 110) et la vitesse et la Mach à partir de [C3] et [C4] de L à H.

IV.4 - DETERMINATION DU CHAMP DE FORCE DANS LA TUYERE CONVERGENTE ET AUTOUR DU PROFIL D'AILE MINCE.

Le plasma est un milieu neutre, le paramètre de Hall est supposé faible, et la conductivité électrique du plasma constante.

Les champ de force sont obtenus en combinant un champ magnétique transversal $\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{z}$ et un champ électrique \mathbf{E} créé par une différence de potentiel entre deux électrodes comme indiqué sur les figures 40 et 41. Au sein de l'écoulement, les électrons subissent l'action du champ électrique appliqué \mathbf{E} et du champ contre-électromoteur $\mathbf{V}\mathbf{x}\mathbf{B}$.

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{Y}\mathbf{x}\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}^* \tag{IY.125}$$

Les variations du champ contre électromoteur étant négligées, tout se passe comme si le champ \mathbf{E}^* appliqué aux électrons dérivait d'un potentiel $\mathbf{\Psi}^*$. On écrira alors:

$$\Delta \Psi^* = 0 \tag{IV.126}$$

Cette équation est numérisée par un schéma du second ordre sur un maillage carré pour la tuyère, et sur un maillage hexagonal pour l'aile. Les surfaces de calcul correspondent à une zone entourant les profils de taille suffisante pour que les effets des bords soient peu sensibles dans la zone potentiel entre deux électrodes comme indiqué sur les figures 40 et 41. Au sein de l'écoulement, les électrons subissent l'action du champ électrique appliqué E et du champ contre-électromoteur VxB.

conditions aux limites:

- les isolants, caractérisés par la perpendicularité des isopotentielles à la frontière;
- les électrodes positives et négatives, de potentiel constant fixé à plus ou moins 10000, caractérisées par le parallélisme des isopotentielles à la frontière.

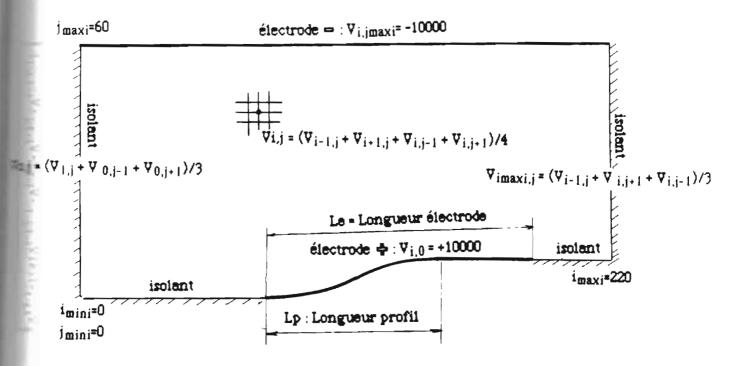


Figure 38 : Définition du maillage de calcul du champ de potentiel dans la tuyère.

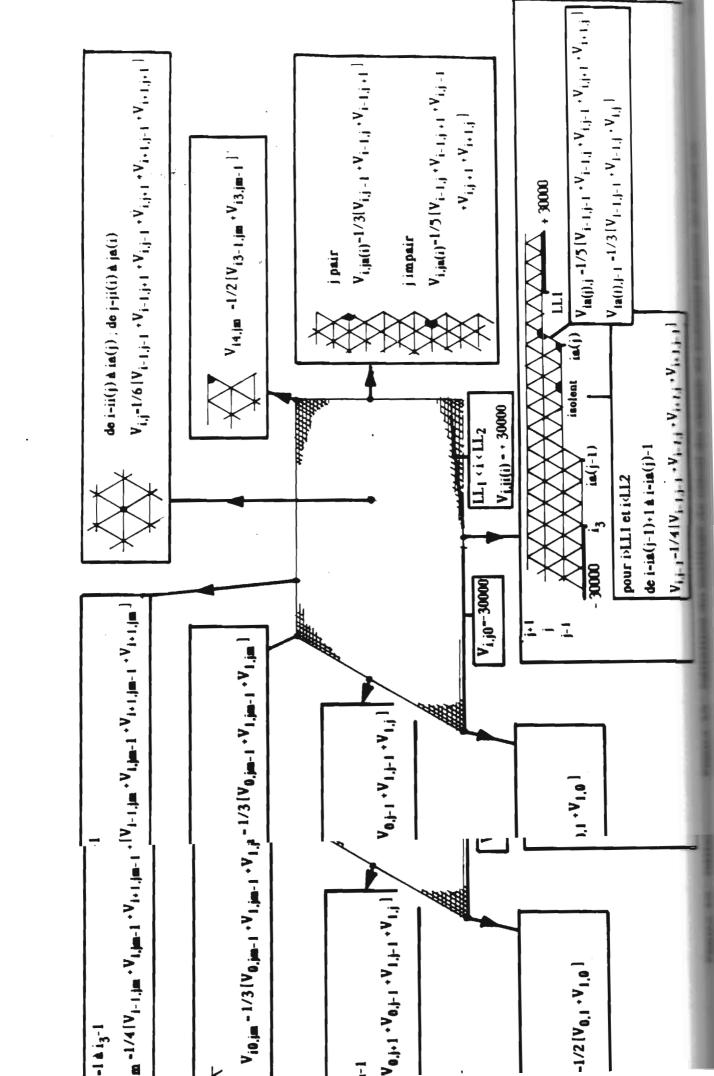
Le calcul consiste à faire un nombre important d'itérations sur toute la surface, jusqu'à convergence du champ de potentiel.

La direction et l'intensité du champ électrique sont alors obtenues de la

Figure 38 : Définition du maillage de calcul du champ de potentiel dans la tuyère.

Le calcul consiste à faire un nombre important d'itérations sur toute la surface, jusqu'à convergence du champ de potentiel.

La direction et l'intensité du champ électrique sont alors obtenues de la façon suivante sur quatre points:



$$E_{c} = \frac{\sqrt{2} (V_{2} - V_{4})}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2} (V_{3} - V_{1})}{\sin \theta} = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$
 (IV =7)

et alors:

$$\text{tg }\theta := \frac{V_3 - V_1}{V_2 - V_4} \qquad \text{et} \qquad E_C = \frac{\sqrt{2} \left(V_2 + V_3 - V_4 - V_1 \right)}{\sin \theta + \cos \theta} \tag{IV.128}$$

L'orientation de E par rapport au maillage vaut donc $(\theta+\pi/2)$ et celle de J, perpendiculaire à E est de $(\theta-\pi/2)$. J vaut alors :

$$J = \sigma E_e kE$$
 (IV.129)

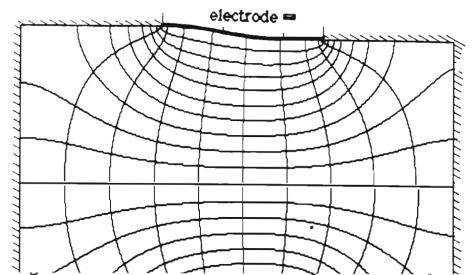
avec kE une constante dépendante des conditions de calcul et de l'écoulement.

$$kE = \frac{Jo}{\sigma} \frac{jmaxi}{20000}$$
 (IY.130)

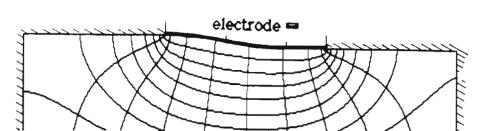
Pour le calcul sur le maillage exagonal, la démarche est identique.On obtient alors le tracé suivant pour :

Rayon de courbure R = 150 mmLongueur du profil $L_p = 60 \text{ mm}$ Longueur des électrodes $L_e = 70 \text{ mm}$

Les figures suivantes 40 et 41 sont représentés les profil avec les électrodes ainsi que les isopotentielles et les lignes de courant électrique.



électrodes ainsi que les isopotentielles et les lignes de courant électrique.



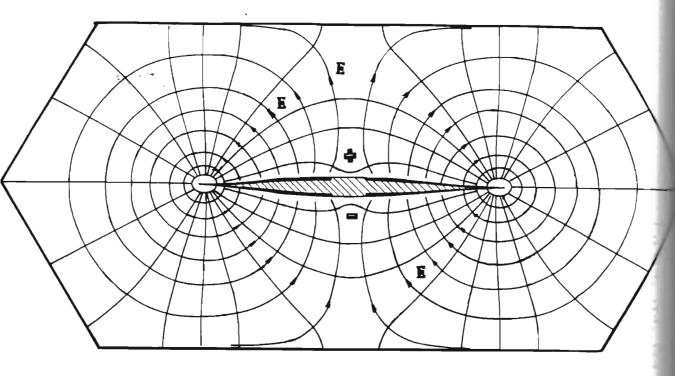


Figure 41 : Allure du champ électrique autour de l'aile (écoulement externe). Lignes de potentiel , lignes de champ électrique.

On remarquera la correspondance entre ce champ électrique et celui mis en œuvre par Petit [6] lors de ses expériences en analogie hydraulique.

Pour plus de détails, on se reportera aux programmes de calcul qui sont présentés en Annexes 4 et 5 : programmes 'Champ électrique' et Ecoulement interne - procédure d'utheta'.

IV.5 - RESULTATS NUMERIQUES.

IV.5.1 - Conditions de simulation.

œuvre par Petit (b) lors de ses experiences en analogie hydraulique.

Pour plus de détails, on se reportera aux programmes de calcul qui sont présentés en Annexes 4 et 5 : programmes 'Champ électrique' et Ecoulement interne - procédure dytheta'.

qu'il est réalisé dans un tube à choc. Les conditions aux limites sont déterminées par la géométrie des parois.

- le cas de l'écoulement externe, où l'obstacle, de type aile mince, est plongé dans un écoulement libre.

Les paramètres de l'écoulement de plasma du milieu amont correspondent aux conditions optimales déterminées par l'étude quasi-unidimensionnelle. Il s'agit d'une rafale à Mach 1.6 :

Tg = 9500 °K Pg = 1 bar M = 1,6 V = 2570 m/s σ = 2800 mhos/m ρ = 0.05 kg/m³ γ = 1.31

Le champ électrique est calculé par résolution de l'équation de Poisson, le champ magnétique est pris constant dans la surface d'interaction. Il sert à limiter la géométrie du champ de force.

IV.5.2 - Ecoulements en l'absence de champ de force JxB.

Les figures 42 et 43 montrent l'allure des réseaux des deux familles de caractéristiques pour ces deux types d'écoulements en l'absence de forces de volume.

Les lieux de naissance des ondes de choc, correspondant aux caustiques d'intersection, sont bien apparents. Ces représentations n'ont pas à proprement parlé de réalité physique, car l'onde de choc modifie de façon très importante les paramètres du milieu. Il s'agit d'un phénomène non linéaire. L'intersection des caractéristiques n'indiquent pas la position exacte des ondes de choc mais permettent seulement de mettre en évidence leur existence.

Pour les simulations correspondant à l'écoulement interne, l'obstacle est constitué par deux arcs de cercle de rayon R=0.2 m, convergent, divergent,

IV.5.2 - Ecoulements en l'absence de champ de force [xB].

du profil ainsi obtenu. L'intersection des caractéristiques en entrée du convergent correspond à la formation d'une onde de choc bloquant la tuyère. Après le choc, l'écoulement serait subsonique.

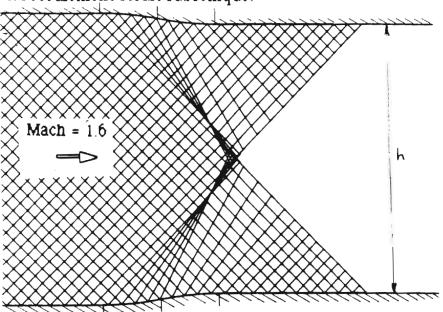


Figure 42 : Ecoulement dans une tuyère bidimensionnelle convergente en l'absence de champ de force JrB. Intersection des caractéristiques. Mach amont = 1.6.

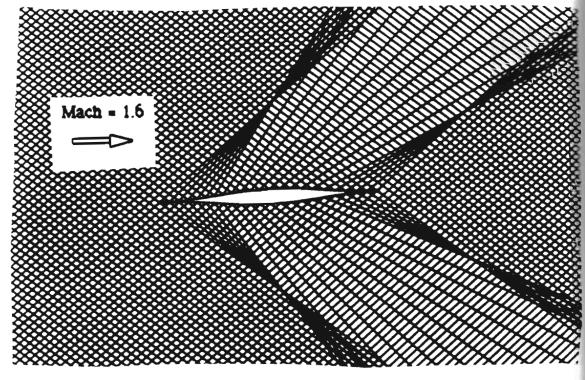


Figure 43: Ecoulement externe autour de l'aile roisse

Pour l'écoulement externe, le profil symétrique est réalisé par trois courbes de rayon de courbure constant R=0.2 m (Fig.43). On distingue deux zones d'ondes de choc, correspondant chacune aux parties convergentes du profil et une zone centrale de détente. Par analogie avec les écoulements à surface libré, le choc en amont du profil correspondait à la vague d'étrave, et le choc aval à la vague de culot.

IV.5.3 - L'écoulement interne.

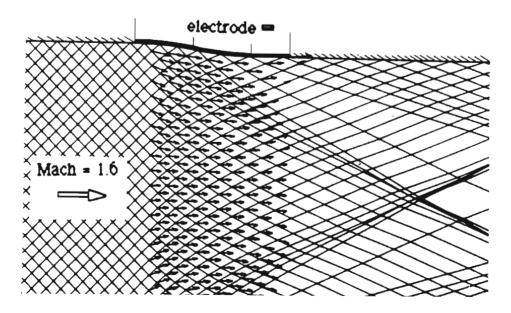
Le déblocage de tuyère a été simulé pour deux configurations du champ de force:

- champ de force présent sur toute la largeur de la tuyère;
- champ de force pariétal dont la hauteur d'action est déterminée par la relation (IV.41).

Le champ de force est représenté à l'intersection des caractéristiques par les petits traits fléchés. Dans les deux cas, il a une valeur moyenne de 2 106 N/m². Il peut être créé par un champ magnétique de 1 Tesla et une densité de courant d'une valeur moyenne de 2 106 A/m², ces conditions correspondant à un effet Joule négligeable.

Le rayon de courbure des parties circulaires est pris égal à 0.2 m pour une hauteur de tube à choc de 0.12 m.

Ces deux solutions sont représentées sur les figures 44 et 45.



Ces deux solutions sont représentées sur les figures 44 et 45.



Dans ce premier cas (Fig. 44), le champ de force étant localisé dans toute la tuyère, l'écoulement est fortement accéléré. Il en sort à Mach 2,5 pour un Mach d'entrée de 1.6. Avec ce type de configuration du champ de force, le décroisement des caractéristiques est difficile à négocier, car l'écoulement se trouve accéléré en amont de la zone de dépendance du convergent, dans la région centrale, ce qui aurait plutôt tendance déplacer et amplifier l'onde de choc. Si le champ magnétique est appliqué de manière quelconque sur la longueur de la tuyère, le croisement des caractéristiques est seulement déplacé vers l'aval sans être supprimé. Cela montre bien la nécessité d'appliquer le champ de force uniquement dans la zone de dépendance du convergent.

C'est donc cette solution qui a été adoptée pour calculer l'écoulement présenté sur la figure 45.

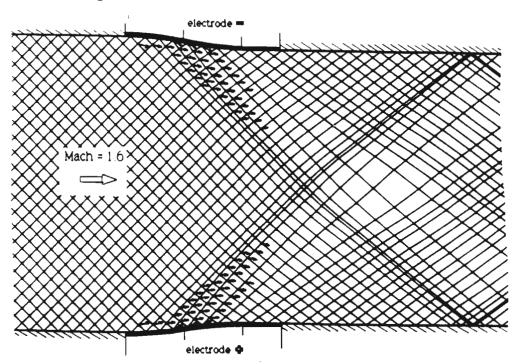


Figure 45: Ecoulement dans une tuyère bidimensionnelle convergente.

Champ de force pariétal. Mach amont = 1.6.

Dans ce second cas, le champ de force est pariétal, et la hauteur d'interaction est déterminée à partir de la relation (IV.41). Le Mach de l'écoulement reste pratiquement inchangé, les effets du convergent étant exactement compensés par le champ de force. Cette solution se rapproche des solutions externes car elle permet de conserver le parallélisme des

caractárictiquae an dabore da la zona norturbia

Dans ces deux types de solutions, du fait de la géométrie des électrodes et de l'écoulement, le courant reste pratiquement constant et perpendiculaire aux lignes de courant dans la zone d'interaction.

IV 5 4 - L'écoulement externe.

Le champ électrique est supposé être obtenu à l'aide d'électrodes segmentées disposées de part et d'autres du profil symétrique (Voir § IV.4). Le champ de force varie alors de manière importante en intensité et en direction dans la zone d'interaction.

La figure 46 montre un tracé typique d'un écoulement calculé en accord avec le critère (IV.78).

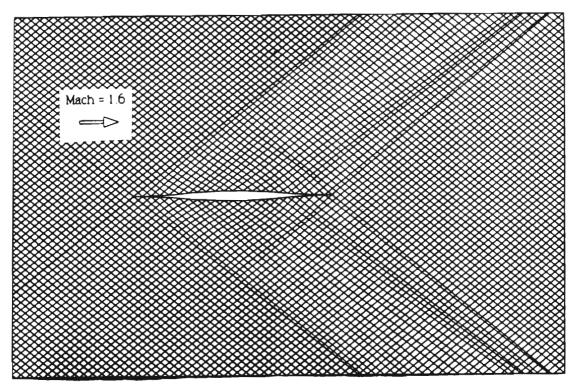


Figure 46: Ecoulement externe autour de l'aile mince. Action du champ de force JxB. Mach amont = 1.6.

En comparaison avec la figure 43 représentant le tracé sans champ de force, on constate nettement le redressement des caractéristiques et leur retour vers le parallélisme au fur et à mesure quelles s'eloignent de la paroi. L'intensité du champ de force dans les zones proches des électrodes est de

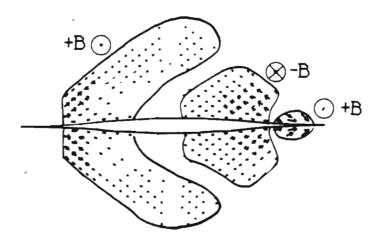


Figure 47: Allure de la géométrie du champ de force. Mach = 1.6; $J_{moyen} = 4 \cdot 106 \text{ A/m}^2$; B = +/- 1.5 Tesla.

On remarque tout d'abord que la suppression des ondes de choc est obtenu par trois zones d'interactions, correspondant aux deux parties convergentes et à la partie divergente du profil, et situées dans les domaines de dépendance de chacune de ces zones. En comparaison avec l'étude quasi-unidimensionnelle présentée au chapitre I, la suppression des ondes de choc autour d'un profil identique nécessitait également trois zones, mais le champ de force était appliqué tout le long des caractéristiques montantes. Les différences entre ces deux approches vient de la prise en compte par l'étude bidimensionnelle de l'orientation du champ de force.

Une deuxième remarque peut être faite concernant la géométrie du champ de force ainsi obtenu : la forme de la frontière n'est pas une forme simple et est difficilement réalisable expérimentalement. Il serait à priori plus réaliste d'étudier l'écoulement uniquement autour d'une la première moitié amont du profil (plaque biseautée)

IV.6 - Calcul de la trainée.

Une deuxième remarque peut être faite concernant la géométrie du champ de force ainsi obtenu : la forme de la frontière n'est pas une forme simple et est difficilement réalisable expérimentalement. Il serait à priori plus réaliste d'étudier l'écoulement uniquement autour d'une la première moitié amont du profil (plaque biseautée)

propulsive. On approche ainsi les résultats expérimentaux de Petit [6], réalisés autour d'un obstacle émoussé.

La valeur de la traînée est calculée à partir de la projection des forces de pressions le long de l'obstacle sur l'axe x_0 :

$$Tr = \int_{\text{profil}} p \cos(\phi - \pi t 2) dx$$
(IY.131)

d'où il découle que :

$$\frac{d Tr}{d x} = p \sin \phi \implies \frac{d^2 Tr}{d x^2} = \frac{dp}{dx} \sin \phi + p \cos \phi \frac{d\phi}{dx}$$
 (IY.132)

soit:

$$\frac{d^2 Tr}{dx^2} - \frac{d Tr}{dx} \frac{1}{R \times \Phi} = + \frac{d p}{dx} \sin \Phi$$
 (IV.133)

Les variations de pression sont liées aux variations du nombre de Busemann P par la relation (IV.72). Calculons P à la paroi, d'après la figure 35:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{w}} = \lambda_{\mathbf{w}} + \mu_{\mathbf{w}} = 2 \lambda_{\mathbf{w}} + \Phi_{\mathbf{w}} \tag{IV.134}$$

et, en remarquant également que 2 λN = PN - ΦN, on obtient :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{w}} - \mathbf{P}_{\infty} = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\varphi}_{\infty} + 2 \int_{\mathbf{H}}^{\mathbf{w}} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \, \mathrm{d} \, \xi \tag{IY.135}$$

En remarquant que :

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)_{\Psi} = \int_{\Psi} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta \, \partial \zeta} \, d\zeta$$
 (IV.136)

on peut écrire pour un déplacement 'dx' le long de la paroi:

et, en remarquant egalement que 2 kg =
$$\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{1}{\partial p} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{w}} - \mathbf{P}_{\infty} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Phi}_{\infty} + 2 \int_{\mathbf{w}}^{\mathbf{w}} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \, \mathrm{d} \, \xi \tag{IY.135}$$

$$\frac{d^2 Tr}{dx^2} - \frac{d Tr}{dx} \frac{1}{R tg \Phi} = \frac{\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \sin \Phi \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\cos \alpha} \left(\int_{\mathbf{N}}^{\mathbf{W}} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta} d\xi + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right)_{\mathbf{W}} \right) \right) \quad (IV.138)$$

Faire le calcul de la traînée en intégrant la relation (IV.131) le long du profil revient en fait à intégrer la relation (IV.138) dans tout le domaine d'interaction. On montre ainsi que la valeur de la traînée dépend :

- de la géométrie de l'obstacle;
- du champ de force à la paroi ;
- de la géométrie du champ de force dans le domaine de dépendance de la paroi, c'est à dire en AMONT de cette paroi.

Le point important est que la traînée ne dépend pas du champ de force placé sous le domaine d'influence de la paroi. Cette remarque justifie le fait que, pour un même écoulement autour d'un obstacle effilé, il puisse exister, pour la même géométrie des lignes de champ électrique J, plusieurs solutions de géométrie du champ de force, donnant des valeurs de traînée différentes.

En quelque sorte, la suppression des ondes de choc dépend de Δμ, Δλ et ΔM tandis que la traînée ne dépend que de Δλ.

Nous avons donc montré que la valeur de la traînée est indépendante du phénomène de suppression des ondes de choc. Il s'en suit qu'elle peut varier en fonction de l'intensité et de la géométrie du champ de force, et peut devenir propulsive.

Plusieurs simulations ont donc été faites pour obtenir les variations de la trainée en fonction de l'intensité du champ de force et du nombre de Mach, pour des valeurs situées autour de Mach 1.6. Ces résultats sont rassemblés sur la figure 48.

Pour le profil symétrique, la valeur de la traînée calculée sur une paroi et

En quelque sorte, la suppression des ondes de choc dépend de Δμ, Δλ et ΔM tandis que la traînée ne dépend que de Δλ.

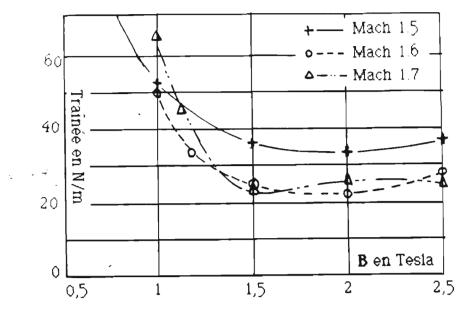


Figure 48 : Évolution de la traînée autour du profil en fonction de la valeur du champ magnétique et du Mach.

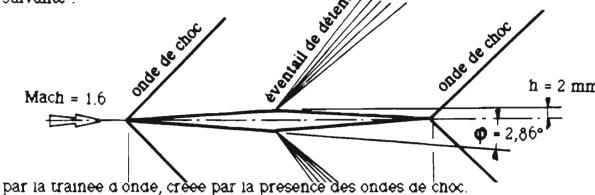
La traînée décroit tout d'abord en fonction de l'intensité du champ de force pour se stabiliser ensuite vers une valeur sensiblement constante.

IV.6 - ESTIMATION DE LA PUISSANCE ELECTRIQUE CONSOMMEE.

Il est intéressant de comparer la puissance électrique mise en jeu pour obtenir la suppression des ondes de choc par rapport à la puissance dissipée par la traînée d'onde, créée par la présence des ondes de choc.

Pour cela, nous considérerons un dièdre de même épaisseur relative que l'obstacle courbe dans un écoulement identique (M=1.6).

Les caractéristiques du profil cylindrique sont R = 0.2 m et L = 0.08 m, ce qui donne une épaisseur de 2 10^{-3} m. Le profil est alors défini de la manière suivante :



Pour cela, nous considérerons un dièdre de même épaisseur relative que l'obstacle courbe dans un écoulement identique (M=1.6).

Les caractéristiques du profil cylindrique sont R = 0.2 m et L = 0.08 m, ce qui donne une épaisseur de 2 10^{-3} m. Le profil est alors défini de la manière

Les résultats des calculs des variations des paramètres thermodynamiques [4] sont résumés sur la figure suivante:

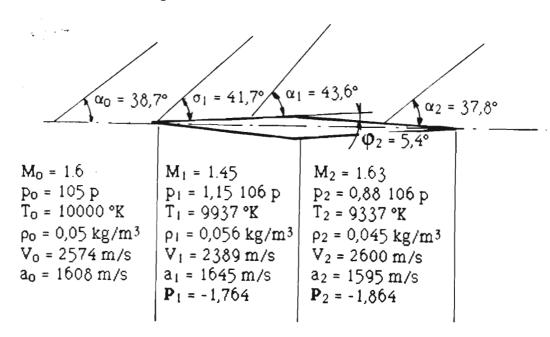


Figure 49 : Evolution des paramètres thermodynamiques le long de l'obstacle dièdre.

Avec la valeur des pressions de part et d'autre du profil, on obtient la valeur de la traînée à laquelle serait soumise l'obstacle dièdre:

$$T_d = 107 \text{ N/m}$$

La puissance consommée par la traînée d'onde est alors de :

$$P_T = T. V = 0.27 10^6 W$$

Par ailleurs, la puissance électrique consommée peut être établie par un calcul rapide:

- l'intensité du courant est en moyenne de 4 106 A/m² aux électrodes, ce qui conduit à un ampérage de 240 103 A, pour un profil de 1 m de longueur;

valeur de la traînée à laquelle serait soumise l'obstacle dièdre:

$$T_d = 107 \text{ N/m}$$

forme cylindrique dans une zone proche de la paroi. Dans ces conditions, on obtient une tension de l'ordre de 90 Volts. Il n'est pas tenu compte des chutes de potentiel aux électrodes qui s'élèvent à environ 40 Volts par électrode dans les plasmas d'argon pour des électrodes en cuivre [2] [3]. La tension s'élèverait alors à 170 V entre les électrodes.

La puissance électrique consommée qui en découle vaut:

$$P_E = U.I = 40 \cdot 10^6 \text{ W}$$

La résistance électrique du plasma est alors de l'ordre de 4 10-4 0hm.

Malgré un rendement d'interaction MHD correct (η = 0.7), la puissance électrique nécessaire à la suppression des ondes de choc reste très supérieure à la puissance consommée par le système d'ondes de choc, d'un facteur 150 environ. Cela provient essentiellement de la faible valeur du champ magnétique. La puissance électrique variant comme l'inverse du carré du champ magnétique, pour un champ magnétique appliqué de 12 Teslas, P_E doit devenir du même ordre de grandeur que P_T .

IV.7 - Conclusion.

Ces développements théoriques et numériques apportent finalement plusieurs résultats importants.

Tout d'abord, il s'agit d'un premier modèle de calcul des écoulements bidimensionnel supersoniques en interaction MHD exempts d'ondes de choc La méthode des caractéristiques permet de dégager un critère 'anti-choc' pour les écoulements autour d'obstacles effilés.

Ensuite, elle permet de fixer les ordres de grandeur et de déterminer la géométrie des champs électrique et magnétique à appliquer en fonction des caractéristiques de l'écoulement et de l'obstacle effilée pour des expériences en tube à choc.

Ensin, une première estimation théorique de la traînée autour du prosil mince_montre_gue_la valeur de celle-ci varie en fonction des paramètres

Ces développements théoriques et numériques apportent finalement

qu'elle devienne négative, c'est à dire propulsive, en accord avec les simulations hydrauliques de Petit [7] qui a montré que ce phénomène était réalisable. Il serait donc possible de créer des conditions d'écoulements et d'interaction MHD telles que le champ de force JxB puisse simultanément propulser un objet effilé dans un écoulement supersonique tout en supprimant le système d'ondes de choc qui se formerait normalement dans l'écoulement.

Le calcul des puissances consommées indique que le rendement propulsif MHD ne devient intéressant qu'à partir de fortes valeurs du champ magnétique (B > 10 Teslas).

CHAPITRE V

SIMULATION HYDRAULIQUE D'UN TUBE A CHOC

CHAPITRE V

SIMULATION HYDRAULIQUE D'UN TUBE A CHOC

Lors des expériences en tube à choc, des phènomènes liés à l'instationnarité de l'écoulement vont se produire. Pour tenter l'évaluer leur action au niveau de la tuyère sur la formation de l'onde de choc secondaire, une manipulation hydraulique légère a été mise au point, simulant le fonctionnement d'un tube à choc.

Elle permet à la fois de simuler un écoulement instationnaire semblable à celui obtenu en tube à choc, et un écoulement stationnaire mettant en évidence analogiquement différents systèmes d'ondes de choc.

I.1 - SIMULATION HYDRAULIQUE DU TUBE A CHOC: ECOULEMENT INSTATIONNAIRE

L'analogie entre les écoulements à surface libre et les écoulements de gaz compressibles permet de réaliser une expérience simulant le fonctionnement d'un tube à choc. En effet, les variations de hauteur d'eau sont assimilables aux variations de pression dans les gaz. On peut ainsi obtenir des informations qualitatives intéressantes permettant de prévoir le comportement de l'onde de choc dans le convergent du tube à choc.

Ce dispositif permet essentiellement d'appréhender les phénomènes instationnaires inhérents au tube à choc. Mais on peut également réaliser des expériences en régime stationnaire. Plusieurs conditions expérimentales peuvent ainsi être testées rapidement : par exemple, on peut jouer sur la géométrie des parois convergentes (droites ou courbes), ainsi que sur la forme du convergent (simple ou symétrique).

Ces informations doivent permettre de déterminer de façon précise les conditions expérimentales à mettre en œuvre sur le tube à choc pour réaliser des expériences concluantes.

informations qualitatives intéressantes permettant de prévoir le comportement de l'onde de choc dans le convergent du tube à choc.

Ce dispositif permet essentiellement d'appréhender les phénomènes instationnaires inhérents au tube à choc. Mais on peut également réaliser des expériences en régime stationnaire. Plusieurs conditions expérimentales

On a ainsi reconstitué le tube à choc avec la membrane séparant la chambre haute pression et la chambre basse pression, avec le pot de détente.

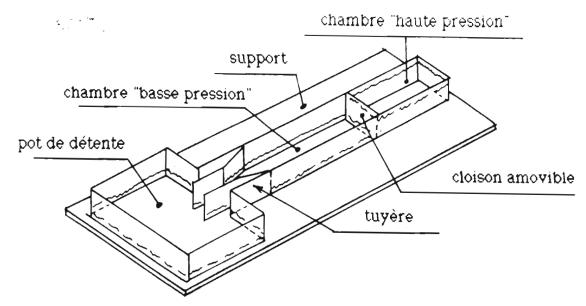


Figure 50: Montage expérimental de simulation hydraulique d'un tube à choc.

De part et d'autre de la cloison amovible, on met de l'eau: quelques millimètres dans la "chambre basse pression", et à raz bord dans la "chambre haute pression". On peut faire varier la différence de hauteur d'eau entre les deux compartiments, ainsi que la longueur de la chambre haute pression, correspondant à des conditions initiales différentes. La cloison est alors relevée d'un geste très rapide, simulant l'éclatement de la membrane. Une onde de choc, caractérisée par une vague déferlante, se propage alors dans la partie basse pression.

Le fond du canal est peint en blanc et l'expérience doit être éclairée par une source de lumière ponctuelle, assez puissante et étalée. Les variations de hauteur d'eau dessinent alors des ombres sur le fond, lesquelles peuvent facilement photographiées ou même filmées (ombroscopie).

V.1.2 - Onde de choc. Temps de rafale.

millimètres dans la "chambre basse pression", et à raz bord dans la "chambre haute pression". On peut faire varier la différence de hauteur d'eau entre les deux compartiments, ainsi que la longueur de la chambre haute pression,

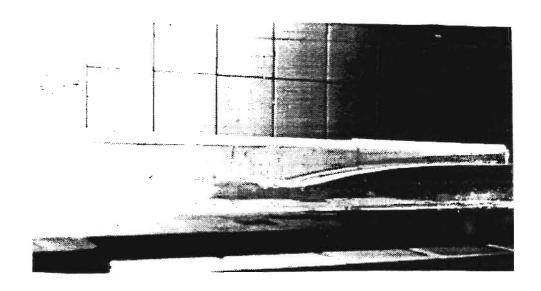


Figure 51: Simulation hydraulique. Onde de choc initiale.

Cela correspond à l'ouverture de la membrane et à la création de l'onde de choc initiale. On distingue très nettement l'onde de choc qui se forme et déferle dans la chambre "basse pression", ainsi que l'éventail de détente qui va se réfléchir dans le fond du canal.

Sur la photo suivante (Fig. 52), l'eau contenue dans la chambre "haute pression" a été colorée avec de l'encre. On visualise ainsi très bien ce que l'on appelle la rafale de gaz propre.

La partie transparente agitée correspond à cette rafale de gaz propre. Elle est train de prénétrer dans le convergent. C'est dans ces conditions que se réalisera l'expérience en tube à choc. Il faudra agir avec le champ de force MHD sur l'écoulement propre à cet instant et à cet endroit pour compenser les effets du convergent.

L'écoulement teinté correspond aux gaz contenus initialement dans la chambre "haute pression". Cet écoulement pousse la rafale devant lui, et va très rapidement atteindre à son tour le convergent, arrêtant l'expérience. En tube à choc on peut compter sur un temps de rafale de l'ordre de 100 microsecondes [2] [3].

En réalisant des expériences avec une chambre "haute pression" de faible pression" a été colorée avec de l'encre. On visualise ainsi très bien ce que l'on appelle la rafale de gaz propre.

La partie transparente agitée correspond à cette rafale de gaz propre. Elle est train de prénétrer dans le convergent. C'est dans ces conditions que se réalisera l'expérience en tube à choc. Il faudra agir avec le champ de force

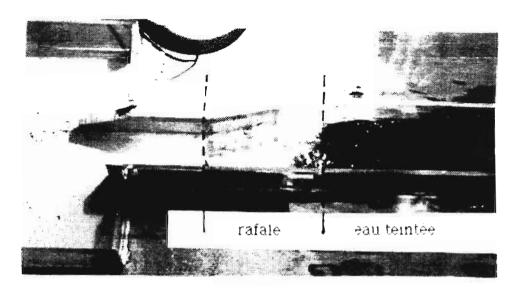


Figure 52: Simulation hydraulique. Rafale.

V.1.3 - Formation de l'onde de choc secondaire en régime instationnaire.

La tuyère est réalisée par deux plaques de PVC taillés en biseau et formant un convergent symétrique. Sur les deux photos suivantes, on distingue nettement l'arrivée de l'onde de choc initiale dans le convergent et la formation de l'onde de choc dans à la tuyère.

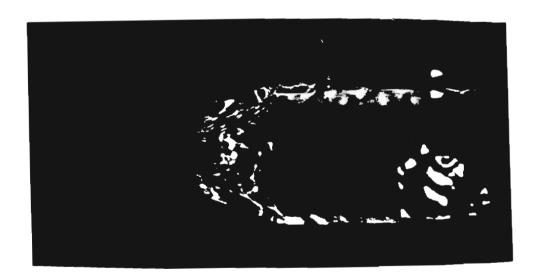


Figure 53 : Simulation hydraulique. Arrivée de la rafale dans

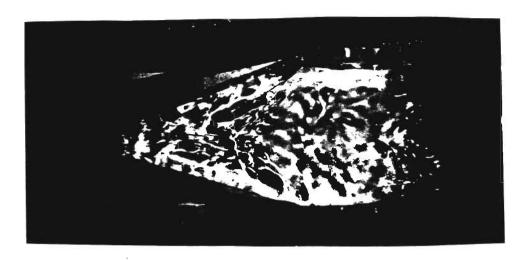


Figure 54 : Simulation hydraulique. Onde de choc secondaire pleinement développée.

On voit donc, à partir de cette expérience hydraulique, que le blocage de tuyère apparaît pendant le temps de passage de l'onde de choc initiale dans le convergent. Le nombre de Mach de la rafale est proche de 1, et conduit à un blocage immédiat de la tuyère. Pour les expériences en tube à choc, on peut estimer le temps de formation de l'onde de choc secondaire (M-1.5, V=2500 m/s, Temps de rafale 100 microses.) à 100 microsec, soit du même ordre de grandeur que la durée de la rafale.

Pour améliorer cette expérience hydraulique instationnaire, il faudrait:

- Visualiser l'écoulement au passage d'un convergent circulaire;
- Faire la visuatisation avec une caméra (super8, 24 images/s), pour avoir un film de l'évolution de l'écoulement;
- Complèter l'ombroscopie par un enregistrement de la déformation de l'image d'une mire quadrillée tapissant tout le fond de la cuve;
- Augmenter la longueur du canal qui limite la longueur de la chambre haute pression et du même coup, la longueur de la rafale.

V.2 - ECOULEMENT EN REGIME STATIONNAIRE.

V.2.1 - Montage expérimental.

- Visualiser l'écoulement au passage d'un convergent circulaire;
- Faire la visuatisation avec une caméra (super8, 24 images/s), pour avoir un film de l'évolution de l'écoulement;
 - Complèter l'ombroscopie par un enregistrement de la défor-

surface peut être facilement mesure, car les ondes correspondant aux caractéristiques issues des parois sont parfaitement visibles.

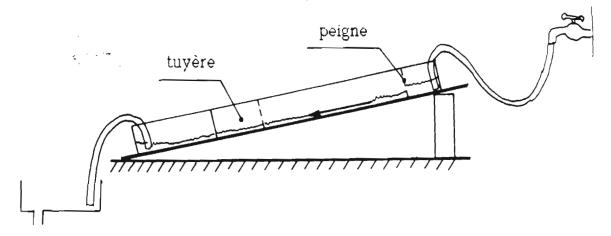


Figure 55: Montage expérimental en régime stationnaire.

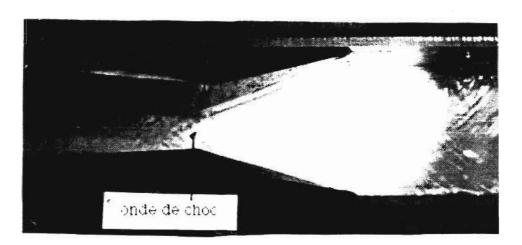
On peut intervenir sur différents paramètres. En premier lieu, sur le débit en régulant l'arrivée d'eau, ce qui a pour effet de faire varier également le nombre de Mach. En second lieu, sur l'inclinaison de la planche, ce qui a pour effet de modifier la vitesse de l'écoulement pour un débit constant.

Au niveau de la tuyère, on peut modifier la forme du convergent (simple ou symétrique), la forme des parois du convergent (droites ou circulaires), ainsi que la largeur du convergent. Les essais n'ont été réalisés qu'avec des parois de convergent rectilignes.

V.2 2 - Ondes de choc et blogage de tuyère.

Différents phénomènes ont pu être observés.

1) - Quand la largeur de la tuyère est suffisamment importante, les ondes de choc créées par le convergent apparaissent, mais il n'y a pas de blocage de tuyère proprement dit. Sur les figures suivantes on montre la tuyère symétrique (Fig. 56, 57, 58) ou simple (Fig. 59, 60) pour des débits différents et une largueur de tuyère suffisante pour que le blocage de tuyère n'apparaisse pas. Chaque paroi convergente induit une onde de choc indépendamment des autres, comme si la largueur de la tuyère était "infinie". En comparaison, sur les figures 61, 62, 63, 64, on distingue nettement une onde de choc droite (blocage de tuyère) qui occupe toute la ou symétrique), la forme des parois du convergent (droites ou circulaires), ainsi que la largeur du convergent. Les essais n'ont été réalisés qu'avec des parois de convergent rectilignes,



Figue 56 : Simulation hydraulique. Convergent symétrique, débit faible. Mach = 1.3.

On distingue assez faiblement les ondes de choc en sortie du convergent.

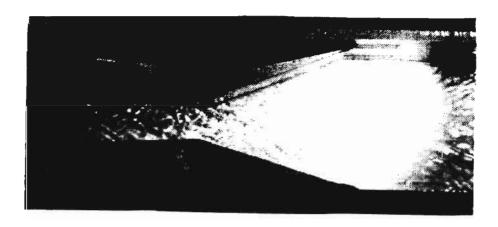


Figure 57: Simulation hydraulique. Convergent symétrique, débit moyen. Mach = 1,7.

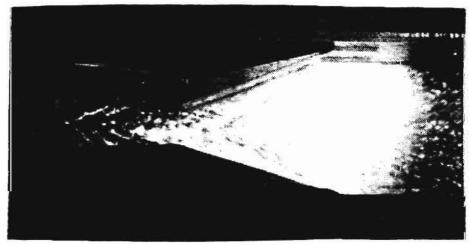


Figure 58: Simulation hydraulique. Convergent symétrique,

Sur les figures 57 et 58, on distingue très nettement les ondes de choc, provoquées par les deux parois convergentes, ainsi que leur superposition au milieu du canal. On remarque également que dans le divergent en aval du convergent, l'écoulement redevient supersonique. On remarque en effet dans cette zone de détente la présence d'ondes caractéristiques.

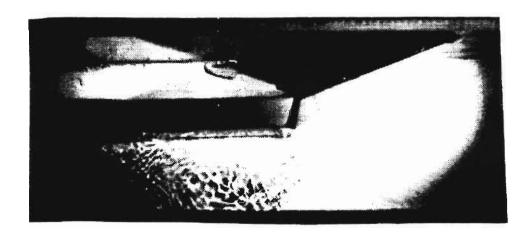


Figure 59: Simulation hydraulique. Convergent simple, débit moyen: M=1,7



Figure 60: Simulation hydraulique Convergent simple, débit important: M=1,9

Sur les figures 59 et 60, on distingue l'onde de choc formée contre le



Figure 60: Simulation hydraulique.Convergent simple, débit important: M=1,9

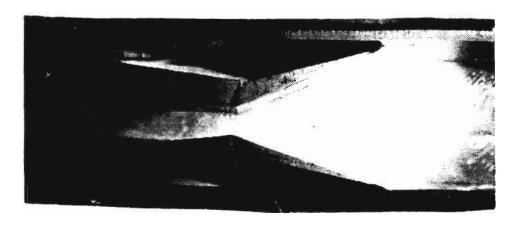


Figure 61 : Simulation hydraulique. Convergent symétrique: blocage de tuyère, débit faible.

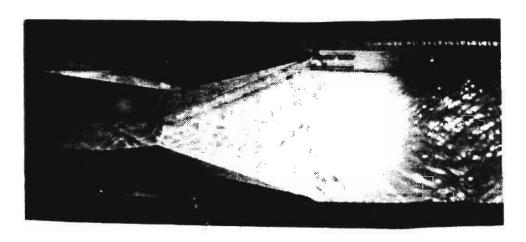


Figure 62 : Simulation hydraulique. Convergent symétrique: blocage de tuyère, débit moyen.

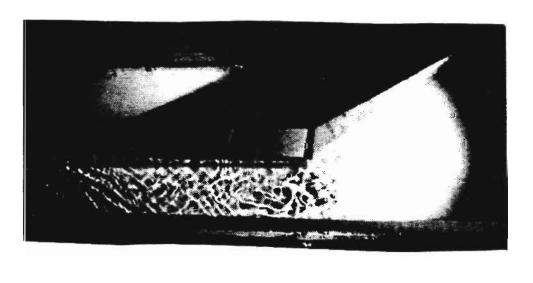


Figure 62 : Simulation hydraulique. Convergent symétrique:

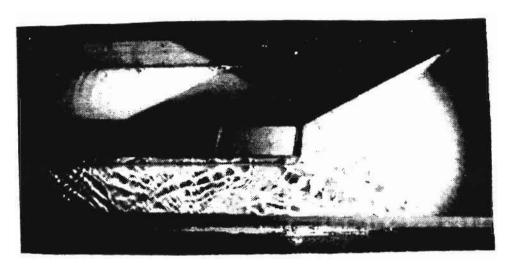


Figure 64 : Simulation hydraulique. Convergent simple: blocage de tuyère, débit moyen.

On constate donc que suivant les dimensions de la tuyère, il existe deux régimes d'onde de choc stationnaires:

- le régime "infini", où les ondes de choc se comportent indépendamment des conditions imposées par les autres parois;
- le régime de blocage, où les ondes de choc viennent se placer en amont de la tuyère, perpendiculairement à l'écoulement, indépendamment de la forme du convergent.

V.1.3 - Conclusion.

On retrouve bien les phénomènes liés au fonctionnement d'un tube à choc : onde de choc initiale, détente, rafale. Ces simulations hydrauliques ne rendent pas compte, bien sur, des effets de gaz réel liés à l'ionisation du gaz de la rafale. Les phénomènes instationnaires sont bien visualisés lors de l'arrivé de la rafale dans la tuyère convergente.

Pour agir sur l'onde de choc secondaire, deux solutions sont possibles: appliquer le champ de force au passage de l'onde de choc initiale, afin

V.1.3 - Conclusion.

On retrouve bien les phénomènes liés au fonctionnement d'un tube à choc : onde de choc initiale, détente, rafale. Ces simulations hydrauliques ne rendent pas compte, bien sur, des effets de gaz réel liés à l'ionisation du gaz de la rafale. Les phénomènes instationnaires sont bien visualisés lors de

deuxieme solution.

De plus, l'étude de l'écoulement en régime stationnaire permet de visualiser l'onde de choc secondaire pleinement développée et met en évidence deux régimes d'ondes dans la tuyère: le régime "infini" et le régime de blocage. L'établissement de l'un ou l'autre de ces régimes semble dépendre de la réduction de section au niveau de la zone d'essai, et il faudra attendre des résultats expérimentaux en tube à choc, pour savoir quel système d'onde de choc va se former.

C'est donc une expérience simple et pourtant riche sur le plan fondamental (mécanique des fluides, écoulements supersoniques, ondes de choc), permettant de dégager dès à présent d'éventuelles conditions expérimentales.

CONCLUSION

et Annexes

CONCLUSION

Ce travail_répond par l'affirmative à la question fondamentale : est-il possible de réaliser le déplacement supersonique d'objets dans un gaz sans qu'ils créent d'ondes de choc se propageant à l'infini ?

Les travaux présentés dans ce mémoire montrent que la suppression des ondes de choc par un champ de force de Laplace autour d'obstacles effilés est théoriquement possible.

Ainsi un modèle quasi-unidimensionnel assez complet est présenté, tenant compte des effets de gaz réel, suivit d'un modèle bidimensionnel applicable aux gaz parfaits, ainsi que de plusieurs critères généraux définissant l'intensité du champ de force, sa géométrie et la sensibilité de l'écoulement au blocage thermique ont été établis.

L'idée guide de ces développements est basée sur la conservation du parallélisme des caractéristiques à l'aide du champ de force JxB.

Dans ces conditions, l'étude quasi-unidimensionnelle confirme l'intuition physique en montrant que l'action du champ de force conduit, à travers la conservation du parallélisme des caractéristiques, à éviter les variations du champ de pression autour du profil. Une des concéquences primordiales de ce résultat est l'annulation de la trainée d'onde.

Les résultats de l'étude bidimensionnelle indiquent quant à eux, que la valeur de la traînée dépend des conditions d'interaction, et peut être soit positive, soit négativec'est à dire propulsive.

Des expériences en tube à choc, complément indispensable à la recherche théorique pure, sont en cours de montage au laboratoire de Thermodynamique de l'Université de Rouen et devrait apporter la confirmation expérimentale de la suppression des ondes de choc dans les gaz.

Le présent mémoire réalise donc un apport à plusieurs niveaux.

physique en montrant que l'action du champ de force conduit, à travers la conservation du parallélisme des caractéristiques, à éviter les variations du champ de pression autour du profil. Une des concéquences primordiales de ce récultat est l'apprulation de la trainée d'ande

- les écoulements subsoniques, exempts d'ondes de choc.
- les écoulements supersoniques, acompagnés d'ondes de choc.

Ce travail a montré que la seconde classe de solutions devait désormais être scindée en deux sous classes :

- les écoulements supersoniques sans contrôle d'écoulement, avec chocs.
- les écoulements supersoniques avec contrôle d'écoulement, dans lesquels, les ondes de choc peuvent être supprimées.

Le présent mémoire ne représente qu'une incursion rapide dans ce domaine qui semble très vaste.

Les développements théoriques et les calculs ont porté sur des conditions supersoniques en tout point de l'écoulement, limitant l'étude au cas d'obstacles élancés. Ils ont reposé sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui ont été discutées. La démarche complémentaire consisterait à inclure ces effets perturbateurs dans les calculs et programmes de simulation numérique.

La théorie de l'annihilation d'onde de choc autour d'objets épais, nécessitant le passage du modèle bidimensionnel plan à un modèle de symétrie de révolution a été proposé simultanément à la résolution du problème plan. Il doit être en particulier possible de créer autour d'objets de révolution des champs de forces propres à répondre au problème posé.

Le prolongement le plus intéressant est sans doute liée à l'annihilation d'ondes de choc dans l'air aux conditions normales, qui passe par une prise en charge d'une situation très fortement hors d'équilibre et instationnaire. La description d'un tel projet de recherche, assez complexe, sort du cadre de cette étude.

Au niveau des applications générales de la mécanique des fluides.

La MHD ouvre sur le domaine du contrôle en tout point des écoulements fluides. Dans cette optique ceux-ci ne seraient plus déterminés exclusivement par la géométrie des parois, fixes ou mobiles, mais également, et même doit être en particulier possible de créer autour d'objets de révolution des champs de forces propres à répondre au problème posé.

Le prolongement le plus intéressant est sans doute liée à l'annihilation d'ondes de choc dans l'air aux conditions normales, qui passe par une prise en charge d'une situation très fortement hors d'équilibre et instationnaire. La

Sur le plan technologique la MHD présente un retard considérable vis à vis des autres disciplines, qui vient de la faiblesse relative des champs magnétiques utilisés et de la difficulté de les produire, la faiblesse de ces champs allant de pair avec la modicité des rendements. L'émergence de supraconducteurs capables de fonctionner à haute température devrait donner naissance à un ensemble important de machines MHD, à contrôle d'écoulement.

Les applications pourraient être très nombreuses : pompes, pompes à vide, centrifugeuses, accélérateurs, etc....

La conception de ces machines est à repenser totalement en fonction des possibilités offertes par la MHD, en particulier à effet Hall fort. La notion d'aérodynamisme d'une forme ou d'un conduit est alors à reconsidérer entièrement.

- Dans le domaine de la navigation et du vol.

Les résultats des simulations numériques effectuées présentent le système envisagé comme un annihilateur d'onde de choc et eventuellement comme un propulseur.

Les simulations hydrauliques ont montré depuis dix ans [6] qu'il était possible d'annuler la trainée d'onde et même de l'inverser. Ce résultat étant susceptible d'être étendu dans les gaz, le système pourrait déboucher à long terme sur une machine volante capable d'évoluer à vitesse supersonique, le système permettant la supression des ondes de choc étant le même que celui qui propulse l'appareil.

Les résultats obtenus ont montré que la perturbation de pression pouvait être quasiment annulée. La machine serait donc pratiquement silencieuse tout en ayant des performances supérieures à celles des appareils classiques.

Le problème principal réside dans l'obtention de champs magnétiques suffisants. Il semble que le rendement énergétique puisse devenir intéressant à partir de champs magnétiques d'un dizaine de Tesla. Tant que les supraconducteurs nécessitaient une réfrigération à des températures extrêmement basses, l'application concrète d'un tel système semblait relever de la fiction, ne serait-ce qu'à cause du devis de poids. Or la possibilité les simulations nyoraunques ont montre dépuis on and lor qu'il vanir

possible d'annuler la trainée d'onde et même de l'inverser. Ce résultat étant susceptible d'être étendu dans les gaz, le système pourrait déboucher à long terme sur une machine volante capable d'évoluer à vitesse supersonique, le système permettant la supression des ondes de choc étant le même que celui

pourraient satisfaire le cahier des charges de l'engin.

La navigation sous marine et de surface est également asservie à l'intensité des champs magnétiques, les problèmes liés au poids étant moins cruciaux.

Si les supraconducteurs nouveaux ouvrent sur de telles possibilités, la conception de sous-marins MHD se développera très rapidement ([22] voir Annexe 6). C'est typiquement le domaine d'application de ces systèmes de contrôles d'écoulement (suppression de la trainée de frottement par accélération de la couche limite, suppression de la cavitation et de la turbulence). Les sous-marins MHD pourraient être à la fois rapides et silencieux.

Un système de navigation, avec contrôle de l'écoulement par un champ de forces de Laplace, serait en tout état de cause à étudier sur le plan consommation énergétique.

Il est à signaler que toutes ces machines navigantes ou volantes seraient exemptes de toute pièce mobile, style hélice, turbine, gouvernail ou volets.

Pour conclure, on peut dire que ces recherches dans un domaine nouveau, dont cette thèse représente la première approche, ouvrent la voie à de multiples applications originales.

Annexe 1

Modèle simplifié pour l'argon une fois ionisé.

D'après Norman [9]

1) Expression de l'équation d'état.

Pour un gaz reel ayant un taux d'ionisation α, l'équation d'état s'écrit:

$$p = (1 + \alpha) \rho R T = Z \rho R T \tag{1}$$

avec:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_i + N_n} \tag{2}$$

Z est une variable d'état, qui ne dépend que de deux variables indépendantes. Prenons Z = Z(p,T), ce qui conduit à :

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dT}{T} \left(\frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_{p=cst} \right) + \frac{dp}{p} \left(\frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_{T=cst} \right)$$
 (3)

En posant alors les facteurs de compressibilité Zp et Zt, respectivement à pression et à température constante:

$$Z_{t} = \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_{p=cst}$$
 $Z_{p} = -\frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_{T=cst}$ (4) et (5)

l'équation d'état s'écrit alors:

$$(1 + Z_p) \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + (1 + Z_i) \frac{dT}{T}$$
 (6)

2) <u>Détermination du rapport des chaleurs spécifiques.</u> Z T `Z `aT'p=cst' p `Z `ap'1=cst'

En posant alors les facteurs de compressibilité Zp et Zt, respectivement à pression et à température constante:

$$dh = C_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{T=cst} dp$$
 (7)

Une relation générale de la thermodynamique est:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{T=cst} = \frac{1}{\rho} - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho}\right)_{p=cst}$$
 (8)

ce qui donne:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}}\right)_{T=\mathbf{cst}} = -\frac{Z_{t}}{\rho} \tag{9}$$

et finalement:

$$dh = C_{p} dT - Z_{t} \frac{dp}{\rho}$$
 (10)

L'énergie interne, 'e', est calculée à partir de:

$$de = dh - \frac{dp}{\rho} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$
 (11)

qui, combiné à la relation (10) donne:

$$de = C_{p} dT - (1+Z_{i}) \frac{dp}{\rho} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$
 (12)

La chaleur spécifilque à volume constant est:

$$C_{v} = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{\rho = cat} = C_{p} - (1 + Z_{t}) \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho = cat}$$
(13)

De l'équation d'état, on tire:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial T}\right)_{\mathbf{p}=\mathbf{cst}} = \frac{\mathbf{p}}{T} \frac{1+\mathbf{Z_t}}{1+\mathbf{Z_p}} \tag{14}$$

ce qui donne:

$$de = C_{p} dT - (1+Z_{t}) \frac{dp}{\rho} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$
 (12)

La chaleur spécifilque à volume constant est:

$$C = \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{r}}\right) = C - \left(1 + 7\right) \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}}\right) \tag{13}$$

Le rapport des chaleurs specifiques s'ecrit finalement:

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{(1+Z_1)^2}{1+Z_p} \frac{ZR}{C_p}$$
 (16)

3) <u>Détermination de la vitesse du son.</u>

La vitesse du son s'écrit:

$$a^{2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=cst} \tag{17}$$

et par ailleurs, à entropie constante, l'enthalpie est exprimée par:

$$dh = \frac{dp}{\rho} \tag{18}$$

qui, combiné à l'expression (10) donne:

$$(1+Z_t) \frac{dp}{\rho} = C_p dT \tag{19}$$

A partir des relations (6) et (16), on obtient:

$$\frac{(1+Z_p)}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} \tag{20}$$

et finalement:

$$a^2 = \frac{y}{1+Z_p} \frac{p}{\rho} = \frac{y}{1+Z_p} ZRT$$
 (21)

4) Détermination des facteurs de compressibilité, du rapport des chaleurs spécifiques et de l'équation de l'énergie pour un gaz monoatomique, une fois ionisé.

Une des formulations de l'équation de Saha est:
$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{p}}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{dp}{p}$$
 (20)

et finalement:

$$a^2 = \frac{y}{1+Z_n} \frac{p}{Q} = \frac{y}{1+Z_n} ZRT$$
 (21)

ce qui donne:

$$-\frac{2}{\alpha^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_{T=cst} = \frac{K}{T^{5/2}} e^{\frac{E_1}{kT}} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)$$
(23)

et finalement:

$$Z_{\mathbf{p}} = \frac{\alpha}{2} (1 - \alpha) \tag{24}$$

On obtient de la même manière en différentiant (22) par rapport à T:

$$Z_{t} = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \alpha \right) \left(\frac{5}{2} + \frac{E_{i}}{kT} \right)$$
 (25)

Cp s'obtient en différentiant par rapport à T la relation de l'enthalpie, où seules l'agitation thermique et l'ionisation sont prises en compte:

$$h = \frac{5}{2} ZRT + (Z-1)R \frac{E_i}{k}$$
 (26)

$$C_{\mathbf{p}} = (1+\alpha) R \left(\frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2} (1-\alpha) \left(\frac{5}{2} + \frac{E_{\mathbf{i}}}{kT} \right)^2 \right)$$
 (27)

et on obtient l'expression du rapport des chaleurs spécifiques:

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \alpha\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{E_{1}}{kT}\right)\right)^{2}}{\left(1 + \alpha\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \alpha\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{E_{1}}{kT}\right)^{2}\right)}$$
(28)

L'équation de l'énergie interne est obtenue à partir de la relation (12) qui donne en éliminant dT à l'aide de (6):

$$de = \left(\frac{C_{p}}{ZR} \frac{1+Z_{p}}{1+Z_{t}} - (1+Z_{t})\right) \frac{dp}{\rho} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \left(1 - \frac{C_{p}}{RZ(1+Z_{t})}\right)$$
(29)

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \alpha\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{E_{i}}{kT}\right)\right)^{2}}{\left(1 + \alpha\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \alpha\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{E_{i}}{kT}\right)^{2}\right)}$$
(28)

L'équation de l'énergie interne est obtenue à partir de la relation (12) qui donne en éliminant dT à l'aide de (6):

Annexe 2

Détermination des caractéristiques d'un plasma d'argon une fois ionisé obtenu en tube à choc.

D'après Billiotte et Guénoche [14].

Prenons comme variables initiales la température T_1 et par là même l'enthalpie h_1 du gaz basse pression avant le passage du choc initial (indice 1), ainsi que la température T_2 et la pression P_2 du plasma après le choc (indice 2). On en déduit pout d'abord la vitesse du son avant le passage du corps:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{i}} = \sqrt{\gamma R T_{\mathbf{i}}} \tag{1}$$

Puis on calcule le saut d'enthalpie au passage du choc:

$$\frac{h_2 - h_1}{R} = \frac{5}{2} (T_2 - T_1) + \alpha \left(\frac{5}{2} T_2 + 182843 + \frac{2060}{1 + \exp\left(\frac{2060}{T_2}\right)} \right)$$
 (2)

et le rapport des masses volumiques:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2} \left(-\left(2 \frac{h_2 - h_1}{R T_2} - Z_2 \frac{T_2}{T_1} + 1 \right) + \left(\left(2 \frac{h_2 - h_1}{R T_1} - 2 Z_2 \frac{T_2}{T_1} + 1 \right)^2 + 4 Z_2 \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}$$
(3)

Le taux d'ionisation est calculé à partir de la loi de Saha:

$$\frac{1}{\alpha^2} = 1 + \frac{p}{6.666 \cdot 10^{-2} \, \text{G T}^{5/2} \, \exp\left(-\frac{182900}{T_e}\right)}$$
 (4)

où Te désigne la température électronique, et G le poids statistique :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2} \left(-\left(2 \frac{h_2 - h_1}{R T_2} - Z_2 \frac{T_2}{T_1} + 1 \right) + \left(\left(2 \frac{h_2 - h_1}{R T_1} - 2 Z_2 \frac{T_2}{T_1} + 1 \right)^2 + 4 Z_2 \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}$$
(3)

Le taux d'ionisation est calculé à partir de la loi de Saha:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 Z_2 T_2}{\rho_1 T_1} \tag{6}$$

d ou on tire p4 puis p1, à partir de l'équation d'état:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} \tag{7}$$

la vitesse et le nombre de Mach du choc par rapport au gaz basse pression au repos:

$$V_{oc} = \frac{p_2/p_1-1}{1-p_1/p_2} R T_1$$
 (8)

et enfin la vitesse de l'écoulement:

$$V_2 = V_{oc} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$
 (9)

Connaissant les densités des particules et la température, on en déduit alors d'après les relations pour les gaz réels données par Norman [9], tous les paramètres du plasma: la conductivité σ , le rapport des chaleurs spécifiques γ , la vitesse du son 'a2'.

Le nombre de Mach de l'écoulement du plasma est alors obtenu en posant:

$$M_2 = \frac{V_2}{a_2} \tag{10}$$

Connaissant les densités des particules et la température, on en déduit alors d'après les relations pour les gaz réels données par Norman [9]. tous les

Annexe 3

Formulation de l'équation de conservation de l'énergie avec effets de gaz réels

L'équation généralé de l'énergie proposée par Sutton et Sherman ([7] p. 121) est la suivante, en négligeant les pertes par rayonnement et par conduction:

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}$$
 (1)

D'autre part, Fontaine [2] a établi une expression de l'énergie interne tenant compte des effet de gaz réels et présentée en Annexe 1 :

$$de = A \frac{dp}{p} - B \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = (\frac{1+Z_t}{\gamma-1}) \frac{dp}{\rho} - (\frac{1+Z_t}{\gamma-1} \frac{\gamma}{1+Z_p} - 1) \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$
 (2)

En régime stationnaire, la dérivée particulaire de l'énergie interne devient:

$$\rho \frac{\mathrm{De}}{\mathrm{Dt}} = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{p} - \mathbf{B} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{p}$$
 (3)

Les gradients de masse volumique et de pression peuvent être tiré des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On obtient:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \ \nabla \cdot \mathbf{V} \tag{4}$$

$$\mathbf{V}.\,\mathbf{\nabla}\mathbf{p} = \mathbf{V}.\,\mathbf{J}\,\mathbf{x}\,\mathbf{B} - \mathbf{p}\,\mathbf{V}.\,(\,\mathbf{V}.\,(\,\mathbf{\nabla}\otimes\mathbf{V})\,) \tag{5}$$

L'introduction de ces expressions dans l'équation de l'énergie conduit à:

$$p(B+1)\nabla \cdot \mathbf{V} - \rho \mathbf{A} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{V})) = \mathbf{E}^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{A} \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \mathbf{x} \mathbf{B}$$
⁽⁶⁾

$$\rho = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$
 (3)

Les gradients de masse volumique et de pression peuvent être tiré des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On obtient: ou la designe la vitesse du son dans un gaz réel, on obtient l'expression de l'équation de conservation de l'énergie en terme de vitesses pour un régime stationnaire:

$$= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}}{\rho \cdot \mathbf{A}} - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}}{\rho \cdot \mathbf{A}}$$
 (8)

Dans une formulation bidimensionnelle plane liée au repère R_0 (0, x_0 , y_0 , z_0), le vecteur vitesse V a deux composantes (uo, vo) qui correspondent à ses projections sur les axes x₀ et y₀ du repère considéré.

$$\mathbf{V}.\left(\nabla\otimes\mathbf{V}\right) = \begin{vmatrix} u_o \frac{\partial u_o}{\partial \mathbf{x}_o} + v_o \frac{\partial u_o}{\partial \mathbf{y}_o} \\ u_o \frac{\partial v_o}{\partial \mathbf{x}_o} + v_o \frac{\partial v_o}{\partial \mathbf{y}_o} \end{vmatrix}$$
(9)

et:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{u_o}}{\partial \mathbf{x_o}} + \frac{\partial \mathbf{v_o}}{\partial \mathbf{y_o}} \tag{10}$$

L'équation de l'énergie devient alors:

$$\left(\mathbf{a}^{2}-\mathbf{u}_{o}^{2}\right)\frac{\partial\mathbf{u}_{o}}{\partial\mathbf{x}_{o}}-\mathbf{u}_{o}\mathbf{v}_{o}\left(\frac{\partial\mathbf{u}_{o}}{\partial\mathbf{y}_{o}}+\frac{\partial\mathbf{v}_{o}}{\partial\mathbf{x}_{o}}\right)+\left(\mathbf{a}^{2}-\mathbf{v}_{o}^{2}\right)\frac{\partial\mathbf{v}_{o}}{\partial\mathbf{y}_{o}}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{J}}{A}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right)$$
(11)

Le membre de gauche correspond aux Termes Sources de l'énergie, c'est à dire à l'énergie introduite dans l'écoulement par effet Joule et par le champ de force. Pour des raisons pratiques, on introduit:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma \rho \, \mathbf{V}^3 \, \mathbf{A}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \, \mathbf{x} \, \mathbf{B}}{\rho \, \mathbf{V}^3} \tag{12}$$

Soit 'L' une longueur caractéristique de l'écoulement. J.L et F.L sont les
$$(a^2-u_o^2)\frac{\partial u_o}{\partial x_o} - u_o v_o (\frac{\partial u_o}{\partial y_o} + \frac{\partial v_o}{\partial x_o}) + (a^2-v_o^2)\frac{\partial v_o}{\partial y_o} = \frac{1}{\rho}(\frac{\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}}{A} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B})$$
 (11)

Le membre de gauche correspond aux Termes Sources de l'énergie, c'est à dire à l'énergie introduite dans l'écoulement par effet Joule et par le champ de force. Pour des raisons pratiques, on introduit:

Annexe 4

Programme de calcul de l'écoulement interne dans une tuyère convergente en présence de forces de Laplace

```
lu, p, T, Fx, Fy, phi, alpha, Machf, Fx, Fy, phi, alpha, Mach : array[nl..n2, Nl..N2] of real;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               ii, xez, yez, incr, kkl : integer;, yez, incr, kkl : integer;
him, Ycz, RM2, y3, ga, Jx, Jy, Fb:2, RM2, y3, ga, Jx, Jy, Fb, RoO, UO,JO : real;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          g[14] of char; { equivalent a STR34 char; { equivalent a STR1NG en Fascal UCSD }
                                                                                                                                                                                                                                                                                     Rayon de courbure du convi Rayon de courbure du convergent/divergent )
.pen')] program Ecoulement_Internt program Ecoulement_Interne (input.output.)
                               nt dans une tuyere convergent par; une tuyere convergent par la methode des
                                                                                                                                                                                                                                                         ( 1/2 Hauteur de la tuyere ( 1/2 Hauteur de la tuyere en mm)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                { position du convergent en: position du convergent en mm}
( Longueur du convergent en: Longueur du convergent en mm)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             s dans la hauteur }
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            J premier point }
                                                           it interne )
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              (1) of real;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       of integer;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   of integer;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    al);extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            :alcul }
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            ( uisi
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            :tern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   :tern:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         terni
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                (tern:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           e points dans la hauteur }
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            tion du premier point }
                                                           oulement interne )
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           O.. jmaxil of real;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            maxil of integer;
maxil of integer;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    z,t:real);extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            ge de calcul }
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     eger);extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       ea]);extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            du dessin }
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         eal);extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     eal);extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             eal);extern;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  ic real:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            integer;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         pascal)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         1que >
                                                                                                                                                                                                                                 ere >
```

theat t these

integer):extern;
ager):real;extern;
<tern;
fertrin;</pre>

xtern; ;extern;

al) : real;

(;;)

1) : real;

(q.

1) : real;

50) then

sqrt (R + R - sqr (x - Lp)):

eal);

eal);

eal);

al);

al);

/2) then R = x + x); /Lp) then sqr(x ~ Lp)) + Yc2;

(:: # X |

eal);

```
Calgha 1 reall 1 reall
```

```
vegande des champs de parametres «.y.p.) parametres «.y.p.T.F«.Fy.V«.Vy ');
.'Paramint.Dat');
erfarametres;
                                                                                                                                      ob ₹N
                                                                                                               ກອທີ່
                                                                                                                                                              i do
```

ram, sfir,]3,yfir,]3,pfir,jJ,Fsfir,jJ,Fsfir,jJ,Fsfir,jJ,Fsfir,jJ,Vsfir,jJ,Vyfir,jJ,Vyfir,jJ,Alphalir,jJ,Adfir,jJ,Mufir,jJ);

ije de je

tureChampV;

re du Champ de potentiel Electrique Fotiel Electrique FotInt');Readin(NoFichier); r : real; Fichier/100); ger:

FotInt*+Chr (Trunc (ie/10) +48) +Chr (ie-fre/10) +48) +Chr (ie-frunc (ie/10) *10+48) +Chr (trunc (le/10) +48) +chr (ie-frunc (le/10) *10+48) +*. DAT*; fichier lu s'appelle : **NomFichier); : **NomFichier); r-1e+100;

mFichier,old);

ni to jmaxi do

c); i1[j]:=trunc(r); c); ia[j]:=trunc(r);

o); iafj]:=trunc(r) ni to imaxi do r); ji[i]:=trunc(r); r); ja[i]:≃trunc(r);

in to jmaxi do mini to imaxi do , V[i,j]);

de lecture');

de lecture,

ger; : real; igna *jmaxi / 20000 / 2.5: sqrt(H-sqr(Lp/2/R))); { partie etroite (partie etroite du convergent) { y du centre du deusième concle du deusième concle du profil) 0*MO-1);

O≠MO-1/i gamma + 1) / (gamma - 1)); := arctan(1 / RM⊋);

Rgp / FO; grt (gamma * Rgp * TO); o Ni do

F0; T0;

: integer); , y : real; long : integer);

.p/2), 5);), 5); (10); y(le + Le), 10);

д Эб ı do y[i, 0.1);

ı do

ai * i / Ni3 RM2 * y(i. O];

alphafo, 01;
/ 2;
/ 2:
/ 3:
/ 0 ;

0111;

ф

```
4, Dld,V4.14,M4,R04,p4,V3.M3,p3,R03,13.d; 3,p3,R03,13.d; ; real;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              , Vo. VI, V2, V3, V4, IgTheta, CosTheta, Eta, CosTheta, Etreals
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              1+V4·V3-V2) +2 / /R2/ (cos(theta) +sin (theta) ) is) +sin (theta) ) ;
      (G / ×P)
= X0 - (16 - 1) + dx + y + (dx / 2);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         h, Sgh, Tgh, H, G, dksì, EW : real;
ylh, E:ll, Fyll, Epki, Epkh : real;
NN : integer;
                  = 1 * h / NI;
(xa ya);
(xa + dx / 2, ya + h / Ni);
(xa + dx, ya);
(xa + dx, ya);
(xa + dx / 2, ya + h / Ni);
(xa + dx, ya);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               ia[yj] then yj:=yj+1;
jma:i) then yj:=jma:i-3 ;
imaxi) then xi:= imaxi 2 ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      ta := ((V3-V1)/(V2-V4));
:= arctan(tgTheta);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 arctan(tgTheta)-p1/4;
na*E*kE;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          paroi (i : integer):
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            1 + V2 + V3 + V4) /4;
                                                                                                                                                                                                                                              J3(:.y:real);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  xi+1, yj+1];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          cos (Theta);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             sin(theta);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           unc ( :+11p):
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              xi,yj+1];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   ×1+1,yj];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   V4) then
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         ×i · y j ] ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              ung (y) ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               nteger:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      =pi/_;;
                                                                                                                                                                                                                                                                                      4143
```

= 0 to Ni do

1 to 15 do

```
qr(1/Mach[i,i-1])/p[i,i-1]*Fpki | sqr(1/hi-1]*Fpki | sqr(1/Mach[i,i])/F[i,i]*Fpkh)*Eksi/gamma/4;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          1,1-1] + (2*8ld + ph.El.() - ph.El.() + ph.El.() + ph.El.() + M3*M3*gamma*p3/sqrt(M3*M3 1);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            - (p3-p4) + (1/r03/v3+1/r04/v4) /: + (P3/r204/v4) /: + (P3/r04/v3+Ex4/r04/v3) + dx/::
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    Phili,i-1] - alphali,i-1] + phili,i] - a-1] + phili,i] - alphali,i) / 2);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            philiii 1 = alphaliii-11 + philiii - a-11 + philiii - alphaliii) / 2);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             (\mathsf{sqe}(\mathsf{VE}[i,i] \exists \forall \mathsf{VE}[i,j,i-1]) \land \mathsf{sqe}(\mathsf{SE}[i,i]) \exists (1,1,1) \land \mathsf{sqe}(\mathsf{SE}[i,i]) \exists (1,1,1,1)) \land (1,0,0) \Rightarrow \mathsf{ver}(\mathsf{VE}[i,i,i-1]) \land \mathsf{ver}(\mathsf{VE}[i,i-1]) \land \mathsf{ver}(\mathsf{VE}[i,i-
                                                                                                                                                                                                                                                                                                  -1] * cos(phili.i-1) + Fyli.i-11 * sin(+ Fyli.i-11 * sin(phili.i-11);
i-1] * sin(phili.i-11) + Fyli.i-(] * cos + Fyli.i-(] * cos(phili.i-11);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       i.i.] * sin(phi[i.i]) + fy[i.i] * cos(phi[fy[i.i] * cos(phi[i.i]);
alpha[i.i]) * fylh + sin(alpha[i.i]) + (iin(alpha[i.i]) + (iilh;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              phalii-11) * Fyli + sin(alphalii-11) +:in(alphalii-11) + f::1;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            .1] * cos(phi(1.1]) + Fy[1.1] * sin(phi(fy[1.1] * sin(phi(1.1]);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 gh - Tih);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ~ G) / (Tgh - Tih);
| * Tgh - G * Tih) / (Tgh - Tih);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               Philli-1,1-11 + Philli.11) / 2);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         phili-1,1 (1,1 + phili,1) / ≥);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              11] - Yfi,1-11) / Sih / 10003
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       Ro3: Ro4 : P3:=p4 : M3:=M4 ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   J - Tib * x(i,i-1);
-1] - Tgh * x(i-1,i-1);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      r (937M3) / gamma/Rip 1
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         arctan (yp (x[i,1]));
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      ifi, j ]+1d[i, j ];
pha(1-1,1-1);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   1,1-11+014;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        [1-1,1-1];
                                                                                                   1-1,1-13;
                                                                                                                                                                                                                i-1,1-1];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            -j× + ₽B
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      )y * FB;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     1-1, i-1 l;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           y[i,i]);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      to 4 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       1,1-13;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    1,1-13;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     Rgp/t4;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            op uu
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         1,13:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    . ( (
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         : 0
: 0
: 0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 ē
```

. . . .

1,1-13;

: alinill: arclan(1/sqrt (M.S+M.S 15)); sqr (V3/M3)/gamma/Rip 111:~V3*sin(philii1); replacyfog D1 referente yforten 1D3 1-19 t 1 1. y(1-1, t 1); 151-113c y[15]-140; 1.1 11. y(1.1-11); ייון וייולי יון נייו) O then

e nūrmal (1,] : integer);

·[i,j]/kfk);

SEND LHESTING PREKRYLIGGERYENG DARKEN · [13]]+F:[1,]]/kEk,y[1,]]+Fy[1,]]/kEk);

"[m] J. Alm D: "Internation of the plant

/[1+j]]/k[.k]:

u, fpki, fpek, fpkh, fpch, fsli, fyli, fxlksli, fyli, fxlk, fylk, fslh, fylh ; real; 3,Fs4, ER, detap, dksip, V4, M4, R04, 14, p M4, R04, 14, p4, VI,VS:V3,M3,p3,ro3,T3,phi3, dx ; real; kh, tih, tkh, G, H, dksi, deta, bb : real; ya, bb : real; eals :3,:4,y1,y2,y3,y4,tg1,ph1p1:real; 11 : integer;

-Fxii, j - i] * singphilis j - il) + Fylis j - il) + Fylis j - il) * cos(philis j - il) i Fxii * sin(alphalis j - il) + cos(alphalis + cos(alphalis j - il) * Fylii Fxli-1s j l * cos(phili-1s j) + Fylis l s j + Fylis l s j + sin(phili-1s j il) i -Fxli-1s j l * sin(phili-1s j) + Fylis l s j + Fylis l s j s s j + cos(phili-1s j il) i Fxlk * sin(alphalis - 1s j il) - cos(alphalis - cos(alphalis l s j il) * Fylks il) i = (Vxli-1s) | + Vxlis s j | - 1]): Exti. j - 1] • cos(phili. j - 1]) • Eyli. - 1]) • Eyli. j - 1] • sin(phili. j - 1, j () / 2; .jl := (alphali.j-1) + alphali.l.jl) / .3 ([1.1.jl) / .3 j D / 23 J-11) /2: i = (p(i), j - 1) + p(i - 1, j) / 2; j1 := (pni(i), j - 1) + pni(i - 1, j) / 2;j1 := (Machfi-l,j] + Machfi,j-l])/?;

#[1.5]=1] ; y] ;= y[1.4] [] : ::;=#[(=).1] ; ::;=#[(=).1] ; ;;=#[(=).1] ; y;:=y[1.4]);
= (v1-y.)/(a1-a.); 1-1-13333 i., [13)); 59rt (59r (Vaf1-1,17)+59r (Vyl 1-),170); sqrt (sqr (V::[1,j-1]) +sqr (Vyli,j 1]));

:= (Vyf1-15] + Vyf15] -11) / 3:

Lij -11 > -10 then 53

= 1 to an do

= sin((phi())=11 = alpha(i) | 11 + phi() | 11 + phi() | 1 + alpha(i) | 7 | 3 + alpha(i) | 1 + alpha(i) | 1 + alpha(i) | 2 + alpha(i) | 2 + alpha(i) | 3 + alpha(i) | 4 y[13]-11 - (1h + x[13]-1]3 y[1 13]3 - (kh + x[13]3)3

(14) [4b): := (Yfiell Yfiel-ID / Sib / Loon)

-1,31, y(i-1,31); ,j-11, y(i,j-11); ,j'i, y(i,j-13);

111. 111.133

```
3 := M4 * (1 · (p3 p4)*((1+M3+M3*(qamma-1)/213*(qamma-1)/2)/mma*(1+M4*M4*(qamma-1)/2)/ro4/V4/V4)/2 + (Fx3/ro3/V3/V3/Fx4/ro4/v4/v4)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      ((Sin(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13);ean(alphafi,j-13)*ean(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphafi,j-13)*cos(alphaf
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         (sin(alphafi-1,j])*cos(alphafi-1,j])/pl1-1,j-1,j])/pl1-1,j l+sin(alphafi,j-1])*cos(alphafi,;-1])/pfi,j-1])/gamma;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    - (Fpki/sqr(MachEisj 11)/pEisj-11 + Fpkh/sq -11 + Fpkh/sqr(MachEisj)/pEisj1) +dkSi/gamma/4;
- (Fpek/sqr(MachEi-1sj1)/pEists] + Fpeh/sqs] + Fpeh/sqr(MachEisj1)/pEisj3)+deta/gamma/4;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   1.j 1:=03+sin (phi 3) (Phi I t.j 1:: Fhi 3) - Alpha L. ji 3) - Alpha L. j 1:=03+sin (phi 3) (Phi I L. j 1:=03+sin (phi I L. j 1:=03+
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  3 := V4 - (p3-p4)*(1/ro3/v3+1/ro4/v4)/ + (F104/v4)/ + (F13/ro3/v3+E4/ro4/v4)*ds//
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            h. [1, 1] := M3 : p[1, i]: p3 : 1[1, j]: 13 : ∀ [1, j]: 13 : ∀ [1, j]: =∀ *cos (ph. 3):
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            ap := deta*sin(alpha[i=l,j]) ; dksip :> dksip :> dksi*sin(alpha[i,j=l]);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       := (Machfi,j-11*detap + Machfi-1,j1*dksip) / 1,j1*dksip) / (detap+dksip);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       deta*dksi*sin(a)phall-1.j]+alpha[1.j-1]!/Alpha[1.j-1]!/(detap+dksip);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     ** (p[1,j-1]*detap + p[1-1,j]*dksip) / (detapksip) / (detap+dksip) ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                := (Fx[i,j-1]*detap + Fx[i-1,j]*dksip)/(det.]*dksip)/(detap+dksip);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           \approx \sin(\text{phi}[1, j]) + \text{Ex}[1, j] + \cos(\text{phi}[1, j]) + \cos(\text{phi}[1, j]) + \text{Ex}[1, j]
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                = [r(1), 1] + cos(phi(1), 1] + Fy(1), 1 + sin(phi(1), 1] + sin(phi(1), 1);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      = "cos(alphalist) + Fyth + sin(alphalist) ((alphalist) + Fills
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         = cos(alphafiij]) + Fylh + sin(alphafiij]) +(alphafiij]) + Fxlh;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    = (y3-y2-x3*tan(ph1p)+x2*tg1)/(tgI-tan(ph1p)(tgI-tan(ph1p));
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              := V4 : Ru3:=R04 : M3:=M4 : F:3:=F:[1,1] : 1:=F:[1,1] :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            14 dk 51p);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                (VI*detap + V2*dksip)/(detap+dksip);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   = sqrt (sqr (x3-x4)+sqr (y3-y4))/1000;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            : = 8di. (V4/M4) / gamma / Rgp :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            3 := sqr (V3/M3) / gamma/f/gp :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         =x[1,1] 1 ; y3:=y[1,1] ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     11:≕1 to 3 do begin
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     o3 :: p3 / Rgr / T4 ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           1:= Muf 1-1,1] + Dmut
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              = (x4-x2) + tgI + y2;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  p:=phi3-phi[i-1, ] ];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    1:= Ld(1,)-1]+[i]d;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  = mu[i,j]-ld[i,j];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   := p4/Rgp/T4 ;
                                                                                                                                           .] [ : ] J * BH;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                    - 13 1 1 × 1 1 × 18 H
[11]].y[11]]
```

110001

V[1-1,1]) / Skt / Fourt

= (y[1,j]) Filmt(1,j);

= O then

```
Et = 1, prEp13 + VED, prEp1 + prEp13 + VED, prEp1 + prEp13 + VED, prEp13 + 
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           1 downto 1 do \frac{1}{j}1 + V(0, j+1) / (j+1) + V(0, j+1) / 3t
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             -13+V(1,1+11)/3;
33+V(1,1)(1,1+13)/2;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  ]1[1] + 1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  (i.]+1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        downto jifil+1 do
j]+V[i,j-1]+V[i,j+1])/3;
[i-1,jiEi]]+V[i,ji[i]+1])/2;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        1 downto 1 do
```

s, - . # , ·

7010.dat');

xi do

1);

×i do

33 ;

an do an do

g

.

,

.

0.5); ou suite (5)'); n

¢

(3) (3)

BIBLIOGRAPHIE

- 1 Krank S.C., Experimental investigation of magnetoserodynamic flow around blunt bodies, Northwestern University Ph. D. Eng. Gene., 1969.
- Fontaine B., Contribution à l'étude de l'action d'un champ magnétique ou d'un champ électrique transversal sur un courant supersonique d'argon ionisé: cas d'une décharge pure: cas de la conversion MHD, Thèse N° A O 7860, Université de Marseille, 1973
- 3 Forestier B., Etude de l'accélération par les forces de Laplace d'un écoulement supersonique d'argon ionisé, Thèse N° A 0 7861, Université de Marseille, 1973
- 4 Carrière P., Méthodes théoriques d'étude des écoulements supersoniques, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, France, 1957
- 5 Courant R. & Friedrichs K.O., Supersona: flow and shock waves J. Interscience publishers Inc., New York, 1948
- 6 Petit J.P., Is supersonic flight, without shock we'ves, possible, Heith Inter. Conf. on MHD Electr. Pow. Gene., Moscow, 1983.
- 7 Lebrun B. Approche théorique de la suppression des ondes de choc se formant autour d'un obstacle efflié placé dans un écoulement supersonique d'argon ionisé à l'aide de forces de Laplace. Cas d'un écoulement quasi-unidimensionnel stationnaire pour un gaz parfait et un gaz réel Cas d'un écoulement bidimensionnel stationnaire à pression constante. Thèse de Docteur-Ingénieur Aix Marseille I 1987.
- 8 Sutton G.W. & Sherman A., Engineering magnetohydrodynamics, Mac Graw-Hill, New York, 1965
- 9 Sivoukhine D. , Cours de physique général. Thermodynamique et physique moléculaire, Editions de Moscou , 1975
- 10 Norman W., One dimensional magnétohydrodynamics équations for a formant autour d'un obstacle effilé placé dans un écoulement supersonique d'argon ionisé à l'aide de forces de Laplace. Cas d'un écoulement quasi-unidimensionnel stationnaire pour un gaz parfait et un gaz réel Cas d'un écoulement bidimensionnel stationnaire à pression constante. Thèse de Docteur-Ingénieur Aix Marseille I 1987.
- 8 Sutton G.W. & Sherman A., Engineering magnetohydrodynamics, Mac Graw-Hill, New York, 1965

- 12 Dukowicz J.K., A magnetohydrodynamic flow in the shock tube boundary layer with transverse magnetic field, UTIAS Rep Nº 115, 1966
- 13 Daniel B. et Tamor S., Non equilibrium ionization in magnetohydrodynamic generators, Gene. Elec. Res. Lab. Rept. 65-RL (2922E), 1962.
- 14 Larcher G., Thénard C. et Maillot P., Température et densité électronique à l'équilibre d'un plasma d'argon pur produit en tube à choc, C. R. Acad. Sc., T.276 Série B., Paris, 19 Fév. 1973
- 15 Billiotte M. et Guénoche H., Ondes de choc dans l'argon, IMFM, 1963
- 16 De Votto R.S., Transport coefficients of partially ionized argon, Phys. of Fluids vol. 10 n°2, Feb 1967
- 17 Petit J.P. et Darrozes K., Calcul des paramètres de transport des plasmas non lorentziens, J. de Méca., 1975
- 18 Petit J.P., Valensi J., Dufresne D., Caressa J.P., Caractéristiques électriques d'un générateur linéaire de Faraday utilisant un mélange binaire de gaz rares, avec ionisation hors d'équilibre, C.R.A.S. t.268 P.245-247, Jan. 1969
- 19 Velikhov E., Hall instability of current carrying slightly ionized plasma, MHD Electr. Pow. Gene., Newcastel, 1962
- Jeukins M.K., Nakamura T., Vilas T.R. et Eustis R.H.: Standford Univers USA., Experimental results of a hight magnetic field combustion disk generator, Seventh Inter. Conf. on MHD Electr. Pow. Gene. p.495-502, Cambridge, 1980
- 21 Ishikawa M.: Kyoto Univers. Japan , Coupled effects of electrodynamics and gasdynamics in disk-type MHD generator, Seventh Inter. Conf. on MHD Electr. Pow. Gene. p.495-502, Cambridge, 1980
- 22 Resier E.L. et Sears W.R., The prospects for magnétoaérodynamics, J. Aeron. Sci. Vol 25 p.235-246, 1956
- 23 Lebrun B. et Petit J.P. Annihilation des ondes de choc dans les écoulements supersoniques par champ de force MHD. Modèle quasigenerator, Seventh Inter. Conf. on MHD Electr. Pow. Gene. p.495-502, Cambridge, 1980
- 21 Ishikawa M.: Kyoto Univers. Japan , Coupled effects of electrodynamics and gasdynamics in disk-type MHD generator, Seventh Inter. Conf. on MHD Electr. Pow. Gene. p.495-502, Cambridge , 1980
- 22 Resier E.L. et Sears W.R., The prospects for magnétoaérodynamics, J. Aeron. Sci. Vol 25 p.235-246, 1956

RESUME

La suppression des ondes de choc dans les écoulements supersoniques par un champ de force de Laplace autour d'un obstacle effilé est abordée à travers deux modèles théoriques correspondant à des régimes stationnaires:

- un modèle quasi-unidimensionnel, pour un gaz réel et un gaz parfait, basé sur la conservation du parallélisme des caractéristiques issues de la paroi de l'obstacle;

- un modèle bidimensionnel pour un gaz parfait établi sur la méthode générale des caractéristiques dans le cas d'écoulements plan et à symétrie de révolution en interaction MHD non isentropique.

Plusieurs critères généraux concernant l'intensité du champ de force, sa géométrie, la sensibilité de l'écoulement au blocage thermique, et notamment un critère 'anti choc', sont ainsi établis.

L'étude quasi-unidimensionnelle met en évidence l'influence favorable que peut avoir l'effet Hall, et montre que la suppression des ondes de choc s'accompagne de la constance de la température, de la pression, et de la masse volumique le long du profil. Ces résultats impliquent l'annulation de la traînée d'onde,

L'étude bidimensionnelle montre, à l'aide de simulations numériques pour des écoulements isentropiques, que les systèmes d'ondes de choc apparaissant normalement dans une tuyère supersonique convergente ou autour d'un obstacle effilé plongé dans un écoulement supersonique peuvent être supprimés.

Ces travaux pouvant déboucher sur des expérimentations en tube à choc, l'étude des écoulements de plasmas d'argon obtenus par ce procédé est faite, et des conditions expérimentales sont dégagées.

ABSTRACT

The shock wave cancellation by the action of the Lorentz force in the supersonic flows is described by two steady-state models for inviscid gas:

a quasi-onedimensional and isentropic model in the cases of real and perfect gas. The shock wave structure can be eliminated when the self-crossing of the characteristic lines is prevented by the Lorentz force field;
 a bidimensional analysis in the case of a non isentropic, plan or cylindrical

- a bidimensional analysis in the case of a non isentropic, plan or cylindrical flow, by the characteristic method.

Several criterions are established concerning the force field intensity, its geometry, and the sensitivity of the flow to the thermal blockage. Thus, an 'anti shock' criterion is proposed.

The quasi-onedimensional approch shows the favourable action of the Hall effect. The shock wave cancellation induces then the constance of the thermodynamic parameters $p \ T \ \rho$ along the streamlines. This result involves the drag to be zero.

The numerical simulations resulting to the bidimensional analysis shows the possibility to eliminate the shock wave structure wich appears usually in a convergent channel or around a thin body.

This work may lead to shock tube experiments and the ionized argon flows obtained with such process is done. Experimental conditions are proposed.

Several criterions are established concerning the force field intensity, its geometry, and the sensitivity of the flow to the thermal blockage. Thus, an 'anti shock' criterion is proposed.

The quasi-onedimensional approch shows the favourable action of the Hall effect. The shock wave cancellation induces then the constance of the thermodynamic parameters $p \ T \ \rho$ along the streamlines. This result involves the drag to be zero.

The numerical simulations resulting to the bidimensional analysis shows the possibility to eliminate the shock wave structure wich appears usually in a convergent channel or around a thin body.

```
- (Fpek/pti-1,)]/sqr(Machti-1,j]) + Fpeh/p-1,j]) + Fpeh/pti,j]/sqr(Machti,j]))/4/gamma*Neta;
                                                                                                                                                                                                                                      lk, Epek, skhi tkh, k, deta, Exih, Eyih, EpEkih, Eyih, Epek, bb : real;
FR .Uid, Emu, phi3, ds, V4, M4,R04,p4,l4, M4,R04,p4,l4, V5M3,E3.F5.rs3 : real :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               os(phi[i-1,j]) * fs[i-1,j] + sin(phi[i-1,j] sin(phi[i-1,j]) * fy[i-1,j];
sin(phi[i-1,j]) * fs[i-1,j] + cos(phi[i-1,j) cos(phi[i-1,j]) * fy[i-1,j];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   = -fx[i,j] + sin(phi[i,j]) + fy[i,j] + cos(fy[i,j] + cos(phi[i,j]);
= fx[h + sin(alpha[i,j]) - fy[h + cos(alpha[i,j]);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         in(alphafi-lij)) * Fxik - cos(alphafi lijlis(alphafi lijl) * Fylks
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            : fx[i,j] + cos(phi[i,j]) + fy[i,j] + and(phy[i,j] + and(phi[i,j]);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   sin((phi[i-1,j] + alpha[i-i,j] + alpha[i,j] + alpha[i,j]) / 2); tan((phi[i-1,j] + alpha[i-i,j] + alpha[i-i,j] / 2);
                           . J J7kf t.) :
                           1.) ] +Fx[1.] ]/kEk,y[1.] [+Fy[1.]]/k[1.]
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   : (y[i,j] - yEi-1,j]) / skh / 10003
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     = TCi-1,j-1];
= pCi-1,j-1];
= FxCi,j]; Fx4; = FxCi 1,j-1J;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 = (x[1,1]-x[i-1,1-1])/10001
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             1:1:11 - Tkh + x[i-1:j]1
                                                                                                                                                   median (i, j : infeger):
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             ] := mu[i-l.j] + Dmu;
] := Mu[i.j] ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          := (y[1,j]-K) / Tkh;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           1 := alpha[1-1,1];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        = Mach(1-1,1-1);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       i,j], y[i,j]-1);
j] := jy + BB;
j] := -jx + BB
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            = Vx[1·1,]-1] :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       : =: phi[1-1,1];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               :-:Mach[1-1,j];
1, 1 ], y[1, 1]);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                = p4/figp/t4 :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 j] > --10 then
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          = Vx[i 1,]];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      = Vy[1-1, j]
                                                                                                                                                                                                           n : integer;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        p[i·1, ]];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           I to nn do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    Int(i,j);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  1 1y:=0 :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         : 0 ::[
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             1) := 0:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       10 =: [[
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              0 then
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 :
!
!
```

```
PELoj N=p3 i TEoj J:a(3 ; V.(c.joj N=p3 i TEoj J:a(3 ; Va(coj H:vV€+cev(plot c) h:
b(Eoj J): AlphaEoj J:marctan(1/soj J): AlphaEoj J:marctan(1/sqr)(Machicoj H+MachEoj J ) ) :
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  , V[1, j]+Fy[1, j]/kFh) :
1:=M4 ; p3:=p4 ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        (1 ) NI) then
                                                                                         inma/Rgp ;
                  1910
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   ··
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                /KEk,y[1,j]+Fy[1,j]/kfh):
: M3:=M4 ; p3:=p4 ;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      and (1 ) NI) then
                                                                                        )/gamma/Rgp ;
3;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                ypc);
                                                                                                                                                                                                                                                          ; (T [
                                                                                                                                                                                                                       : ([
```

) † ;	1st Inti
	(b)
]:integer):real;	t(i,):integer):real;
In.	reali
; Emu:= Mu[i.]]-Mu[j.]] ; () hi[i.]]+alpha[i.]]>=alpha[i.o phi[i.j]+alpha[i.]]>phi[O.O]+	<pre>f Dnu:= Mu[i,j]=Mu[j,j] i () j,Ol; Dnu:= Mu[i,j]=Mu[j,j] i () hi[i,j]+alpha[i,j]>=alpha[i,c] ((phi[i,j]+alpha[i,j])>=alpha[i,c]) } phi[i,j]+alpha[i,j]>philo:Ol+ind (phi[i,j]+alpha[i,j])philo:Ol+alpha[o,O]) THEN</pre>
i,j1(90) then	1 (x[i,j](90) then

)] module MI(input;output);

odule MI (input,output) ;

Annexe 5

Programme de calcul du champ électrique dans une tuyère convergente.

```
E(R+R-sqr(1-ip-Lp))+F+(1-j+sF+(1-j+sqrt(1-sqr(Lp/2/R))); s + Lp) then
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   R * (1 - sqrt(1 - sqr(Lp / 2 / R)));
                                                                                                                                                                                     { premier point des electrodes }
{ longeur des electrodes }
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         b) and (i ( ip + Lp / \mathbb{P}) then if (R + R - sqr(i - ip)) + Ri by + Lp / \mathbb{P}) and (i ( ip + Lp) then
Winterne (ChV. input.output):
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     )..imaxi. G..jmaxil of real:
ray[0..jmaxil of integer:
ray[0..imaxil of integer:
|l. k : integer:
                                                                                                                                 ( rayon de courbure en mm )
(premier point du profil )
                                                                                                                                                                     ( longueur du profil )
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              o + Lp + 1 to imaxi do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  trunc(yy(i) + 0.5);
1 := i;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        :(yy(le+Le) + 0.5);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    (1 : real) : real;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       :(yy(ie) + 0.5);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              o to up + Lp do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 11[ip + Lp];
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     to ip - 1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        to jman do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           ntMaillage:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  ຸ່ງ ທຸລະເ
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      ina: i;
                                                                                                                                                                                                                                                               Freal;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         j max 13
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 reger;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 -har:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        then
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        ö
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           ŝ
                                                                             ..
```

/ E)));

then

```
1.1411)/3;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                1-1-135/51
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      1+133/33
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                (V(1+1,1)1+V(1-1,1)1+V(1,1+11)/3;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     e+1 to ia[0]-1 do
(V[1+1.j]+V[1-1.j]+V[1.j]+[])/3:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                157 (1) 1 3 ACCO. 1 (1) 1 OCCO. 1 (1) 731
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     7[1+15] ]+V[i-15] J+V[15]+1 J) / 3;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (1, 0) + 0(0, 11) / 21
                                                                                                                                                     ure du Champ Vint');
:Int7010.Dat',old);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        ((ie+Le)(ia[0]) then
                                                                                                                                                                                                                        us infjl:=trunc(r);
Us ialjl:≃trunc(r);
                                                                                                                                                                                                                                                                                            ## ji[i]:=trunc(r);
## ja[i]:=trunc(r);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                1-15] 1+VE15] +110 723
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             1-1,174VE1,1411)/23
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        jilip +Lp] do
                          ima∷i - 1 do
;≕ -10000:
:= +10000;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    jmaxi do
to imaxi do
Vii, jl);
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   (j)jl) then
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        taf0]-1 do
                                                                                                                                                                                             jmaxi do
                                                                                                                                                                                                                                                                  umazi do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     1e-1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 it eger;
                                                                                                              :
```

a + Lpl to jmaxi do

:13

+L_p 1 downto 1 do

(j) j l) then

```
Using[] = 1 do (\nabla U_1, y+1) + \nabla U_1 + 1, y+1+1 + \nabla U_1 + 1, y+1+1 + \nabla U_2 + 1, y+1+1 + \nabla U_3 + 1, y+1+1 + \nabla U_4 + 1, y+1+1 + \nabla U_5 + 1, y+1+1 
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        (VEi, \ j + 1j + VEi, \ j + 1j + VEi + 1, \ j \, j + 1j + VEi + 1, \ j \, j + 1i + VEi + 1, \ j \, j + VEi + 1j + VEI + V
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             = (V[imaxi-1.j])+V[imaxi.j+1]+V[imaxi.j+1]+V[imaxi.j+1]+V[imaxi.j+1])/3;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  VELO, 13 + VEO, 1 - 11 + VEO, 1 + 13) / (+ VEO, 1 + 13) / 35
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    +V[1, ]+1]}/ 5;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        V(1.)+11)/3;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   V[1,1]+1 D / JS
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 1) / [:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              3) / 33
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               := (V[)+1,)]+V() 1,J1+V(),j+1])/ $:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        = (Vt1+Li) 1+Vt1-1-) 1+V(Li)+LD/3;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   - CVERRAJ DVENTAJ DVENJAT P 73.
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        t = 1, j + VEi, j = 10, 7/2;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      13) / 33
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   + [p] + 1 to jma: 1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  downto jilip+Lp3+1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         d (10+Le+1(1afj3) (hon
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  VEL 15 11 VEL () +1 D / 3
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       VE1-1, 11+V(1, 1+11) /2:
                                                                                                                                                                                                                                                                  1-13+1 to 1afj 3-4 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           elett to tall do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          ∺i – 1 downto 1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  (f)-11+1 to 18-1 do
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  1 + 1, 11 + 90, 1
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             +1, j 3+V[1, j -13) /23
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       -1+j 3+VEi+j-13) /25
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         d (j(jl) then
(j)||) then
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         teger;
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       (16)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   <u>:</u>
```

(VEL.) -11 + VEL. 1 + 1 + 1 + 1 + VEL. 1 + 1 + VEL. 1 + V

WYCH POY

1001-11010-1-11 4 MO-1-11074

<pre>f1-1,11+Vfi,1+11)/2: 1-1 downto raf[-1]+1 do (VL1+1,1]+VL1-1,1 PVL1,1+11)/3:</pre>	25 01 do 1 (40) 1 (41) 73:
en downto ralj-1141 do = (VEr+1-j.liVfr Lij1+VEr+11)735	.io 1+V(1, 1 + 1 1) / 3;
1 (j(jl) †hen	
l ((le+Lo)(dafj]) thon	บอับ
"[1-1,]]+V[1,]+1])/2;]]- downto le*le*! do " (V[1+1,]]+V[1-1,]+V[1,]+1])/3;	7; 1 do 1+V[1,1+11)/3;
-1] downto 1 do V(1,j-11+V(1,j+1)+V(1,+1,j)+V(1,1,j))/ 1,j] + V(0,j+1] + V(0,j-1))/3;	1.j 1)/4VL1+1.j 3+VC1 1.j 1)/4; VL0.j = 13:/3;
((ie+le)(ia[0]) then	c
-1.j3+V[1.j+13)/2: downto ne+Let1 do +1.j3+V[1-1.j3+V[1.j+13)/3:	dα - y +13) / 3 :
-1.j]+V[1.j](])/23 -1 to 1 do]]+1.j]+V[1-1.j]+V[1.j+1])/33	1-1+1-11/3:
Jownto 1 do 20 thj 14966 thj 1496 nj rtD / 8: 14960,1 D / 8:	/LepetD23
. ·	
1, 01 + VEO, 13) / 2; inas: 1 - 1 do 1, 13 + VEO, 1 - 11 + VEO, ₁ + 13) /	23 41 + Vios ₁ + 1D + 35

Shock wave annihilation by MHD action in supersonic flow. Quasi one dimensional steady analysis and thermal blockage

B. LEBRUN * and J. P. PETIT **

ABSTRACT. — The shock wave cancellation by the action of a Lorentz force field is described by a steady quasi one dimensional and isentropic model. The shock structure is eliminated if the self crossing of the characteristic lines can be prevented. It is shown that ρ , T, p are constant along a streamline. A criterion which prevents the thermal blockage is established. Numerical results are given concerning the parameter range required for the design of a shock tube experiment.

1. Introduction

The phenomenon of shock wave cancellation has not been greatly studied. Shock waves appear in supersonic flows as soon as a wall induces even moderate direction variations in such flows. They could be considered equally well as a disturbing or an advantageous phenomenon. However, the action of a crossed field $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, in a flow may serve to guide the fluid in its passage around a obstacle. Our purpose here, is to show that in special conditions, these shock waves can be avoided. For the moment, this approach is purely theoretical, but should have some aeronautical applications.

A one-dimensional steady-state investigation has been undertaken by Sutton (1965), who studied a plasma flow in a magneto-hydro-dynamic channel. He has shown that, if the force field remains constant with respect to a flow parameter such as the velocity, the pressure or even the mass density, the fluid could pass through a convergent channel without being shocked. The case of a constant-area channel in which the fluid is decelerated by a crossed field has been carried out by Resler and Sears (1956). These authors showed that special conditions of velocity and load factor allow the flow to decelerate from a supersonic regime to a subsonique regime without the formation of a shock.

Experimental work has also been performed by Petit (1983) around a blunt body (cylinder) placed in a salt water flow. With an appropriate crossed field, he has obtained the annihilation of the front wave, and the reattachment of the boundary layer leading to a decrease in the turbulent wake. Furthermore, a decrease in the wave drag around the body was obtained. Even a propulsive action has been obtained with such a device.

^{* 3,} impasse du midi, 13114 Puyloubier, France.

^{**} Observatoire de Marseille, traverse Syphon, 13012 Marseille, France.

When a blunt body is placed in a supersonic gas flow, two domains can be distinguished, the supersonic one, and the subsonic one. First, to avoid the problems involved in this subsonic region, we will confine our attention to the flows around smooth bodies such as bumps.

Also, we have been led to study a quasi-onedimensional steady-state model. This model has been developed by taking into account the real gas effects and is based upon the theoretical work of Norman (1965). To describe shock tube experiments, the following conditions are assumed to be satisfied:

H1: The plasma is considered as a non-viscous fluid;

H2: The excitation and radiative processes can be neglected in the plasma;

H3: The plasma is close to thermodynamic equilibrium $(T_e = T_a)$:

H4: The ionization can be derived from Saha's law.

We shall show that the Joule effect can be neglected too.

This work is based upon the following conditions which have been suggested by Petit:

a supersonic flow with a Mach number M is described by a System of equations (Euler's equations) which become in this case a hyperbolic system. From these equations, we can work out characteristic directions linked to the flow, which correspond to the Mach waves for the case of a bidimensional flow. We know [Carrière (1957)], [Courant et Friedrichs (1948)] that shock wave formation is theoretically associated with the self crossing of these lines in the real space of the real space of the fluid. On the other hand, if one could preserve the parallelism of these lines, the shock wave must disappear, near the body, and at infinity. Such a flow can be obtained by an appropriate force field, which is calculated with respect to this parallelism condition.

2. Overall equations, bidimensional steady-state approach

Fontaine (1973, 1971) and Forestier (1973), have studied the magneto-hydro-dynamic interaction on the supersonic argon flows produced by a shock tube (p=1) bar, T=10,000 K). According to their work, we can assume that the following conditions are fulfilled:

H5: The plasma is a neutral medium;

H6: The magnetic Reynolds number is low and the induced magnetic field negligible. This assumption is checked in Chapter 6 where it is shown that $R_m < 0.3$.

Using these conditions, for a steady-state flow, Maxwell's equations lead to simplied forms where the electric field, the magnetic field and the plasma flow are no longer linked:

(1)	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$
(2)	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
(3)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
(4)	$\nabla \times \mathbf{B} = 0$.

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, N° 2, 1989

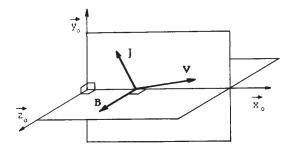


Fig. 1. - Crossed field.

We will consider the laboratory frame of reference $R_0(x_0, y_0, z_0)$ shown on Fig. 1 and a force field configuration in which the magnetic field is perpendicular to the plane of **J** and **V**.

A first formulation of the conservation equations is now carried out in this frame. The energy conservation is obtained from the internal energy expression proposed by Fontaine (1973). His own thermodynamic developments are based on the theoretical work of Norman (1965):

(5)
$$\rho \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} \right) + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial y_0} = 0$$

(6)
$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_0} = \frac{J_{y_0} B}{\rho}$$

(7)
$$u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_0} = -\frac{\mathbf{J}_{x_0} \mathbf{B}}{\rho}$$

(8)
$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} (a^2 - u_0^2) - u_0 v_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y_0} + \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} (a^2 - v_0^2) = TS (u_0^2 + v_0^2)^{3/2}.$$

In this frame of reference, the velocity vector has two components (u_0, v_0) , and "a" represents the sound velocity in a real gas (relation 37). "TS" refers to the "Source Terms" which are due to the magneto-hydro-dynamic interaction. Contributions to "TS" arise from the Joule effect and the force field work, *i. e.*:

(9)
$$TS = \frac{\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}}{\rho \mathbf{V}^3 \mathbf{A}} - \frac{\mathbf{V} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B})}{\rho \mathbf{V}^3} = \mathscr{J} - \mathscr{F}.$$

Here, E^* is the electric field seen by the electrons. The dimensions of \mathscr{J} and \mathscr{F} are the inverse of a length.

The expression, \mathscr{J} . L represents the ratio of the force field work to the kinetic energy of the flow;

and F. L is the ratio of the Joule power converted into heat to the kinetic energy flux.

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, Nº 2, 1989

The real gas effects are taken into account in the expression "A" which is written (N., 1965):

(10)
$$A = \frac{1 + Z_t}{\gamma - 1} \quad \text{with} \quad Z_t = \frac{\alpha_t}{2} (1 - \alpha_t) \left(\frac{5}{2} + \frac{E_t}{k T} \right).$$

The parameter α_i is the degree of ionization, γ the ratio of specific heats, and E_i the ionization energy of the considered element ($E_i/k = 182,900$ for Argon). Z_t is defined as the compressibility ratio at constant temperature (N., 1965).

Under the assumption of steady flow, the Lagrangian co-ordinates R(x, y, z) and the streamlines are linked together. Let φ be the angle between x_0 and x. Using these conditions:

(11)
$$\begin{cases} u = V, & du = dV, \\ v = 0, & dv = V d\varphi \end{cases}$$

and the conservation equations are as follows:

(12)
$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

(13)
$$\rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = J_y B$$

(14)
$$\rho V^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = -J_x B$$

(15)
$$\frac{\partial V}{\partial x}(a^2 - V^2) + V \frac{\partial \varphi}{\partial y}a^2 = TSV^3.$$

Now, these relations can be expressed in a frame associated to the characteristic directions η and ξ , which respectively are the ascending and the descending characteristic

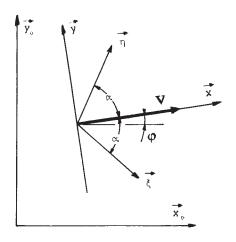


Fig. 2. - Different coordinate systems.

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, Nº 2, 1989

lines defined in Fig. 2. This change of co-ordinate system can be achieved by noting that for any given parameter H, we get:

(16)
$$dx = \cos \alpha (d\eta + d\xi) \quad \text{and} \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y}$$
$$dy = \sin \alpha (d\eta - d\xi) \quad \text{and} \quad \frac{\partial H}{\partial \xi} = \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y}$$

where α is the Mach number defined as

(17) and (18)
$$\sin \alpha = \frac{1}{M}$$
 with $M = \frac{V}{a}$ being the Mach number.

It is now possible to build a quasi-one dimensional model from the system [(12) to (16)].

3. Quasi-onedimensional steady state model

The quasi-onedimensional condition is that all thermodynamic parameters $(p.T.\rho)$ and flow parameters $(V.\phi.M)$ should remain constant along an ascending characteristic η , i. e.:

(19)
$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{hence} \quad d\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} d\xi.$$

In this case, the ascending characteristic lines are straight.

Then, the energy conservation Eq. (15) gives:

(20)
$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{2 T s}{\cos \alpha} - t g \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

and the continuity equation (12) becomes:

(21)
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{tg \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}.$$

From the momentum equations, the pressure variations imply, first, a condition on the direction of the electric current density J:

(22)
$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \implies \frac{J_x^2}{\sigma_0 VA \cos \alpha} - J_x B \sin \alpha - J_y B \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{J_y^2}{\sigma_0 VA \cos \alpha} = 0.$$

The quantity σ_0 represents the scalar electric conductivity. Just one physical solution is admitted by this equation of second degree:

(23)
$$J_x = (-B \sin \alpha + \sqrt{\Delta}) \frac{\sigma_0 VA \cos \alpha}{2} = f(J_y)$$

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, N° 2, 1989

with:

(24)
$$\Delta = B^2 \sin \alpha + 4 \frac{J_y B \sin^2 \alpha}{\sigma_0 VA \cos \alpha} - 4 \frac{J_y^2}{(\sigma_0 VA \cos \alpha)^2} > 0.$$

These equations being established, we suppose the Joule effect to be negligible. Therefore, we consider the MHD interaction as quasi-isentropic. The Source Terms "TS" of the equation (9) then simplify to:

$$TS = -\frac{J_y B}{\rho V^2}$$

and the relation (22) becomes:

(26)
$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{J_y}{J_x} = -\frac{1}{tg\alpha} = -\sqrt{M^2 - 1}.$$

This amounts to requiring the current density vector to be perpendicular to the ascending characteristics η : the force field must be parallel to this direction. In the case of a non-negligible Joule effect, the relation (23) indicates that the force field must balance the pressure gradient due to the temperature increase caused by the Joule effect. So the F_x component of the force field must be stronger than it is when the Joule effect is negligible, as shown in Fig. 3.

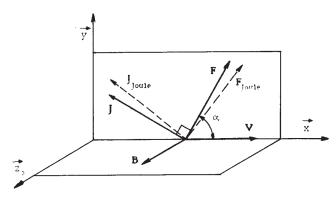


Fig. 3. — The orientation of the current density vector J and the force field F for MHD interactions with and without the Joule effect.

In the work that follows, we shall assume that the Joule effect is negligible.

There are two important remarks we must make concerning the pressure condition:

- The first one concerns the force field action. It must accelerate and push out the flow in the convergent channels, and must decelerate and attract the flow in the divergent channels. The bidimensionel studies developed in Chapter 4 lead to the same result, while explaining the role of each force field component.
- The second remark concerns the achievement of such a force field. To obtain a current which is not perpendicular to the electrode wall, i. e. not colinear with the electric field, the Hall effect must be considered. This phenomenon is induced by the rolling up

of the free electrons in the magnetic lines and it is characterized by the Hall factor:

$$\beta = \frac{e B}{m_e V_e} = \mu_e B.$$

The electron collision frequency is represented by V_e , "e" means the electron charge, m_e the electron mass, and μ_e is a measure of the electron mobility. The orientation of

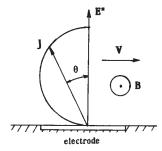


Fig. 4. - The action of the magnetic field upon the direction of the current density: the Hall effect.

the current density with respect to the electric field makes the angle θ such that $tg(\theta) = \beta$ (see Fig. 4). To obtain such a current density direction, the magnetic field **B** must be taken as:

(28)
$$tg \alpha = \beta \Rightarrow B = \frac{m_e V_e}{e \sqrt{M^2 - 1}} = \frac{tg \alpha}{\mu_e}.$$

The magnetic intensity also depends on the parameters of the plasma and the flow.

Following these developments, the pressure along the ascending characteristics can be expressed in the form:

(29)
$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = J_y B \cos \alpha + J_x B \sin \alpha + \frac{\rho V^2}{\cos \alpha} T_s + \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}.$$

The relations (20), (21), (26) and (29), associated with a displacement along the x-axis such as:

$$(d\xi)_{y=\text{ost}} = \frac{dx}{\cos\alpha}$$

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, N° 2, 1989

lead to the final expressions for the thermodynamic parameter variations.

(31)
$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{2 M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{J_y B}{\rho V^2} dx - d\phi \right)$$

(32)
$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(-\frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{J_y B}{\rho V^2} dx + d\phi \right)$$

(33)
$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{(1+Z_p)\sqrt{M^2-1}} \left(-\frac{2}{\sqrt{M^2-1}} \frac{J_y B}{\rho V^2} dx + d \varphi \right).$$

According to Norman (1965), the equation of state for a real gas can be written:

(34)
$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} \frac{1 + Z_p}{1 + Z_t} - \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{1 + Z_t}$$

with $Z_p = \alpha_i (1 - \alpha_i)/2$, representing the compressibility factor at constant pressure.

The expression for the temperature variation becomes:

(25)
$$\frac{dT}{T} = \frac{M^2(\gamma - 1)}{(1 + Z_t)\sqrt{M^2 - 1}} \left(-\frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{J_y B}{\rho V^2} dx + d\varphi \right).$$

The system (31), (32), (33) and (35) allows us to describe the behaviour of the gas flow when we apply both a weak variation of the wall $d\varphi$, and a crossed field $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$. When the force field does not exist, we recover the classical expressions of a Prandlt-Mayer fan (Carrière, 1957).

The shock wave cancellation is achieved if the parallelism of the characteristics originating from the wall is maintained, and this requires $d\alpha$ to be equal to $-d\varphi$, as shown in Fig. 5.

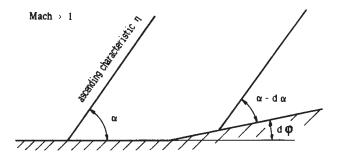


Fig. 5. - The parallelism of characteristics originating from a weatily-varying wall.

From the derivation of equation (17), we have:

$$\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}} = \sqrt{\mathbf{M}^2 - 1} \, d\mathbf{\varphi}.$$

Furthermore, the sound velocity in a real gas is, according to Norman (1965):

$$(37) a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{1 + Z_p}}.$$

The real gas effects appear through the variations of γ and Z_p , and together with the differential relations (18) and (19), they lead to:

(38)
$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{1}{2} \left(\frac{dT}{T} + \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dZ_p}{1 + Z_p} \right)$$

or:

(39)
$$\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}^2 (\gamma + 2 Z_t + 1) J_y B}{(\mathbf{M}^2 - 1) (1 + Z_t) \rho V^2} dx - \left(\frac{\mathbf{M}^2 (\gamma - 1)}{2 (Z_t + 1)} + 1 \right) \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dZ_p}{1 + Z_p} \right).$$

The relative variations of $Z_p(0 < Z_p < 0.02$ for an Argon temperature smaller then 12,000 K) are neglected with respect to those of γ (5/3 < γ < 1.275). The parallelism condition Eq. (35) leads to the force field criterion:

(40)
$$\frac{J_v B}{\rho V^2} dx = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{2} d\phi + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2 (\gamma + 2 Z_t + 1)} \frac{d\gamma}{\gamma}.$$

Remarking that:

(41)
$$J = \sqrt{J_y^2 + J_x^2} = J_y \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

and that $d\phi/dx$ is the inverse of the curvature radius of the wall R, the relation (40) becomes:

(42)
$$\frac{\text{JBR}}{\rho V^2} = \frac{M}{2} + \frac{R \sqrt{M^2 - 1} (1 + Z_t)}{\gamma M (\gamma + 2 Z_t + 1)} \frac{d\gamma}{dx}.$$

In the case of a perfect gas, the force field value must be such that:

$$\frac{\text{JBR}}{\rho V^2} = \frac{M}{2}.$$

Finally, the variations of the thermodynamic parameters are zero:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

so that:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} = \sqrt{M^2 - 1} d\phi.$$

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, N° 2, 1989

In this way, the assumptions proposed by Sutton (1965) are found again to be true. That is, the shock wave cancellation requires one of the flow parameters to be constant. In this first study, the quasi-isentropic assumption for a perfect gas involves the parameters p, T and ρ to be constant. We note that in this case the condition is not an assumption but the result of the characteristic parallelism. The simplicity of these results is remarkable.

The possible variations of these parameters must occur to balance the variations in the middle caused by the Joule effect and the real-gas effect. For the conditions considered in Chapter 6, these effects remain moderate.

One of these results which is of some significance, is the nullification of the wave drag.

4. Bidimensional steady isentropic model for a perfect gas

In the quasi-onedimensional study, we have shown that the force field consists of two components F_x and F_y . In this following bidimensional study, the action of each component is considered.

In a flow where the force field $J \times B$ keeps the pressure constant, the shock waves, which correspond to the focusing of the pressure waves, can't appear. The isentropic assumption, justified by the negligible Joule effect, also involves the constancy of both pressure and density. Thus, once again we obtain the results of the quasi-onedimensional analysis.

The conservation equations can be written in the form:

(46)
$$\frac{\partial \rho V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

(47)
$$\rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = J_y B = F_x$$

(48)
$$\rho V^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = -J_x B = F_y$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

The entropy equation takes the place of the energy one. Notice that:

$$V^{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = M^{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

which together with (46) and (47) for a constant pressure, yields:

$$J_x B = -\frac{\gamma p}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

(52)
$$J_{y}B = -\frac{\gamma p}{\sin^{2}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, Nº 2, 1989

So, it appears that the force field is directly linked to the shape of the current tubes, which are defined by their curvature $\partial \varphi / \partial x$, and their area variations, corresponding to $\partial \varphi / \partial y$.

Two simple analytic studies allow an analysis of the flow and the associated force field:

- The first study considers a flow where the stream lines build a network of convergent lines. This theoretical flow is shown in Fig. 6. The focal point O is a singular point

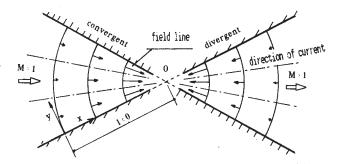


Fig. 6. - Force field for convergent-divergent flow at constant pressure.

where no real solution exists. The force field reduces to:

(53)
$$F_x = -\frac{\rho V^2}{1}$$
$$F_y = 0$$

and the force field is oriented along the stream lines.

— In the second study, the flow is no longer subjected to area variations, only to direction changes. The stream lines are concentric circles of radius "r", shown in Fig. 7. The force field which must be applied is such that:

(54)
$$F_x = 0$$

$$F_y = -\frac{\rho V^2}{r}.$$

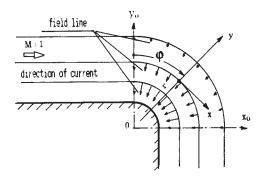


Fig. 7. - Force-field for circules flow at constant pressure.

european journal of mechanics, b/fluids, vol. 8, n° 2, 1989

and is in a direction perpendicular to the stream lines.

These bidimensional studies allow us to define, according to the quasi-onedimensional analysis, the two components of the force field. We consider a volume element "dv", subjected to three different forces (without taking into account the gravitation force) the inertial force, the pressure force, and the Lorentz force. To avoid the pressure variations, and in fact, shock wave formation, the force field $J \times B$ must exactly balance the inertial force, as shown in (53) and (54). The force field component F_x must balance the effect of the linear acceleration, and F_y must balance the centripetal acceleration due to the variations in the flow direction.

5. Thermal blockage analysis

A thermal blockage appears when the plasma is subjected to very strong electric currents which induce a very important Joule Effect. Fontaine (1973) achieved some discharges with an electric intensity close to 10^7 amperes/m² in the interaction channel of an Argon shock tube. The electrode section was about 5×10^{-3} m². These conditions allowed him to bring the thermal blockage to the fore.

From the above theoretical studies, it is possible to establish a simple criterion for there to be no thermal blockage. To obtain a non negligible acceleration of the flow with the force field, \mathcal{F} . L must be close to unity. On the other hand, a thermal blockage should be avoided if the increase in temperature is not large $i.e.\ \mathcal{J}$. L remains small compared with unity. For the case of a moderate but non negligible Hall effect, we can write:

$$J_{v} = J \cos \theta$$

(56)
$$\mathscr{F} \cdot L = \frac{J_y BL}{\rho V^2} \approx 1$$

(57)
$$\mathscr{J} \cdot L = \frac{J^2 L}{\sigma_0 \rho V^3 A} \ll 1.$$

Ohm's law is:

(58)
$$\mathbf{J} = \frac{\sigma_0}{1+\beta^2} \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{vmatrix} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}).$$

For a force field configuration such as is shown in figure 1, and for the case where E is perpendicular to B, the current density becomes:

(59)
$$|J| = \frac{\sigma_0 VB}{\sqrt{1+\beta^2}} (K-1) = \sigma_0 VB (K-1) \cos \theta$$

where K represents the load factor. This parameter is smaller than unity in the case of the conversion and larger than unity for an accelerating assembly.

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, Nº 2, 1989

In substituting the expressions for J obtained from (56) and (59), into (57), we obtain a criterion on the load factor characterizing the avoidance of a thermal blockage:

$$(60) K \leqslant A + 1 = K_{L}.$$

This criterion does not depend on the Hall effect. On the other hand, we can introduce into the relation (57) twice the expression of J. from (56). That leads to a criterion in which the various parameters for the non-thermal blockage come to the fore:

(61)
$$N = \frac{\sigma_0 \mathbf{L} (1 + Z_t)}{\rho \mathbf{V} (\gamma - 1)} \frac{\mathbf{B}^2}{(1 + \beta^2)} \gg 1.$$

To avoid the thermal blockage, the electric conductivity must be high, the characteristic length important, and γ low. The Hall effect and the magnetic field act in opposite

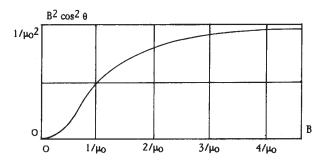


Fig. 8. – Behaviour of $B^2/(1+\beta^2)$ as a function of B.

directions. Figure 8 shows the behaviour of $(B^2/(1+\beta^2))$ as a function of B. We notice that this term tends asymptotically to $(1/\mu_e)^2$ for the important values of B and to zero for low B. So the increasing of B will not help avoid a thermal blockage.

Also, we notice that for important values of B, the criterion N is varying like N_e . V_e . In the case of a Coulomb plasma. *i. e.* fully ionized, N shall vary like N_e^2 , and in the case of a weakly ionized plasma, it will vary like N_e . Because the variation of N_e as a function of temperature is exponential for weakly ionized plasma (S. & S., 1965) (T < 6,000 K for Argon pressure 1 bar), we can deduce that the thermal blockage is very sensitive to the temperature variations in such plasmas.

The real gas effects, which are characterized by a decreasing of γ , favour an avoidance of a thermal blockage and the force field acts better if it points along the stream lines $(J_x=0)$.

It is interesting to consider two particular cases:

- J perpendicular to the flow direction ($\theta = 0$).

(62) Here,
$$K \leqslant \frac{\gamma + Z_t}{\gamma - 1} = K_L$$
 and $N = \frac{\sigma_0 B^2 L (1 + Z_t)}{\rho V (\gamma - 1)} \gg 1$

and **J** perpendicular to the ascending characteristic lines $(\theta = \alpha)$:

(63) where
$$K \ll \frac{\gamma + Z_t}{\gamma - 1} = K_L$$
 and $N = \frac{M^2 - 1}{M^2} \frac{\sigma_0 B^2 L (1 + Z_t)}{\rho V (\gamma - 1)} \gg 1$.

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, N° 2, 1989

The second case corresponds to the theoretical development of shock wave annihilation.

Our results are confirmed by the works of Forestier (1973) who calculated differently the limit value of the load factor K_L . He obtained $K_L=4.5$ for $\gamma=1.275$, while the criterion (60) gives $K_L=4.6$.

6. Experimental study proposed

The MHD interaction leading to the shock wave cancellation needs strong electric currents to be present in the gas, and that requires the use of ionized gases which are good electric conductors. Since it is relatively simple to obtain such supersonic plasma bursts, in a shock tube, the first experiments should use such a device.

At first, it is better to consider familiar experimental conditions so we can use the existing knowledge and limit the number of new unknown parameters. For this, the shock tube conditions developed by Fontaine (1973) and Forestier (1973) have been used again (Argon flow at 1 bar).

TABLE 1. — Flow characteristics obtain	ned by snock tu	ibe for argon at pre	ssure I bar.
Mach's number	1 /	1.6	1 0

Mach's number	1.4	1.6	1.8	2
T(K)	8,200	9,500	10,450	11,400
V (m/s)	2,240	2,575	2,986	3,614
$\rho(kg/m^3)$	0.058	0.050	0.044	0.039
$v_e(/s \times 10^{-10}) \dots \dots$	4.9	16.1	31	45
$\sigma(Mhos/m)\dots$	1,879	2,810	3,520	4,250
γ	1.50	1.31	1.24	1.22
α_i	0.0021	0.012	0.032	0.077
\mathbf{Z}_{t}	0.025	0.12	0.31	0.60
β (Hall's parameter)	1	0.80	0.66	0.58
B (Tesla)	0.28	0.73	1.2	1.6
$J (A/m^2 \times 10^{-6}) \dots \dots$	4.8	2.4	2	2.1
K	4.6	1.4	1.16	1.1
K_L	3	4.6	6.5	7.8
F.L	0.4	0.53	0.60	0.66
J.L	0.80	0.055	0.018	0.01

Table I indicates the flow conditions obtained by shock tube for argon plasmas. These conditions, determined for different values of the Mach's number, all correspond to a pressure of 1 bar.

First, we consider the problem of the Hall effect. To obtain a force field parallel to the ascending characteristic lines, we must have $\theta = \alpha$ as seen earlier. Also, the magnetic field is determined according to the relation (28) and the plasma properties.

Following this, the force field intensity can be calculated for a curvature of the wall equal to 0.2 m. J is determined using the relation (43). The argon flow is a fully ionized plasma flow.

First, we notice that a magnetic field, close to one tesla, and also an electrical density, close to $2 \times 10^6 \,\text{A/m}^2$, can be easily achieved. Such intensities were obtained by Fontaine (1973) and Forestier (1973) about twenty years ago.

Furthermore, we remark that, the low values of B at weak Mach number imply that J must be important, involving a strong Joule effect. The thermal blockage could even appear for a flow at Mach 1.4, as indicated by the values of the Hall factor $(K=J/\sigma\,VB+1)$ compared with K_L . On the other hand, for the higher Mach number flows, the Joule effect becomes weak and the possibility of a thermal blockage is no longer feared. We notice also that the Joule energy introduced into the flow is negligible in comparison with the work of the volume forces i. e. $(\mathcal{J}.L \ll \mathcal{F}.L)$.

The relative increase in temperature caused by the Joule effect is very weak. At Mach 1.6, it is about:

(64)
$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{J^2 L}{\sigma_0 \rho V C_n T} \approx 0.05.$$

So, the assumption of a negligible Joule effect is verified a posteriori. The experiments could be carried out for Mach numbers close to 1.6, and for such conditions, we can also verify that the magnetic Reynolds number which is written:

(65)
$$R_m = \mu_0 \sigma VL$$

is close to 0.3 and that the induced magnetic field is effectively negligible (μ_0 : permittivity of the vacum; L=0.03 m length of the magnetic field according to Fig. 9).

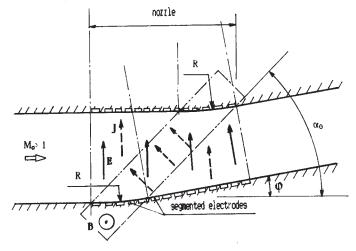


Fig. 9. - Experimental apparatus for schock wave annihilation in a shock tube.

All these conditions allow us to design an experiment of shock-wave annihilation to be carried out in a shock tube. Figure 9 shows the tube to have a simple bend in it.

Because of the short duration of the burst, transient problems involving variations of the flow features may occur, but for the moment they are not taken into account in the theoretical developments.

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, N° 2, 1989

7. Conclusion

This approach has allowed us to demonstrate that shock-wave cancellation should be possible around a parallel profile of weak relative depth. We notice that this analysis involves the nullification of the wave drag. Determining experimental conditions is our first interest: it is better to realize conditions where the gas is a good electric conductor and presents important real gas effects. This involves the use of a shock tube, with the same experimental conditions as those used at the Institut de Mécanique des Fluides de Marseille (I.M.F.M.) by Fontaine (1973) and Forestier (1973).

As part of this program, the french M.R.T. has financed an experiment which is being carried out at the Thermodynamic Laboratory of Rouen (L.A. No. 230), under the management of C. Thenard. The first experimental results should be produced during 1989. To the best of our knowledge, it is the first time that this problem has been approached theoretically and experimentally.

We wisk to thank the society Sofimécal for the financial support that it provides for these research studies.

REFERENCES

CARRIÈRE P., Méthodes théoriques d'étude des écoulements supersoniques, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, France, 1957.

COURANT R., FRIEDRICHS K. O., Supersonic flows and shock waves, Interscience Publishers, Inc., New York, 1948.

FONTAINE B., Contribution à l'étude de l'action d'un champ magnétique ou d'un champ électrique transversal sur un courant supersonique d'argon ionisé: cas d'une décharge pure: cas de la conversion MHD, Thèse n° A 0 7860, Université de Marseille, France, 1973.

FONTAINE B., FORESTIER B., VALENSI J., I.U.T.A.M. Intern. Symp on dynamics of ionised gases, Tokyo, 1971. FORESTIER B., Étude de l'accélération par les forces de Laplace d'un écoulement supersonique d'argon ionisé, Thèse n° A 0 7861, Université de Marseille, France, 1973.

NORMAN W., One dimensional magnetohydrodynamics equations for a non-ideal gas with application to singly ionising argon, Arn. Eng. Dev. Center-TRD, 1965.

PETIT J. P., Shock wave cancellation, Eight Intern. Conf. on MHD Electr. Power Gen, Moscow, 1983.

RESLER S., The prospects for magneto-aerodynamics, J. Aeron. Sci., 25, 1956.

SUTTON G. W., SHERMAN A., Engineering magnetohydrodynamics, Mac Graw-Hill, New York, 1965.

(Manuscript received October 16, 1987. in revised form: April 15, 1988.)

Shock-wave annihilation by MHD action in supersonic flows. Two-dimensional steady non-isentropic analysis. "Anti-shock" criterion, and shock-tube simulations for isentropic flows

B. LEBRUN * and J. P. PETIT **

ABSTRACT. — A study of a shock-wave cancellation by the action of the Lorentz force in non-viscous supersonic gas flows is described around slender bodies by a steady-state two-dimensional analysis. The hyperbolic flow equations are resolved by the characteristic method in the case of a non-isentropic, plane flow. These developments lead to an "anti-shock" criterion.

Numerical developments in the case of isentropic plane flows in a convergent nozzle allow us to simulate shock tube experiments and to confirm the "anti-shock" criterion.

1. Introduction

Shock waves appear in supersonic flows as soon as increases of pressure are induced in the flow [Carriere, 1957], [Courant & Friedrichs, 1948].

The presence of a body involving compression and expansion waves around it is the primary cause of this phenomenon. The shock front involves prompt and abrupt alteration of the flow features:

- increase of pressure, temperature, mass density, entropy,
- decrease of velocity,
- subsonic flow setting up in the case of a straight shock,
- change of velocity direction in the case of oblique shock fronts (with or without subsonic flow setting up).

The Euler equations govern the flow of non-viscous fluids, and for supersonic flows these equations give a hyperbolic system, which we can resolve by the characteristic method. For the two-dimensional steady-state flow the characteristic directions so calculated correspond to the pressure waves, currently called Mach waves.

^{*} Société AS et I, 44, rue R. Salengro, 94126 Fontenay-sous-Bois (France).

^{**} Observatoire de Marseille, impasse du Syphon, 13012 Marseille (France).

In the convergent regions these Mach waves converge, and if they cross each other in the real space of the fluid there is an accumulation of the pressure perturbations. This produces the shock wave.

It is known that the action of the Lorentz force in conducting fluids permits the modification of the flow features. In the fifties, for instance, many theoretical and experimental developments were made trying to modify the shock-wave system around nose cones. Attempts were made to decrease their velocity and to obtain a better temperature distribution in front of them during the re-entry process [Krank, 1969].

In the sixties, some investigations were made by the Institute of Fluid Mechanic of Marseille (I.M.F.M. France) to study the acceleration of ionized argon flow subjected to a MHD force field [Forestier, 1973], as well as the interaction between an argon flow and an electric field alone [Fontaine, 1973].

Although these studies may have produced understanding of the interaction between a supersonic argon flow and a crossed field $J \times B$, they dealt less with the shock wave annihilation.

For the conversion, Sutton [Sutton & Sherman, 1965] has developed a one-dimensional steady state model to describe the behaviour of a supersonic plasma flow in a convergent/divergent nozzle in MHD interaction. He showed that the shock wave rate can be cancelled in a convergent channel if one of the flow features is kept constant by an appropriate force field. On the basis of these developments, [Resler and Sears, 1956] have studied the case of a constant-section channel. They showed that particular conditions on the velocity and the load factor allow the supersonic flow to decelerate to a subsonic one without the establishment of shock conditions.

For the experimental developments, Petit [1983 a] carried out shock-wave cancellation and the vanishing of the turbulent wake around a blunt body immersed in shallow salty flow with a Lorentz force field. These investigations showed that the force-field action could accelerate the body. The theoretical analogy between supersonic flows and free-surfade flows allows us to suppose that shock-wave annihilation is possible within gas flows.

A new approach was also developed from an idea suggested by Petit: to cancel shocks around thin bodies, the force fields must keep the parallelism of the characteristic lines issuing from the wall of the body. Indeed, this condition involves the annihilation of the shock waves produced in theory by the self-crossing of these lines.

With these assumptions, the first theoretical developments [Petit & Lebrun, 1986] were made under shock-tube conditions (p=1 bar, T=10,000 K, M=1,6) in order to show the possibility of experiments with such a device.

Following this, a quasi-one-dimensional steady-state model has been proposed by the authors [Lebrun & Petit, 1989] in the case of a flow around a flat body corresponding to a continuous deviation of the wall, as well as a study about the thermal blockage. These works showed that the Hall effect can advance the shock-wave annihilation and that the parallelism condition involves Sutton's assumptions, i. e. T = Cst, p = cst and p = cst in the interaction region for a perfect gas. These results immediately force the drag to be zero.

In the present work, we investigate the shock-wave annihilation through a two-dimensional analysis, which represents the extention of the first quasi-one-dimensional approach [L & P, 1989]. Our purpose is to study theoretically from the characteristic method the interaction conditions leading to shock-wave cancellation in the case of a perfect gas in non-isentropic interaction for a plane flow. However, the following assumptions are taken to be fulfilled:

- The Hall effect is negligible.
- The magnetic Reynolds number remains weak.

These theoretical developments lead to a general criterion of shock-wave annihilation.

Lastly, a numerical study is done, constituting the first approach of shock-tube simulation. In order to match experimental conditions, the numerical flow parameters used are based on the works of Fontaine [F, 1973] and Forestier [F, 1973]. The optimal conditions brought to the fore by the quasi-one-dimensional analysis [L & P, 1989] correspond to an argon flow at M=1.6, T=9,500 K, p=1 bar. The links between such flows and the theoretical assumptions are discussed in Section 5.

2. Establishment of the general equations for a steady-state perfect gas

2.1. The steady-state conservation equations

The equations of the fluid flow describe the conservation of:

- The mass (continuity equation):

$$\nabla \cdot \rho V = 0.$$

- The motion:

(2)
$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{\nabla} \otimes \mathbf{V} + \frac{\mathbf{\nabla} p}{\rho} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho}.$$

- The energy: this equation takes three equivalent forms:
- The general expression ([S & S, 1965], p. 121):

$$(3) \qquad \qquad \rho \mathbf{V} \cdot \nabla e + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}$$

where E* denotes the resultant electric field:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}.$$

• The Bernouilli equation obtained by introducing the enthalpy $h=e+p/\rho$:

(5)
$$\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \left(h + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, Nº 4, 1989

• Finally, energy conservation in terms of velocity [L & P, 1989]:

(6)
$$a^2 \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{V})) = \frac{\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}}{\rho} (\gamma - 1) - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho}.$$

2.2. Non isentropic formulation of $\partial \rho / \partial x$

In the following developments, the term $\partial \rho / \partial x$ appears in the continuity equation, and it is advantageous to express it as function of the pressure, in order to obtain a system admitting V and p as principal variables. In the case of a non-isentropic flow, we obtain:

(7)
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s = cst} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{p = cst} \frac{ds}{dx}.$$

The Joule effect induces entropy variations which are expressed [S & S, 1965] as:

(8)
$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*}{\rho \, VT}.$$

We must explain the term $(\partial \rho/\partial s)_p$. To do so, we take into account the real gas effects. The state equation is written, according to Norman [1965]:

(9)
$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} (1 + Z_p) - \frac{dT}{T} (1 + Z_t).$$

The terms Z_p and Z_t mean respectively the compressibility factors at constant pressure and at constant temperature. Then, in the state law (8), expressing ρ and T as functions of the pressure "p" and the entropy "s" yields:

(10)
$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{p} = -\rho \frac{1 + Z_{t}}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{p}.$$

So, from simple thermodynamic considerations of the entropy expression:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s}\right)_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{C}_{\mathbf{p}}}.$$

Combining the relations (11), (10), (8) and (7) yields finally the density variations:

(12)
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{J^2 (1 + Z_t)}{\sigma V C_p T}.$$

The coefficients Z_p and Z_t which appear in the above relations are zero for a perfect gas, and then:

(13)
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{J^2}{\sigma V C_p T}.$$

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, Nº 4, 1989

This result, introduced into the continuity equation expressed at the origin of a Lagrangian frame of reference (u=V, v=0, see Fig. 1), provides the required relation (18) taking the Joule effect into account.

When the Joule effect is negligible, the flow can be considered as isentropic and we recover the simple equation relating to this kind of flow:

(14)
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

2.3. St. Venant's equation for a MHD interaction flow

The St Venant's equation allows us to determine the sound velocity "a" at any point of the flow submitted to a crossed field. Along a streamline, the energy equation (3) can be written:

(15)
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\mathbf{J.E^*}}{\rho V} + \frac{F_x}{\rho}.$$

For a perfect gas, expressing the enthalpy as function of the sound velocity we obtain along a streamline:

(16)
$$\frac{2 a da}{\gamma - 1} + V dV = \left(\frac{J^2}{\sigma \rho V} + \frac{J_y B}{\rho}\right) dx.$$

When the local velocity, the force-field pattern and the Joule effect are known, this equation allows us to determine the sound velocity, but we can derive the Mach number as well (M = V/a):

(17)
$$\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}} = \frac{d\mathbf{V}}{\mathbf{V}} \left(\mathbf{M}^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{\mathbf{J}_y \mathbf{B}}{\rho \mathbf{V}^2} + \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma \rho \mathbf{V}^3} \right) \mathbf{M}^2 \frac{\gamma - 1}{2} dx.$$

The parameters of the force field are established from the location of the wall electrodes and the geometry of the magnetic field. The velocity can be obtained from the resolution of the hyperbolic-equation system (1) and (2).

3. Characteristic method applied to a plan supersonic flow, in interaction with a crossed force field $J \times B$

This method consists of writing a linear combination of the conservation equations, and then looking for the directions along which the differentials of the variable are total. They are the characteristic directions, which we introduce again into the linear combination in order to obtain the compatibility relations linked with such directions [C & F, 1948]. With the Mach number following from the conservation of the energy,

these remain three equations (1) and (2) with three principal unknowns which are the pressure "p", the local velocity V as well as its direction φ .

The conservation equations are written at the origin of a Lagrangian coordinate system:

(18)
$$\rho a^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + V \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{J^{2} a^{2}}{\sigma C_{p} T}$$

(19)
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mathbf{J}_{y} \mathbf{B} = \mathbf{F}_{x}$$

(20)
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -J_x \mathbf{B} = \mathbf{F}_y.$$

The three characteristic directions obtained, depending only on the partial derivatives, are the same as in classical gas dynamics [C, 1957] [C & F, 1948]. We thus obtain along the x-axis:

(21)
$$u \, dy - v \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad V \, du + \frac{dp}{\rho} = \frac{J_y \, B}{\rho} \, dx$$

which corresponds to the equation (2) in the one-dimensional formulation. For $dy/dx = \pm tg \alpha$, the following condition is obtained:

(22)
$$\frac{dv}{V} + \frac{dp}{\rho V^2} \frac{dx}{dy} = \left(-\frac{F_x}{\rho V^2} \frac{dy}{dx} + \frac{F_y}{\rho V^2} \right) dx + \frac{J^2}{\sigma \rho V C_p T} \operatorname{tg} \alpha dx.$$

We shall do note by η the characteristic direction corresponding to $(+ \operatorname{tg} \alpha)$ and ξ the one corresponding to $(-\operatorname{tg} \alpha)$ as shown in Figure 1 [C, 1957].

In the relation (22), the terms taking the force field into account along the two characteristic directions η and ξ can be expressed as:

(23)
$$\sin \alpha F_x + \cos \alpha F_y = F_{\eta} \sin 2\alpha = F_{\perp \xi}$$

(24)
$$\sin \alpha F_x - \cos \alpha F_Y = F_\xi \sin 2\alpha = F_{\perp \eta}$$

From Figure 1 we notice that the quantity $(F_{\eta}\sin 2\alpha)$ represents the intensity of the force perpendicular to the direction ξ . That is the same for $(F_{\xi}\sin 2\alpha)$ and η . Following this remark, the two projections of the force field are denoted $F_{\perp\eta}$ et $F_{\perp\xi}$. We remark that only the force-field components which do not produce any work along the characteristic lines are taken into account. Actually, the force-field components which appear in these equations are perpendicular to the displacements.

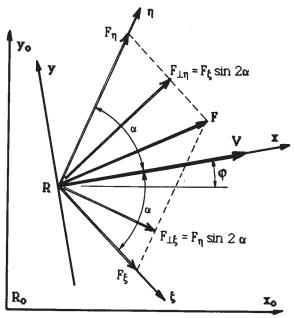


Fig. 1. - Different frame of reference and force field.

Let φ be the angle between the local velocity vector and the x-axis of the frame R_0 associated with the laboratory (Fig. 1). Notice that in the coordinate system R associated to the streamlines, we have du=dV, and dv=V. $d\varphi$. Furthermore, for a displacement along the direction η , $d\xi$ is zero, so $d = \partial \cdot /\partial \eta \, d\eta$ and along the direction ξ , in the same way, $d\eta = 0$ and $d = \partial \cdot /\partial \xi \, d\xi$. In conclusion, the compatibility conditions along the characteristic directions are as follows:

(25)
$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{F_{\perp \eta}}{\rho V^2} + \frac{J^2}{\sigma \rho V C_D T} \sin \alpha = 2 \frac{\partial \mu}{\partial \eta}$$

(26)
$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{F_{\perp \xi}}{\rho V^2} + \frac{J^2}{\sigma \rho V C_p T} \sin \alpha = 2 \frac{\partial \lambda}{\partial \xi}$$

and along the x-axis:

(27)
$$dV = -\frac{dp}{\rho V} + \frac{J_y B}{\rho V} dx.$$

The variables λ and μ are called the epicicloidal coordinates as defined by Carrière [1957] for example.

In a free plane flow, for no applied field, the classical solution is indeed recovered. For this case, the right-hand side of the equations (25) and (26) is zero, so that $(\partial \lambda/\partial \eta)$ and $(\partial \mu/\partial \xi)$ are zero for each point of the flow. So λ is constant along $\xi(\lambda = \lambda(\eta))$ and also μ is constant along $\eta(\mu = \mu(\xi))$.

Now, in the interaction region along these characteristic directions, λ and μ vary as functions of the geometry and the intensity of the force field, and as functions of the Joule effect.

We may always introduce the Busemann number P defined as [C, 1957]:

$$d\mathbf{P} = dp \, \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma \, p}.$$

But this parameter is no longer only a function of α , because the St Venant's equation (18) associated with the relation (22) leads to:

(30)
$$d\alpha = d\mathbf{P} \frac{\gamma - \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} + \left(\mathbf{J}_{\mathbf{y}} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{J}^2 (\gamma - 1)}{2\sigma \mathbf{V} \sin^2 \alpha} \right) \frac{\mathrm{tg} \alpha}{\rho \mathbf{V}^2} dx.$$

Without MHD interaction, we thus recover the expression involving integration of P as function of α , following the Busemann method [C, 1957] which gives:

(31)
$$\mathbf{P} = -\alpha - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} \operatorname{tg} \alpha} \right).$$

In the interaction region and behind it, the Mach number is no longer linked only to the Busemann number **P** and must be calculated by integration of the St Venant's equation along a streamline.

In any case, P and φ remain linked with the epicicloidal coordinates through the integration of the relations (25) and (26). At any point of the flow, they can be written:

$$\mathbf{\varphi} = \mathbf{\mu} - \lambda$$

$$(33) \mathbf{P} = \mu + \lambda.$$

According to the equations (25) and (26), the Joule effect remains negligible if the current density is such that:

$$J \ll \frac{B \sigma C_p T}{V} = J_c.$$

For the numerical simulations performed in Sect. 5, this condition is fulfilled and so the flow can be considered as an isentropic one $(J/J_c \approx 10^{-1})$.

4. "Anti shock" criterion

A slender body embedded in a supersonic flow must induce the convergence and the self-cutting of the characteristic lines issued from the wall, involving the occurrence of a shock wave. However, a force field applied in the range of influence of the bump can balance the effects of local pressure waves induced by the wall and restore the characteristic parallelism far from the wall.

This condition, suggested by Petit, is the basis of the anti-shock criterion. It amounts to considering $\phi + \alpha$ to be constant in the whole unperturbed flow.

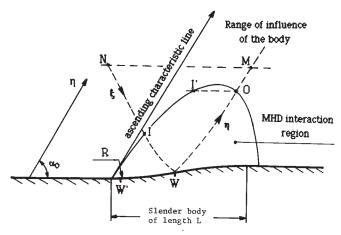


Fig. 2. – Localization of the force field around a slender body.

4.1. GENERAL FORMULATION

So consider the following path, described in Figure 2: start from a point N located in the upstream flow of the slender body, and follow the descending characteristic ξ passing through this point. This path enters the perturbed region at the point I. Then it is reflected at the wall at the point W and follows the ascending characteristic η , leaving the perturbed region at the point O and finally arriving at the point M located on the same streamline as N.

We suppose also that the force field is perfectly delimited by a boundary characterized by the points I and O, which splits the unperturbed flow from the perturbed one. In the first approach, it may be possible to consider the force field delimited by the magnetic field geometry. In the case of an evanescent force field, the flow passes imperceptibly from the unperturbed region to the interaction one, without being able to locate the boundary. In that case, the points I and O cannot be defined.

The flow must pass around the body without producing shocks, which involves the parallelism of the characteristic lines in all the unperturbed flow, denoted by ∞ . So at the boundary point O:

$$\alpha + \mathbf{\varphi} = \mathbf{Cst}$$

and both the flow direction and Busemann number are defined at O using the relations (32) and (33). First, we assume that the descending characteristic ξ enters the interaction region at the point O. That allows us to write:

$$\lambda_{\infty} = \lambda_{\mathbf{M}} = \lambda_{\mathbf{N}} = \lambda_{\mathbf{I}} = \lambda_{\mathbf{O}}.$$

EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, VOL. 8, No 4, 1989

The epicicloidal coordinate λ takes the following value at the wall point W, along the descending characteristic from I to W:

(37)
$$\lambda_{\mathbf{W}} = \lambda_{\mathbf{I}} + \int_{\mathbf{I}}^{\mathbf{W}} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} d\xi = \lambda_{\mathbf{I}} + \Delta \lambda_{\mathbf{IW}}.$$

In the same way, we may write, for from W to O along the ascending characteristic n:

(38)
$$\mu_{O} = \mu_{W} + \int_{W}^{O} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} d\eta = \mu_{W} + \Delta \mu_{WO}.$$

Along the slender body the flow direction ϕ_W is imposed by the wall $(\phi_W = \mu_W - \lambda_W)$ and μ_O can be obtained as a function of the path along the characteristic lines. This yields finally at O:

(39)
$$\varphi_{O} = \varphi_{W} + \Delta \lambda_{IW} + \Delta \mu_{WO}$$

(40)
$$\mathbf{P}_{\mathbf{O}} = \mathbf{P}_{\infty} - \mathbf{\varphi}_{\infty} + \mathbf{\varphi}_{\mathbf{W}} + \Delta \lambda_{\mathbf{IW}} + \Delta \mu_{\mathbf{WO}}.$$

Now consider the variations of the Mach number along the streamline passing through O. Its behaviour is described from I' to O by the condition (30), which is written to a first approximation:

(41)
$$\alpha_{O} - \alpha_{\infty} = (\mathbf{P}_{O} - \mathbf{P}_{\infty}) \frac{\gamma - \cos 2\alpha}{2\cos^{2}\alpha} + \left(\frac{\mathbf{J}_{y}\mathbf{B}}{\rho \mathbf{V}^{2}} \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathbf{J}^{2}(\gamma - 1)}{\sigma \rho \mathbf{V}^{3}}\right) \Delta \mathbf{X}_{I'O} = \boldsymbol{\varphi}_{\infty} - \boldsymbol{\varphi}_{O}.$$

The combination of the relations (42), (43), and (44) leads to:

(42)
$$\phi_{\infty} - \phi_{W} = \Delta \lambda_{IW} + \Delta \mu_{WO} - \left(\frac{J_{y}B}{\rho V^{2}} tg \alpha + \frac{J^{2}(\gamma - 1)}{\sigma \rho V^{3}} \right) \frac{2\cos^{2}\alpha}{\gamma + 1} \Delta X_{I'O}.$$

This relation corresponds to the general "anti-shock" criterion. The force field must satisfy this criterion to be really adapted to the body.

The entire problem of shock-wave cancellation consists of finding a real force field satisfying this criterion. In the case of a non-evanescent force field, it is always possible to modify the shape of the magnetic field to obtain such a force field, as soon as it is confined within the range of influence of the body, as shown in Figure 2.

4.2. Particular formulations of the "anti-shock" criterion

From the general formulation (42), the general criterion does not allow us to determine explicitly either the force field-intensity or its geometry. We must inevitably use numerical simulations. However, under particular assumptions it is possible to obtain simple formulations of the criterion that bring to the force the slender feature of the force field.

Let us consider a point W' near the upstream boundary of the range of influence as shown in the figure 2. In this region, it can be admitted that:

(43)
$$\Delta \lambda_{NW} \ll \Delta \mu_{WM}$$
 and $\Delta X_{\Gamma O} \ll \Delta \mu_{WM}$

and, taking a force field $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ of orientation θ with respect to the x_0 -axis, we obtain, according to the relation (26):

$$(44) F_{\perp n} = F \sin{(\alpha - \theta)}.$$

We may define, to first order, the height of the interaction region as:

$$\Delta \eta_{WO} = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

We introduce the relations (43), (44) and (45) into the relation (42) to obtain a criterion allowing us to express the height of the interaction region as a function of the wall direction θ , the flow parameters and the crossed fields: Near the wall, $\sin (\varphi/y_0) = 1/R$, and we obtain:

(46)
$$\frac{JBh}{\rho V^2} = 2 \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)} \left(\phi_W + \frac{J^2h}{\sigma \rho V C_n T} \right).$$

It is interesting to develop three particular cases of force-field direction, for the case of isentropic flows.

• F parallel to the x_0 -axis $(\theta = 0)$

This assumption corresponds to the experimental conditions holding in a symmetrical Faraday's channel in which the electric field is produced by two opposite segmented electrodes, and with a transverse magnetic field sufficiently weak to cmake the Hall effect negligible, this yields:

$$\frac{\mathrm{JB}\,h}{\mathrm{\rho}\,\mathrm{V}^2} = 2\,\mathbf{\varphi}_\mathrm{W}.$$

The interaction height is directly proportional to the deviation angle of the wall for small deviations.

• F parallel to the ascending characteristic lines $(\theta = \alpha)$

This case corresponds to the developments of the quasi-one-dimensional analysis [L & P, 1989]. It involves the constancy of the flow parameters along the ascending characteristic lines and it introduces the quasi-one-dimensional analysis [L & P, 1989] as a particular case of this two-dimensional approach.

$$\frac{\mathrm{JB}\,h}{\rho\,\mathrm{V}^2} = \infty.$$

European journal of mechanics, B/Fluids, vol. 8, N° 4, 1989

Effectively, the interaction height is theoretically boundless in such a case.

• F perpendicular to the ascending characteristic lines ($\theta = \alpha - \pi/2$)

$$\frac{\operatorname{JB} h}{\rho \operatorname{V}^2} = \frac{2}{\operatorname{M}} \varphi_{\operatorname{W}}.$$

Notice that the minimal height is obtained for this particular force field orientation $(\partial h/\partial \theta = 0)$. This result appears to be a logical conclusion because the velocity variations in supersonic flows are produced perpendicularly to these characteristic directions. So such a force-field orientation must act the most efficiently on the flow.

5. Numerical applications

5.1. LOCATION OF THE THEORETICAL APPROACH WITH RESPECT TO SHOCK-TUBE EXPERIMENTS

The present theoretical developments are used to simulate experimentations which may be achieved in a shock tube. An ionized argon flow is assumed to pass through a convergent channel. A shock wave must occur in the convergent section: Figure 3 shows the simulation of such a flow. The birth-place of the shock-wave, corresponding to the self-crossing of the characteristic lines, clearly appears.

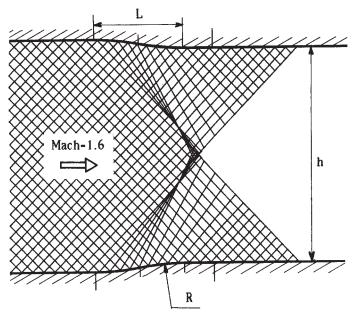


Fig. 3. — Shematic representation of a convergent shock-tube channel. The merging of the characteristic pattern indicates a shock-wave occurrence.

This representation does not truly have a physical reality, because the shock wave modifies the parameters of the medium in an important way. The convergence of the

characteristic lines does not mark the exact location of the shock but only allows us to bring to the fore its occurrence.

So a force field is supposed to accelerate the flow in the convergent part in order to avoid the self crossing of these characteristics lines and allow shock-wave cancellation.

These simulations provide a first account of the phenomena which occur in a shock-tube. Some of the features not taken into account are the non-steady-state feature of the shock tube experiments and the behaviour of the plasma parameters as functions of the temperature and the pressure. Principal properties neglected are the variations of the conductivity σ and the ratio of the specific heats γ , induced by the ionization decreasing or the Joule energy input involving non-thermodynamic equilibrium effects (Te > Tg).

Lastly, the effects of the boundary layer, induced by the viscosity of the plasma, are neglected.

The quasi-one-dimensional analysis [L & P, 1989] enabled us to bring to the fore the optimal conditions to set: this concerns an ionized argon flow at Mach 1.6 at a pressure of 1 Bar:

Mach: 1.6 T: 9,500 K p: 10⁵ Pa. ρ: 0.050 kg/m³ V: 2,575 m/s σ: 2,810 Mhos/m γ: 1.31.

The Reynolds magnetic number, defined as:

$$(50) R_m = \mu_0 \sigma VL$$

remains smaller than unity (L=0.04 m) in these conditions, and the flow and the magnetic field can be considered as de-coupled.

Also, a first approach can be made in considering a force field parallel to the wall. The optimal values of the MHD parameters given by the quasi-one-dimensional study [L & P, 1989] were such as the following:

J: 2 10⁶ A/m². B: 1 T.

 φ : 8° (for a convergent profile of radius R = 0.2 m over a length L/2 = 0.03 m).

With respect to the relation (47), these values lead to an interaction height close to 0.06 m. The force field must then be localized very near the wall and can be defined as slender.

It can be checked that the Joule effect is effectively negligible, because, according to the criterion (34), J is small compared to Jc which is also of order $2 \times 10^7 \text{ A/m}^2$.

In the course of the quasi-one-dimensional study [L & P, 1989], we showed that the Hall effect can advance shock-wave cancellation, in pointing the force field perpendicularly to the ascending characteristic lines. In the present two-dimensional study, this phenomenon

is not taken into account in the determination of the force field, although the Hall parameter is of order unity for such interaction conditions.

5.2. Numerical method

We assume the MHD interaction to be isentropic. All the terms taking the Joule effect into account are neglected. The flow can be derived step by step, with respect to the compatibility equations along the characteristic directions, and as a function of the initial and boundary conditions.

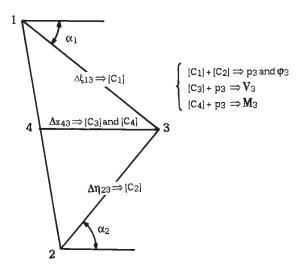


Fig. 4. - Characteristic grid of the numerical scheme.

Let us suppose that, as indicated in Figure 4, at the points 1 and 2 all the MHD parameters are known: M, φ , T, p, F... and the epicycloidal coordinates λ and μ also. The ascending characteristic passing through 2 and the descending characteristic passing through 1 cut in 3, thus defining the displacements $\Delta \eta_{13}$ and $\Delta \xi_{23}$.

The conditions (25) and (26) along the characteristic directions η and ξ are simplified and become:

[C1]
$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{F_{\perp \eta}}{\rho V^2} = 2\frac{\partial \mu}{\partial \eta}$$

[C2]
$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{F_{\perp \xi}}{\rho V^2} = 2 \frac{\partial \lambda}{\partial \xi}.$$

Thus the fields of λ and μ can be calculated as functions of the force field, for small successive displacements along the characteristic lines η and ξ , which are fixed by the local conditions of the flow. Then the pressure and the flow direction at the point 3 are obtained from discretising the conditions [C1] from 1 to 3 and [C2] from 2 to 3.

Next, along the x direction, from point 4 to point 3, and with respect to the compatibility equation (27) on this direction, the velocity is determined:

(53)
$$[C3] \quad dV = -\frac{dp}{\rho V} + \frac{J_y B}{\rho V} dx.$$

Finally, the St Venant's equation (17) allows us to obtain the variations of the Mach number in the x direction:

(54)
$$[C4] \frac{dM}{M} = -\frac{dp}{\rho V^2} \left(1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right) + \frac{J_y B}{\rho V^2} dx.$$

Thus all the other thermodynamic variables can be determined:

$$T = \frac{V^2}{M^2} \frac{1}{R \gamma}$$

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$(57) a = \sqrt{\gamma RT}.$$

The resolution of this equation system has been performed with a numerical scheme of second order, which involves an iterative process.

5.3. Force field determination

For a level channel, the force field is obtained from crossing a transverse magnetic field $\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}$ and an electric field \mathbf{E} produced by an electric potential between the opposite electrodes, as shown in Figure 5. In the flow, the electrons are subjected to the action of both the applied electric field and the induced electric field $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$.

(58)
$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \sigma \, \mathbf{E}^*.$$

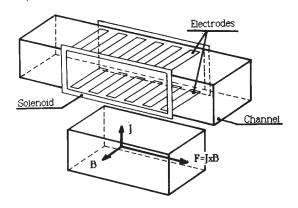


Fig. 5. - Sketch of a linear Faraday convertor.

If the applied field remains constant along the electrodes, and if the acceleration is very strong, the electric field applied to the electrons vanishes very rapidly because of the increasing of the increasing of VB ($\Delta V/V = 3$ on a length $\Delta x = 0.04$ m [F, 1973]).

To balance the effect of the induced electric field, it would be possible to supply the opposite segmented electrodes with a power device working as a constant-current source rather than a constant voltage one. In these conditions, the voltage between two opposed electrodes is automatically adapted in order to provide a constant current along the whole channel length. That is the accepted solution for the numerical simulations which amounts to considering the electric field E^* applied to the electrons as deriving from a potential Ψ^* :

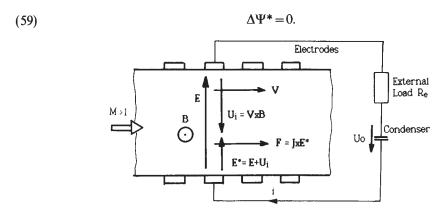


Fig. 6. - Power supply of the electrodes with constant current source.

The flow conditions are such that both the field $V \times B$ and the filed E are quasi-colinear, giving a situation close to the one-dimensional conditions. Between the electrodes, the power electrical circuit in the steady state is described in Figure 6. Ohm's law corresponding to this circuit is:

(60)
$$U_0 - VB h = (R_e + R_p) I$$

which gives, on differencing, the sensitivity of intensity to velocity variation:

(61)
$$\frac{d\mathbf{I}}{d\mathbf{V}} = -\frac{\mathbf{B}\,h}{\mathbf{R}_e + \mathbf{R}_p}.$$

In order to obtain small variations of the intensity as a function of the velocity, $(\Delta I/\Delta V > -0.1)$, according to the relation (69), the power circuit must be equipped with an external load of 1Ω .

The applied electric field is therefore calculated as a field deriving from a potential, by resolution of the Poisson equation on a square net.

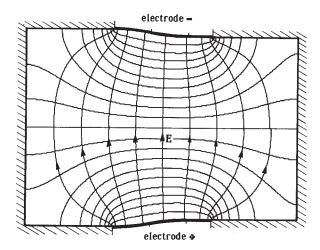


Fig. 7. — Iso-potential and current lines in the convergent channel. Electrodes located on the whole convergent area.

Figure 7 shows the potential lines and the field lines of the electric field used: the electrodes are located along the whole convergent channel.

In the case where the induced field $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ would not be balanced with a constant current source, it would behave as a *regulator* on the flow velocity: actually, in the convergent regions, the flow is slowed down by the wall and \mathbf{E}^* would decrease, involving an increasing of the $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ action. On the other hand, in the divergent regions, the velocity increases, which would involve an increasing of $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$. Even the case where the acceleration due to the divergent would be such that $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ became greater than \mathbf{E} can be considered. The interaction should pass into a conversion mode, and the flow would be slowed down by the force field.

Thus we can see that the induced field can advance the annihilation of the shock waves, acting like a regulator on the force field, and in fact limiting the pressure variations.

In these numerical simulations, the force field is assumed to be delimited by the geometry of the transverse magnetic field. Two simulation conditions can be distinguished:

- The magnetic field is applied uniformly in the whole channel (Fig. 8);
- The geometry of the magnetic field is determined with respect to the "anti-shock" criterion (35) (Fig. 9).

5.4. Numerical results

The simulations have been done on a Vax 11/750 and many flow calculations have been performed in the case of a convergent channel.

Figure 3 shows a flow simulation without any force field. The self-cutting of the characteristic lines is brought well to the fore, indicating a shock-wave occurrence. In Figures 8 and 9, the flow is calculated with different force fields, leading to the uncrossing of the characteristic lines.

In these two cases, the force field is about 2×10^6 N/m³. It is assumed to be achieved with both a magnetic field of one tesla and an electric field having an average value close to 2×10^6 A/m².

The radius of curvature of the cylindrical convergent/divergent lengths of the wall is equal to 0.2 m for a height of the shock tube of 0.12 m.

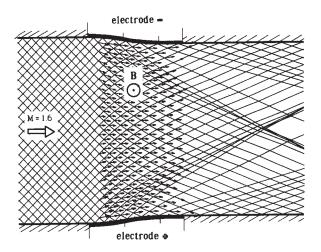


Fig. 8. — Flow simulation with force field applied in the whole channel. $J = 2.2 \, 10^6 \, A/m^2$ on average, B = 1 tesla.

The first calculated flow, shown in Figure 8, is obtained for a force field applied in the whole section of the shock tube and the electric field described in Figure 7. Such a force field leads practically to the uncrossing of the characteristic lines issuing from the convergent part, but the Mach number of the flow is strongly increased: Mach 1.6 at the channel entrance, Mach 2.3 at the exit. In these conditions, it is not easy to deal with the characteristic uncrossing, because the flow is accelerated in a region ahead of the range of influence of the convergent part (median region), which should rather amplify the shock wave. If any other magnetic field is applied along the channel, the crossing of the characteristic lines is only displaced downstream without being annihilated. It shows the necessity of applying the force field only in the range of influence of the convergent part.

Thus this solution has been accepted for the calculation of the flow presented in Figure 9. Furthermore, the magnetic geometry is limited such that the "anti-shock" criterion is checked. In these conditions, the characteristic pattern uncrosses, without any flow acceleration: the force field balances exactly the action of the wall on the fluid. This solution shows the advantage of action in a region near the wall and should allow us to perform analysis for external flows, where the whole body is embedded in the fluid.

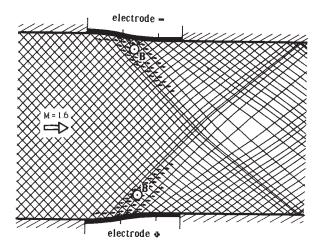


Fig. 9. — Flow simulation with near-parallel force field, checking the "anti-shock" criterion. $J=2\ 10^6\ A/m^2$ on average, B+1 tesla.

6. Conclusion

This two-dimensional steady-state approach for shock-wave annihilation by MHD force-field action allows the ground to be prepare for the study of this phenomenon, following the quasi-one-dimensional study [L & P, 1989].

The "anti-shock" criterion proposed, which is quite simple and seems to be of a very general nature, allows us to determine the geometry of the force field which must be applied in order to annihilate the shock waves induced by a slender body. It shows that the force field must be located near the wall and must balance the pressure variations and the directions variations induced by the wall in the flow.

It seems that a great number of force fields can annihilate the shock waves around same slender body. Thus, from the fundamental point of view, these studies lead to a new class of supersonic flows:

Supersonic flows with flow control in which the shock-waves could be cancelled.

For this two-dimensional study, developed for plane flows, it is relatively easy to modify the geometry of the force field, because the magnetic field is obtained from devices external to the body, the flow being confined in a channel. Moreover, the electric field is practically quasi-one-dimensional, except for the boundary effects. These conditions in the theoretical approach, which are quite simple, present numerous advantages for numerical and experimental developments.

These studies lead to numerical simulations allowing us to simulate shock-tube experiments and to approach the different phenomena which may appear. At the moment, this approach is purely theoretical, but experiments are to be performed in the Laboratoire de Thermodynamique of Rouen's University (LA 230, France) managed by C. Thenard.

Shock-wave annihilation could find applications in channels or ahead of flat or blunt bodies. For this purpose, the future investigations will concern bodies embedded within boundless supersonic flows (external flow) and take the subsonic region into account. Of course, axi-symmetry flow studies must be developed because, as in MHD conversion using very high magnetic fields, the bodies could be disc-shaped. The numerical simulations will be directed towards finite-element methods which allow us to take into account the boundary layer effect and the subsonic region.

MHD shock-wave annihilation is comparable with MHD propulsion and the most interesting application is the possibility of slender accelerators in sea water or in the atmosphere. Certainly, the Velikov instabilities relating to non-equilibrium ionization of cold gas in the presence of high magnetic fields must occur, but this phenomenon could be avoided by magnetic confinement as suggested by Petit [1983 b].

Acknowledgments

We wish to thank here the staff of the numerical centre of the Faculté des Sciences St Charles, of Marseille, where these simulations were performed, and who put their numerical material at our disposal, as well as the French society SOFIMECAL for the financial support that it provides to these research studies.

REFERENCES

CARRIÈRE P., 1957, Méthodes théoriques d'étude des écoulements supersoniques, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, France.

COURANT R., FRIEDRICHS K. O., 1948, Supersonic flow and shock waves, Interscience Publishers, Inc. New York. FONTAINE B., 1973, Contribution à l'étude de l'action d'un champ magnétique ou d'un champ électrique transversal sur un courant supersonique d'argon ionisé: cas d'une décharge pure: cas de la conversion MHD, Thèse N° A 07860, Université de Marseille.

FORESTIER B., 1973, Étude de l'accélération par les forces de Laplace d'un écoulement supersonique d'argon ionisé, Thèse N° AO 7861, Université de Marseille.

Krank S. C., 1969, Experimental investigation of magnetoaerodynamic flow around blunt bodies, Ph. D. Eng. Gene., Northwestern University.

LEBRUN B., PETIT J. P., 1989, Shock wave annihilation by MHD action in supersonic flows. Quasi-one-dimensional steady-state analysis and thermal blockage. Eur. J. Mech. B/Fluids, 8, 163-178.

NORMANN W., 1965, One dimensionnal magnetohydrodynamics equations for a non-ideal gas with application to singly ionising argon, Arn. Eng. Dev. Center-T.R.D.

Petit J. P., 1983 a, Is supersonic flight, without shock waves, possible, Eight Inter. Conf. on MHD Electr. Pow. Gene., Moscow.

PETIT J. P., 1983 b, Cancelletion of the Velikhov instability by magnetic confinment. Eight Inter. Conf. on MHD Electr. Pow. Gene., Moscow.

PETIT J. P., LEBRUN B., 1986, Shock wave cancellation in gas by Lorentz Force Action, Ninth Inter. Conf. on MHD Elec. Pow. Gene., Tsukuba Japan.

RESLER E. L., SEARS W. R., 1956, The prospects for magnetoaerodynamics, J. Aeron. Sci., 25, 235-246. SUTTON G. W., SHERMAN A., 1965, Engineering magnetohydrodynamics, MacGraw-Hill, New York.

(Manuscript received July 4, 1988, in revised form: December 12, 1988.)

THEORETICAL ANALYSIS OF SHOCK WAVE ANNIHILATION WITH MHD FORCE FIELD

Lebrun B. Petit J.P.
Observatory of Marseille. 2 place Le Verrier
Marseille 13 France

ABSTRACT

The annihilation of the shock waves in supersonic flows around flat bodies is analysed through one-dimensional and two-dimensional steady state studies. The main idea is that the MHD force field must act on the flow in order to keep the characteristic lines parallel each other outside the interaction region. The theoretical developments lead to an "anti shock" criterion. Numerical flow simulations, associated to shock tube experiments, are presented, corresponding to a convergent channel and a thin wing shaped body.

INTRODUCTION

Some quite recent works [1] [2] [3] [4] [5] have shown that shock waves could be cancelled by a suitable MHD force field in supersonic gas flows. The original idea, introduced by J.P.Petit, is the following: The force field JxB must modify the characteristic pattern of the flow in order to prevent the mutuel crossing of the characteritic lines of the same family. In other terms, one must achieve a local parallelism of the lines. In effect, in the birthplaces of the shock waves, pressure waves, following the characteristic lines, which are solutions of the hyperbolic characteristic system, tend to focus [6] [7]. If this focussing is prevented, the shocks will not occur. MHD in gas requires some electrical conductivity. Then we will get [8]:

Lorentz force field F = JxB,

Joule effect $\frac{J^2}{\sigma}$, due to the high current density J (order of magnitude 10⁶ A/m²) [9] [10]

Hall effect :

$$\beta = \frac{e^-B}{m_e v_e} \qquad \text{with :}$$

e electron charge me electron mass ve electron-gas collision frequency

then:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{V} \mathbf{x} \mathbf{B} \right) \qquad \text{with} \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \beta^2} \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{vmatrix}$$

where VxB is the induced field.

We have to take account of the real gas effect in the plasma. The specific heats ratio γ decreases and tends to unity when the ionisation fraction a grows. For high interaction parameters values the Joule effect may produce the thermal blockage of the flow. We have shown that it could be avoided [3] if :

$$K = \frac{E}{VB} << \frac{1+Zt}{\gamma-1} + 1 = KL$$

or :

$$N = \frac{\sigma_0 \ B^2 \ L \ (Zt+1)}{\rho V \ (\gamma - 1) \ (1+\beta^2)} >> 1$$

with B Magnetic field σ_0 electrical conductivity

ρ Gaz density

V Velocity of the flow.
L Characteristic length

Real effect $Zt=1/2~\alpha~(1+\alpha)$ for singly ionized argon plasma[11] Zt=0~ for a perfect gas

To avoid the therrmal blockage it is not usefull to increase the magnetic field B whence $B^2/(1+\beta^2)$ tends asymptotically to $(1/\mu_e^2)$

 $\mu_{e^{-}} \; \frac{e^{-}}{m_{e} v_{e}} \;$ is the electronic mobility.

The ratio $B^2/(1+\beta^2)$ remains moderate.

We can consider a two temperature plasma where ($\rm T_{\rm e} > \rm T_{\rm g}$). This non-equilibrium effect increases the ionisation a and the electrical conductivity of the gas, and decreases the

Hall parameter value β when the electron-ion collision frequency become important. Strong non elequilibrium conditions would make possible to operate with moderate gaz temperature.

The Velikhov instability [12] appears when the local Hall parameter β is higher than its local critical value β_{Cr} [12] . In a fully ionised plasma the critical value tends to 2 and is higher than in a partially ionized gas [13].

Theoretical studies have been achieved with the following plasma conditions, which can be provided by a shock tube wind tunnel [9] [10].

Gaz: Argon
Flow Mach number : 1.5
Velocity of the flow : 2500 m/s
Gas temperature : 10 000 °C
Gas pressure : 1 bar
Electrical conductivity : 3500 mhos/ m

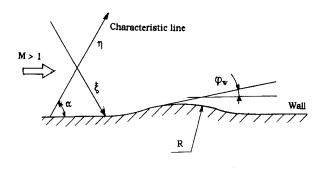
These conditions correspond to an experimentation, presently performed in the shock tube laboratory of the Rouen university, France. In order to control the characteristic lines pattern several approach have been developed:

Pure theory: Quasi one dimensional approximation
Two dimensional and axisymmetric conditions.

Numerical simulations: Two dimensional Internal flow (in shock tube experiments)
Two dimensional external flow: wing like model.

QUASI-STEADY AND ONE DIMENSIONAL APPROACH.

Let us consider a sort of bump on a wall.



The flow can be described by Euler equations. The one dimensional flow corresponds to :

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = 0$$
 \Rightarrow $dx = \frac{\partial h}{\partial \xi} d\xi$

We consider that all the thermodynamic quantities "h" are constant along the characteristic lines coming from the profile. We keep them parallel each other if:

$$\frac{dM}{M} = \sqrt{M^2 - 1}$$
 where M is the Mach number

If we introduce real gas effects, we get :

$$\frac{\text{JBR}}{\rho \text{V2}} = \frac{\text{M}^{\,2}}{2} + \frac{\text{R} \sqrt{\text{M}^{2}-1}}{2\gamma \text{M} (\gamma + 2Zt + 1)} \frac{\text{d}\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Zt+1}{Zp+1} \frac{d\gamma}{\gamma+2Zt+1}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{Zt+1}{Zp+1} \frac{\gamma-1}{\gamma+2Zt+1} \frac{d\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{Zt+1}{\gamma+2Zt+1} \frac{d\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{dV}{V} = \sqrt{M^2 - 1} d\varphi + \frac{Zt + 1}{\gamma + 2Zt + 1} \frac{d\gamma}{\gamma}$$

For a perfect gas :

$$\frac{ \left[\frac{JBR}{pV2} = \frac{M^2}{2} \right] }{ \left[\frac{dV}{V} = \sqrt{M^2 - 1} \ d\phi \right] }$$

$$\frac{ \left[\frac{dV}{p} = \frac{d \cdot T}{T} = \frac{d \cdot \rho}{\rho} = 0 \right] }{ \left[\frac{dV}{V} = \sqrt{M^2 - 1} \ d\phi \right] }$$

In order to achieve shock wave annihilation the force field must balance the pressure force all along the profile. This is similar to the classical work of Sutton [8], who determined the force field which kept constant the thermodynamic parameters (p, ρ or T) in a convergent channel.

STEADY BIDIMENSIONAL STUDY .

Theoretical study.

We still consider a thin profile imbeded in a supersonic flow and surrounded by a force field JxB We take account of real gas effects. The Hall parameter is supposed to be neglectible. Then we get the following system for a bidimensional geometry or axisymmetric geometry:

Continuity :

with

$$a^2\,(\,\frac{\partial\,\,u}{\partial\,\,x}+\frac{\partial\,\,v}{\partial\,\,x}+\frac{\delta\,\,V_o}{y_o}\,)+\frac{\partial\,\,p}{\partial\,\,x}=\frac{J^{\,2}\,a^{\,2}}{\sigma C_n T}$$

 $\delta = 0$ bidimensional flow $\delta = 1$ axisymmetric flow.

Momentum

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = J_y B = F_x$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -J_X B = F_y$$

Energy equation(C1):

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} (M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1) - (\frac{J_y B}{\rho V^2} + \frac{J^2}{\sigma \rho V^3}) M^2 \frac{\gamma - 1}{2} - dx$$

The associated hyperbolic characteristic system is:

$$dV = -\frac{dp}{\rho V} + \frac{J_{\gamma}B}{\rho V} dx$$
 (C2)

equation (C3):

$$\begin{split} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= -\frac{F_{\perp \eta}}{\rho V^2} + \frac{J^2 \sin \alpha}{\sigma \rho V C_p T} - \frac{\delta \sin \alpha \sin \phi}{y_0} \\ &= 2 \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \end{split}$$

equation (C4):

$$\begin{split} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= -\frac{F_{\perp \xi}}{\rho V^2} + \frac{\jmath^2 \sin \alpha}{\sigma \rho V C_p T} - \frac{\delta \sin \alpha \sin \phi}{y_0} \\ &= 2 \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \end{split}$$

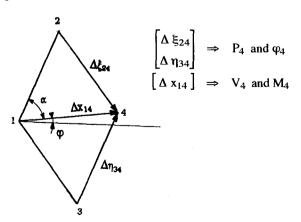
with :

$$dP = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\gamma p} dp \quad P \quad \text{: Buseman number}$$

 $F_{\perp \eta} = \sin \alpha \, F_X - \cos \alpha \, F_y = F_\xi \sin 2\alpha$

 $F_{\perp\xi} = \sin\alpha F_X + \cos\alpha F_V = F_{\eta} \sin 2\alpha$

This system (C1), (C2), (C3), (C4) makes possible to compute the local thermodynamic parameters in the flow.



If the interaction area, the complete system of equations (C1), (C2), (C3), (C4) is used. Elsewhere we shift to simplified equations system, corresponding to J=0.

Anti-shoch criterion and determination of the interaction area:

As a boundary condition we impose the characteristic lines to be strictly parallel, out of the interaction area. Then we get (see figure 1):

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = 2 \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)} (\phi_W + \frac{J^2h}{\sigma \rho V C_P T} - \delta \frac{h}{R})$$

with :

h interaction distance θ force field direction in the interaction area. ϕ_W wall angle

From the force field $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ we can derive the interaction distance h.

 $\theta=\alpha$:one dimensional hypothesis .

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = \infty$$

 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{2}$:F perpendicular to the ascending characteristic lines.(minimum interaction distance h)

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = 2 \frac{\varphi_W}{M}$$

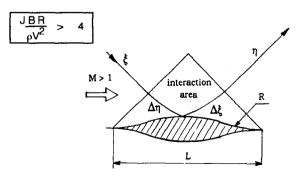
 $\theta = 0$: F parallel to the x-axis

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = 2 \, \phi_W$$

If we consider a wing-like thin object the interaction field must be confined in the immediate vicinity of the model, which requires a strong enough force field:

$$\Delta \eta = \frac{L}{2 \sin \alpha} = \frac{LM}{2} \implies \frac{JR}{\rho V^2} > 4 \phi_W \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)}$$

 $\frac{L}{\phi_W}=$ R $\,$ Consider a force field parallel to the x $\,$ ($\,\theta=0$) axis, we get :



Such as it becomes possible to determine the order of magnitude of the force field, corresponding to the geometry of the object and to the inlet gas parameters of the flow.

Numerical results.

The characteristic method, as presented in the paragraph 3.1, has been applied to different peculiear configurations, with the following assumptions:

Bidimensional flow Neglectible Joule effect Neglectible Hall effect Neglectible induced field VXB effect.

At first we computed the flow in a convergent nozzle. In the figure 2 we see, with a zero JXB field, how the characteristic cross each other. The place where the characteristic focuss shows the birthplace of the shock. Then a convenient JXB force field is introduced. The electrodes are located on the walls, as shown in the figure 4. The magnetic field is perpendicular to the plane of the figure. The electric field pattern is shown in the figure 3. In the figure 4 we see that the crossing of the characteristic may be avoided, such as no shock occurs. Experimental confirmation could be obtained in a shock tube wind tunnel. Of course it would correspond to short duration (quasi steady) experiments

In a second step we have computed the flow in the vicinity of a thin wing-like model. In the figure 5 the force field is zero and the focussing of the characteristics shows the birthplaces of the shocks. The empirical shaping of the force field required a great number of numerical computations. The results are presented in the figures 6, 7, 8. The figure 6 shows the shockless characteristic pattern (without any focussing). The electric field is produced by two sets of electrodes, as shown in the figure 7. The figure 8 shows the force field, shaped by a non homegeneous magnetic field distribution. The B-field is perpendicular to the plane of the figure. In the portion of the flow, close to the leading edge of the model, the gas must be accelerated, for the wall behaves as a convergent. Then it must be slowed down, in order to prevent the divergency of the characteristics (classical expansion fan) . In this region the wall can be assimilated to a divergent. In the vicinity of the end of the profile the flow must be accelerated again, for this last part the wall bahaves like a convergent and tends to slow down the flow.

CONCLUSION.

Shock wave cancellation is theoretically possible if the force field JXB can be shaped conveniently. The Lorentz force must balance the effect of the on the gas velocity. In the converging sections the gas must be accelerated and vice-versa. The results of the numerical simulations, closely associated to

shock tube conditions, shows that experimental demonstration should be possible. Previous free surface water experiments gave positive results [14] . In the future the use of supraconducting magnets could make such experiments easier. The interaction parameter grows with B For high B experiments the Hall effect would become important. Then different geometry should be considered, corresponding to axially symmetric objects. Low β MHD generator are linear but high β MHD generators have disk shaped nozzles.

We think that supersonic flight could be achiedved, without shock waves. This new field should be explored and would make possible to cruise at high velocity in dense air, at low altitude and high Mach number. The shock wave system goes with strong thermal effects, strong drag increase and strong mechanical efforts. Comparing to conventional systems, MHD flight in air could be more efficient.

REFERENCES :

- 1. Petit J.P. , Is supersonic flight, without shock waves, possible , 8th Inter. Conf. on MHD Elec. Pow. Gene. , Moscow ,1983.
- 2. J.P.Petit and B. Lebrun, Shock wave cancellation in gas by Lorentz Force Action, Ninth Inter. Conf. on MHD Elec. Pow. Gene. Tsukuba Japan, 1986.
- 3. Lebrun B. et Petit J.P., Shock-Wave annihilation by MHD action in supersonic flows. Quasi-one dimensional steady analysis and thermal blocage, European Journal of Mechanics, B/Fluids, 8, n°2, 163-178, 1989.
- 4. Lebrun B. et Petit J.P., Shock-Wave annihilation by MHD action in supersonic flows. Two-dimensional steady non-isentropic analysis. "Aniti shock" criterion, and shock-tube simulations for isentropic flows, European Journal of Mechanics, B/Fluids, 8, n°4, 307-326, 1989.
- 5. Lebrun B., Approche théorique de la suppression des ondes de choc se formant autour d'un obstacle éffilé placé dans un écoulement d'argon ionisé., Thèse d'Energétique N° 233, Université de POITIER, FRANCE 1990.
- 6. Carrière P., Méthodes théoriques d'étude des écoulements supersoniques , Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, France,1957.
- 7. Courant R. and Friedrichs K.O., Supersonic flow and shock waves , Interscience publishers Inc. New York 1948.
- 8. Sutton G.W. & Sherman A., Engineering magnetohydrodynamics, Mac Graw-Hill, New York, 1965
- 9. Forestier B., Etude de l'accélération par les forces de Laplace d'un écoulement supersonique d'argon ionisé, Thèse N° A O 7861, Université de Marseille, France 1973
- 10. Fontaine B., Contribution à l'étude **de** l'action d'un champ magnétique ou d'un champ

électrique transversal sur un courant supersonique d'argon ionisé: cas d'une décharge pure: cas de la conversion MHD ,Thèse N° A 07860, Université de Marseille, France1973

11.NormanW., One dimensional magneto-hydrodynamic equations for a non ideal gas with application to singly ionizing argon, Arnod Engineering Development Center - TRD, 1965.

12. Velikhov E. , Hall instability of current carying slighly ionized plasma , MHD Electr. Pow. Gene. , Newcastel, 1962 .

13. Petit, J.P. Valensi J., Dufresne D., Caressa J.P., Caractéristiques électriques d'un générateur linéaire de Faraday utilisant un mélange binaire de gaz rares, avec ionisation hors équilibre., C.R.A.S. t.268 P.245-247, Jan 1969.

14. Petit, J.P., Is supersonic flight, without shock waves, possible ? 8th Inter. Conf on MHD Electr. Pow. Gene, Moscow, 1983.

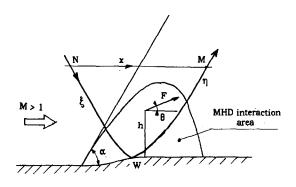


Figure 1: Localisation of the force field near the wall.

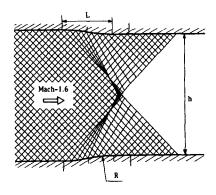


Figure 2: Characteristic pattern in a convergent nozzle of shock tube. Shock wave occurance.

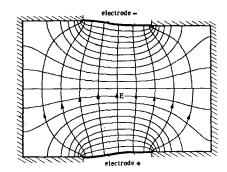


Figure 3: Electric field in the convergent nozzle.

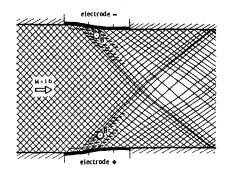


Figure 4 : Characteristic pattern with HMD force field.
Annihilation of the shock wave

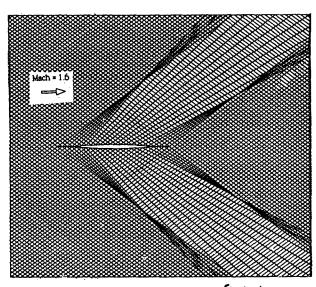


Figure 5: Characteristic pattern around a flat body. Shock wave occurance.

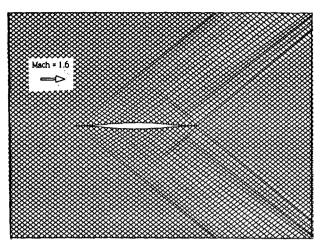


Figure 6: Characteristic pattern with MHD force field around a flat body. Annihilation of the shock waves.

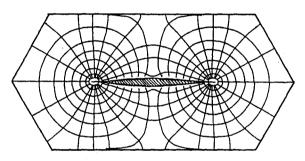


Figure 7 : Electric field computation around the wing shaped body.

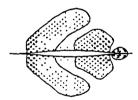


Figure 8: MHD force field allowing shock wave annihilation.

SHOCK WAVE CANCELLATION IN GAS BY LORENZ FORCE ACTION

J.P. PETIT and B. LEBRUN Centre National de la Recherche Scientifique, France

Abstract:

Some theoretical and experimental work has been done between 1950 and 1972 about plasma acceleration towards two main directions: simulation of reentry process with high enthalpy wind tunnels and space propulsion. The first was abandonned about 1972 when one decided that the reentry phenomenon was undestood enough. The second purpose was given up when the long duration space journeys were abandonned (missions to Mars). In fact one can show that for a given mission duration there is an optimum specific impulse value. Circumterrestrial of lunar missions did not need any longer sophisticated large specific impulse MHD devices.

But MHD propulsion could offer some specific interest for high mach numbers flights for, as will be shown here, shock waves could possibibly be cancelled. At the present level, this work is just a fundamental research. But France has recently decided to support it through an original french MHD project. We present here the first numerical simulations results, based on characteristic theory. They will be used to run shock tube experiments in hot argon (in order to achieve a high electrical conductivity and to avoid the ionization instability due to non equilibrium conditions). A 300,000 dollars governmental grant has been given recently to the Leboratoire de Thermodynamique de Rouen, which will take in charge the experimental features.

1.INTRODUCTION

Previous experiments have been carried out (1 and 2) in shock tube, showing that strong plasma ccelerations could be obtained without thermal blocking. When a strong Joule effect occurs, locally, in a supersonic flow, this may cause the birth of a strong front shock wave (1 and 2). If this energy is too big, the slowing down due to the pressure gradient may balance or excess the J x B acceleration. A simple theoretical analysis shows that acceleration is possible if the following criterium is satisfied:

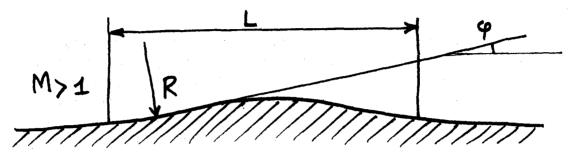
$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \qquad \frac{\sigma B^2 L}{\rho V(\gamma - 1)} > 1$$
 (1)

Private adresses of the authors:

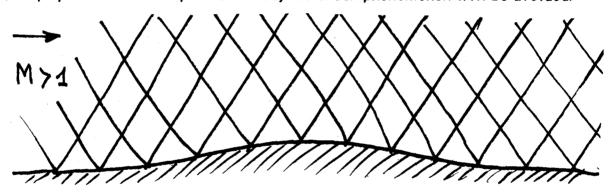
J.P.PETIT 9 rue Aude 13100 Aix-en-Provence, France.

B.LEBRUN: Lou Cigaloun, Boulevard Kennedy, 13090 Aix-en-Provence, France.

This admensional quantity is similar to the classical MHD interaction parameter. The (γ -1) coefficient shows that real gas effects help, by internal energy storage, to reduce the pressure jump. This fits quite well with the (1 and 2) references which are, as far as we know, the only experiments in which thermal blocking was investigated. In a first step we can derive a quasi one dimensional analysis. Consider a wall with some sort of bump:



Developping the classical approach with the Lorenz forces and the the Joule effect one can derive the variations of the gas parameters: velocity, pressure, density, absolute temperature. If the characteristic lines, coming from the model, are kept parralel to the upstream ones, the shock phenomenon will be avoided.



Call α the Mach angle and suppose ϕ defines the direction of the tangent to the wall with respect to the laboratory frame of reference. The parallelism will be kept if :

$$\frac{dM}{M} = \sqrt{M^2 - 1} d\phi \tag{2}$$

Using the previous equations we get:

$$JB = \frac{M^{2}(\gamma - 1)}{2\sqrt{M^{2} - 1}} \rho V^{2} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{J^{2}}{\sigma V}(\gamma - 1)(1 + \frac{\gamma M^{2}}{2})$$
 (3)

Note that d_{ϕ} / dx is nothing but the inverse of the local curvature radius R. This is the value of the local Lorenz force that will make possible to avoid shock birth in the vicinity of the wall. All that can be connected to some classical shock tube experiments and provides all the desirable magnitude orders for physical parameters.

Test gas : Argon : 10 000°K

Volumic mass p : 0.05 Kg/m³

Flow Mach number M : 1,5

Gas velocity V : 2500 m/sElectrical conductivity σ : 3500 Mhos/m

Specific heats ratio γ : 1,275 Curvature ratio at the wall : 0,2 m MHD channel lenght : 0,1 m

Test duration : 0,1 m : 100 µs : 2 Teslas

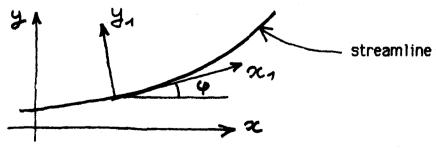
Current density : 200 Amp/cm²

Hall parameter B<1

Note that the J B forces depends on the sign of $d\phi$ / dx . Roughly speaking (if we neglect the pressure gradient due to the Joule heating) we must accelerate in the converging sections ($d\phi$ / dx > 0) and slow down in the divergent one ($d\phi$ /dx <0). Slowing down the gas implies to convert an appreciable amount of its kinetic energy into electrical energy, i.e. these sections act as generators. Such as the global energy expense appears to be the DIFFERENCE between two terms and in fact represents the Joule losses.

2. STEADY BIDIMENSIONAL ANALYSIS

We start from the classical Euler flow equations. One can show that in shoch tube with hot argon, with some moderate current density J, the electron temperature Te can be close to the gas temperature Tg, as was confirmed by the experiments (1 and 2). Furthermore the Joule effect is weak, such as we can neglect it and consider the flow as a quasi isentropic one. Consider now the following frame of reference, based on the flow line:



the mass conservation becomes:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x_1} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial y_1} = 0 \tag{4}$$

and the momentum conservation:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = J_{y_1} B = F_{x_1}$$
 (5)

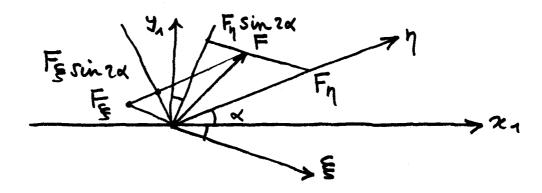
$$\rho u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial y_2} = -J_{x_1} B = F_{y_1}$$
 (6)

introduce now the characteristic lines $\ \eta$ and ξ . In this new frame the equations become :

$$\left\{
\sqrt{M^2 - 1} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\rho u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\sin \alpha F_{x_1} - \cos \alpha F_{y_1} \right.$$

$$\left(\sqrt{M^2 - 1} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \rho u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\sin \alpha F_{x_1} + \cos \alpha F_{y_1} \right)$$
(8)

let us project the Lorenz force



we get:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} (P - \varphi) = -F_{\perp \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma p}} = d\lambda_L \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (P + \varphi) = -F_{\perp \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma p}} = d\mu_L \end{cases}$$
 (9)

where P is the Buseman number as defined by :

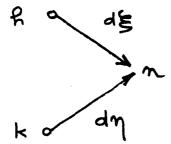
$$dP = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma P} dP$$

$$P = -\alpha - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \text{ Artg } \left[\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \text{ Ctg } \alpha \right] + \text{ Cst.}$$
(11)

 λ and μ are the wellknown epicycloidal coordinates. In absence of Lorenz force they remain constant along the associated characteristics. The introduction of the force cause a variation of these epicycloidal coordinates. By integration we get :

$$\begin{cases} P + \varphi = \lambda & P = P \text{ (Mach)} = \lambda + \mu \\ P - \varphi = \mu & \varphi = \mu - \lambda \end{cases}$$
 (12)

The flow can be derived step by step, following the characteristic lines.



$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda_h - \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma P} F_{\frac{1}{2}\xi} d\xi & (14) \\ \mu_n = \mu_k - \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma P} F_{\frac{1}{2}\eta} d\eta & (15) \end{cases}$$

3. HOW TO KEEP PARALLELISM

Assuming the flow pattern to be uniform at a distance from the wall we derive a simple criterium giving the required spatial extension of the force field:

$$\frac{JBh}{\rho V^2} = tg \varphi \tag{16}$$

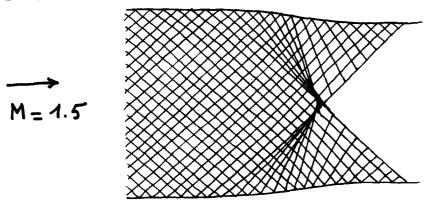
h being the width of the force field. This relation means that the energy provided to the flow must be proportional to the velocity deviation. This can be written as:

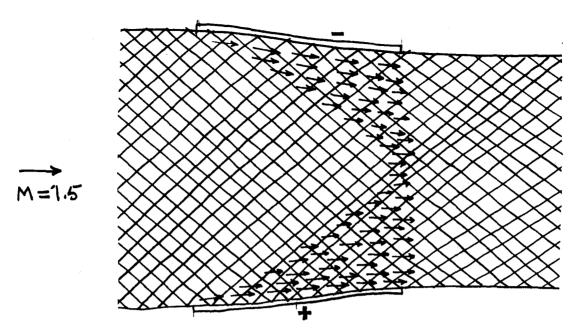
$$\frac{\text{JBR}}{\rho V^2} = \sqrt{M^2 - 1} \tag{17}$$

with the experimental values, as definied before, we find, for an example, for a ten degrees deviation $h = 0.03 \, \text{m}$.

4. NUMERICAL RESULTS:

We consider first an internal solution and a converging section in a shock tube. If the Lorenz force is absent the characteristic lines get focussed as shown on next figure

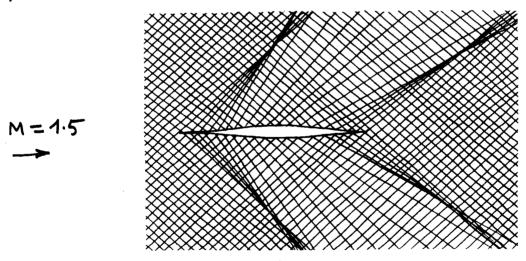




Converging section with Lorenz force action. Two continuous electrodes. The force field is shown. The magnetic field acts is the two triangular areas.

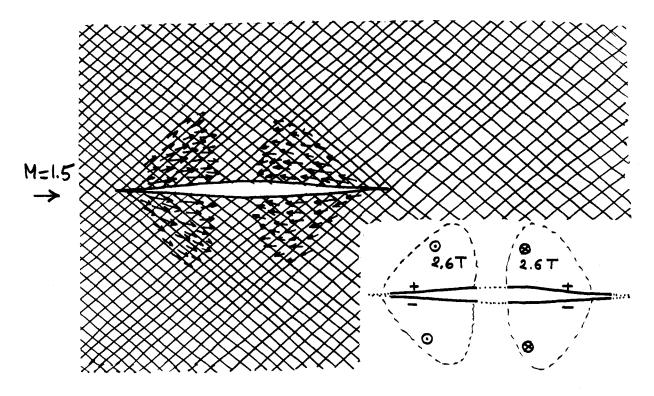
The triangular area shows the desirable localization of the J \times B action (non uniform transverse B field). We assume a constant electrical conductivity over the whole channel . The E field is derived from solving the Poisson' equation.

Consider now an external solution. A thin model is now imbeded in an infinite supersonic gas flow with same upstream conditions, as described in the introduction. If the Lorenz force are zero the cutting of the characteristics reveals the shock waves birthplaces. See next figure on the left. The inlet Mach number is 1,5.



Shock wave formation around a thin model

Introduce now a convenient J x B field (see next page). They are two pairs of electrodes, shown on the foot figure. The field value is 2.6 Teslas and its orientation is shown to. Its intensity shapes the force field (arrows). The plasma is accelerated in the front part of the model and slowed down in the bottom part.



Shock wave cancellation around a thin model, by Lorenz force field. M = 1.5

He hope the experimental results in the shock tube, carried out with classical and wellknown techniques, will confirm these numerical results. Of course this is close to perturbation method, for the involved body is thin. We intend to extend later this to blunt objects. In this case some supersonic regions will appear for an example near by the stagnation point. A continuous change from supersonic to subsonic regime is required which could be made possible by long range upstream Lorenz force action, as shown previously in hydraulic simulations (3).

6. FUTURE EXTENSION TO NON EQUILIBRIUM CONDITIONS.

If the experiments would confirm the theory it would mean that if we would live on a planet whose atmosphere would correspond to these severe gaz conditions we could fly a machine at supersonic regime without creating any shock wave (the Lorenz force also may cancel turbulence, as shown in (3)). One would like to know if it could be possible to operate in standard atmosphere. This requires non equilibrium ionization. For such purpose we would like to low the gas temperature in the shock tube. Immediatly we will have to face the Velikhov instability that will tend to cause strong electron density fluctuations. In the previous international meeting we had suggested a method for instability cancelling by magnetic confinement (4). Suppose we introduce some fluctuation of the B field over space. In the high B area the Hall parameter will be high which will increase the local resistivity of the plasma such as the electrons will tend to flow along the minimum B pathes.

Along these pathes the electric current density J will be increased and the electron density and temperature subsequently rised, such as some Coulomb regime could be locally achieved, that would diminish the local Hall parameter value. Then we would get a non uniform Hall parameter field. If its value would be locally lower than the critical one (close to 2 in Coulomb dominated plasma), along minimum B pathes such "streamers" would be stable, surrounded by unstable high Hall parameter plasma. Note that this plasma stabilization by magnetic confinement if fairly different from the fusion confinement system.

As shown in (4) this works well in rarefied gases. Similar experiments in denses plasmas, provided by the shock tube, are planed and belong to the french MHD research project. However numerical computations shows that shock wave cancellation could be achieved in cold air, if we achieve a minimum electric conductivity in the vicinity of the object. Let us take:

Characteritic lenght L = 10 m Volumic mass p = 1.3 Kg/m³ Gas velocity V = 660 m/s Magnetic field B = 4 Teslas Gas temperature : 300°K Electric current density J = 1.5 10⁴ Amp/m²

Following the previously defined criterium, the thermal blocking could be avoided if the electric conductivity would be close to one Mho/m, which is quite moderate and could be achieved by "natural" non equilibrium operation (due to strong E field) or through microwave emission from the wall (controlled ionization).

In addition one can show that a strong B field rises the acceleration efficiency. The high β model geometry would be completly different for we can act JxB forces perpendicular to the wall. When the model enters the gas it appears convenient to "separate" the fluid in the vicinity of the stagnation point and to "close" it softly downstream, following the principle "keep the medium in the same conditions that you found when coming in. If the Lorenz force can balance the inertial force the constancy of the gas pressure could possibly be kept along the streamlines. This would lead to very unconventional solutions of the flow equations at supersonic regimes.

On another hand, high Hall parameter MHD converters are preferably disk shaped. Similar considerations show that disk shape aerodynes fits better for high β operating conditions.

This work is supported by the french CNRS (engineering department) and by the french Ministry of research and industry.

REFERENCES:

1) B.FONTAINE "Contribution à l'étude de l'action d'un champ magnétique et électrique transversal sur un courant supersonique d'argon ionisé. Cas d'une décharge pure. Cas de la conversion MHD". Thèse CNRS n° AO 7860 IMFM 1973

2) B.FORESTIER : "Etude de l'action des forces de Laplace sur un courant

supersonique d'argon ionisé. Accélération. Thèse CNRS n° AO 7861 IMFM 1973.

3) J.P.PETIT: "Cancellation of the Velikhov instability by magnetic confinment". Eight international MHD meeting. Moscow 1983.

