David Hilbert

Les Fondements de la Physique

(Grundlagen der Physik)

(PREMIÈRE COMMUNICATION)

Traduction française de G.D'Agostini et J.P.Petit

Publié à l'origine sous le titre "Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung)" dans Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1916. Numéro 8, p. 395-407. Présenté lors de la séance du 20 novembre 1915.

Les vastes problèmes posés par Einstein[1] et les méthodes ingénieuses qu'il a conçues pour les résoudre, ainsi que les idées de grande portée et la formation de nouveaux concepts au moyen desquels Mie[2] construit son électrodynamique, ont ouvert de nouvelles voies pour l'investigation des fondements de la physique.

Dans ce qui suit - au sens de la méthode axiomatique - je voudrais développer, essentiellement à partir de deux axiomes simples, un nouveau système d'équations de base de la physique, d'une beauté idéale et contenant, je crois, simultanément la solution aux problèmes d'Einstein et de Mie. Je réserve pour des communications ultérieures le développement détaillé et particulièrement l'application spéciale de mes équations de base aux questions fondamentales de la théorie de l'électricité.

Soit ϖ_s (s=1,2,3,4) des coordonnées quelconques étiquetant les points de l'espace de façon essentiellement unique - ce que l'on appelle les paramètres de l'espace (coordonnées de l'espace-temps les plus générales). Les quantités caractérisant les événements à ϖ_s sont :

1. Les dix potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1,2,3,4)$ introduits par Einstein, ayant la caractéristique d'un tenseur symétrique par rapport à une transformation arbitraire des paramètres de l'espace ϖ_s;
2. Les quatre potentiels électrodynamiques q_s ayant le caractère d'un vecteur dans le même sens.

Les processus physiques ne se déroulent pas de manière arbitraire, mais sont régis par les deux axiomes suivants :

---

[1] *Sitzungsber. d. Berliner Akad.* 1914, 1030; 1915, 778, 799, 831, 844.

[2] *Ann. d. Phys.* 1912, Vol. 37, 511; Vol. 39, 1; 1913, vol. 40, 1.

Axiome I (axiome de Mie de la fonction de l'espace[3]) : *La loi qui régit les processus physiques est déterminée par une fonction de l'espace H qui contient les arguments suivants :*

$$g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varpi_l} \ , \qquad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial \varpi_l \, \partial \varpi_k} \tag{1}$$

$$q_s, \quad q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial \varpi_l}, \quad (l, k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

où la variation de l'intégrale

$$\int H \sqrt{g} \, d\omega$$

$$(g = \left| g_{\mu\nu} \right|, \ d\omega = d\varpi_1 d\varpi_2 d\varpi_3 d\varpi_4)$$

doit disparaître pour chacun des quatorze potentiels $g_{\mu\nu}, \ q_s$.

Il est clair que les arguments (1) peuvent être remplacés par les arguments [1]

$$g^{\mu\nu}, \qquad g_l^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \varpi_l} \qquad g_{lk}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial \varpi_l \, \partial \varpi_k}, \tag{3}$$

où $g^{\mu\nu}$ est le sous-déterminant du déterminant g par rapport à son élément $g_{\mu\nu}$ divisé par g.

Axiome II (axiome d'invariance générale[4]) : *La fonction de l'espace H est invariante par rapport à une transformation arbitraire des paramètres de l'espace* ϖ_s.

L'axiome II est l'expression mathématique la plus simple de l'exigence selon laquelle l'interconnexion des potentiels $g_{\mu\nu}, \ q_s$ est en soi entièrement indépendante de la manière dont on choisit d'étiqueter les points de l'espace au moyen des paramètres de l'espace.

Le motif qui me guide dans la construction de ma théorie est fourni par le théorème, dont je présenterai la preuve ailleurs.

Théorème I. Si J est un invariant sous une transformation arbitraire des quatre paramètres de l'espace, contenant n quantités et leurs dérivées, il est possible d'obtenir des résultats. paramètres de l'espace, contenant des quantités et leurs dérivées, et si l'on forme à partir de

$$\delta \int J \, g \, d\omega = 0$$

[3] Les fonctions de l'espace de Mie ne contiennent pas exactement ces arguments ; en particulier, l'utilisation des arguments (2) remonte à Born. Cependant, ce qui est caractéristique de l'électrodynamique de Mie, c'est précisément l'introduction et l'utilisation d'une telle fonction de l'espace dans le principe de Hamilton.

[4] L'invariance orthogonale avait déjà été postulée par Mie. Dans l'axiome II formulé ci-dessus, l'idée fondamentale d'Einstein sur l'invariance générale trouve son expression la plus simple, même si le principe de Hamilton ne joue qu'un rôle subsidiaire chez Einstein, et que ses fonctions H ne sont en aucun cas des invariants généraux, et ne contiennent pas non plus les potentiels électriques.

les n équations variationnelles de Lagrange par rapport à ces n quantités, alors dans ce système invariant de n équations différentielles pour les n quantités, il y en a toujours quatre qui sont une conséquence des n-4 autres - en ce sens, que parmi les n équations différentielles et leurs dérivées totales, il y a toujours quatre combinaisons linéaires mutuellement indépendantes qui sont satisfaites de manière identique.

En ce qui concerne les quotients différentiels par rapport aux $g^{\mu\nu}, g_k^{\mu\nu}, g_{kl}^{\mu\nu}$ apparaissant dans (4) et les formules suivantes, notons une fois pour toutes que, en raison de la symétrie en $\mu\nu$ d'une part et en kl d'autre part, les quotients différentiels par rapport à $g^{\mu\nu}, g_k^{\mu\nu}$ sont à multiplier par 1 resp $\frac{1}{2}$. si $\mu = \nu$ resp $\mu \neq \nu$. en outre les quotients différentiels par rapport à $g_{kl}^{\mu\nu}$ doivent être multipliés par 1 resp $\frac{1}{2}$. resp $\frac{1}{4}$. si $\mu = \nu$ et $k = l$, resp. si $\mu = \nu$ et $k \neq l$ ou $\mu \neq \nu$ et $k = l$ resp $\mu \neq \nu$ et $k \neq l$.

L'axiome I implique d'abord pour les dix potentiels gravitationnels $g^{\mu\nu}$ les dix équations différentielles lagrangiennes

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial\varpi_k\,\partial\varpi_l}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} = 0 \quad , \quad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \qquad (4)$$

et, d'autre part, pour les quatre potentiels électrodynamiques q_s, les quatre équations différentielles lagrangiennes

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{hk}} = 0 \qquad (h = 1,2,3,4) \qquad (5)$$

Nous désignons les côtés gauches des équations (4), (5) respectivement par

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu} \quad , \qquad [\sqrt{g}H]_h$$

en abrégé.

Appelons les équations (4) les équations fondamentales de la gravitation, et les équations (5) les équations électrodynamiques fondamentales, ou équations de Maxwell généralisées. En raison du théorème énoncé ci-dessus, les quatre équations (5) peuvent être considérées comme une conséquence des équations (4), c'est-à-dire qu'en raison de ce théorème mathématique nous pouvons directement affirmer que, *dans le sens où ils sont expliqués, les phénomènes électrodynamiques, sont des effets de la gravitation*. Je considère cette intuition comme la solution simple et très surprenante du problème de Riemann, qui fut le premier à chercher un lien théorique entre la gravitation et la lumière.

Dans ce qui suit, nous utilisons le fait facilement prouvé que, si $P^j \quad (j = 1,2,3,4)$ est un vecteur contravariant *arbitraire*, l'expression

$$p^{\mu\nu} = \sum_s\left(g_s^{\mu\nu}p^s - g^{\mu s}p_s^\nu - g^{\nu s}p_s^\mu\right), \qquad \left(p_s^j = \frac{\partial p^j}{\partial\varpi_s}\right)$$

représente un tenseur symétrique contravariant, et l'expression

$$p_l = \sum_s (q_{ls} p^s + q_s p_l^s)$$

représente un vecteur covariant.

Pour continuer, nous établissons deux théorèmes mathématiques, qui expriment ce qui suit :

Théorème II. Si J est un invariant dépendant de $g^{\mu\nu}, g_l^{\mu\nu}, g_{kl}^{\mu\nu}, q_s, q_{sk}$ alors ce qui suit est toujours identiquement vrai dans tous les arguments et pour tout vecteur contravariant arbitraire p^s:[2]

$$\sum_{\mu,\nu,l,k} \left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}} \Delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}} \Delta g_l^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} \Delta g_{kl}^{\mu\nu} \right) + \sum_{s,k} \left(\frac{\partial J}{\partial q_s} \Delta q_s + \frac{\partial J}{\partial q_{sk}} \Delta q_{sk} \right) = 0$$

où

$$\Delta g^{\mu\nu} = \sum_m \left(g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu \right)$$

$$\Delta g_l^{\mu\nu} = -\sum_m \left(g_m^{\mu\nu} p_l^m + \frac{\partial \Delta g^{\mu\nu}}{\partial \varpi_l} \right)$$

$$\Delta g_{kl}^{\mu\nu} = -\sum_m \left(g_m^{\mu\nu} p_{lk}^m + g_{lm}^{\mu\nu} p_k^m + g_{km}^{\mu\nu} p_l^m \right) + \frac{\partial^2 \Delta g^{\mu\nu}}{\partial \varpi_l \, \partial \varpi_k}$$

$$\Delta q_s = -\sum_m q_m p_s^m$$

$$\Delta q_{sk} = -\sum_m q_{sm} p_k^m + \frac{\partial \Delta q_s}{\partial \varpi_k}$$

Ce théorème II peut aussi être formulé comme suit :

Si J est un invariant et p^s un vecteur arbitraire comme ci-dessus, alors l'identité tient

$$\sum_s \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \varpi_s} p^s = PJ \qquad (6)$$

Où nous avons posé :

$$P = P_g + P_q$$

avec

$$P_g = \sum_{\mu,\nu,l,k} \left(p^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} + p_l^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_l^{\mu\nu}} + p_{kl}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} \right)$$

$$P_q = \sum_{l,k} \left(p_l \frac{\partial}{\partial q_l} + p_{lk} \frac{\partial}{\partial q_{lk}} \right)$$

et utilisé les abréviations :

$$p_k^{\mu\nu} = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial \varpi_k}, \quad p_{kl}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial \varpi_l \, \partial \varpi_k}, \quad p_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial \varpi_k}$$

La preuve de (6) s'en déduit facilement, car cette identité est évidemment correcte si p^s est un vecteur constant, et de cela elle découle en général à cause de son invariance.

Théorème III. Si J est un invariant ne dépendant *que* de $g^{\mu\nu}$ et de leurs dérivées, et si, comme ci-dessus, les dérivées variationnelles de $\sqrt{g}\,J$ par rapport à $g^{\mu\nu}$ sont notées par $\left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu\nu}$ alors l'expression - où l'on entend $h^{\mu\nu}$ comme un tenseur contravariant quelconque de tenseur -

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu,\nu} \left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$$

représente un invariant ; si l'on substitue dans cette somme à la place de $h^{\mu\nu}$ le tenseur particulier $p^{\mu\nu}$ et on écrit

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu,\nu} \left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} = \sum_{s,l} (i_s p^s + i_s^l p_l^s)$$

où alors les expressions

$$i_s = \sum_{\mu,\nu} \left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu}$$

$$i_s^l = -2 \sum_{\mu} \left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu s} g^{\mu l}$$

ne dépendent que de $g^{\mu\nu}$ et de leurs dérivées, on a alors

$$i_s = \sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial \varpi_l} \tag{7}$$

en ce sens que cette équation est satisfaite de manière identique pour tous les arguments, c'est-à-dire pour les $g^{\mu\nu}$ et leurs dérivées.

Pour la preuve, nous considérons que l'intégrale

$$\int J \sqrt{g}\, d\omega, \quad d\omega = d\varpi_1 d\varpi_2 d\varpi_3 d\varpi_4)$$

est prise sur un domaine fini de l'espace à quatre dimensions. De plus, soit p^s un vecteur

qui disparaît avec ses dérivées sur la surface tridimensionnelle de ce domaine. En raison de $P = P_g$ la dernière formule de la page suivante implique

$$P_g\left(\sqrt{g}\,J\right) = \sum_s \frac{\partial \sqrt{g}\,J\,p^s}{\partial \varpi_l}$$

il en résulte

$$\int P_g\left(\sqrt{g}\,J\right) d\omega = 0$$

et en raison de la façon dont la dérivée lagrangienne est formée, nous avons donc aussi

$$\int \sum_{\mu,\nu} \left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu\nu} p^{\mu\nu}\, d\omega = 0$$

L'introduction de i_s, i_s^l dans cette identité montre finalement que

$$\int \left(\sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial \varpi_l} - i_s \right) p^s\, d\omega = 0$$

et donc aussi que l'affirmation de notre théorème est correcte.

L'objectif le plus important est maintenant la formulation du concept d'énergie et la dérivation du théorème de l'énergie uniquement sur la base des deux axiomes I et II.

Dans ce but, nous formulons d'abord :

$$P_g\left(\sqrt{g}\,H\right) = \sum_{\mu,\nu,k,l} \frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g_k^{\mu\nu}} g_k^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} g_{kl}^{\mu\nu}$$

Maintenant $\frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}$ est un tenseur mixte de quatrième rang, donc si on met

$$A_k^{\mu\nu} = p_k^{\mu\nu} + \sum_\rho \left(\begin{Bmatrix} k\rho \\ \mu \end{Bmatrix} p^{\rho\nu} + \begin{Bmatrix} k\rho \\ \nu \end{Bmatrix} p^{\rho\mu} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} k\rho \\ \mu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\mu\sigma} \left(g_{k\sigma\rho} + g_{\rho\sigma k} - g_{k\rho\sigma} \right)$$

l’expression

$$a^l = \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} A_k^{\mu\nu} \tag{8}$$

devient un vecteur contravariant.

Par conséquent, si nous formons l'expression

$$P_g\left(\sqrt{g}\,H\right) - \sum_m \frac{\partial \sqrt{g} a^l}{\partial \varpi_l}$$

alors celle-ci ne contient plus les dérivées secondes $p_{kl}^{\mu\nu}$ et a donc la forme

$$\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu,k} \left(B_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + B_{\mu\nu}^l p^{\mu\nu} \right)$$

où

$$B_{\mu\nu}^{k} = \sum_{\rho,l} \frac{\partial H}{\partial g_{k}^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial \varpi_l}\frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} - \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\rho\nu}}\begin{Bmatrix} l\mu \\ \rho \end{Bmatrix} - \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\rho}}\begin{Bmatrix} l\nu \\ \rho \end{Bmatrix}$$

est encore un tenseur mixte.

Formons maintenant le vecteur

$$b^l = \sum_{\mu,\nu} B_{\mu\nu}^{l}\, p^{\mu\nu} \tag{9}$$

d'où l'on tire

$$P_g\left(\sqrt{g}\, H\right) - \sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\left(a^l + b^l\right)}{\partial \varpi_l} = \sum_{\mu,\nu}\left[\sqrt{g}\, J\right]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} \tag{10}$$

D'autre part, nous formons

$$P_g\left(\sqrt{g}\, H\right) = \sum_{k,l}\left(\frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_k} p_k + \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{kl}} p_{kl}\right)$$

alors $\frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$ est un tenseur et l'expression

$$c^l = \sum_{k,l} \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} p_k \tag{11}$$

représente donc un vecteur contravariant. Corrélativement, comme ci-dessus, on obtient

$$P_g\left(\sqrt{g}\, H\right) - \sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, c^l}{\partial \varpi_l} = \sum_k \left[\sqrt{g}\, H\right]_k p_k \tag{12}$$

Maintenant, nous notons les équations de base (4) et (5), et nous concluons en ajoutant (10) et (12) :

$$P_g\left(\sqrt{g}\, H\right) = \sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\left(a^l + b^l + c^l\right)}{\partial \varpi_l}$$

Mais nous avons

$$P_g\left(\sqrt{g}\, H\right) = \sqrt{g}\, PH + H \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} = \sqrt{g}\, PH + H \sum_s \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \varpi_s} p^s + \sqrt{g} p_s^s\right)$$

et donc, en raison de l'identité (6)

$$P_g\left(\sqrt{g}\, H\right) = \sqrt{g} \sum_s \frac{\partial H}{\partial \varpi_s} p^s + H \sum_s \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \varpi_s} p^s + \sqrt{g} p_s^s\right) = \sum_s \frac{\partial \sqrt{g} H p^s}{\partial \varpi_s}$$

De cela, nous obtenons finalement l'équation invariante

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial \varpi_l} \sqrt{g}\left(H p^l - a^l - b^l - c^l\right) = 0$$

Nous notons maintenant que

$$\frac{\partial H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$$

est un tenseur contravariant anti-symétrique; par conséquent

$$d^l = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial \varpi_s} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\} \qquad (13)$$

devient un vecteur contravariant, qui satisfait évidemment l'identité

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, d^l}{\partial \varpi_l} = 0$$

Définissons maintenant

$$e^l = (Hp^l - a^l - b^l - c^l - d^l) \qquad (14)$$

comme le *vecteur énergie, alors le vecteur énergie est un vecteur contravariant, qui de plus dépend linéairement du vecteur* p^s *choisi arbitrairement et satisfait identiquement pour ce choix de vecteur* p^s *l'équation d'énergie invariante*

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, e^l}{\partial \varpi_l} = 0$$

En ce qui concerne la fonction de l'espace H, d'autres axiomes sont nécessaires pour déterminer son choix de manière unique. Si les équations du champ gravitationnel ne doivent contenir que des dérivées secondes des potentiels $g^{\mu\nu}$, alors H doit avoir la forme

$$H = K + L$$

où K est l'invariant qui dérive du tenseur de Riemann (courbure de la variété quadridimensionnelle).

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$$

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial \varpi_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\kappa \\ \kappa \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \varpi_\kappa} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \kappa \end{Bmatrix} \right) + \sum_{\kappa,\lambda} \left(\begin{Bmatrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\nu \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\kappa \\ \kappa \end{Bmatrix} \right)$$

et où L ne dépend que de $g^{\mu\nu}, g_l^{\mu\nu}, q_s, q_{sk}$. Enfin, nous faisons l'hypothèse simplificatrice dans ce qui suit, que L ne contient pas l'élément $g^{\mu\nu}$.

Ensuite, nous appliquons le théorème II à l'invariant L et obtenons

$$\sum_{\mu,\nu,m} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu) - \sum_{s,m} \frac{\partial L}{\partial q_s} q_m p_s^m - \sum_{s,k,m} \frac{\partial L}{\partial q_{sk}} (q_{sm} p_k^m + q_{mk} p_s^m + q_m p_{sk}^m) \qquad (15)$$

En mettant à zéro le coefficient de p_{sk}^{m} à gauche, on obtient l'équation suivante

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}}+\frac{\partial L}{\partial q_{ks}}\right)q_m=0$$

où

$$\frac{\partial L}{\partial q_{sk}}+\frac{\partial L}{\partial q_{ks}}=0 \tag{16}$$

c'est-à-dire que les dérivées des potentiels électrodynamiques q_s n'interviennent que dans les combinaisons

$$M_{ks}=q_{sk}-q_{ks}$$

Nous apprenons ainsi qu'avec nos hypothèses, l'invariant L dépend, outre des potentiels $g_{\mu\nu}, q_s$ uniquement des composantes du tenseur invariant anti-symétrique

$$M=(M_{ks})=Curl(q_s)$$

c'est-à-dire du vecteur nomme 6-vecteur électromagnétique. *Ce résultat, qui détermine le caractère des équations de Maxwell en premier lieu, dérive ici essentiellement comme une conséquence de l'invariance générale, c'est-à-dire, sur la base de l'axiome II*.

Si nous mettons le coefficient de p_m^{ν} à gauche de l'identité (15) égal à zéro, nous obtenons, en utilisant (16)

$$2\sum_{\mu}\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\mu m}-\frac{\partial L}{\partial q_m}q_\nu-\sum_{\mu}\frac{\partial L}{\partial M_{ms}}M_{\nu s}=0, \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{17}$$

Cette équation admet une transformation importante de l'énergie électromagnétique, c'est-à-dire la partie du vecteur énergie qui provient de L. A savoir, cette partie résulte de (11), (13), (14) comme suit :

$$Lp^l-\sum_k\frac{\partial L}{\partial q_{kl}}p_k-\frac{1}{2\sqrt{g}}\sum_{k,s}\frac{\partial}{\partial\varpi_k}\left\{\left(\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{lk}}-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{kl}}\right)p^s q_s\right\}$$

En raison de (16) et en notant (5), cette expression devient :

$$\sum_{s,k}\left(L\delta_s^l-\frac{\partial L}{\partial M_{lk}}M_{sk}-\frac{\partial L}{\partial q_l}q_s\right)p^s \tag{18}$$

$$\delta_s^l=0, l\neq s;\;\; \delta_s^{ls}\neq 1$$

donc, en raison de (17), elle est égale à

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}\sum_{\mu,s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu s}}g^{\mu l}p^s \tag{19}$$

Grâce aux formules (21) qui seront développées plus loin, on voit notamment que l'énergie électromagnétique, et donc aussi le vecteur énergie totale e^l, peut être exprimé par K seul, de sorte que seuls les $g^{\mu\nu}$ et leurs dérivées, mais les q_s et leurs dérivées n'y apparaissent pas. Si l'on prend la limite

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad (\mu \neq \nu)$$

$$g_{\mu\mu} = 1$$

dans l'expression (18), alors cette limite est en accord exact avec ce que Mie a proposé dans son électrodynamique : *Le tenseur d'énergie électromagnétique de Mie n'est rien d'autre que le tenseur généralement invariant qui résulte de la différentiation de l'invariant L par rapport aux potentiels gravitationnels* $g^{\mu\nu}$ *dans cette limite* - une circonstance qui m'a donné la première indication du lien étroit nécessaire entre la théorie de la relativité générale d'Einstein et l'électrodynamique de Mie, et qui m'a convaincu de la justesse de la théorie développée ici.

Il reste à montrer directement comment, avec l'hypothèse

$$H = K + L \tag{20}$$

les équations de Maxwell généralisées (5) présentées ci-dessus sont impliquées par les équations gravitationnelles (4).

En utilisant la notation introduite précédemment pour les dérivées variationnelles par rapport à $g^{\mu\nu}$ les équations gravitationnelles, en raison de (20), prennent la forme suivante

$$\left[\sqrt{g}\, K\right]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \tag{21}$$

Le premier terme du côté gauche devient

$$\left[\sqrt{g}\, K\right]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K\, g_{\mu\nu}\right)$$

comme suit facilement, sans calcul, du fait que $K_{\mu\nu}$, à l'exception de $g_{\mu\nu}$, est le seul tenseur de second rang et K le seul invariant, que l'on peut former en utilisant seulement $g^{\mu\nu}$ et de ses quotients différentiels de premier et second ordre $g_k^{\mu\nu}, g_{kl}^{\mu\nu}$.

Les équations différentielles de la gravitation qui en résultent me paraissent en accord avec le concept grandiose de la théorie de la relativité générale établie par Einstein dans ses traités ultérieurs[5].

De plus, si nous désignons en général les dérivées variationnelles de $\sqrt{g}\, J$ par rapport au potentiel électrodynamique q_h comme ci-dessus par

$$\left[\sqrt{g}\, J\right]_h = \frac{\partial \sqrt{g} J}{\partial q_h} - \sum_l \frac{\partial}{\partial \varpi_k} \frac{\partial \sqrt{g}\, J}{\partial q_{hk}}$$

alors les équations électromagnétiques de base prennent la forme, due à (20)

$$\left[\sqrt{g}\, L\right]_h = 0 \tag{22}$$

---

[5] Loc. cit. Berliner Sitzungsber. 1915.

Puisque K est un invariant qui ne dépend que de $g^{\mu\nu}$ et de ses dérivées, par le théorème III l'équation (7) tient identiquement, avec

$$i_s = \sum_{\mu,\nu} \left[\sqrt{g}\,K\right]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu} \tag{23}$$

et

$$i_s^l = -2\sum_{\mu} \left[\sqrt{g}\,K\right]_{\mu s} g_s^{\mu l} \quad , \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{24}$$

En raison de (21) et (24), (19) est égal à $-\frac{1}{\sqrt{g}} i_\nu^m$. En différenciant par rapport à ϖ_m et en sommant sur *m*, nous obtenons grâce à (7)

$$\begin{aligned} i_\nu &= \sum_m \frac{\partial}{\partial \varpi_m}\left(-\sqrt{g}L\delta_\nu^m + \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_m} q_\nu + \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}} M_{s\nu}\right) \\ &= -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial \varpi_\nu} \quad + \sum_m \left\{ q_\nu \frac{\partial}{\partial \varpi_m}\left(\left[\sqrt{g}L\right]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial \varpi_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right) + q_{\nu m}\left(\left[\sqrt{g}L\right]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial \varpi_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right)\right\} \\ &\qquad + \sum_s \left(\left[\sqrt{g}L\right]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}\right) M_{s\nu} + \sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial \varpi_m} \end{aligned}$$

car bien sûr

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} = \left[\sqrt{g}L\right]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial \varpi_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}$$

et[3]

$$-\sum_m \frac{\partial}{\partial \varpi_m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{sm}} = \left[\sqrt{g}L\right]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}$$

Maintenant, nous tenons compte du fait qu'en raison de (16), nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial \varpi_m\,\partial \varpi_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}} = 0$$

et nous obtenons alors en rassemblant convenablement les termes

$$\begin{aligned} i_\nu = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial \varpi_\nu} &+ \sum_m \left(q_\nu \frac{\partial}{\partial \varpi_m}\left[\sqrt{g}L\right]_m + M_{m\nu}\left[\sqrt{g}L\right]_m\right) \\ &+ \sum_m \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} q_{m\nu} + \sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial \varpi_m} \end{aligned} \tag{25}$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial\varpi_\nu} = -\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{sm}}g_\nu^{sm} - \sum_m \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu} - \sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\frac{\partial q_{ms}}{\partial\varpi_\nu}$$

Le premier terme à droite n'est rien d'autre que i_ν comme conséquence de (21) et (23). Le dernier terme à droite s'avère être égal et opposé au dernier terme à droite de (25) ; à savoir, nous avons

$$\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\left(\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial\varpi_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial\varpi_\nu}\right) = 0 \qquad (26)$$

puisque l'expression

$$\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial\varpi_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial\varpi_\nu} = \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial\varpi_s\,\partial\varpi_m} - \frac{\partial^2 q_s}{\partial\varpi_\nu\,\partial\varpi_m} - \frac{\partial^2 q_m}{\partial\varpi_\nu\,\partial\varpi_s}$$

est symétrique en s, m, et le premier facteur sous le signe de la sommation dans (26) s'avère être anti-symétrique en s, m.

Par conséquent, (25) entraîne l'équation

$$\sum_m \left(M_{m\nu}\left[\sqrt{g}L\right]_m + q_\nu\frac{\partial}{\partial\varpi_m}\left[\sqrt{g}L\right]_m\right) = 0 \qquad (27)$$

c'est-à-dire que des équations gravitationnelles (4) découlent en effet les quatre combinaisons linéaires mutuellement indépendantes (27) des équations électrodynamiques de base (5) et de leurs dérivées premières. *Il s'agit de l'expression mathématique exacte de la déclaration générale ci-dessus concernant le caractère de l'électrodynamique comme conséquence de la gravitation*.

Selon notre hypothèse L ne doit pas dépendre des dérivées de $g^{\mu\nu}$; donc L doit être une fonction de quatre invariants généraux, qui correspondent aux invariants orthogonaux spéciaux donnés par Mie, et dont les deux plus simples sont les suivants :

$$Q = \sum_{k,l,m,n} M_{mn}\,M_{lk}\,g^{mk}\,g^{nl}$$

et

$$q = \sum_{k,l} q_k\,q_l\,g^{kl}$$

L'ansatz le plus simple et le plus direct pour L en considérant la structure de K, est aussi celui qui correspond à l'électrodynamique de Mie, à savoir

$$L = \alpha Q + f(q)$$

ou, en suivant Mie de plus près encore :

$$L = \alpha Q + \beta q^3$$

où $f(q)$ désigne une fonction quelconque de q et α, β sont des constantes.

Comme on peut le voir, les quelques hypothèses simples exprimées dans les axiomes I et II suffisent, avec une interprétation appropriée, à établir la théorie : grâce à elle, non seulement nos visions de l'espace, du temps et du mouvement sont fondamentalement remodelées dans le sens expliqué par Einstein, mais je suis également convaincu qu'à travers les équations de base établies ici, les processus les plus intimes, actuellement cachés, à l'intérieur de l'atome recevront une explication, et en particulier qu'en général, une réduction de toutes les constantes physiques en constantes mathématiques doit être possible - même si, dans la vue d'ensemble, la possibilité que la physique devienne en principe une science du type de la géométrie : sûrement la plus grande gloire de la méthode axiomatique, qui comme nous l'avons vu, utilise les puissants instruments de l'analyse, à savoir le calcul variationnel et la théorie des invariants.

EDITORIAL NOTES

[1] L'indice de dans le dénominateur de la troisième équation est absent du texte original.

[2] L'indice $_{sk}$ du dénominateur de ∂q_{sk} est manquant dans le texte original.

[3] L'indice $_{s}$ du terme $\left[\sqrt{g}\, L\right]_s$ est manquant dans le texte original.