3. *Zur Gravitationstheorie;*

von Hermann Weyl.

Inhalt.

A. Zusätze zur allgemeinen Theorie.

§ 1. Ein Hamiltonsches Prinzip.

Von Hilbert[1]) sind im Anschluß an die Miesche Theorie[2]), in allgemeinerer Weise von H. A. Lorentz[3]) und von dem Begründer der Gravitationstheorie selbst[4]), die Gravitationsgleichungen auf ein Hamiltonsches Prinzip zurückgeführt worden. Dessen endgültige Formulierung scheitert freilich daran, daß wir die Hamiltonsche Funktion (Weltdichte der Wirkung) für die Materie nicht kennen, ja nicht einmal wissen, durch welche unabhängigen Zustandsgrößen die Materie zu beschreiben ist. Unter diesen Umständen scheint es mir von Wichtigkeit, *ein Hamiltonsches Prinzip* zu formulieren, *das so weit trägt, als unsere augenblickliche Kenntnis der Materie* (im weiten Einsteinschen Sinne, d. h. des Energie-Impulstensors) heute sicher *reicht.* Aus diesem Prinzip, das eine von den bisher angegebenen Formulierungen etwas abweichende Gestalt besitzt, sollen also als aus einer gemeinsamen Quelle folgende Gesetze entspringen:

1. Die *inhomogenen Gravitationsgleichungen*, zufolge deren der Energie-Impulstensor die Krümmung der Welt bestimmt. Der Energie-Impulstensor wird sich dabei allein aus demjenigen zusammensetzen, der für das elektromagnetische Feld im Äther gilt, und dem „kinetischen" Energie-Impulstensor der Materie im engeren Sinne $\varrho\, u_i\, u_k$, in welchem die invariante Massendichte ϱ auftritt und die Komponenten u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ der Vierergeschwindigkeit. Von der in wichtigen Punkten noch unaufgeklärten Konstitution der Materie und ihren Kohäsionskräften ist dabei also abgesehen;

2. die *Maxwell-Lorentzschen Gleichungen*, die wie in der Elektronentheorie dadurch einen konkreten Inhalt gewinnen, daß als elektrischer Strom nur der Konvektionsstrom auftritt;

3. das Gesetz für die *ponderomotorischen Kräfte* im elektromagnetischen Felde und die *mechanischen Gleichungen*, welche

---

1) Gött. Nachr. 1915, Sitzung vom 20. November.

2) Ann. d. Phys. **37**. p. 511. **39**. p. 1. 1912; **40**. p. 1. 1913.

3) Vier Abhandlungen in den Jahrgängen 1915 und 1916 der Versl. K. Akad. van Wetensch.

4) A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. **42**. p. 1111. 1916.

die Bewegung der Massen unter dem Einfluß dieser Kräfte und des Gravitationsfeldes bestimmen.

Es seien x_i die vier Koordinaten zur Festlegung der Weltpunkte[1]),

(1) $$g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

die invariante quadratische Differentialform (vom Trägheitsindex 3)[2]), deren Koeffizienten das Gravitationspotential bilden, und $\varphi_i\, dx_i$ die invariante lineare Differentialform, deren Koeffizienten φ_i die Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials sind. Das über irgendein Weltgebiet $\mathfrak{G}$ erstreckte Integral

$$-\frac{1}{2}\int H\, d\omega \quad \text{von} \quad H = g^{ik}\left(\left\{{ik \atop r}\right\}\left\{{rs \atop s}\right\} - \left\{{ir \atop s}\right\}\left\{{ks \atop r}\right\}\right)$$

bezeichne ich als die (in diesem Weltgebiet enthaltene) *Feldwirkung der Gravitation*, das Integral

$$\frac{1}{2}\int L\, d\omega \quad \text{von} \quad L = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} = \frac{1}{2} g^{ij} g^{kh} F_{ik} F_{jh}$$

als die *Feldwirkung der Elektrizität.* Darin bedeuten

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$

die Komponenten des elektromagnetischen Feldes, und $d\omega$ ist das vierdimensionale Volumelement

$$\sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4, \quad -g = \text{det.}\,|g_{ik}|.$$

Dem „Felde“ tritt in dieser phänomenologischen Theorie die „Substanz“ gegenüber, ein dreidimensionales, sich bewegendes Kontinuum, das wir uns (mathematisch) in infinitesimale Elemente zerlegt denken. Jedem Element kommt eine bestimmte, unveränderliche Masse oder „Massenladung“ dm und eine unveränderliche elektrische Ladung de zu; es korre-

---

1) In den Bezeichnungen schließe ich mich an A. Einsteins Abhandlung „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“, Ann. d. Phys. **49**. p. 769. 1916 an, insbesondere auch der bequemen Regel über das Fortlassen von Summenzeichen.

2) Jede quadratische Form läßt sich linear auf eine Summe und Differenz von Quadraten transformieren; die Zahl der negativen Glieder, die dabei auftreten, heißt der Trägheitsindex. Daß dieser durch die Form eindeutig bestimmt ist, bildet den Inhalt des „Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen.“

spondiert ihm als Ausdruck seiner Geschichte eine bestimmte Weltlinie, deren Richtung durch das Verhältnis der vier Differentiale $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$ zu charakterisieren ist. Die Größe

$$\int \left\{ dm \int \sqrt{g_{ik}\, dx_i\, dx_k} \right\}, \tag{2}$$

in der sich das äußere Integral über die gesamte Substanz, das innere aber über denjenigen Teil der Weltlinie des Substanzelementes dm erstreckt, welcher innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ verläuft, nenne ich die *Substanzwirkung der Gravitation.* Wir setzen voraus, daß die Bewegung der Substanz in solcher Weise mit dem Gravitationsfeld verknüpft ist, daß die unter dem inneren Integralzeichen auftretende Quadratwurzel, die Eigenzeit ds, stets positiv ist. Wenn wir (2), was möglich ist, in ein über das Weltgebiet $\mathfrak{G}$ erstrecktes Integral $\int \varrho\, d\omega$ verwandeln, heiße die invariante Raum-Zeitfunktion ϱ die absolute Massendichte. Völlig analog zu (2) gebildet ist das Integral, das die *Substanzwirkung der Elektrizität darstellt*:

$$\int \left\{ de \int \varphi_i\, dx_i \right\};$$

die absolute elektrische Ladungsdichte ε ist definiert durch

$$\int_{\mathfrak{G}} \varepsilon\, d\omega = \int \left\{ de \int ds \right\}.$$

Das Hamiltonsche Prinzip lautet:

Die Summe aus Feld- und Substanzwirkung der Gravitation und Elektrizität ist in jedem Weltgebiet ein Extremum gegenüber beliebigen, an den Grenzen verschwindenden Variationen des elektromagnetischen und Gravitationsfeldes und ebensolchen raumzeitlichen Verschiebungen der sich bewegenden Substanzelemente.[1])

Variation der g^{ik} (bei ungeändertem elektromagnetischen Felde und ungeänderten Weltlinien der Substanz) ergibt die Einsteinschen Gravitationsgleichungen (I), Variation des elektromagnetischen Potentials φ_i die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, F^{ik})}{\partial x_k} = J^i = \varepsilon \frac{dx_i}{ds}, \tag{II}$$

1) Dabei sind die Maßeinheiten rationell, d. h. so gewählt gedacht, daß die Lichtgeschwindigkeit c im leeren Raume $= 1$ ist und ebenso die Einsteinsche Konstante $8\pi\varkappa$ ($\varkappa = k/c^2$, k die Gravitationskonstante); elektrostatisches Maßsystem nach Heaviside.

die Variation der Weltlinien der Substanzelemente endlich die mechanischen Gleichungen

$$\text{(III)} \qquad \varrho\left(\frac{d^2 x_i}{d s^2} + \left\{ {h\,k \atop i} \right\} \frac{d x_h}{d s}\,\frac{d x_k}{d s}\right) = p^i,$$

in denen p^i die kontravarianten Komponenten der Kraft sind, deren kovariante durch

$$p_i = F_{ik}\, J^k$$

gegeben sind. Diese Gesetze sind natürlich nicht unabhängig voneinander. Vielmehr sind die mechanischen Gleichungen (III) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung der Materie eine mathematische Folge der Gesetze (I) und (II), wie man durch eine einfache Rechnung bestätigen kann.

§ 2. Der Energie-Impulssatz.

Nach den oben zitierten Autoren wird — wir kehren von der eben besprochenen phänomenologischen zu einer strengen, freilich heute nur ihrem allgemeinen Ansatze nach formulierbaren Theorie zurück — die Welt beherrscht von einem Wirkungsprinzip der folgenden Form

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} (H - M)\, d\omega = \text{Extremum}.$$

Die Weltdichte M der Wirkung des materiellen Vorganges ist dabei eine universelle Funktion der unabhängigen, diesen Vorgang charakterisierenden Zustandsgrößen, ihrer Ableitungen (erster, vielleicht auch höherer Ordnung) nach den Koordinaten x_i und der g^{ik}. So hängt in der Mieschen Theorie, um an ein konkretes Beispiel anzuknüpfen, M außer von den g^{ik} ab von den vier Komponenten φ_i des elektromagnetischen Potentials und den Feldkomponenten F_{ik}, die aus den φ_i durch Differentiation entspringen. Die Herleitung der mechanischen Gleichungen in der obigen phänomenologischen Theorie legte mir den Gedanken nahe, ob nicht allgemein *das Prinzip der Erhaltung von Energie und Impuls der Ausdruck dafür ist, daß das Hamiltonsche Prinzip insbesondere bei denjenigen unendlich kleinen Variationen erfüllt ist, welche durch eine infinitesimale Deformation der Welt in der Weise hervorgerufen werden, daß die Zustandsgrößen von dieser Deformation „mitgenommen“ werden.* Das ist in der Tat der Fall, und es scheint sich so die einfachste und naturgemäßeste Herleitung des Energieprinzips zu ergeben.

Setzen wir $M\sqrt{g} = \mathfrak{M}$, so ist der Energie-Impulstensor T_{ik} definiert durch die Gleichung für das totale Differential von $\mathfrak{M}$:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta\mathfrak{M} = -\,T_{ik}\,\delta g^{ik} + \frac{1}{\sqrt{g}}\,(\delta\mathfrak{M})_0\,,$$

wo $(\delta\mathfrak{M})_0$ diejenigen Terme zusammenfaßt, welche die Differentiale der materiellen Zustandsgrößen (z. B. der φ_i und F_{ik}) linear enthalten. Bei einer beliebigen Koordinatentransformation

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

transformiert sich der kontravariante Tensor g^{ik} nach den Formeln

$$\bar{g}^{ik} = g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial\,\bar{x}_i}{\partial\,x_\alpha}\,\frac{\partial\,\bar{x}_k}{\partial\,x_\beta}\,.$$

Wenn jene Transformation infinitesimal ist:

$$\bar{x}_i = x_i + \varepsilon\cdot\xi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

(ε bezeichnet die infinitesimale, d. h. gegen Null konvergierende Konstante), ergibt sich daraus für den Unterschied

$$\bar{g}^{ik}(\bar{x}) - g^{ik}(x) = \delta g^{ik}$$

der Werte von g^{ik} und $\bar{g}^{ik}$ für zwei Argumentsysteme (x) und $(\bar{x})$, welche im alten und neuen Koordinatensystem den gleichen Weltpunkt darstellen, die Gleichung:

$$\delta g^{ik} = \varepsilon\left(g^{\alpha k}\,\frac{\partial\,\xi_i}{\partial\,x_\alpha} + g^{i\beta}\,\frac{\partial\,\xi_k}{\partial\,x_\beta}\right).$$

Verfahren wir für die Zustandsgrößen des materiellen Vorgangs entsprechend, so erhalten wir, indem wir ausdrücken, daß bei einer derartigen infinitesimalen Transformation die Invariante M ungeändert bleibt, das Gesetz, nach dem der Energie-Impulstensor von den g^{ik} und den materiellen Zustandsgrößen abhängt.

Fassen wir ein Weltgebiet $\mathfrak{G}$ ins Auge, dem bei der Darstellung durch die Koordinaten x_i ein bestimmtes mathematisches Gebiet $\mathfrak{X}$ im Bereich jener Variablen x_i entspricht. Hat die obige infinitesimale Transformation die Eigenschaft, daß die Variationen ξ_i am Rande des Gebietes $\mathfrak{G}$ samt ihren Ableitungen verschwinden, so entspricht dem Weltgebiet $\mathfrak{G}$

in den neuen Variablen $\bar{x}_i$ genau das gleiche mathematische Gebiet $\mathfrak{X}$. Ich setze

$$\Delta g^{ik} = \bar{g}^{ik}(x) - g^{ik}(x) = \delta g^{ik} + \{\bar{g}^{ik}(x) - \bar{g}^{ik}(\bar{x})\}$$
$$= \delta g^{ik} - \varepsilon \cdot \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_\alpha} \xi_\alpha,$$

bilde also die Differenz von g^{ik} und $\bar{g}^{ik}$ an zwei Raumzeitstellen, deren zweite im neuen Koordinatensystem die gleichen Koordinatenwerte besitzt wie die erste im alten; ich nehme — mit anderen Worten — eine ***virtuelle Verrückung*** vor. Die gleiche Bedeutung hat Δ für alle übrigen Größen. Schreibe ich kurz dx für das Integrationselement $dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$, so ist $\int \mathfrak{M}\, dx$ eine Invariante, daher

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \mathfrak{M}\, dx = \int\limits_{\mathfrak{X}} \overline{\mathfrak{M}}(\bar{x})\, d\bar{x} = \int\limits_{\mathfrak{X}} \overline{\mathfrak{M}}(x)\, dx; \text{ mithin} \int\limits_{\mathfrak{X}} \Delta \mathfrak{M} \cdot dx = 0\,.$$

Es ist aber

$$\Delta \mathfrak{M} = -\mathfrak{T}_{ik}\, \Delta g^{ik} + (\Delta \mathfrak{M})_0 \qquad (\mathfrak{T}_{ik} = \sqrt{g} \cdot T_{ik}).$$

Dabei ist folgendes zu beachten: Im transformierten Koordinatensystem gelten — ich wähle als Beispiel die Miesche Theorie — wie im ursprünglichen die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \bar{\varphi}_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}_k} = \bar{F}_{ik}(\bar{x}),$$

also, da es doch auf die Benennung der Variablen nicht ankommt,

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\varphi}_i(x)}{\partial x_k} = \bar{F}_{ik}(x).$$

Die Relationen

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = F_{ik}$$

bleiben demnach erhalten, wenn wir von den Funktionen φ_i, F_{ik} zu den Funktionen $\bar{\varphi}_i$, $\bar{F}_{ik}$ derselben Variablen x_i übergehen; d. h. sie bleiben bei der Variation Δ (dagegen nicht bei der Variation δ) bestehen. Nach dem allgemeinen Wirkungsprinzip, in welchem wir die g^{ik} unvariiert lassen, d. h. *zufolge der Gesetze des materiellen Vorganges*, ist daher

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} (\Delta \mathfrak{M})_0\, dx = 0, \quad \text{also auch} \int \mathfrak{T}_{ik}\, \Delta g^{ik} \cdot dx = 0\,.$$

Setzen wir darin den Ausdruck von Δg^{ik} ein und beseitigen die Ableitungen der Verschiebungskomponenten durch partielle Integration, so haben wir

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} \mathfrak{T}_{rs} \right\} \xi_i \, dx = 0 ,$$

und damit sind die Energie-Impulsgleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} \mathfrak{T}_{rs} = 0 \tag{3}$$

bewiesen.

Für eine Variation des Gravitationsfeldes, die an den Grenzen des Weltgebietes $\mathfrak{G}$ verschwindet, gilt

$$\delta \int H \, d\omega = \int (R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R) \, \delta g^{ik} \cdot d\omega ;$$

darin ist R_{ik} der symmetrische Riemannsche Krümmungstensor und die Invariante

$$R = g^{ik} R_{ik} .$$

Wenden wir die eben angestellte Überlegung statt auf M auf H an (daß H auch die Differentialquotienten der g^{ik} enthält, ist dabei ganz unwesentlich), so finden wir ohne Rechnung, daß der Tensor

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R \, ,$$

an Stelle von T_{ik} gesetzt, die Gleichungen (3) identisch erfüllt. Der Energie-Impulssatz ist demnach nicht nur, wie wir soeben zeigten, eine mathematische Folge der Gesetze des materiellen Vorganges, sondern auch der Gravitationsgleichungen

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = - T_{ik} .$$

An die Stelle der alten Einteilung in Geometrie, Mechanik und Physik tritt in der Einsteinschen Theorie die Gegenüberstellung von materiellem Vorgang und Gravitation. Die Mechanik aber ist sozusagen die Eliminante aus beiden; denn das Bestehen des Energie-Impulssatzes ist einerseits eine Folge der Gesetze des materiellen Vorganges, andererseits die notwendige Bedingung dafür, daß die Materie dem Gravitationsgesetz gemäß der Welt ihre Maßbestimmung aufprägen kann. In dem System der materiellen und Gravitationsgesetze sind daher vier überschüssige Gleichungen enthalten; in der Tat müssen in der allgemeinen Lösung vier willkürliche Funktionen auftreten, da die Gleichungen ja wegen ihrer invarianten Natur das Koordinatensystem der x_i völlig unbestimmt lassen.[1])

§ 3. Zusammenhang mit den Beobachtungen. Lichtstrahlen und Bahnkurven im statischen Gravitationsfeld.

Jene „objektive" Welt, welche die Physik aus der von uns unmittelbar erlebten Wirklichkeit herauszuschälen bestrebt ist, können wir nach ihrem bezeichenbaren Gehalt nur durch mathematische Begriffe erfassen. Um aber die Bedeutung, welche dieses mathematische Begriffssystem für die Wirklichkeit besitzt, zu kennzeichnen, müssen wir irgendwie seinen Zusammenhang mit dem unmittelbar Gegebenen zu beschreiben versuchen, eine Aufgabe der Erkenntnistheorie, die naturgemäß nicht mit physikalischen Begriffen allein, sondern nur durch beständige Berufung auf das im Bewußtsein anschaulich Erlebte geleistet werden kann. Von dieser Art ist etwa der Zusammenhang zwischen der Schwingungszahl eines elektromagnetischen Feldes und der Sinnesqualität „Farbe". Ganz allgemein scheint der auf das Sinnesepithel auftreffende Energie-Impulsstrom durch seine Intensität für die korrespondierende Empfindungsintensität, durch die Art seiner raumzeitlichen Veränderlichkeit für deren Qualität maßgebend zu sein. Ich möchte hier für ein sehr vereinfachtes Verhältnis von Subjekt und Objekt diesen Zusammenhang etwas genauer beschreiben.

Wir denken uns in der vierdimensionalen physikalischen Welt einzelne sich bewegende und Licht aussendende Massenpunkte, die Sterne. Wir legen der Einfachheit halber die geometrische Optik zugrunde, nach der die Weltlinien der von den Sternen ausgehenden Lichtsignale singuläre geodätische Linien sind. Allgemein lauten die Gleichungen einer geodätischen Weltlinie bei Benutzung eines geeigneten Parameters s:

$$\frac{d^2 x_i}{d s^2} + \left\{ {k\,h \atop i} \right\} \frac{d x_k}{d s} \frac{d x_h}{d s} = 0 . \tag{4}$$

Aus ihnen folgt

$$F \equiv g_{ik} \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s} = \text{const.}$$

1) Vgl. die Herleitung des Energie-Impulssatzes bei A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. **42.** p. 1111. 1916, und die Bemerkungen von D. Hilbert, Gött. Nachr. 1917 (Sitzung v. 23. Dez. 1916) über Kausalität.

Die singulären geodätischen Weltlinien sind dadurch gekennzeichnet, daß für sie diese Konstante insbesondere gleich Null ist (während sie für die Weltlinien von Massenpunkten positiv ausfällt). Das auffassende Bewußtsein, die „Monade“, vereinfachen wir zu einem „Punktauge“. In jedem Moment seines Lebens nimmt es eine bestimmte Raumzeitstelle ein, es beschreibt eine Weltlinie; die Punkte dieser Weltlinie erlebt es als in „zeitlicher Sukzession“ aufeinander folgend. Wir fassen einen bestimmten Moment ins Auge; an der Stelle P, welche in ihm die Monade einnimmt, mögen die Gravitationspotentiale die Werte g_{ik} haben; dx_i seien die Komponenten des Elementes $\mathfrak{e}$ seiner Weltlinie daselbst, das Verhältnis der dx_i bezeichnet deren Weltrichtung (Geschwindigkeit). Wir müssen voraussetzen, daß diese Richtung eine zeitartige ist, d. h. daß für sie

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k > 0$$

wird. Statt der Differentiale dx_i schreibe ich fortan, da alle unsere Betrachtungen sich auf die eine Stelle P beziehen, einfach x_i.

Zwei Linienelemente x_i, x_i' heißen orthogonal, wenn

$$g_{ik}\, x_i\, x_k' = 0$$

ist. Ich behaupte zunächst, daß alle (von P ausgehenden) Linienelemente, die zu dem zeitartigen $\mathfrak{e}$ orthogonal sind, ihrerseits raumartig sind, daß sie also ein unendlich kleines dreidimensionales Gebiet $\mathfrak{R}$ aufspannen, welchem durch die Form $-ds^2$ eine positiv-definite Maßbestimmung aufgeprägt ist. Die Monade erlebt dieses Gebiet $\mathfrak{R}$ als seine unmittelbare „räumliche Umgebung“. Um unsere Behauptung zu beweisen, nehmen wir $\mathfrak{e}$ als vierte Koordinatenachse an; dann sind die ersten drei Komponenten von $\mathfrak{e}$ gleich Null und $g_{44} > 0$. Wir können setzen

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, x_i\, x_k = g_{44}\left(x_4 + \frac{g_{14}}{g_{44}} x_1 + \frac{g_{24}}{g_{44}} x_2 + \frac{g_{34}}{g_{44}} x_3\right)^2 - \text{quadr. F.}\,(x_1\, x_2\, x_3).$$

Führen wir

$$x_4 + \frac{g_{14}}{g_{44}} x_1 + \frac{g_{24}}{g_{44}} x_2 + \frac{g_{34}}{g_{44}} x_3$$

an Stelle des bisherigen x_4 als vierte Koordinate ein, so kommt also

$$ds^2 = g_{44}\, x_4^2 - Q\,(x_1\, x_2\, x_3)\,.$$

Da ds^2 den Trägheitsindex 3 besitzt, muß die quadratische Form Q positiv-definit sein. Alle und nur diejenigen Elemente, für welche jetzt $x_4 = 0$ ist, sind zu $\mathfrak{e}$ orthogonal. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Wir sehen ferner, daß jedes Linienelement in eindeutiger Weise in zwei Summanden gespalten werden kann, von denen der eine parallel zu $\mathfrak{e}$ ist (Komponenten besitzt, die denen von $\mathfrak{e}$ proportional sind), der andere orthogonal zu $\mathfrak{e}$. Die Richtung dieses zweiten Summanden bezeichnen wir als die „Raumrichtung" des Linienelements. Verschiedene solche zu $\mathfrak{e}$ orthogonale Raumrichtungen bilden Winkel miteinander, die in bekannter Weise mit Hilfe der für sie positiven quadratischen Form $-ds^2$ zu berechnen sind. Den so bestimmten Winkel der Raumrichtungen der Weltlinien zweier von zwei Sternen in P eintreffender Lichtsignale identifizieren wir mit dem Winkelunterschied der beiden Richtungen (im anschaulichen Sinne), in welchen das Punktauge in dem betrachteten Moment die beiden Sterne erblickt. Wir sehen diesen Richtungsunterschied als etwas wenigstens approximativ unmittelbar anschaulich Feststellbares an; in der Tat ist uns im Sehen nicht nur Qualitatives durch Empfindung gegeben, sondern dieses Qualitative als „räumlich Ausgebreitetes" (ein Moment, das sich in keiner Weise auf das Materiale der Empfindung zurückführen läßt). Durch Heranziehung geeigneter Beobachtungsinstrumente läßt sich die Winkelbeobachtung exakter gestalten; wobei dem Bewußtsein nur noch die Leistung zufällt, die Unterscheidbarkeit oder Ununterscheidbarkeit zweier Richtungen (Deckung von Fadenkreuz und Sternort, Ablesung am Teilkreis) zu konstatieren. — Dieses einfache Schema genügt jedenfalls für die prinzipielle Beschreibung der Art und Weise, in welcher Sternbeobachtungen zur Kontrolle der Einsteinschen Theorie benutzt werden können.

Im Anschluß an das Vorige möchte ich noch zeigen, wie man am einfachsten aus dem allgemeinen Prinzip „Die Weltlinie eines Lichtsignals ist eine singuläre geodätische Linie" im Falle des statischen Gravitationsfeldes ***das Fermatsche Prinzip der kürzesten Ankunft*** herleiten kann. Wählen wir den Parameter s zur Darstellung einer geodätischen Linie so, wie es den Gleichungen (4) entspricht, so ist sie charakterisiert durch das Variationsprinzip

$$(5) \qquad \delta \int F\,ds = 0,$$

gültig für eine virtuelle Verrückung, bei der die Enden des betrachteten Weltlinienstückes fest bleiben. (Außer für die singulären Weltlinien kann man statt dessen auch von der Gleichung

$$\delta \int \sqrt{F}\,ds = 0$$

ausgehen.) Im statischen Falle setzen wir $x_4 = t$; die quadratische Grundform (1) hat die Gestalt

$$f\,dt^2 - d\sigma^2,$$

wo $d\sigma^2$ eine positive quadratische Form der Raumdifferentiale dx_1, dx_2, dx_3 ist, deren Koeffizienten ebenso wie f, das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, von der Zeit t unabhängig sind. In diesem Falle gilt, wenn wir nur t variieren,

$$(6) \quad \delta \int F\,ds = 2 \int f \frac{dt}{ds}\,d\,\delta t = \left[2 f \frac{dt}{ds}\,\delta t\right] - 2 \int \frac{d}{ds}\left(f \frac{dt}{ds}\right) \delta t\,ds.$$

Mithin muß

$$f \frac{dt}{ds} = \text{const.} = E$$

sein. Lassen wir die Voraussetzung, daß außer $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ auch δt an den Enden des Integrationsintervalls verschwindet, fallen, so haben wir, wie aus (6) weiter hervorgeht, (5) zu ersetzen durch

$$(7) \qquad \delta \int F\,ds = \left[2 E\,\delta t\right] = 2\,\delta \int E\,dt.$$

Variieren wir die räumliche Bahnkurve des Lichtsignals beliebig unter Festhaltung der Enden, denken uns aber die variierte Kurve gleichfalls mit Lichtgeschwindigkeit durchlaufen, so gilt für die ursprüngliche wie für die variierte Kurve

$$F = 0, \qquad d\sigma = \sqrt{f} \cdot dt,$$

und (7) geht über in

$$\delta \int dt = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \int \frac{d\sigma}{\sqrt{f}} = 0,$$

d. i. in das Fermatsche Prinzip. Die Zeit ist jetzt ganz eliminiert; die letzte Formulierung bezieht sich allein auf die räumliche Bahn des Lichtstrahls und gilt für jedes Stück derselben, wenn dieses beliebig unter Festhaltung seines Anfangs- und Endpunktes variiert wird.

Die gleiche Methode können wir anwenden, um ein Minimalprinzip für die Bahnkurve eines Massenpunktes im statischen Gravitationsfeld zu ermitteln. Nehmen wir sogleich an, daß der Punkt von der Masse m außerdem noch eine elektrische Ladung e trägt und einem elektrostatischen Felde vom Potential Φ ausgesetzt ist. Nach § 1 lautet dann das Variationsprinzip, wenn ds das Differential der Eigenzeit bedeutet,

$$\delta\left\{m\int ds + e\int \Phi\, dt\right\} = 0. \tag{8}$$

Variieren wir nur t, nicht die Raumkoordinaten, so ist die linke Seite

$$= \int\left\{m f \frac{dt}{ds} + e\Phi\right\} d\,\delta t.$$

Also ist

$$m f \frac{dt}{ds} + e\Phi = \text{const.} = E, \tag{9}$$

und das Variationsprinzip (8) muß, wenn wir die Voraussetzung, daß außer δx_1, δx_2, δx_3 auch δt an den Enden des Integrationsintervalls verschwindet, aufgeben, durch

$$\delta\left\{m\int ds + e\int \Phi\, dt\right\} = [E\,\delta t] = \delta\int E\, dt \tag{10}$$

ersetzt werden. Führen wir in (9) den Wert

$$ds = \sqrt{f\, dt^2 - d\sigma^2}$$

ein und setzen zur Abkürzung

$$U = \frac{E - e\Phi}{\sqrt{f}},$$

so ergibt sich das Geschwindigkeitsgesetz

$$\boxed{\frac{U\, d\sigma}{\sqrt{f(U^2 - m^2)}} = dt.} \tag{11}$$

Denken wir uns die beliebig unter Festhaltung ihrer Enden variierte räumliche Bahnkurve insbesondere nach diesem selben Geschwindigkeitsgesetz wie die Ausgangskurve durchlaufen, so ist (9) auch für die variierte Kurve gültig. Daher bekommen wir aus (10):

$$\delta\int\left\{\frac{m^2 f}{E - e\Phi} - (E - e\Phi)\right\} dt = \delta\int \frac{\sqrt{f}(m^2 - U^2)}{U}\, dt = 0.$$

Darin können wir den Ausdruck (11) für dt einsetzen, da diese Gleichung ja voraussetzungsgemäß bei der Variation bestehen bleibt; dadurch wird die Zeit vollständig eliminiert und wir finden, *daß die räumliche Bahnkurve durch das Minimalprinzip*

$$\boxed{\delta\int\sqrt{U^2-m^2}\,d\sigma=0}$$

charakterisiert ist.[1])

B. Theorie des statischen rotationssymmetrischen Gravitationsfeldes.

§ 4. Massenpunkt ohne und mit elektrischer Ladung.

Für das Folgende ist es nötig, zu der Schwarzschildschen Bestimmung des Gravitationsfeldes eines ruhenden Massenpunktes[2]) einige Bemerkungen zu machen. Ein dreidimensionales kugelsymmetrisches Linienelement hat bei Benutzung geeigneter Koordinaten notwendig die Gestalt

$$d\sigma^2=\mu\,(dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2)+l\,(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2+x_3\,dx_3)^2,$$

wo μ und l nur von der Entfernung

$$r=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}$$

abhängen. Über die Skala, in der diese Entfernung gemessen wird, kann noch so verfügt werden, daß $\mu=1$ ausfällt; das möge geschehen. Für das vierdimensionale Linienelement haben wir den Ansatz zu machen

$$ds^2=f\,dx_4{}^2-d\sigma^2\,,$$

wo auch f nur eine Funktion von r ist. Setzen wir noch

$$1+l\,r^2=h$$

und die Wurzel aus der Determinante hf gleich w, so ergibt eine kurze Rechnung, die wir zweckmäßig für den Punkt $x_1=r$, $x_2=0$, $x_3=0$ durchführen, für

$$H=g^{ik}\left(\begin{Bmatrix}i\,k\\ r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r\,s\\ s\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}i\,r\\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k\,s\\ r\end{Bmatrix}\right)\text{ den Wert }-\frac{2\,l\,r}{h}\cdot\frac{w'}{w}\,.$$

Der Akzent bedeutet die Ableitung nach r. Ferner sei

$$-\frac{l\,r^3}{h}=\left(\frac{1}{h}-1\right)r=v\,;$$

1) Vgl. auch T. Levi-Civita, „Statica Einsteiniana“, Rend. d. R. Accad. dei Lincei 26. p. 464. 1917.

2) Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 7. p. 189. 1916.

dann hat man also das Variationsproblem

$$\delta \int v\, w'\, dr = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \int w\, v'\, dr = 0$$

zu lösen; dabei dürfen v und w als die unabhängig zu variierenden Funktionen betrachtet werden. Variation von v ergibt

$$w' = 0\,, \quad w = \text{const.}$$

und bei geeigneter Verfügung über die noch willkürliche Maßeinheit der Zeit: $w = 1$. Variation von w ergibt

$$v' = 0\,, \quad v = \text{const.} = -\,2\,a\,;$$

$$f = \frac{1}{h} = 1 - \frac{2\,a}{r}\,.$$

a hängt mit der Masse m durch die Gleichung $a = \varkappa m$ zusammen; wir nennen a den *Gravitationsradius der Masse* m.

Zur Veranschaulichung der Geometrie mit dem Linienelement $d\sigma^2$ beschränken wir uns auf die durch das Zentrum gehende Ebene $x_3 = 0$. Führen wir in ihr Polarkoordinaten ein

$$x_1 = r \cos \vartheta\,, \quad x_2 = r \sin \vartheta\,,$$

so wird

$$d\sigma^2 = h\, dr^2 + r^2\, d\vartheta^2\,.$$

Dieses Linienelement charakterisiert die Geometrie, die auf dem folgenden Rotationsparaboloid im Euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, z gilt:

$$z = \sqrt{8\,a\,(r - 2\,a)}\,,$$

wenn dasselbe durch orthogonale Projektion auf die Ebene $z = 0$ mit den Polarkoordinaten r, ϑ bezogen wird. Die Projektion bedeckt das Äußere des Kreises $r \geqq 2a$ doppelt, das Innere überhaupt nicht. Bei natürlicher analytischer Fortsetzung wird also der wirkliche Raum in dem zur Darstellung benutzten Koordinatenraum der x_i das durch $r \geqq 2a$ gekennzeichnete Gebiet doppelt überdecken. Die beiden Überdeckungen sind durch die Kugel $r = 2a$, auf der sich die Masse befindet und die Maßbestimmung singulär wird, geschieden, und man wird jene beiden Hälften als das „Äußere" und das „Innere" des Massenpunktes zu bezeichnen haben.

Vielleicht wird das noch deutlicher durch Einführung eines andern Koordinatensystems, auf das ich die Schwarzschildschen Formeln ohnehin um der weiteren Entwicklungen willen transformieren muß. Die Transformationsformeln sollen lauten

$$x_1' = \frac{r'}{r} x_1, \quad x_2' = \frac{r'}{r} x_2, \quad x_3' = \frac{r'}{r} x_3; \quad r = \left(r' + \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'}.$$

Lasse ich nach Durchführung der Transformation die Akzente wieder fort, so ergibt sich

$$(12) \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad f = \left(\frac{r - a/2}{r + a/2}\right)^2.$$

In den neuen Koordinaten ist das Linienelement des Gravitationsraumes also dem Euklidischen *konform*; das lineare Vergrößerungsverhältnis ist

$$\left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2.$$

$d\sigma^2$ ist regulär für alle Werte $r > 0$, f ist durchweg positiv und wird nur für

$$r = \frac{a}{2}$$

zu Null. Der Umfang des Kreises $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ beträgt

$$2\pi r \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2;$$

diese Funktion nimmt, wenn wir r abnehmend die Werte von $+\infty$ ab durchlaufen lassen, monoton ab bis zum Werte $4\pi a$, der für

$$r = \frac{a}{2}$$

erreicht wird, beginnt aber dann, wenn r weiter zu Null abnimmt, wieder zu wachsen, und zwar schließlich über alle Grenzen. Nach der obigen Auffassung würde hier das Gebiet

$$r > \frac{a}{2}$$

dem Äußern,

$$r < \frac{a}{2}$$

dem Innern des Massenpunktes entsprechen. Bei analytischer Fortsetzung wird

$$\sqrt{f} = \frac{r - a/2}{r + a/2}$$

im Innern negativ, so daß also dort für einen ruhenden Punkt kosmische Zeit (x_4) und Eigenzeit gegenläufig sind. (In der Natur kann selbstverständlich nur immer ein bis an die singuläre Kugel nicht heranreichendes Stück der Lösung verwirklicht sein.)

Trägt der Massenpunkt eine elektrische Ladung und ist Φ das elektrostatische Potential, so lautet das Wirkungsprinzip bei Zugrundelegung des CGS-Systems

$$\delta \int \left(v w' + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{\Phi'^2 r^2}{w} \right) d r = 0 .$$

Variation von v ergibt wie oben

$$w' = 0 , \quad w = \text{const.} = 1 ,$$

Variation von Φ

$$\frac{d}{d r} \left(\frac{r^2 \Phi'}{w} \right) = 0 , \quad \textbf{daraus} \quad \Phi = \frac{e}{r} .$$

Für das elektrostatische Potential ergibt sich also die gleiche Formel wie ohne Berücksichtigung der Gravitation. Die Konstante e ist die elektrische Ladung (in gewöhnlichem elektrostatischen Maße). Variiert man aber w, so kommt

$$v' + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{\Phi'^2 r^2}{w^2} = 0$$

und daraus

$$v = -2 a + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{e^2}{r} , \qquad \frac{1}{h} = f = 1 - \frac{2 a}{r} + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{e^2}{r^2} .$$

In f tritt, wie man sieht, außer dem von der Masse abhängigen Glied $-2a/r$ noch ein elektrisches Zusatzglied auf. $a = \varkappa m$ ist wieder der Gravitationsradius der Masse m. Ganz analog wird die Länge

$$a' = \frac{e \sqrt{\varkappa}}{c}$$

als *Gravitationsradius der elektrischen Ladung* e zu bezeichnen sein. In Entfernungen r vergleichbar mit a ist das Massenglied, in Entfernungen $r \sim a'$ aber das elektrische Glied ~ 1. f bleibt für alle Werte von r positiv, wenn $|a'| > a$ ist; für ein Elektron ist der Quotient a'/a von der Größenordnung 10^{20}. In Entfernungen, die mit

$$a'' = \frac{e^2}{m c^2}$$

vergleichbar sind, haben das Massenglied und das elektrische Glied im Gravitationspotential f die gleiche Größenordnung; erst wenn r groß gegen a'', gilt das Superpositionsprinzip in dem Sinne, daß das elektrostatische Potential durch die Ladung, das Gravitationspotential durch die Masse mittels der gewöhnlichen Formeln bestimmt ist. Demnach wird man

a'', eine Größe, die in andern Zusammenhängen als „Radius des Elektrons“ auftritt, jedenfalls als den Radius seiner Wirkungssphäre betrachten können. Es besteht die Relation $a' = \sqrt{a \cdot a''}$.

Nachdem das Feld des mit elektrischer Ladung behafteten Massenpunktes aufgestellt ist, kann man nach dem letzten Absatze von § 3 leicht die Bewegung eines den Kraftwirkungen dieses Feldes unterliegenden Probekörpers berechnen, dessen Masse und Ladung gegenüber der felderzeugenden schwach ist; das Problem wird wie im ladungslosen Falle (Planetenbewegung[1]) streng durch elliptische Funktionen gelöst.

§ 5. Das Feld rotationssymmetrisch verteilter Massen.

Sich in den Besitz strenger Lösungen der Gravitationsgleichungen zu setzen, scheint mir namentlich von Wichtigkeit mit Rücksicht auf die Frage nach den Vorgängen im Atom. Denn es ist möglich, daß in diesen Abmessungen die Nichtlinearität der exakten Naturgesetze wesentlich in Betracht kommt. Den Mathematikern ist seit langem bekannt, daß bei nichtlinearen Differentialgleichungen, was vor allem ihre Singularitäten betrifft, Verhältnisse vorliegen, welche gegenüber den bei linearen Gleichungen auftretenden außerordentlich kompliziert, unerwartet und vorerst noch ganz und gar unbeherrschbar sind. Es ist den Physikern bekannt, daß sich im Innern des Atoms eigentümliche Vorgänge abspielen müssen, zu denen das vom Superpositionsprinzip beherrschte Kräftespiel der sichtbaren Welt keine Analoga aufweist. Ich glaube, daß diese beiden Dinge in engem Zusammenhange miteinander stehen können, ja daß von daher vielleicht sogar die endgültige Deutung der Quantentheorie zu erwarten ist. Um solcher, heute freilich noch in weiter Ferne liegenden Zwecke willen schien es mir zunächst von Interesse zu sein, das Gravitationsfeld rotationssymmetrisch verteilter Massen und Ladungen nach der Einsteinschen Theorie strenge zu bestimmen. Das soll hier für den Fall der Ruhe geschehen; die Untersuchung führt zu überraschend einfachen Ergebnissen.

---

1) K. Schwarzschild, l. c.

Als Koordinaten treten auf: 1. die Zeit $x_4 = t$; 2. eine ausgezeichnete Raumkoordinate, der Drehwinkel $x_3 = \vartheta$ um die Rotationsachse, mit der Periode 2π; $\vartheta =$ const. ist eine an die Rotationsachse ansetzende Meridianhalbebene. In dieser haben wir 3. zur Festlegung ihrer Punkte zwei Koordinaten x_1, x_2, die wir sogleich genauer normieren werden. Das Linienelement muß die Gestalt haben

$$ds^2 = f\,d x_4^2 - d\sigma^2\ ,$$

wo

$$d\sigma^2 = (h_{11}\,d\,x_1^2 + 2h_{12}\,dx_1\,d\,x_2 + h_{22}\,dx_2^2) + l\,d\,x_3^2\ ;$$

die Koeffizienten f, l; h_{11}, h_{12}, h_{22} sind Funktionen nur von x_1 und x_2. Nach einem allgemeinen Satz über positive quadratische Differentialformen von zwei Variablen ist es möglich, die Koordinaten x_1, x_2 genauer so zu wählen, daß der in Klammern gesetzte Teil mit den Koeffizienten h die „isotherme" Form

$$h\,(d\,x_1^2 + d\,x_2^2)$$

bekommt; damit ist dann das Variablenpaar x_1, x_2 bis auf eine konforme Abbildung bestimmt. Nach solcher Wahl der Variablen werde allgemein für irgend zwei Funktionen α, β von x_1, x_2

$$[\alpha, \beta] = \frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\frac{\partial\beta}{\partial x_2}$$

gesetzt. Führe ich $r = \sqrt{l f}$ ein, so ist die Wurzel aus der Determinante

$$\sqrt{g} = w = h\,r\,.$$

Für die Wirkungsdichte H gilt allgemein die Formel

$$2\,\mathfrak{H} = 2\,H\sqrt{g} = \left\{ {ik \atop r} \right\} \frac{\partial\,(g^{ik}\sqrt{g})}{\partial\,x_r} - \left\{ {ir \atop r} \right\} \frac{\partial\,(g^{ik}\sqrt{g})}{\partial\,x_k}\ .$$

In unserem Falle ist das erste Glied gleich

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{r=1}^{2} \left\{ {ii \atop r} \right\} \frac{\partial\,(g^{ii}\sqrt{g})}{\partial\,x_r} = \sum_{i=3}^{4}\sum_{r=1}^{2}\,;$$

man findet dafür sofort

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{2\,h}\left(\left[\frac{w}{l}, l\right] + \left[\frac{w}{f}, f\right]\right)\cdot$$

Das zweite Glied aber wird

$$\mathfrak{H}'' = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\,x_i}\cdot\frac{\partial\,(g^{ii}\sqrt{g})}{\partial\,x_i} = \frac{[w, r]}{w}\ .$$

Nun ist

$$\left[\frac{w}{f}, f\right] = -w\frac{[f,f]}{f^2} + \frac{[w,f]}{f}$$
$$= -w[\lg f, \lg f] + r[h, \lg f] + h[r, \lg f],$$

also, wenn $\lg h = \mu$ ist,

$$\frac{1}{h}\left[\frac{w}{f}, f\right] = -r[\lg f, \lg f] + r[\mu, \lg f] + [r, \lg f].$$

Bildet man ebenso den andern Summanden von $\mathfrak{H}'$ und beachtet, daß

$$2\lg r = \lg l + \lg f$$

ist, so kommt

$$\mathfrak{H}' = r[\mu, \lg r] + [r, \lg r] - \tfrac{1}{2} r([\lg f, \lg f] + [\lg l, \lg l]).$$

Führen wir

$$\lambda = \lg \sqrt{l/f}$$

ein, so ist

$$\tfrac{1}{2}([\lg f, \lg f] + [\lg l, \lg l]) = [\lg r, \lg r] + [\lambda, \lambda].$$

Damit finden wir

$$\mathfrak{H}' = [\mu, r] - r[\lambda, \lambda].$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{H}'' = \frac{[w,r]}{w} = \frac{[r,r]}{r} + \frac{[h,r]}{h} = 4[\sqrt{r}, \sqrt{r}] + [\mu, r].$$

So haben wir insgesamt

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'') = [\mu, r] - \tfrac{1}{2} r[\lambda, \lambda] + 2[\sqrt{r}, \sqrt{r}].$$

Zur Formulierung des Wirkungsprinzipes müssen wir bilden

$$\delta \int \mathfrak{H}\, dx_1\, dx_2$$

für Variationen $\delta\mu$, $\delta\lambda$, δr, die am Rande des (beliebigen) Integrationsgebietes verschwinden. Setzen wir allgemein

$$\Delta^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \quad \text{und} \quad \Delta \alpha = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(r\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(r\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)\right\},$$

so verwandelt sich durch partielle Integration

$$\delta \int \mathfrak{H}\, dx_1\, dx_2 \quad \text{in} \quad \int \delta\mathfrak{H}^*\, dx_1\, dx_2,$$

wo

$$\delta\mathfrak{H}^* = -\delta\mu \cdot \Delta^2 r + \delta\lambda \cdot r\,\Delta\lambda$$
$$- \delta r\left(\Delta^2 \mu + \frac{1}{2}[\lambda\lambda] + \frac{2}{\sqrt{r}}\Delta^2\sqrt{r}\right).$$

Für ruhende (ungeladene) Materie, deren Spannung zu vernachlässigen ist, besteht der Energie-Impulstensor T_{ik} aus der einzigen Komponente

$$T_{44} = \frac{\varrho}{g^{44}} \quad (\varrho = \textbf{absolute Massendichte}),$$

und es ist

$$\delta \mathfrak{M} \equiv -\sqrt{g}\, T_{ik}\, \delta g^{ik} = -\varrho \sqrt{g} \cdot \frac{\delta g^{44}}{g^{44}} = \varrho h r \delta \lg f = \varrho^* (\delta r - r \delta \lambda)$$
$$(\varrho^* = h \varrho).$$

Nach dem Wirkungsprinzip muß nun dieses Differential $\delta \mathfrak{M}$ mit $\delta \mathfrak{H}^*$ Koeffizient für Koeffizient übereinstimmen. Das ergibt zunächst (Koeffizient von $\delta \mu$):

$$\boxed{\Delta^2 r = 0.}$$

r ist demnach in der $x_1 x_2$-Ebene eine Potentialfunktion. Bezeichnet z die konjugierte Potentialfunktion, so daß $z + i r$ eine analytische Funktion von $x_1 + i x_2$ ist, so ist der Übergang von x_1, x_2 zu z, r eine konforme Abbildung. Wir können daher von vornherein annehmen, daß

$$z = x_1, \quad r = x_2$$

ist. In der Definition der Operationssymbole [ ], Δ, Δ^2 ersetze man demgemäß x_1, x_2 durch z und r. Das Koordinatensystem ist nunmehr bis auf eine willkürliche additive Konstante in z vollständig eindeutig bestimmt. Auf der Rotationsachse muß, damit das Linienelement daselbst regulär bleibt, r verschwinden. z, r, ϑ bezeichne ich als *kanonische Zylinderkoordinaten*; *die zugehörige kanonische Form des Linienelements lautet*

$$f\, d t^2 - \left\{ h\, (d z^2 + d r^2) + \frac{r^2 d \vartheta^2}{f} \right\}.$$

Der „Euklidische" Fall ist darin mit $f = 1$, $h = 1$ enthalten. Wir stellen aber allgemein, um uns geometrisch ausdrücken zu können, den Gravitationsraum dar durch einen Euklidischen Bildraum mit den Zylinderkoordinaten z, r, ϑ. Die Abbildung der beiden Räume aufeinander durch die kanonischen Koordinaten ist eindeutig bestimmt bis auf eine willkürlich bleibende Translation des Euklidischen Bildraumes in Richtung der z-Achse. In diesem Bildraum ist

$$\Delta = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\}$$

der gemeine Potentialoperator für rotationssymmetrische Funktionen.

Gleichsetzung der Koeffizienten von $\delta\lambda$ in

$$\delta\mathfrak{H}^* = \delta\mathfrak{M}$$

liefert

(13) $$\Delta\lambda = -\varrho^*,$$

Gleichsetzung der Koeffizienten von δr:

(14) $$\Delta^2\mu + \frac{1}{2}[\lambda, \lambda] - \frac{1}{2r^2} = -\varrho^*.$$

Betrachten wir zunächst (13) und führen $\psi = \lg\sqrt{f}$ ein; dann ist

$$\lambda = \lg r - 2\psi$$

und daher

(15) $$\Delta\psi = \tfrac{1}{2}\varrho^*,$$

oder, wenn wir zu den Maßeinheiten des CGS-Systems zurückkehrend, rechts den Faktor $8\pi\varkappa$ hinzufügen,

$$\boxed{\Delta\psi = 4\pi\varkappa\varrho^*;}$$

und zwar kommt diejenige Lösung ψ in Frage, die auf der Rotationsachse regulär ist. Damit sind wir im kanonischen Koordinatensystem zu der gewöhnlichen Poissonschen Gleichung gelangt; da sie linear ist, gilt für $\psi = \lg\sqrt{f}$ das Superpositionsprinzip.

Für den unendlich dünnen Ring, der von dem Flächenelement $dr\,dz$ der kanonischen r, z-Ebene bei der Rotation um die z-Achse beschrieben wird, findet man als Lösung der Poissonschen Gleichung, wenn

$$2\pi\varrho^* r\,dr\,dz = m$$

gesetzt wird, wie bekannt,

$$\psi = -\frac{\varkappa m}{R}.$$

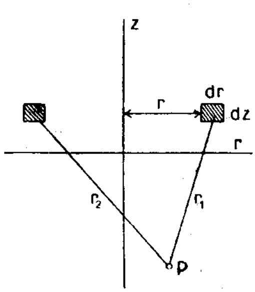

Fig. 1.

R, die „Entfernung" des Aufpunktes P vom Ringe, ist das arithmetisch-geometrische Mittel aus den Entfernungen r_1, r_2 des Punktes P von den beiden Durchstoßpunkten des Ringes mit der Meridianebene, in welcher P gelegen ist:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{r_1 \cos^2 \omega + r_2 \sin^2 \omega}};$$

alle Ausdrücke im Euklidischen Sinne verstanden, bezogen auf die kanonischen Koordinaten! Ist nur dieser Ring mit Masse behaftet, so wird

$$\sqrt{f} = e^{-\frac{\varkappa m}{R}};$$

das ist für große R gleich

$$1 - \frac{\varkappa m}{R}.$$

m erweist sich damit als die im Ringe enthaltene gravitierende Masse und ϱ^* somit als die *Massendichte im kanonischen Koordinatensystem.* — Wir sind zu folgendem einfachen Resultat gelangt:

Ist die (rotationssymmetrische) *Massenverteilung im kanonischen Koordinatensystem bekannt und $c^2 \psi$ ihr Newtonsches Potential, so ist nach der Einsteinschen Theorie*

$$\sqrt{f} = e^{\psi}.$$

Auch in die Gleichung (14) führen wir ψ statt λ ein; es ist

$$[\lambda, \lambda] = \frac{1}{r^2} - \frac{4}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + 4[\psi, \psi].$$

Multiplizieren wir dann (14) mit $\frac{1}{2}$, addieren (15) oder

$$\Delta^2 \psi + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{2}\varrho^*$$

und nehmen als Unbekannte

$$\gamma = \lg \sqrt{hf} = \frac{\mu}{2} + \psi,$$

so bekommen wir

$$\boxed{\Delta^2 \gamma = -[\psi, \psi],} \tag{16}$$

d. i. eine Poissonsche Gleichung in der r, z-Ebene. Damit das Linienelement auf der Rotationsachse regulär bleibt, muß auf ihr γ verschwinden; es ist also diejenige eindeutig bestimmte Lösung der Poissonschen Gleichung in der Meridianhalbebene für γ zu nehmen, die im Unendlichen und auf der Rotationsachse verschwindet. Begnügen wir uns übrigens mit derjenigen Approximation, die sich durch Streichung der quadratischen Glieder ergibt, so ist $\gamma = 0$, $h = 1/f$ zu setzen. —

Es ist sehr instruktiv, zu verfolgen, wie sich in die eben entwickelte allgemeine Theorie der rotationssymmetrischen Massenverteilung der ***Massenpunkt*** einordnet. Wir gehen von der Darstellung (12) aus und führen darin statt der „rechtwinkligen" Koordinaten x_i Zylinderkoordinaten ein:

$$x_1 = r\cos\vartheta, \quad x_2 = r\sin\vartheta, \quad x_3 = z;$$

das in (12) auftretende r muß dann natürlich durch $\sqrt{r^2 + z^2}$ ersetzt werden. Darauf bewerkstelligen wir in der Meridianhalbebene die konforme Transformation

$$(r + iz) - \frac{(a/2)^2}{r + iz} = r^* + iz^* \qquad (\vartheta = \vartheta^*);$$

dann nimmt unser Linienelement in der Tat die kanonische Form an, und zwar ergibt die Rechnung:

$$f = \frac{\frac{r_1 + r_2}{2} - a}{\frac{r_1 + r_2}{2} + a}, \qquad hf = \frac{\left(\frac{r_1 + r_2}{2} - a\right)\left(\frac{r_1 + r_2}{2} + a\right)}{r_1 r_2},$$

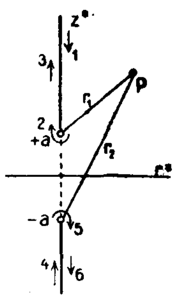

Fig. 2.

wo die Bedeutung von r_1, r_2 aus Fig. 2 zu entnehmen ist. $\psi = \lg\sqrt{f}$ ist im kanonischen Raum mit den Zylinderkoordinaten z^*, r^*, ϑ^* das Newtonsche Potential der gleichmäßig mit Masse belegten Strecke

$$r^* = 0, \qquad -a \leqq z^* \leqq +a:$$

der „Massenpunkt" erscheint demnach in den kanonischen Koordinaten nicht als eine Kugel, sondern als eine Strecke, die Meridian-*Halb*ebene als die längs der beiden stark ausgezogenen Halbgeraden geschlitzte *Voll*ebene, die Rotationsachse als der (im Unendlichen zusammenhängende) Schlitz, der so durchlaufen werden muß, wie es in der Figur durch beigesetzte Pfeile und Nummern angedeutet ist. Die rechte Hälfte der Vollebene entspricht dem Äußeren, die linke dem Inneren des Massenpunktes. Hier bestätigt sich von neuem unsere in § 4 geltend gemachte Auffassung: würden wir jenes „Innere" nicht mitberücksichtigen, so gelangten wir nicht zu der richtigen Lösung. Man überzeuge sich, daß $\lg\sqrt{hf}$ in der Tat diejenige Lösung der Gleichung (16) in der geschlitzten Vollebene r^*, z^* ist, die an den Rändern des Schlitzes verschwindet.

— Man wäre auf die vorliegende strenge Lösung der Gravitationsgleichungen naturgemäß durch die Aufgabe geführt worden, das Feld einer mit der Masse m belegten Strecke von der Länge $2\varkappa m$ zu bestimmen. Nach Ermittlung des Gravitationsfeldes hätte sich dann aber durch Ausmessung der „Strecke" mit dem invarianten räumlichen Linienelement $d\sigma^2$ ergeben, daß sie in Wahrheit gar keine Strecke, sondern eine Kugeloberfläche ist: man kann in der strengen Gravitationstheorie immer erst a posteriori feststellen, einer wie beschaffenen Massenverteilung eine Lösung entspricht, auf die man von irgendeinem bestimmten Ansatz her gekommen ist.

§ 6. Das Feld rotationssymmetrisch verteilter Ladungen.

Tragen die ruhenden Massen statische elektrische Ladungen, so entsteht außer dem Gravitations- ein elektrostatisches Feld, das sich aus einem Potential $\Phi = \Phi\,(x_1, x_2)$ ableitet. x_1, x_2 sind wie zu Beginn des § 5 isotherme Koordinaten in der Meridian-Halbebene. Die Wirkungsdichte der Elektrizität bestimmt sich aus

$$L = -\frac{[\Phi\Phi]}{hf}, \qquad L\sqrt{g} = -[\Phi\Phi]\,e^{\lambda} = -[\Phi\Phi]\,\frac{r}{f}.$$

Das Integral von $\delta\,(L\sqrt{g})$ über irgendein Gebiet der x_1, x_2-Ebene, ist, wenn die Variationen $\delta\Phi$, $\delta\lambda$ an den Grenzen des Gebietes verschwinden, gleich dem Integral des Differentials

$$\delta\mathfrak{L}^* = -[\Phi\Phi]\,\frac{r}{f}\,\delta\lambda + 2r\,\Delta_f\Phi\cdot\delta\Phi,$$

$$\Delta_f = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{r}{f}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{r}{f}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right\}.$$

Berücksichtigen wir nach § 1 neben der Feld- auch die Substanzwirkung der Elektrizität, so liefert das allgemeine Wirkungsprinzip durch Variation von Φ zunächst:

$$\Delta_f\Phi = -\varepsilon^* = -h\varepsilon \quad (\varepsilon = \text{absolute Ladungsdichte}). \tag{17}$$

Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes aber erhalten wir, indem wir nunmehr $\delta\Phi = 0$ setzen, die Gleichung

$$\delta\mathfrak{H}^* = \delta\mathfrak{M} + \delta\mathfrak{L}^*. \tag{18}$$

Aus ihr finden wir zunächst wieder $\Delta^2 r = 0$; dadurch ist die Einführung der *kanonischen Koordinaten* ermöglicht, und in diesem Sinne setzen wir wiederum $x_1 = z$, $x_2 = r$. Gl. (17) lautet jetzt:

$$(19)\qquad \boxed{\Delta_f \Phi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\right\} = -\varepsilon^*.}$$

Die willkürliche additive Konstante, welche in Φ auftritt, werde, wie üblich, so gewählt, daß Φ im Unendlichen verschwindet.

Vergleichung der Koeffizienten von $\delta\lambda$ in (18) ergibt die Gl. (13) des vorigen Paragraphen mit der Modifikation, daß rechts zu dem Massenglied ϱ^* das von der gleichfalls gravitierend wirkenden elektrischen Energie herrührende Zusatzglied $1/f[\Phi\Phi]$ hinzutritt; also:

$$(20)\qquad \Delta_f f = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right\} = \varrho^* + \frac{1}{f}[\Phi\Phi].$$

Gl. (14), § 5 kann unverändert übernommen werden. Wir bilden den Ausdruck $\frac{1}{2}\Delta_f(\Phi^2)$; auf Grund der Gleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi^2}{\partial z} = \Phi\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi^2}{\partial r} = \Phi\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

und des elektrostatischen Grundgesetzes (19) hat er den Wert

$$-\varepsilon^*\Phi + \frac{1}{f}[\Phi, \Phi].$$

Führen wir also

$$f - \tfrac{1}{2}\Phi^2 = F, \qquad \varrho^* + \varepsilon^*\Phi = \sigma^*$$

ein, so können wir Formel (20) ersetzen durch

$$(21)\qquad \boxed{\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right\} = \sigma^*.}$$

Befindet sich Masse und Ladung nur auf einem Elementarring, der im kanonischen Koordinatensystem den Radius r und den Querschnitt $dr\,dz$ hat, und setzen wir

$$2\pi\sigma^*\, r\, dr\, dz = m, \qquad 2\pi\varepsilon^*\, r\, dr\, dz = e,$$

so folgt aus den Gleichungen (19), (21), daß notwendig

$$F = \text{const.} - \frac{m}{e}\Phi$$

ist. Bei geeigneter Wahl der Maßeinheit der Zeit wird die hier auftretende const. $= 1$, und wir haben

$$f = 1 - \frac{m}{e}\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2,$$

oder bei Einführung des CGS-Systems

$$f = 1 - \frac{2m\varkappa}{e}\Phi + \frac{\varkappa}{c^2}\Phi^2.$$

Setzt man diesen Wert in (19) ein, so erhält man für

$$\int \frac{d\,\Phi}{1 - \frac{2\,m\,\varkappa}{e}\,\Phi + \frac{\varkappa}{c^2}\,\Phi^2} \tag{22}$$

das lineare Potentialgesetz der gewöhnlichen Elektrostatik. Ermittelt man daraus dieses Integral als Funktion des Ortes in der Meridian-Halbebene und aus ihm Φ und f — wir werden die Rechnung sogleich durchführen —, so erkennt man, daß m die im Ringe enthaltene gravitierende Masse, e die in ihm enthaltene Ladung ist. Folglich sind σ^* und ε^* Massen- und Ladungsdichte im kanonischen Koordinatensystem; *es ist vor allem bemerkenswert, daß nicht* ϱ^*, *sondern* $\sigma^* = \varrho^* + \varepsilon^* \Phi$ *als Massendichte auftritt.*[1])

Allgemeiner läßt sich in dieser Weise das Problem lösen, wenn wir annehmen, daß Masse und Ladung beliebig, aber in der gleichen Weise verteilt sind, d. h. daß das Verhältnis $\sigma^* : \varepsilon^*$ eine vom Ort unabhängige Konstante ist. Das Euklidische Volumintegral von σ^* im Raume der kanonischen Koordinaten, die Gesamtmasse, bezeichnen wir mit m, das ebenso gebildete Integral von ε^*, die Gesamtladung, mit e. Jenes konstante Verhältnis wird dann gleich $m : e$ sein. (22) ist auch jetzt das gewöhnliche, ohne Berücksichtigung der Gravitation bestimmte elektrostatische Potential der Ladungsverteilung ε^* im kanonischen Raum. Wir führen (vgl. § 4, letzter Absatz) die Gravitationsradien a, a' der (auf einen Punkt konzentrierten) Masse m und Ladung e ein und setzen unter Bevorzugung des Falles $a' > a$:

$$\frac{a}{a'} = \sin \varphi_0 \, .$$

Rechnen wir das Integral (22) aus, so kommen wir zu folgendem Ergebnis:

1) Nimmt man $\varrho^* = 0$, so ergibt sich für den Bereich, über den die Ladung eines Elektrons verteilt ist, der übliche Radius a''. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß durch ein negatives ϱ^* das Glied $\varepsilon^* \Phi$ fast vollständig kompensiert wird; ich verweise dieserhalb auf die Miesche Theorie. Es käme ja gerade darauf an, zu erklären, *warum* das Elektron eine so kleine Masse besitzt, d. h. woher die *reine Zahl* a/a' von der Größe 10^{-20} kommt! Die eigentliche Ladung des Elektrons ist demnach vielleicht auf einen sehr viel kleineren Bereich konzentriert, und a'' hat lediglich die Bedeutung des „Wirkungsradius".

Ist die Ladungsverteilung (zu der nach Voraussetzung die Massenverteilung proportional ist) im kanonischen Koordinatensystem bekannt und φ ihr „elementares", d. h. ohne Berücksichtigung der Gravitation nach der elementaren Theorie bestimmtes Potential, multipliziert mit dem konstanten Faktor

$$\frac{\sqrt{\varkappa}}{e} \cos \varphi_0 ,$$

so gilt strenge

$$\Phi = \frac{e}{a'} \frac{\sin \varphi}{\cos (\varphi - \varphi_0)}, \qquad \sqrt{f} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos (\varphi - \varphi_0)} . \tag{23}$$

Im Falle des Ringes ist insbesondere

$$\varphi = \frac{a' \cos \varphi_0}{R},$$

wo R die „Entfernung" des Aufpunktes P vom Ring bedeutet. Für große R ergibt sich daraus für $\sqrt{f}$ die asymptotische Formel

$$1 - \frac{a}{R},$$

aus der hervorgeht, daß m in der Tat, wie oben behauptet, die gravitierende Masse ist.

Es bleibt unter den gegenwärtigen Annahmen noch der zweite Koeffizient h des kanonischen Linienelementes zu berechnen. Dazu steht uns die Gl. (14), § 5, zur Verfügung. Behandeln wir sie in der gleichen Weise wie dort, so erhalten wir für $\gamma = \lg \sqrt{hf}$ zunächst

$$\varDelta^2 \gamma + \frac{[\sqrt{f}, \sqrt{f}]}{f} = \frac{1}{2} \frac{[\Phi, \Phi]}{f} .$$

Gehen wir zum CGS-System über — der Faktor $\frac{1}{2}$ auf der rechten Seite ist dann durch $\varkappa/c^2$ zu ersetzen — und benutzen die Ausdrücke (23), so nimmt diese Bestimmungsgleichung für γ die einfache Form an

$$\boxed{\varDelta^2 \gamma = [\varphi \varphi].} \tag{24}$$

Lassen wir die Voraussetzung der Proportionalität von Ladung und Masse fallen, so läßt sich die Lösung nicht mehr auf so einfachem Wege ermitteln. Nun liegen aber für das Elektron und den Atomkern die numerischen Verhältnisse so, daß a/a' sehr klein, von der Größenordnung 10^{-20} bzw. 10^{-17} ist.

Unter diesen Umständen kann also die Massenwirkung völlig neben derjenigen der Ladung vernachlässigt werden. Spezialisieren wir unsere Formeln in dieser Weise, d. h. dadurch, daß wir $a = 0$, $\varphi_0 = 0$ setzen, so kommen wir zu dem Satz:

Ist die (rotationssymmetrische) Verteilung ruhender Ladungen, neben deren Wirkung die Massenwirkung vernachlässigt werden kann, im kanonischen Koordinatensystem bekannt und φ ihr elementares Potential multipliziert mit $\sqrt{\varkappa}/c$, so gilt unter Berücksichtigung der Gravitation

$$\Phi = \frac{c}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{tg} \varphi, \qquad \sqrt{f} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Das Auftreten der durch ihre Periodizität in so engem Zusammenhang mit den ganzen Zahlen stehenden trigonometrischen Funktionen hat etwas Überraschendes; in Bereichen, in denen φ mit 1 vergleichbare Werte erreicht, gilt nicht mehr das Superpositionsprinzip, vielmehr sind die Potentiale der wirkenden Kräfte trigonometrische Funktionen derjenigen Größe, welche diesem Prinzipe genügt. Bei hinreichend konzentrierten Ladungen könnte es geschehen, daß eine dieselben einschließende Fläche S auftritt, auf der φ den Wert $\pi/2$ erreicht und daher Φ und $\sqrt{f}$ unendlich werden. Da auf dieser „Grenzfläche der Außenwelt" nach (24) hf endlich bleibt, wird auf ihr das räumliche Linienelement $d\sigma^2 = 0$; mittels des invarianten Linienelements ausgemessen, stellt sich daher S als ausdehnungslos heraus. — Für das Verständnis der Vorgänge im Atom ist unser Ergebnis kaum nutzbar zu machen; denn die Abweichungen des Feldes der Elektronenladung e von dem durch die gravitationslose klassische Theorie bestimmten sind nur in Distanzen merklich, die von der Größenordnung $a' \sim 10^{-33}$ cm sind!

Die kugelsymmetrische Punktladung erscheint im kanonischen Koordinatensystem als eine Kreisscheibe vom Radius a', auf der die Elektrizität so verteilt ist, wie es nach der elementaren Elektrostatik auf einer geladenen Metallplatte der Fall ist.

(Eingegangen 8. August 1917.)