Die Grundlagen der Physik.

(Zweite Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Dezember 1916.

In meiner ersten Mitteilung[1]) habe ich ein System von Grundgleichungen der Physik aufgestellt. Ehe ich mich zur Theorie der Integration dieser Gleichungen wende, erscheint es nötig, einige allgemeinere Fragen sowohl logischer wie physikalischer Natur zu erörtern.

Zunächst führen wir an Stelle der Weltparameter w_s ($s = 1, 2, 3, 4$) die allgemeinsten reellen Raum-Zeit-Koordinaten x_s ($s = 1, 2, 3, 4$) ein, indem wir

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = ix_4$$

setzen und entsprechend an Stelle von

$$ig_{14}, \quad ig_{24}, \quad ig_{34}, \quad -g_{44}$$

einfach

$$g_{14}, \quad g_{24}, \quad g_{34}, \quad g_{44}$$

schreiben. Die neuen $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) — die Einsteinschen Gravitationspotentiale — sollen dann sämtlich reelle Funktionen der reellen Variabeln x_s($s = 1, 2, 3, 4$) sein von der Art, daß bei der Darstellung der quadratischen Form

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{28}$$

als Summe von vier Quadraten linearer Formen der X_s stets drei Quadrate mit positivem und ein Quadrat mit negativem Vor-

1) Diese Nachrichten 20. November 1915.

zeichen auftritt: die quadratische Form (28) liefert somit für unsere vierdimensionale Welt der x_s **die Maßbestimmung einer Pseudogeometrie.** Die Determinante g der $g_{\mu\nu}$ fällt negativ aus.

Ist in dieser Geometrie eine Kurve

$$x_s = x_s(p) \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wo $x_s(p)$ irgend welche reelle Funktionen des Parameters p bedeuten, so kann diese in Teilstücke zerlegt werden, auf denen einzeln der Ausdruck

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

nicht sein Vorzeichen ändert: ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

ausfällt, heiße eine *Strecke* und das längs dieses Kurvenstücks genommene Integral

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Länge der Strecke*; ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

ausfällt, heiße eine *Zeitlinie* und das längs dieses Kurvenstückes genommene Integral

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Eigenzeit der Zeitlinie*; endlich heiße ein Kurvenstück, längs dessen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

wird, eine *Nullinie.*

Um diese Begriffe unserer Pseudogeometrie anschaulich zu machen, denken wir uns zwei ideale Maßinstrumente: den *Maßfaden*, mittelst dessen wir die Länge λ einer jeden Strecke zu messen im Stande sind und zweitens die *Lichtuhr*, mittelst derer wir die Eigenzeit einer jeden Zeitlinie bestimmen können. Der Maßfaden zeigt Null und die Lichtuhr hält an längs jeder Nulllinie, während ersterer längs einer Zeitlinie, letztere längs einer Strecke gänzlich versagt.

Zunächst zeigen wir, daß jedes der beiden Instrumente ausreicht, um mit seiner Hülfe die Werte der $g_{\mu\nu}$ als Funktionen von x_s zu berechnen, sobald nur ein bestimmtes Raum-Zeit-Koordinatensystem x_s eingeführt worden ist. In der Tat wählen wir irgend 10 Strecken aus, die sämtlich längs verschiedenen Richtungen in den nämlichen Weltpunkt x_s einlaufen, so daß diesem Endpunkt jedesmal der Parameterwert p zukommt, so ergibt sich für jede der 10 Strecken im Endpunkt die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(h)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(h)}}{dp}\right), \qquad (h = 1, 2, \ldots, 10);$$

hier sind die linken Seiten bekannt, sobald wir die Längen $\lambda^{(h)}$ mittelst des Maßfädens bestimmt haben. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$D(u) = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx_1^{(1)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(1)}}{dp}\frac{dx_2^{(1)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(1)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(1)}}{dp}\right)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{dx_1^{(10)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(10)}}{dp}\frac{dx_2^{(10)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(10)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(10)}}{dp}\right)^2 \\ X_1^2, & X_1 X_2, & \ldots, & X_4^2, & u \end{vmatrix},$$

so wird offenbar

$$G(X_s) = -\frac{D(0)}{\frac{\partial D}{\partial u}}, \tag{29}$$

wodurch sich zugleich für die Richtungen der ausgewählten 10 Strecken im Punkte $x_s(p)$ die Bedingung

$$\frac{\partial D}{\partial u} \neq 0$$

als notwendig herausstellt.

Ist G nach (29) berechnet, so würde die Anwendung des Verfahrens auf irgend eine 11te Strecke, die in $x_s(p)$ endigt, die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(11)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(11)}}{dp}\right)$$

liefern und diese Gleichung wäre dann sowohl eine Kontrolle für die Richtigkeit des Instrumentes als auch eine experimentelle Bestätigung dafür, daß die Voraussetzungen der Theorie für die wirkliche Welt zutreffen.

Für die Lichtuhr gilt die entsprechende Ueberlegung.

Der axiomatische Aufbau unserer Pseudogeometrie ließe sich ohne Schwierigkeit durchführen: erstens ist ein Axiom aufzustellen, auf Grund dessen folgt, daß Länge bez. Eigenzeit Integrale sein müssen, deren Integrand lediglich eine Funktion der x_s und ihrer ersten Ableitungen nach dem Parameter ist; als ein solches Axiom wäre etwa die Eigenschaft des Abrollens des Maßfaden oder der bekannte Enveloppensatz für geodätische Linien verwendbar. Zweitens ist ein Axiom erforderlich, wonach die Sätze der pseudo-Euklidischen Geometrie d. h. das alte Relativitätsprinzip im Unendlichkleinen gelten soll; hierzu wäre das von W. Blaschke[1]) aufgestellte Axiom besonders geeignet, welches aussagt, daß die Bedingung der Orthogonalität für irgend zwei Richtungen — sei es bei Strecken oder Zeitlinien — stets eine gegenseitige sein soll.

Es seien noch kurz die hauptsächlichsten Tatsachen zusammengestellt, die uns die Monge-Hamiltonsche Theorie der Differentialgleichungen für unsere Pseudogeometrie lehrt.

Jedem Weltpunkte x_s gehört ein Kegel zweiter Ordnung zu, der in x_s seine Spitze hat und in den laufenden Punktkoordinaten X_s durch die Gleichung

$$G(X_1-x_1,\ X_2-x_2,\ X_3-x_3,\ X_4-x_4) = 0$$

bestimmt ist; derselbe heiße der zum Punkte x_s zugehörige *Nullkegel*. Die sämtlichen Nullkegel bilden ein vierdimensionales Kegelfeld, zu dem einerseits die „Mongesche" Differentialgleichung

$$G\left(\frac{dx_1}{dp},\ \frac{dx_2}{dp},\ \frac{dx_3}{dp},\ \frac{dx_4}{dp}\right) = 0$$

und andererseits die „Hamiltonsche" partielle Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \frac{\partial f}{\partial x_3},\ \frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0 \tag{30}$$

gehört, wo H die zu G reziproke quadratische Form

$$H(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4) = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\, U_\mu\, U_\nu$$

bedeutet. Die Charakteristiken der Mongeschen und zugleich die der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung (30) sind die geodätischen Nullinien. Die sämtlichen von einem bestimmten Weltpunkt $a_s (s = 1, 2, 3, 4)$ ausgehenden geodätischen Nullinien erzeugen eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit, die die zum

1) Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. 68 (1916) S. 50.

Weltpunkt a_s gehörige *Zeitscheide* heißen möge. Diese Zeitscheide besitzt in a_s einen Knotenpunkt, dessen Tangentialkegel gerade der zu a_s gehörige Nullkegel ist. Bringen wir die Gleichung der Zeitscheide auf die Gestalt

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

so ist

$$f = x_4 - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

ein Integral der Hamiltonschen Differentialgleichung (30). Die sämtlichen vom Punkte a_s ausgehenden Zeitlinien verlaufen gänzlich innerhalb desjenigen vierdimensionalen Weltteiles, der die zu a_s gehörige Zeitscheide als Begrenzung hat.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Problem der Kausalität in der neuen Physik zu.

Bisher haben wir alle Koordinatensysteme x_s, die aus irgend einem durch eine willkürliche Transformation hervorgehen, als gleichberechtigt angesehen. Diese Willkür muß eingeschränkt werden, sobald wir die Auffassung zur Geltung bringen wollen, daß zwei auf der nämlichen Zeitlinie gelegene Weltpunkte im Verhältnis von Ursache und Wirkung zu einander stehen können und daß es daher nicht möglich sein soll, solche Weltpunkte auf gleichzeitig zu transformieren. Indem wir x_4 als die *eigentliche* Zeitkoordinate auszeichnen, stellen wir folgende Definitionen auf:

Ein *eigentliches* Raum-Zeitkoordinatensystem ist ein solches, für welches außer $g < 0$ stets noch die folgenden vier Ungleichungen

$$(31) \qquad g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} g_{12} \\ g_{21} g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} g_{12} g_{13} \\ g_{21} g_{22} g_{23} \\ g_{31} g_{32} g_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad g_{44} < 0$$

erfüllt sind. Eine Transformation, die ein solches Raum-Zeitkoordinatensystem in ein anderes eigentliches Raum-Zeitkoordinatensystem überführt, heiße eine *eigentliche* Raum-Zeitkoordinatentransformation.

Die vier Ungleichungen drücken aus, daß in irgend einem Weltpunkte a_s der zugehörige Nullkegel den linearen Raum

$$x_4 = a_4$$

ganz außerhalb läßt, die Gerade

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3$$

dagegen im Inneren enthält; die letztere Gerade ist daher stets eine Zeitlinie.

Es sei nunmehr irgend eine Zeitlinie $x_s = x_s(p)$ gegeben; wegen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

folgt dann, daß in einem eigentlichen Raum-Zeitkoordinatensystem stets

$$\frac{dx_4}{dp} \neq 0$$

sein und folglich längs einer Zeitlinie die eigentliche Zeitkoordinate x_4 stets wachsen bez. abnehmen muß. Da eine Zeitlinie bei jeder Koordinatentransformation Zeitlinie bleibt, so können zwei Weltpunkte einer Zeitlinie durch eine eigentliche Raum-Zeitkoordinatentransformation niemals den gleichen Wert der Zeitkoordinate x_4 erhalten d. h. unmöglich auf gleichzeitig transformiert werden.

Andererseits wenn die Punkte einer Kurve eigentlich auf gleichzeitig transformiert werden können, so gilt nach der Transformation für diese Kurve

$$x_4 = \text{const. d. h. } \frac{dx_4}{dp} = 0,$$

mithin

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

und hier ist wegen der ersten drei unserer Ungleichungen (31) die rechte Seite positiv; die Kurve charakterisiert sich demnach als eine Strecke.

So sehen wir, daß die dem Kausalitätsprinzip zu Grunde liegenden Begriffe von Ursache und Wirkung auch in der neuen Physik zu keinerlei inneren Widersprüchen führen, sobald wir nur stets die Ungleichungen (31) zu unseren Grundgleichungen hinzunehmen d. h. uns auf den Gebrauch eigentlicher Raum-Zeitkoordinaten beschränken.

An dieser Stelle sei auf ein späterhin nützliches besonderes Raum-Zeitkoordinatensystem hingewiesen, welches ich das *Gaußische Koordinatensystem* nennen möchte, weil es die Verallgemeinerung desjenigen geodätischen Polarkoordinatensystems ist, das Gauß in die Flächentheorie eingeführt hat. Es sei in unserer vierdimensionalen Welt irgend ein dreidimensionaler Raum gegeben von der Art, daß jede in diesem Raum verlaufende Kurve eine Strecke ist: *ein Streckenraum*, wie ich einen solchen nennen möchte;

x , x_2, x_3 seien irgend welche Punktkoordinaten dieses Raumes. Wir konstruieren nun in einem jeden Punkte x_1, x_2, x_3 desselben die zu ihm orthogonale geodätische Linie, die eine Zeitlinie sein wird, und tragen auf derselben x_4 als Eigenzeit auf; dem so erhaltenen Punkte der vierdimensionalen Welt weisen wir die Koordinatenwerte $x_1 x_2 x_3 x_4$ zu. Für diese Koordinaten wird, wie leicht zu sehen ist,

$$(32) \qquad G(X_s) = \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2$$

d. h. das Gaußische Koordinatensystem ist analytisch durch die Gleichungen

$$(33) \qquad g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0, \quad g_{44} = -1$$

charakterisiert. Wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit des dreidimensionalen Raumes $x_4 = 0$ fällt die rechter Hand in (32) stehende quadratische Form der Variabeln X_1, X_2, X_3 notwendig positiv definit aus d. h. die drei ersten der Ungleichungen (31) sind erfüllt und da dies auch für die vierte gilt, so erweist sich das Gaußische Koordinatensystem stets als ein eigentliches Raum-Zeitkoordinatensystem.

Wir kehren nun zur Erforschung des Kausalitätsprinzips in der Physik zurück. Als den hauptsächlichen Inhalt desselben sehen wir die Tatsache an, die bisher in jeder physikalischen Theorie galt, daß aus der Kenntnis der physikalischen Größen und ihrer zeitlichen Ableitungen in der Gegenwart allemal die Werte dieser Größen für die Zukunft eindeutig bestimmt werden können: die Gesetze der bisherigen Physik fanden nämlich ausnahmslos ihren Ausdruck in einem System von Differentialgleichungen solcher Art, daß die Anzahl der darin auftretenden Funktionen wesentlich mit der Anzahl der unabhängigen Differentialgleichungen übereinstimmte und somit bot dann der bekannte allgemeine Cauchysche Satz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen unmittelbar den Beweisgrund für jene Tatsache.

Die in meiner ersten Mitteilung aufgestellten Grundgleichungen (4) und (5) der Physik sind nun, wie ich dort besonders hervorgehoben habe, keineswegs von der oben charakterisierten Art; vielmehr sind nach Theorem I vier von ihnen eine Folge der übrigen: wir sahen die vier Maxwellschen Gleichungen (5) als Folge der zehn Gravitationsgleichungen (4) an und haben somit für die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s nur die 10 von einander wesentlich unabhängigen Gleichungen (4).

Sobald wir an der Forderung der allgemeinen Invarianz für die Grundgleichungen der Physik festhalten, ist der eben genannte Umstand auch wesentlich und notwendig. Gäbe es nämlich für die 14 Potentiale noch weitere von (4) unabhängige invariante Gleichungen, so würde die Einführung eines Gaußischen Koordinatensystems vermöge (33) für die 10 physikalischen Größen

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3), \qquad q_s \quad (s = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

ein System von Gleichungen liefern, die wiederum von einander unabhängig wären und, da sie mehr als 10 sind, unter einander in Widerspruch ständen.

Unter solchen Umständen also, wie sie in der neuen Physik der allgemeinen Relativität zutreffen, ist es keineswegs mehr möglich, aus der Kenntnis der physikalischen Größen in Gegenwart und Vergangenheit eindeutig ihre Werte in der Zukunft zu folgern. Um dies anschaulich an einem Beispiel zu zeigen, seien unsere Grundgleichungen (4) und (5) der ersten Mitteilung in dem besonderen Falle integriert, der dem Vorhandensein eines einzigen dauernd ruhenden Elektrons entspricht, so daß sich die 14 Potentiale

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(x_1,\ x_2,\ x_3) \\ q_s &= q_s\ (x_1,\ x_2,\ x_3) \end{aligned}$$

als bestimmte Funktionen von x_1, x_2, x_3 ergeben, die von der Zeit x_4 sämtlich unabhängig sind, und überdies so, daß noch die drei ersten Komponenten r_1, r_2, r_3 der Viererdichte verschwinden mögen. Wir wenden sodann auf diese Potentiale die folgende Koordinatentransformation an:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 = x'_1 & \text{für } x'_4 \leqq 0 \\ x_1 = x'_1 + e^{-\frac{1}{x'^2_4}} & \text{für } x'_4 > 0 \end{cases} \\ &x_2 = x'_2 \\ &x_3 = x'_3 \\ &x_4 = x'_4; \end{aligned}$$

die transformierten Potentiale $g'_{\mu\nu}$, q'_s sind für $x'_4 \leqq 0$ die gleichen Funktionen von x'_1, x'_2, x'_3 wie die $g_{\mu\nu}$, q_s in den ursprünglichen Variabeln x_1, x_2, x_3, während die $g'_{\mu\nu}$, q'_s für $x'_4 > 0$ wesentlich auch von der Zeitkoordinate x'_4 abhängen d. h. die Potentiale $g'_{\mu\nu}$, q'_s stellen ein Elektron dar, das bis zur Zeit $x'_4 = 0$ ruht, dann aber sich in seinen Teilen in Bewegung setzt.

Dennoch glaube ich, daß es nur einer schärferen Erfassung der dem Prinzip der allgemeinen Relativität[1]) zu Grunde liegenden Idee bedarf, um das Kausalitätsprinzip auch in der neuen Physik aufrecht zu halten. Dem Wesen des neuen Relativitätsprinzipes entsprechend müssen wir nämlich die Invarianz nicht nur für die allgemeinen Gesetze der Physik verlangen, sondern auch jeder Einzelaussage in der Physik den invarianten Charakter zusprechen, falls sie einen physikalischen Sinn haben soll — im Einklang damit, daß jede physikalische Tatsache letzten Endes durch Maßfaden oder Lichtuhr d. h. durch Instrumente von invariantem Charakter feststellbar sein muß. Gerade so wie in der Kurven- und Flächentheorie eine Aussage, für die die Parameterdarstellung der Kurve oder Fläche gewählt ist, für die Kurve oder Fläche selbst keinen geometrischen Sinn hat, wenn nicht die Aussage gegenüber einer beliebigen Transformation der Parameter invariant bleibt oder sich in eine invariante Form bringen läßt, so müssen wir auch in der Physik eine Aussage, die nicht gegenüber jeder beliebigen Transformation des Koordinatensystems invariant bleibt, als *physikalisch sinnlos* bezeichnen. Beispielsweise hat im oben betrachteten Falle des ruhenden Elektrons die Aussage, daß dasselbe etwa zur Zeit $x_4 = 1$ ruhe, physikalisch keinen Sinn, weil diese Aussage nicht invariant ist.

Was nun das Kausalitätsprinzip betrifft, so mögen für die Gegenwart in irgend einem gegebenen Koordinatensystem die physikalischen Größen und ihre zeitlichen Ableitungen bekannt sein: dann wird eine Aussage nur physikalischen Sinn haben, wenn sie gegenüber allen denjenigen Transformationen invariant ist, bei denen eben die für die Gegenwart benutzten Koordinaten unverändert bleiben; ich behaupte, daß die Aussagen dieser Art für die Zukunft sämtlich eindeutig bestimmt sind d. h. das Kausalitätsprinzip gilt in dieser Fassung:

Aus der Kenntnis der 14 physikalischen Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s in der Gegenwart folgen alle Aussagen über dieselben für die Zukunft notwendig und eindeutig, sofern sie physikalischen Sinn haben.

Um diese Behauptung zu beweisen, benutzen wir das Gaußische Raum-Zeitkoordinatensystem. Die Einführung von (33) in die Grundgleichungen (4) der ersten Mitteilung liefert uns für die 10 Potentiale

1) In seiner ursprünglichen, nunmehr verlassenen Theorie hatte A. Einstein (Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin. 1914 S. 1067) in der Tat, um das Kausalitätsprinzip in der alten Fassung zu retten, gewisse 4 nicht invariante Gleichungen für die $g_{\mu\nu}$ besonders postuliert.

$$(34) \qquad g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad q_s \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

ein System von ebensovielen partiellen Differentialgleichungen; wenn wir diese auf Grund der gegebenen Anfangswerte für $x_4 = 0$ integrieren, so finden wir auf eindeutige Weise die Werte von (34) für $x_4 > 0$. Da das Gaußische Koordinatensystem selbst eindeutig festgelegt ist, so sind auch alle auf dieses Koordinatensystem bezogenen Aussagen über jene Potentiale (34) von invariantem Charakter.

Die Formen, in denen physikalisch sinnvolle d. h. invariante Aussagen mathematisch zum Ausdruck gebracht werden können, sind sehr mannigfaltig.

Erstens. Dies kann mittelst eines invarianten Koordinatensystems geschehen. Ebenso wie das vorhin benutzte Gaußische ist zu solchem Zwecke auch das bekannte Riemannsche und desgleichen dasjenige Raum-Zeitkoordinatensystem verwendbar, in welchem die Elektrizität auf Ruhe und Einheitsdichte transformiert erscheint. Bezeichnet $f(q)$, wie am Schluß der ersten Mitteilung die im Hamiltonschen Prinzip auftretende Funktion der Invariante

$$q = \sum_{kl} q_k q_l g^{kl},$$

so ist

$$r^s = \frac{\partial f(q)}{\partial q_s}$$

die Viererdichte der Elektrizität; sie stellt einen kontravarianten Vektor dar und ist daher, wie leicht ersichtlich, gewiß auf (0, 0, 0, 1) transformierbar. Ist dies geschehen, so sind aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \qquad \frac{\partial f(q)}{\partial q_4} = 1$$

die vier Komponenten des Viererpotentials q_s durch die $g_{\mu\nu}$ ausdrückbar und jede Beziehung zwischen den $g_{\mu\nu}$ in diesem oder einem der beiden ersteren Koordinatensysteme ist sodann eine invariante Aussage. Für Partikularlösungen der Grundgleichungen kann es besondere invariante Koordinatensysteme geben; so bilden z. B. im unten behandelten Falle des zentrisch-symmetrischen Gravitationsfeldes r, ϑ, φ, t ein bis auf Drehungen invariantes Koordinatensystem.

Zweitens. Die Aussage, wonach sich ein Koordinatensystem finden läßt, in welchem die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s für die Zukunft gewisse bestimmte Werte haben oder gewisse bestimmte Beziehungen erfüllen, ist stets eine invariante und daher physikalisch sinnvoll. Der mathematische invariante Ausdruck für eine solche Aussage wird durch Elimination der Koordinaten aus jenen Beziehungen erhalten. Ein Beispiel bietet der oben betrachtete Fall des ruhenden Elektrons: der wesentliche und physikalisch sinnvolle Inhalt des Kausalitätsprinzips drückt sich hier in der Aussage aus, daß das für die Zeit $x_4 \leqq 0$ ruhende Elektron bei geeigneter Wahl des Raum-Zeitkoordinatensystems auch für die Zukunft $x_4 > 0$ beständig in allen seinen Teilen ruht.

Drittens. Auch ist eine Aussage invariant und hat daher stets physikalischen Sinn, wenn sie für jedes beliebige Koordinatensystem gültig sein soll. Ein Beispiel dafür sind die Einsteinschen Impuls-Energiegleichungen vom Divergenz-Charakter. Obwohl nämlich die Einsteinsche Energie die Invarianteneigenschaft nicht besitzt und die von ihm aufgestellten Differentialgleichungen für ihre Komponenten auch als Gleichungssystem keineswegs kovariant sind, so ist doch die in ihnen enthaltene Aussage, daß sie für jedes beliebige Koordinatensystem erfüllt sein sollen, eine invariante Forderung und hat demnach einen physikalischen Sinn.

Nach meinen Ausführungen ist die Physik eine vierdimensionale Pseudogeometrie, deren Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ durch die Grundgleichungen (4) und (5) meiner ersten Mitteilung an die elektromagnetischen Größen d. h. an die Materie gebunden ist. Mit dieser Erkenntnis wird nun eine alte geometrische Frage zur Lösung reif, die Frage nämlich, ob und in welchem Sinne die Euklidische Geometrie — von der wir aus der Mathematik nur wissen, daß sie ein logisch widerspruchsfreier Bau ist — auch in der Wirklichkeit Gültigkeit besitzt.

Die alte Physik mit dem absoluten Zeitbegriff übernahm die Sätze der Euklidischen Geometrie und legte sie vorweg einer jeden speziellen physikalischen Theorie zu Grunde. Auch Gauß verfuhr nur wenig anders: er konstruierte hypothetisch eine nicht-Euklidische Physik, indem er unter Beibehaltung der absoluten Zeit von den Sätzen der Euklidischen Geometrie nur das Parallelenaxiom fallen ließ; die Messung der Winkel eines Dreieckes mit großen Dimensionen zeigte ihm dann die Ungültigkeit dieser nicht-Euklidischen Physik.

Die neue Physik des Einsteinschen allgemeinen Relativitätsprinzips nimmt gegenüber der Geometrie eine völlig andere Stellung ein. Sie legt weder die Euklidische noch irgend eine andere bestimmte Geometrie vorweg zu Grunde, um daraus die eigentlichen physikalischen Gesetze zu deduzieren, sondern die neue Theorie der Physik liefert, wie ich in meiner ersten Mitteilung gezeigt habe, mit einem Schlage durch ein und dasselbe Hamiltonsche Prinzip die geometrischen und die physikalischen Gesetze nämlich die Grundgleichungen (4) und (5), welche lehren, wie die Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ — zugleich der mathematische Ausdruck der physikalischen Erscheinung der Gravitation — mit den Werten q_s der elektrodynamischen Potentiale verkettet ist.

Die Euklidische Geometrie ist ein der modernen Physik fremdartiges Ferngesetz: indem die Relativitätstheorie die Euklidische Geometrie als allgemeine Voraussetzung für die Physik ablehnt, lehrt sie vielmehr, daß Geometrie und Physik gleichartigen Charakters sind und als eine Wissenschaft auf gemeinsamer Grundlage ruhen.

Die oben genannte geometrische Frage läuft darauf hinaus, zu untersuchen, ob und unter welchen Voraussetzungen die vierdimensionale Euklidische Pseudogeometrie

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g_{44} = -1 \\ &g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \end{aligned} \tag{35}$$

eine Lösung der physikalischen Grundgleichungen bez. die einzige reguläre Lösung derselben ist.

Die Grundgleichungen (4) meiner ersten Mitteilung lauten wegen der daselbst gemachten Annahme (20):

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

wo

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(K_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} K g_{\mu\nu})$$

ist. Bei der Einsetzung der Werte (35) wird

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = 0 \tag{36}$$

und für

$$q_s = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

wird

$$\frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0;$$

d. h. wenn alle Elektrizität entfernt wird, so ist die pseudo-Euklidische Geometrie möglich. Die Frage, ob sie in diesem Falle auch notwendig ist d. h. ob — bez. unter gewissen Zusatzbedingungen — die Werte (35) und die durch Transformation der Koordinaten daraus hervorgehenden Werte der $g_{\mu\nu}$ die einzigen regulären Lösungen der Gleichungen (36) sind, ist eine mathematische hier nicht allgemein zu erörternde Aufgabe. Ich beschränke mich vielmehr darauf, einige besondere diese Aufgabe betreffende Überlegungen anzustellen.

Dazu kehren wir wieder zu den ursprünglichen Weltkoordinaten meiner ersten Mitteilung

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = ix_4$$

zurück und erteilen den $g_{\mu\nu}$ die entsprechende Bedeutung.

Im Falle der pseudo-Euklidischen Geometrie haben wir

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

worin

$$\delta_{\mu\mu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

bedeutet. Für jede dieser pseudo-Euklidischen Geometrie benachbarte Maßbestimmung gilt der Ansatz

$$(37) \qquad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \cdots,$$

wo ε eine gegen Null konvergierende Größe und $h_{\mu\nu}$ Funktionen der w_s sind. Über die Maßbestimmung (37) mache ich die folgenden zwei Annahmen:

I. Die $h_{\mu\nu}$ mögen von der Variabeln w_4 unabhängig sein.

II. Die $h_{\mu\nu}$ mögen im Unendlichen ein gewisses reguläres Verhalten zeigen.

Soll nun die Maßbestimmung (37) für alle ε die Differentialgleichungen (36) erfüllen, so folgt, daß die $h_{\mu\nu}$ notwendig gewisse lineare homogene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen müssen. Diese Differentialgleichungen lauten, wenn man nach Einstein [1])

$$(38) \qquad h_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}, \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu})$$

einsetzt und zwischen den 10 Funktionen $k_{\mu\nu}$ die vier Relationen

$$(39) \qquad \sum_s \frac{\partial k_{\mu s}}{\partial w_s} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

annimmt, wie folgt:

$$(40) \qquad \Box k_{\mu\nu} = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\Box = \sum_s \frac{\partial^2}{\partial w_s^2}$$

benutzt ist.

Die Relationen (39) sind wegen des Ansatzes (38) einschränkende Voraussetzungen für die Funktionen $h_{\mu\nu}$; ich will jedoch

1) Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berichte d. Akad. zu Berlin 1916 S. 688.

zeigen, wie es durch eine geeignete infinitesimale Transformation der Variabeln w_1, w_2, w_3, w_4 stets erreicht werden kann, daß für die entsprechenden Funktionen $h'_{\mu\nu}$ nach der Transformation jene einschränkenden Voraussetzungen erfüllt sind.

Zu dem Zwecke bestimme man vier Funktionen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 der Variabeln, die bez. den Differentialgleichungen

$$\Box \varphi_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w_\mu} \sum_\nu h_{\nu\nu} - \sum_\nu \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial w_\nu} \tag{41}$$

genügen. Vermöge der infinitesimalen Transformation

$$w_s = w'_s + \varepsilon \varphi_s$$

geht $g_{\mu\nu}$ über in

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon \sum_\alpha g_{\alpha\nu} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial w_\mu} + \varepsilon \sum_\alpha g_{\alpha\mu} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial w_\nu} + \cdots$$

oder wegen (37) in

$$g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h'_{\mu\nu} + \cdots,$$

wo

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial w_\mu} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial w_\nu}$$

gesetzt ist. Wählen wir nun

$$k_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_s h'_{ss},$$

so erfüllen diese Funktionen wegen (41) die Einsteinschen Bedingungen (39) und es wird

$$h'_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_s k_{ss} \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}).$$

Die Differentialgleichungen (40), die nach den obigen Ausführungen für die gefundenen $k_{\mu\nu}$ gelten müssen, gehen wegen der Annahme I in

$$\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_2^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_3^2} = 0$$

über und, da die Annahme II — demgemäß verstanden — zu schließen gestattet, daß die $k_{\mu\nu}$ im Unendlichen sich Konstanten nähern, so folgt, daß dieselben überhaupt Konstante sein müssen d. h.: Durch Variation der Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie unter den Annahmen I und II ist es nicht möglich, eine reguläre Maßbestimmung zu erlangen, die nicht ebenfalls pseudo-Euklidisch ist und die doch zugleich einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen (36) gelingt noch in einem anderen Falle, der von Einstein[1]) und Schwarzschild[2]) zuerst behandelt worden ist. Ich gebe im Folgenden für diesen Fall einen Weg an, der über die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ im Unendlichen keinerlei Voraussetzungen macht und außerdem auch für meine späteren Untersuchungen Vorteile bietet. Die Annahmen über die $g_{\mu\nu}$ sind folgende:

1. Die Maßbestimmung ist auf ein Gaußisches Koordinatensystem bezogen — nur daß g_{44} noch willkürlich gelassen wird; d. h. es ist

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0.$$

2. Die $g_{\mu\nu}$ sind von der Zeitkoordinate x_4 unabhängig.

3. Die Gravitation $g_{\mu\nu}$ ist zentrisch symmetrisch in Bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\vartheta \\ w_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ w_3 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ w_4 &= l \end{aligned}$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

$$F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + H(r)\,dl^2 \tag{42}$$

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen $*$ weg, so entsteht der Ausdruck

$$M(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + W(r)\,dl^2, \tag{43}$$

wo $M(r)$, $W(r)$ die zwei wesentlichen willkürlichen Funktionen von r bedeuten. Die Frage ist, ob und wie diese auf die allgemeinste Weise zu bestimmen sind, damit den Differentialgleichungen (36) Genüge geschieht.

---

1) Perihelbewegung des Merkur. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 1915 S. 831.

2) Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 1916 S. 189.

Zu dem Zwecke müssen die bekannten in meiner ersten Mitteilung angegebenen Ausdrücke $K_{\mu\nu}$, K berechnet werden. Der erste Schritt hierzu ist die Aufstellung der Differentialgleichungen der geodätischen Linien durch Variation des Integrals

$$\int\left(M\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+W\left(\frac{dl}{dp}\right)^2\right)dp.$$

Wir erhalten als Lagrangesche Gleichungen diese:

$$\frac{d^2r}{dp^2}+\frac{1}{2}\frac{M'}{M}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2-\frac{r}{M}\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2-\frac{r}{M}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{W'}{M}\left(\frac{dl}{dp}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dp^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\vartheta}{dp}-\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp}+2\operatorname{cotg}\vartheta\frac{d\vartheta}{dp}\frac{d\varphi}{dp} = 0,$$

$$\frac{d^2l}{dp^2}+\frac{W'}{W}\frac{dr}{dp}\frac{dl}{dp} = 0;$$

hier und in der folgenden Rechnung bedeutet das Zeichen ′ die Ableitung nach r. Durch Vergleich mit den allgemeinen Differentialgleichungen der geodätischen Linien:

$$\frac{d^2w_s}{dp^2}+\sum_{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ s\end{matrix}\right\}\frac{dw_\mu}{dp}\frac{dw_\nu}{dp} = 0$$

entnehmen wir für die Klammersymbole $\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ s\end{matrix}\right\}$ die folgenden Werte — wobei die verschwindenden nicht angegeben sind:

$$\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{M'}{M},\quad \left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\} = -\frac{r}{M},\quad \left\{\begin{matrix}33\\ 1\end{matrix}\right\} = -\frac{r}{M}\sin^2\vartheta,$$

$$\left\{\begin{matrix}44\\ 1\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\frac{W'}{M},\quad \left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r},\quad \left\{\begin{matrix}33\\ 2\end{matrix}\right\} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r},\quad \left\{\begin{matrix}23\\ 3\end{matrix}\right\} = \operatorname{cotg}\vartheta,\quad \left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{W'}{W}.$$

Hiermit bilden wir:

$$\begin{aligned}K_{11} = {} & \frac{\partial}{\partial r}\left(\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}\\ & +\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}21\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}31\\ 3\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}41\\ 4\end{matrix}\right\}\\ & -\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\}\right)\\ = {} & \frac{1}{2}\frac{W''}{W}+\frac{1}{4}\frac{W'^2}{W^2}-\frac{M'}{rM}-\frac{1}{4}\frac{M'W'}{MW}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_{22} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} \\
&\quad + \begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right) \\
&= -1 - \frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2} + \frac{1}{M} + \frac{1}{2}\frac{rW'}{MW} \\
K_{33} &= -\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix} \\
&\quad + \begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix} \\
&= \sin^2\vartheta\left(-1 - \frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2} + \frac{1}{M} + \frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}\right) \\
K_{44} &= -\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{W''}{M} - \frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2} - \frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW} + \frac{W'}{rM} \\
K &= \sum_s g^{ss} K_{ss} = \frac{W''}{MW} - \frac{1}{2}\frac{W'^2}{MW^2} - 2\frac{M'}{rM^2} - \frac{1}{2}\frac{M'W'}{M^2 W} \\
&\qquad - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2 M} + 2\frac{W'}{rMW}.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\sqrt{g} = \sqrt{MW}\, r^2 \sin\vartheta$$

wird

$$K\sqrt{g} = \left\{\left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}}\right)' - 2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{M}}\right\}\sin\vartheta$$

und, wenn wir

$$M = \frac{r}{r-m}, \quad W = w^2\frac{r-m}{r}$$

setzen, wo nunmehr m und w die unbekannten Funktionen von r werden, so erhalten wir schließlich

$$K\sqrt{g} = \left\{\left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}}\right)' - 2wm'\right\}\sin\vartheta,$$

so daß die Variation des vierfachen Integrals

$$\iiiint K\sqrt{g}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\, dl$$

mit der Variation des einfachen Integrals

$$\int w m'\, dr$$

äquivalent ist und zu den Lagrangeschen Gleichungen

$$\begin{aligned} m' &= 0 \\ w' &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

führt. Man überzeugt sich leicht, daß diese Gleichungen in der Tat das Verschwinden sämtlicher $K_{\mu\nu}$ bedingen; sie stellen demnach wesentlich die allgemeinste Lösung der Gleichungen (36) unter den gemachten Annahmen 1., 2., 3., dar. Nehmen wir als Integrale von (44) $m = \alpha$, wo α eine Konstante ist und $w = 1$, was offenbar keine wesentliche Einschränkung bedeutet, so ergibt sich aus (43) für $l = it$ die gesuchte Maßbestimmung in der von Schwarzschild zuerst gefundenen Gestalt

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha}\, dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}\, dt^2. \tag{45}$$

Die Singularität dieser Maßbestimmung bei $r = 0$ fällt nur dann fort, wenn $\alpha = 0$ genommen wird, d. h. Die Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie ist bei den Annahmen 1., 2., 3. die einzige reguläre Maßbestimmung, die einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

Für $\alpha \neq 0$ erweisen sich $r = 0$ und bei positivem α auch $r = \alpha$ als solche Stellen, an denen die Maßbestimmung nicht regulär ist. Dabei nenne ich eine Maßbestimmung oder ein Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$ an einer Stelle *regulär*, wenn es möglich ist, durch umkehrbar eindeutige Transformation ein solches Koordinatensystem einzuführen, daß für dieses die entsprechenden Funktionen $g'_{\mu\nu}$ an jener Stelle regulär d. h. in ihr und in ihrer Umgebung stetig und beliebig oft differenzierbar sind und eine von Null verschiedene Determinante g' haben.

Obwohl nach meiner Auffassung nur reguläre Lösungen der physikalischen Grundgleichungen die Wirklichkeit unmittelbar darstellen, so sind doch gerade die Lösungen mit nicht regulären Stellen ein wichtiges mathematisches Mittel zur Annäherung an charakteristische reguläre Lösungen — und in diesem Sinne ist nach dem Vorgange von Einstein und Schwarzschild die für $r = 0$ und $r = \alpha$ nicht reguläre Maßbestimmung (45) als Ausdruck der

Gravitation einer in der Umgebung des Nullpunktes zentrisch-symmetrisch verteilten Masse anzusehen[1]). Im gleichen Sinne ist auch der Massenpunkt als der Grenzfall einer gewissen Verteilung der Elektrizität um einen Punkt herum aufzufassen, doch sehe ich an dieser Stelle davon ab, die Bewegungsgleichungen desselben aus meinen physikalischen Grundgleichungen abzuleiten. Ähnlich verhält es sich mit der Frage nach den Differentialgleichungen für die Lichtbewegung.

Als Ersatz für die Ableitung aus den Grundgleichungen mögen nach Einstein die folgenden zwei Axiome dienen:

Die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Linie dargestellt, welche Zeitlinie ist[2]).

Die Lichtbewegung im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Nullinie dargestellt.

Da die Weltlinie, die die Bewegung des Massenpunktes darstellt, eine Zeitlinie sein soll, so ist es, wie wir leicht einsehen können, stets möglich, den Massenpunkt durch eigentliche Raum-Zeittransformationen auf Ruhe zu bringen d. h. es gibt eigentliche Raum-Zeitkoordinatensysteme, in Bezug auf die der Massenpunkt beständig ruht.

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien für das zentrische Gravitationsfeld (45) entspringen aus dem Variationsproblem

$$\delta \int \left(\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \right) dp = 0,$$

sie lauten nach bekanntem Verfahren:

$$\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A, \tag{46}$$

$$\frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp}\right) - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0, \tag{47}$$

$$r^2 \sin^2\vartheta \, \frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{48}$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} = C, \tag{49}$$

wo A, B, C Integrationskonstante bedeuten.

---

1) Die Stellen $r = \alpha$ nach dem Nullpunkt zu transformieren, wie es Schwarzschild tut, ist meiner Meinung nach nicht zu empfehlen; die Schwarzschildsche Transformation ist überdies nicht die einfachste, die diesen Zweck erreicht.

2) Dieser letzte einschränkende Zusatz findet sich weder bei Einstein noch bei Schwarzschild.

Ich beweise zunächst, daß **die Bahnkurven des $r\vartheta\varphi$-Raumes stets in Ebenen liegen, die durch das Gravitationszentrum** gehen.

Zu dem Zwecke eliminieren wir den Parameter p aus den Differentialgleichungen (47) und (48), um so eine Differentialgleichung für ϑ als Funktion von φ zu erhalten. Es ist identisch

$$(50)\quad \frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dp}\right)=\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dp}\right)=\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi}+r^2\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dp^2}.$$

Andererseits liefert (48) durch Differentiation nach p:

$$\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\sin^2\vartheta+2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\vartheta\frac{d^2\varphi}{dp^2} = 0$$

und wenn wir hieraus den Wert von $\frac{d^2\varphi}{dp^2}$ entnehmen und rechter Hand von (50) eintragen, so wird

$$\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dp}\right)=\left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\operatorname{cotg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2\right)r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2.$$

Die Gleichung (47) nimmt damit die Gestalt an:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\operatorname{cotg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \sin\vartheta\cos\vartheta,$$

eine Differentialgleichung, deren allgemeines Integral

$$\sin\vartheta\cos(\varphi+a)+b\cos\vartheta = 0$$

lautet, wo a, b Integrationskonstante bedeuten.

Hiermit ist der gewünschte Nachweis geführt und es genügt daher zur weiteren Diskussion der geodätischen Linien, allein den Wert $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in Betracht zu ziehen. Alsdann vereinfacht sich das Variationsproblem wie folgt

$$\delta\int\left\{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right\}dp = 0,$$

und die drei aus demselben entspringenden Differentialgleichungen erster Ordnung lauten

$$(51)\qquad \frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A,$$

$$(52)\qquad r^2\,\frac{d\varphi}{dp} = B,$$

$$(53)\qquad \frac{r-\alpha}{r}\,\frac{dt}{dp} = C.$$

Die Lagrangesche Differentialgleichung für r

$$(54)\quad \frac{d}{dp}\left(\frac{2r}{r-\alpha}\,\frac{dr}{dp}\right) + \frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - 2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0$$

ist notwendig mit den vorigen Gleichungen verkettet und zwar haben wir, wenn die linken Seiten von (51), (52). (53), (54) bez. mit [1], [2], [3], [4] bezeichnet werden, identisch

$$(55)\qquad \frac{d[1]}{dp} - 2\,\frac{d\varphi}{dp}\,\frac{d[2]}{dp} + 2\,\frac{dt}{dp}\,\frac{d[3]}{dp} = \frac{dr}{dp}[4].$$

Indem wir $C = 1$ nehmen, was auf eine Multiplikation des Parameters p mit einer Konstanten hinausläuft, und dann aus (51), (52), (53) p und t eliminieren, gelangen wir zu derjenigen Differentialgleichung für $\varrho = \frac{1}{r}$ als Funktion von φ, welche Einstein und Schwarzschild gefunden haben, nämlich:

$$(56)\qquad \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{A\alpha}{B^2}\,\varrho - \varrho^2 + \alpha\varrho^3.$$

Diese Gleichung stellt die Bahnkurve des Massenpunktes in Polarkoordinaten dar; aus ihr folgt in erster Annäherung für $\alpha = 0$ bei $B = \sqrt{\alpha b}$, $A = -1 + \alpha a$ die Kepplersche Bewegung und die zweite Annäherung führt sodann zu einer der glänzendsten Entdeckungen der Gegenwart: der Berechnung des Vorrückens des Merkurperihels.

Nach dem obigen Axiom soll die Weltlinie für die Bewegung eines Massenpunktes Zeitlinie sein; aus der Definition der Zeitlinie folgt mithin stets $A < 0$.

Wir fragen nun insbesondere, ob der Kreis d. h. $r = \text{const}$ die Bahnkurve einer Bewegung sein kann. Die Identität (55) zeigt, daß in diesem Falle — wegen $\frac{dr}{dp} = 0$ — die Gleichung (54) keineswegs eine Folge von (51), (52), (53) ist; letztere drei Gleichungen sind daher zur Bestimmung der Bewegung nicht ausreichend; vielmehr sind (52), (53), (54) die notwendig zu erfüllenden Gleichungen. Aus (54) folgt

$$-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+\frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=0 \tag{57}$$

oder für die Geschwindigkeit v in der Kreisbahn

$$v^2=\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{\alpha}{2r}. \tag{58}$$

Andererseits ergibt (51) wegen $A<0$ die Ungleichung

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2<0 \tag{59}$$

oder mit Benutzung von (57)

$$r>\frac{3\alpha}{2}. \tag{60}$$

Wegen (58) folgt hieraus für die Geschwindigkeit des im Kreise sich bewegenden Massenpunktes die Ungleichung[1])

$$v<\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{61}$$

Die Ungleichung (60) gestattet folgende Deutung. Nach (58) ist die Winkelgeschwindigkeit des kreisenden Massenpunktes

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}.$$

Wollen wir also statt r, φ die Polarkoordinaten eines um den Nullpunkt mitrotierenden Koordinatensystems einführen, so haben wir nur nötig,

$$\varphi \text{ durch } \varphi+\sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}\,t$$

zu ersetzen. Die Maßbestimmung

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2+r^2d\varphi^2-\frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

geht durch die betreffende Raum-Zeittransformation über in

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2+r^2d\varphi^2+\sqrt{2\alpha r}\,d\varphi\,dt+\left(\frac{\alpha}{2r}-\frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2.$$

1) Die Angabe von Schwarzschild l. c., wonach sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes auf der Kreisbahn bei Verkleinerung des Bahnradius der Grenze $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nähert, entspricht der Ungleichung $r\geqq\alpha$ und dürfte nach Obigem nicht zutreffend sein.

Hier ist wegen (60) die Ungleichung $g_{44} < 0$ erfüllt und da auch die übrigen Ungleichungen (31) gelten, so ist die betrachtete Transformation des Massenpunktes auf Ruhe eine *eigentliche* Raum-Zeittransformation.

Andererseits hat auch die in (61) gefundene obere Grenze $\frac{1}{\sqrt{3}}$ für die Geschwindigkeit eines kreisenden Massenpunktes eine einfache Bedeutung. Nach dem Axiom für die Lichtbewegung wird nämlich diese durch eine geodätische Nullinie dargestellt. Setzen wir demnach in (51) $A = 0$, so ergibt sich für die kreisende Lichtbewegung anstatt der Ungleichung (59) die Gleichung

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0;$$

zusammen mit (57) folgt hieraus für den Radius der Lichtbahn:

$$r = \frac{3\alpha}{2}$$

und für die Geschwindigkeit des kreisenden Lichtes der als obere Grenze in (61) auftretende Wert:

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Allgemein erhalten wir für die Lichtbahn aus (56) wegen $A = 0$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \varrho^2 + \alpha\varrho^3; \tag{62}$$

dieselbe besitzt für $B = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ den Kreis $r = \frac{3\alpha}{2}$ als Poincaréschen „Zykel" — entsprechend dem Umstande, daß alsdann $\varrho - \frac{2}{3\alpha}$ rechts als Doppelfaktor auftritt. In der Tat besitzt in diesem Falle die Differentialgleichung (62) — für die allgemeinere Gleichung (56) gilt Entsprechendes — unendlich viele Integralkurven, die jenem Kreise in Spiralen sich unbegrenzt nähern, wie es die allgemeine Zykeltheorie von Poincaré verlangt.

Betrachten wir einen vom Unendlichen herkommenden Lichtstrahl und nehmen α klein gegenüber seiner kürzesten Entfernung vom Gravitationszentrum, so hat der Lichtstrahl angenähert die Gestalt einer Hyperbel mit Brennpunkt im Zentrum[1]).

1) Eine ausführliche Diskussion der Differentialgleichungen (56) und (62) wird die Aufgabe einer demnächst hier erscheinenden Mitteilung von V. Fréedericksz sein.

Ein Gegenstück zu der Bewegung im Kreise ist die Bewegung in einer Geraden, die durch das Gravitationszentrum geht. Wir erhalten die Differentialgleichung für diese Bewegung, wenn wir in (54) $\varphi = 0$ setzen und dann aus (53) und (54) p eliminieren; die so entstehende Differentialgleichung für r als Funktion von t lautet:

$$(63) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0$$

mit dem aus (51) folgenden Integral

$$(64) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3.$$

Nach (63) fällt die Beschleunigung negativ oder positiv aus d. h. die Gravitation wirkt anziehend oder abstoßend, jenachdem der Absolutwert der Geschwindigkeit

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{r-\alpha}{r}$$

oder

$$> \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{r-\alpha}{r}$$

ausfällt.

Für das Licht ist wegen (64)

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r};$$

das geradlinig zum Zentrum gerichtete Licht wird in Übereinstimmung mit der letzten Ungleichung stets abgestoßen; seine Geschwindigkeit wächst von 0 bei $r = \alpha$ bis 1 bei $r = \infty$.

Wenn sowohl α wie $\frac{dr}{dt}$ klein sind, geht (63) angenähert in die Newtonsche Gleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{1}{r^2}$$

über.