Sur la théorie de la gravitation

(*Zu Gravitationstherie*[1])

par Hermann Weyl

Traduction Laurent v.D. et J.P.Petit

Contenu

A. Ajouts à la théorie générale

B. Théorie du champ statique à symétrie axiale

---

[1] Zu Gravitationstherie[1]. Annalen der physik, Vol.35 n° 18 (1917)

ral entre les solutions selon Newton et Einstein, qui peut être exprimé par des fonctions élémentaires.

§ 6. Il en va de même pour les champs électrostatiques et gravitationnels des charges distribuées avec une symétrie de rotation. Les déviations par rapport à la théorie classique sont extrêmement faibles, même à l'échelle de l'atome.

A. Ajouts à la théorie générale

§ 1. Un principe hamiltonien

Les équations de la gravitation ont été ramenées à un principe hamiltonien par Hilbert[2], sur la base de la théorie de Mie[3], d'une manière plus générale par H. A. Lorentz[4] et par le fondateur de la théorie de la gravitation lui-même[5]. Sa formulation définitive échoue cependant, car nous ne connaissons pas la fonction hamiltonienne (densité d'univers de l'action) de la matière, voire même nous ne savons pas quelles variables d'état indépendantes doivent être utilisées pour décrire la matière. Dans ces conditions, il me semble important de formuler *un principe hamiltonien qui soit aussi étendu que l'est aujourd'hui notre connaissance de la matière* (au sens large einsteinien, c'est-à-dire du tenseur énergie-impulsion). De ce principe, qui a une forme quelque peu différente des formulations données jusqu'ici, les lois suivantes doivent découler comme d'une source commune :

1. les *équations gravitationnelles inhomogènes*, selon lesquelles le tenseur énergie-impulsion détermine la courbure de l'univers. Le tenseur énergie-impulsion ne sera donc constitué que de celui qui s'applique au champ électromagnétique dans l'éther, et du tenseur énergie-impulsion « cinétique » de la matière au sens étroit $\varrho u_i u_k$, dans lequel apparaissent la densité de masse invariante ϱ et les composantes u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ du quadrivecteur vitesse. La constitution de la matière et ses forces de cohésion, qui restent inexpliquées sur des points importants, sont ainsi laissées de côté ;

2. les *équations de Maxwell-Lorentz*, qui, comme dans la théorie des électrons, acquièrent une signification concrète du fait qu'un courant convectif apparaît comme le seul courant électronique ;

[2] Gött. Nachr. 1915, Séance du 20 novembre.
[3] Ann. d. Phys. **37** p. 511 ; **39** p. 1, 1912 ; **40** p. 1, 1913.
[4] Quatre articles dans les années 1915 et 1916 dans Versl. K. Akad. van Wetensch.
[5] A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. **42** p. 1111, 1916.

3. la loi des f*orces ponderomotrices* dans le champ électromagnétique et les équations mécaniques qui déterminent le mouvement des masses sous l'influence de ces forces et du champ gravitationnel.

Soit x_i les quatre coordonnées définissant les points de l'univers[6],

(1) $$g_{ik}dx_idx_k$$

la forme différentielle quadratique invariante (d'indice d'inertie 3)[7] dont les coefficients forment le potentiel gravitationnel, et $\varphi_i dx_i$ la forme différentielle linéaire invariante dont les coefficients φ_i sont les composantes du quadripotentiel électromagnétique. Je désigne l'intégrale

$$-\frac{1}{2}\int H d\omega \quad \text{avec} \quad H = g^{ik}\left(\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix}\right)$$

s'étendant sur une certaine région de l'univers $\mathfrak{G}$ comme *l'effet de champ de la gravitation* (contenue dans cette région de l'univers), l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int L d\omega \quad \text{avec} \quad L = \frac{1}{2}F_{ik}F^{ik} = \frac{1}{2}g^{ij}g^{kh}F_{ik}F_{jh}$$

comme *l'effet de champ de l'électricité*. Dans celui-ci,

$$F_{ik} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}$$

désigne les composantes du champ électromagnétique et $d\omega$ l'élément de volume quadridimensionnel

$$\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4, \qquad -g = \det|g_{ik}|.$$

Dans cette théorie phénoménologique, outre le « champ », apparaît la « substance », un continuum tridimensionnel en mouvement que nous pouvons considérer (mathématiquement) comme étant divisé en éléments infinitésimaux. Chaque élément a une certaine masse ou « charge de masse » dm, immuable, et une charge électrique de, immuable ; il correspond à une certaine ligne d'univers, expression de son histoire, dont la direction doit être caractérisée par le rapport des quatre différentielles $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$. La grandeur

---

[6] Dans les notations, je m'inspire de l'article d'A. Einstein, « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie », Ann. d. Phys. **49** p. 769, 1916, en particulier à la règle pratique de l'omission des signes de somme.

[7] Chaque forme carrée peut être transformée linéairement en une somme et une différence de carrés ; le nombre de membres négatifs qui apparaissent alors s'appelle l'indice d'inertie. Le fait que celui-ci soit clairement déterminé par la forme constitue le contenu de la « loi d'inertie des formes quadratiques ».

(2) $$\int \left\{dm \int \sqrt{g_{ik} dx_i dx_k}\right\},$$

dont l'intégrale extérieure s'étend sur toute la substance, mais dont l'intégrale intérieure s'étend sur la partie de la ligne d'univers de l'élément de substance dm qui se trouve dans la zone $\mathfrak{G}$, je l'appelle *l'effet de gravitation de la substance*. Nous supposons que le mouvement de la substance est lié au champ gravitationnel de telle sorte que la racine carrée apparaissant sous le signe de l'intégrale interne, le temps propre ds, est toujours positive. Si l'on transforme (2), ce qui est possible, en une intégrale $\int \varrho d\omega$ étendue à la surface de l'univers $\mathfrak{G}$, la fonction espace-temps invariante ϱ est appelée densité de masse absolue. L'intégrale représentant *l'effet de substance de l'électricité* est formée de manière tout à fait analogue à (2) :

$$\int \left\{de \int \varphi_i dx_i\right\};$$

la densité de charge électrique absolue ε est définie par

$$\int_{\mathfrak{G}} \varepsilon d\omega = \int \left\{de \int ds\right\}.$$

Le principe de Hamilton est le suivant :

La somme des actions effectives du champ et de la substance de la gravitation et de l'électricité est extrémale dans chaque domaine d'univers pour des variations arbitraires des champs électromagnétique et gravitationnel qui s'annulent sur la frontière d'intégration et d'une façon analogue pour des variations d'espace-temps et des éléments de la substance en mouvement.[8]

La variation de g^{ik} (avec champ électromagnétique inchangé et lignes d'univers de la substance inchangées) donne lieu aux équations gravitationnelles d'Einstein (I), à la variation du potentiel électromagnétique φ_i, aux équations de Lorentz de Maxwell

(II) $$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} F^{ik}\right)}{\partial x_k} = J^i = \varepsilon \frac{dx_i}{ds},$$

à la variation des éléments des lignes d'univers de la substance et enfin aux équations mécaniques

(III) $$\varrho \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} hk \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_k}{ds}\right) = p^i,$$

[8] Les unités de mesure sont rationnelles, c'est-à-dire qu'elles sont choisies de telle sorte que la vitesse de la lumière c dans l'espace vide est égal à 1 et que la constante d'Einstein est $8\pi\varkappa$ ($\varkappa = k/c^2$, k la constante de gravitation) ; système de mesure électrostatique selon Heaviside.

dans lesquelles p^i sont les composantes contravariantes de la force, dont les covariantes sont données par

$$p_i = F_{ik}J^k.$$

Ces lois ne sont bien sûr pas indépendantes les unes des autres. Au contraire, les équations mécaniques (III), ainsi que l'équation de continuité de la matière, sont une conséquence mathématique des lois (I) et (II), comme on peut le confirmer par un simple calcul.

§ 2 Le théorème énergie-impulsion

Selon les auteurs cités ci-dessus — nous revenons de la théorie phénoménologique que nous venons d'évoquer à une théorie stricte, qui ne peut aujourd'hui, il est vrai, être formulée que selon son approche générale — l'univers est régi par un principe d'action de la forme suivante

$$\int_{\mathfrak{G}} (H - M) d\omega = \text{extremum}.$$

La densité d'univers M de l'effet du processus matériel est donc une fonction universelle des variables d'état indépendantes caractérisant ce processus, de leurs dérivées (de premier ordre, peut-être aussi d'ordre supérieur) selon les coordonnées x_i, et de g^{ik}. Ainsi, dans la théorie de Mie, pour prendre un exemple concret, M dépend, outre le g^{ik}, des quatre composantes φ_i du potentiel électromagnétique et des composantes de champ F_{ik}, qui découlent du φ_i par différenciation. La dérivation des équations mécaniques dans la théorie phénoménologique ci-dessus m'a amené à me demander si, en général, *le principe de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement n'est pas l'expression du fait que le principe de Hamilton se réalise en particulier dans le cas de ces variations infiniment petites qui sont causées par une déformation infinitésimale de l'univers de telle sorte que les variables d'état sont « entraînées » par cette déformation*. C'est effectivement le cas, et la dérivation la plus simple et la plus naturelle du principe d'énergie semble résulter de cette façon.

Si nous fixons $M\sqrt{g} = \mathfrak{M}$, le tenseur énergie-impulsion T_{ik} est défini par l'équation de la différentielle totale de $\mathfrak{M}$:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \delta\mathfrak{M} = -T_{ik}\delta g^{ik} + \frac{1}{\sqrt{g}} (\delta\mathfrak{M})_0,$$

où $(\delta\mathfrak{M})_0$ résume les termes qui contiennent linéairement les différentielles des variables d'état du matériau (par exemple, de φ_i et F_{ik}). Avec une transformation de coordonnées arbitraire

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

le tenseur contravariant g^{ik} se transforme selon les formules

$$\overline{g}^{ik} = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{x}_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\overline{x}_k}{\partial x_\beta}.$$

Si cette transformation est infinitésimale :

$$\overline{x}_i = x_i + \varepsilon\cdot\xi_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

(ε désigne la constante infinitésimale, c'est-à-dire convergeant vers zéro), on obtient l'équation :

$$\delta g^{ik} = \varepsilon\left(g^{\alpha k}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_\alpha} + g^{i\beta}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_\beta}\right)$$

pour la différence

$$\overline{g}^{ik}(\overline{x}) - g^{ik}(x) = \delta g^{ik}$$

des valeurs de g^{ik} et $\overline{g}^{ik}$ pour deux systèmes d'arguments (x) et $(\overline{x})$, qui représentent le même point de l'univers dans l'ancien et le nouveau système de coordonnées.

Si nous procédons de la même manière pour les variables d'état du processus matériel, nous obtenons, en exprimant qu'avec une telle transformation infinitésimale l'invariant *M* reste inchangé, la loi selon laquelle le tenseur énergie-impulsion dépend de g^{ik} et des variables d'état matériel.

Considérons une zone d'univers $\mathfrak{G}$ à laquelle, lorsqu'elle est représentée par les coordonnées x_i, une certaine zone mathématique $\mathfrak{X}$ correspond dans la zone de ces variables x_i. Si la transformation infinitésimale ci-dessus a la propriété de faire disparaître les variations ξ_i au bord de la zone $\mathfrak{G}$ ainsi que leurs dérivées, alors exactement la même zone mathématique $\mathfrak{X}$ correspond à la zone d'univers $\mathfrak{G}$ dans les nouvelles variables $\overline{x}_i$. Je place

$$\Delta g^{ik} = \overline{g}^{ik}(x) - g^{ik}(x) = \delta g^{ik} + \left\{\overline{g}^{ik}(x) - \overline{g}^{ik}(\overline{x})\right\} = \delta g^{ik} - \varepsilon\cdot\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha,$$

formant ainsi la différence de g^{ik} et $\overline{g}^{ik}$ en deux positions spatio-temporelles, dont la seconde dans le nouveau système de coordonnées a les mêmes valeurs de coordonnées que la première dans l'ancien ; en d'autres termes j'effectue un *déplacement* *virtuel*. Δ a la même signification pour toutes les autres quantités. Si j'utilise l'abréviation dx pour l'élément d'intégration $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$, alors $\int \mathfrak{M} dx$ est un invariant, donc

$$\int_{\mathfrak{x}} \mathfrak{M} dx = \int_{\mathfrak{x}} \overline{\mathfrak{M}}(\overline{x}) d\overline{x} = \int_{\mathfrak{x}} \overline{\mathfrak{M}}(x) dx \,; \quad \text{donc} \quad \int_{\mathfrak{x}} \Delta \mathfrak{M} \cdot dx = 0.$$

Mais cependant

$$\Delta \mathfrak{M} = -\mathfrak{T}_{ik} \Delta g^{ik} + (\delta \mathfrak{M})_0 \quad \left(\mathfrak{T}_{ik} = \sqrt{g} \cdot T_{ik}\right).$$

Il convient de noter ce qui suit : dans le système de coordonnées transformé — je choisis la théorie de Mie comme exemple — les équations

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_k(\overline{x})}{\partial \overline{x}_i} - \frac{\partial \overline{\varphi}_i(\overline{x})}{\partial \overline{x}_k} = \overline{F}_{ik}(\overline{x}),$$

sont valables comme dans l'original, donc, puisque la dénomination des variables n'est pas importante,

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_k(\overline{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{\varphi}_i(\overline{x})}{\partial x_k} = \overline{F}_{ik}(x).$$

Les relations

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = F_{ik}$$

sont donc préservées quand on passe des fonctions φ_i, F_{ik} aux fonctions $\overline{\varphi}_i$, $\overline{F}_{ik}$ de la même variable x_i ; c'est-à-dire qu'elles sont préservées avec la variation Δ (mais pas avec la variation δ). Selon le principe général d'action dans lequel nous laissons le g^{ik} invariable, c'est-à-dire *selon les lois du processus matériel*,

$$\int_{\mathfrak{x}} (\Delta \mathfrak{M})_0 dx = 0, \textit{et donc aussi} \int \mathfrak{T}_{ik} \Delta g^{ik} \cdot dx = 0.$$

Si l'on y insère l'expression de Δg^{ik} et que l'on élimine les dérivées des composantes du déplacement par intégration partielle, on obtient

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} \mathfrak{T}_{rs} \right\} \xi_i dx = 0,$$

et donc les équations de l'énergie-impulsion

(3) $$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} \mathfrak{T}_{rs} = 0$$

sont prouvées.

Pour une variation du champ gravitationnel qui s'évanouit aux frontières de de la région de l'univers $\mathfrak{G}$, nous avons

$$\delta \int H d\omega = \int \left(R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \cdot d\omega,$$

où R_{ik} est le tenseur de courbure de Riemann symétrique et R est l'invariant

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Si l'on applique la considération qui vient d'être faite à H au lieu de M (le fait que H contienne aussi les quotients différentiels de g^{ik} est tout à fait sans importance), on trouve sans calcul que le tenseur

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R,$$

placé à la place de T_{ik}, satisfait identiquement les équations (3). Le théorème de l'énergie-impulsion est donc non seulement, comme nous venons de le montrer, une conséquence mathématique des lois du processus matériel, mais aussi des équations gravitationnelles

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik}.$$

Dans la théorie d'Einstein, l'ancienne division en géométrie, mécanique et physique est remplacée par la juxtaposition du processus matériel et de la gravitation. La mécanique, cependant, est, pour ainsi dire, l'éliminateur des deux ; car l'existence de la loi de l'énergie-impulsion est, d'une part, une conséquence des lois du processus matériel, et, d'autre part, la condition nécessaire pour que la matière puisse imprimer à l'univers sa détermination dimensionnelle conformément à la loi de la gravitation. Le système des lois matérielles et gravitationnelles contient donc quatre équations excédentaires ; en fait, quatre fonctions arbitraires doivent apparaître dans la solution générale, puisque les équations, en raison de leur nature invariante, laissent le système de coordonnées du x_i complètement indéterminé.[9]

[9] Cf. la déduction du théorème de l'énergie-impulsion chez A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. **42** p. 1111, 1916, et les remarques de D. Hilbert, Gött. Nachr. 1917 (séance du 23 déc. 1916) sur la causalité.

§ 3. Le lien avec les observations. Rayons et trajectoires de la lumière dans le champ gravitationnel statique

Ce monde « objectif », que la physique s'efforce d'extraire de la réalité dont nous faisons l'expérience directe, ne peut être saisi dans son contenu signifiant qu'à travers des concepts mathématiques. Mais pour caractériser le sens que ce système mathématique de concepts possède pour la réalité, il faut d'une manière ou d'une autre tenter de décrire son lien avec ce qui est directement donné, une tâche d'épistémologie qui ne peut naturellement pas être accomplie avec les seuls concepts physiques, mais seulement par une référence constante à ce qui est vécu de manière vivante dans la conscience. Le lien entre le nombre de vibrations d'un champ électromagnétique et la qualité sensorielle « couleur » est de ce type. En général, le courant d'impulsion énergétique qui frappe l'épithélium sensoriel semble être déterminant pour l'intensité correspondante de la sensation par son intensité, et pour sa qualité par la nature de sa variabilité spatio-temporelle. Je voudrais ici décrire plus en détail cette connexion pour une relation très simplifiée entre le sujet et l'objet.

Dans le monde physique quadridimensionnel, nous pensons à des points de masse individuels en mouvement et émettant de la lumière, les étoiles. Pour des raisons de simplicité, nous nous baserons sur l'optique géométrique, selon laquelle les lignes d'univers des signaux lumineux émis par les étoiles sont des lignes géodésiques singulières. En général, les équations d'une ligne d'univers géodésique sont

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} kh \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_k}{ds}\frac{dx_h}{ds} = 0 \tag{4}$$

en utilisant un paramètre approprié s.

D'eux découle

$$F \equiv g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = \text{const.}$$

Les lignes d'univers géodésiques singulières sont caractérisées par le fait que pour elles cette constante est en particulier égale à zéro (alors qu'elle est positive pour les lignes d'univers des masses ponctuelles). Nous simplifions la conscience percevante, la « monade », à un « œil ponctuel ». À chaque instant de sa vie, il occupe une certaine position spatio-temporelle, il décrit une ligne d'univers ; il vit les points de cette ligne d'univers comme se succédant dans une « succession temporelle ». Nous considérons un certain moment ; à l'endroit P, que la monade y occupe, les potentiels gravitationnels peuvent avoir les valeurs g_{ik} ; dx_i sont les composantes de l'élément $\mathfrak{e}$ de sa ligne d'univers à cet endroit, le rapport des dx_i désigne sa direction (vitesse) de l'univers. Nous devons présupposer que cette direction est de type temporel, c'est-à-dire que

$$ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k > 0.$$

Au lieu des différentielles dx_i, j'écris dorénavant simplement x_i, puisque toutes nos considérations se réfèrent au seul lieu P.

Deux éléments de ligne x_i, $x_i^{'}$ sont appelés orthogonaux si

$$g_{ik}x_i x_k^{'} = 0.$$

J'affirme d'abord que tous les éléments de ligne (à partir de P) qui sont orthogonaux au $\mathfrak{e}$ temporel sont eux-mêmes spatiaux, qu'ils couvrent donc une région tridimensionnelle $\mathfrak{R}$ infiniment petite, sur laquelle une détermination de mesure positive-définie est imprimée par la forme $-ds^2$. La monade considère cette zone $\mathfrak{R}$ comme son « environnement spatial » immédiat. Pour prouver notre affirmation, nous supposons que $\mathfrak{e}$ est le quatrième axe de coordonnées ; alors les trois premières composantes de $\mathfrak{e}$ sont égales à zéro et $g_{44} > 0$. On peut mettre

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}x_i x_k$$
$$= g_{44}\left(x_4 + \frac{g_{14}}{g_{44}}x_1 + \frac{g_{24}}{g_{44}}x_2 + \frac{g_{34}}{g_{44}}x_3\right)^2 - \text{quadr. F.}(x_1 x_2 x_3).$$

Si nous introduisons

$$x_4 + \frac{g_{14}}{g_{44}}x_1 + \frac{g_{24}}{g_{44}}x_2 + \frac{g_{34}}{g_{44}}x_3$$

à la place du précédent x_4 comme quatrième coordonnée, nous obtenons

$$ds^2 = g_{44}x_4^2 - Q(x_1 x_2 x_3).$$

Puisque ds^2 a un indice d'inertie de 3, la forme quadratique Q doit être définie positivement. Tous et seulement les éléments pour lesquels $x_4 = 0$ sont orthogonaux à $\mathfrak{e}$. Cela prouve notre affirmation. Nous voyons en outre que chaque élément de la ligne peut être divisé de manière non ambiguë en deux sommets, dont l'un est parallèle à $\mathfrak{e}$ (a des composantes proportionnelles à celles de $\mathfrak{e}$), l'autre orthogonal à $\mathfrak{e}$. Nous appelons la direction de cette deuxième somme la « direction spatiale » de l'élément de ligne. Plusieurs de ces directions spatiales orthogonales à e forment entre elles des angles qui doivent être calculés de manière connue à l'aide de la forme quadratique $-ds^2$ positive pour elles. Nous identifions l'angle des directions spatiales des lignes d'univers de deux signaux lumineux frappant deux étoiles dans P déterminé de cette manière avec la différence angulaire des deux directions (au sens descriptif) dans lesquelles l'œil du point voit les deux étoiles au moment considéré. Nous considérons cette différence de direction comme quelque chose qui est au moins approximativement directement vérifiable ; en fait, en voyant, non seulement quelque chose de qualitatif nous est donné par la sensation, mais ce qualitatif nous est donné comme quelque chose de « spatialement étalé » (un moment qui ne peut en aucun cas être ramené à la matière de la sensation). En utilisant des instruments d'observation appropriés, l'observation des angles peut être rendue plus exacte, la conscience n'ayant pour tâche que d'établir la distinction ou l'indiscernabilité de deux directions (congruence du réticule et de l'étoile, lecture sur le cercle gradué). — Ce schéma simple est en tout cas suffisant pour la description de base de la manière dont les observations des étoiles peuvent être utilisées pour vérifier la théorie d'Einstein.

Dans le prolongement de ce qui précède, je voudrais montrer comment on peut dériver très simplement le principe de Fermat de l'arrivée la plus courte à partir du principe général « la ligne d'univers d'un signal lumineux est une ligne géodésique singulière » dans le cas du champ gravitationnel statique. Si nous choisissons le paramètre s pour représenter une ligne géodésique telle qu'elle correspond aux équations (4), elle est caractérisée par le principe variationnel

$$\delta \int F ds = 0, \tag{5}$$

valable pour un déplacement virtuel où les extrémités du morceau de ligne d'univers considéré restent fixes. (Sauf pour les lignes d'univers singulières, on peut aussi supposer l'équation

$$\delta \int \sqrt{F} ds = 0,$$

à la place). Dans le cas statique, nous fixons $x_4 = t$; la forme quadratique de base (1) a la forme

$$f dt^2 - d\sigma^2,$$

où $d\sigma^2$ est une forme quadratique positive des différentielles spatiales dx_1, dx_2, dx_3, dont les coefficients sont indépendants du temps t, tout comme f, le carré de la vitesse de la lumière. Dans ce cas, si nous ne faisons varier que t, nous avons

$$\delta \int F ds = 2 \int f \frac{dt}{ds} d\delta t = \left[2f \frac{dt}{ds} \delta t \right] - 2 \int \frac{d}{ds}\left(f \frac{dt}{ds} \right) \delta t ds. \tag{6}$$

Par conséquent,

$$f \frac{dt}{ds} = \text{const.} = E.$$

Si nous abandonnons l'hypothèse qu'en dehors de δx_1, δx_2, δx_3, aussi δt disparaît aux extrémités de l'intervalle d'intégration, alors nous devons remplacer (5) par

(7) $$\delta \int F ds = [2E\delta t] = 2\delta \int E dt,$$

comme on peut le voir dans (6).

Si nous faisons varier à volonté la trajectoire spatiale du signal lumineux, en gardant les extrémités fixes, mais que nous imaginons que la courbe modifiée passe également à la vitesse de la lumière, alors

$$F = 0, \quad d\sigma = \sqrt{f} \cdot dt$$

s'applique à la courbe originale ainsi qu'à la courbe modifiée, et (7) se transforme en

$$\delta \int dt = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \int \frac{d\sigma}{\sqrt{f}} = 0,$$

c'est-à-dire en principe de Fermat. Le temps est maintenant complètement éliminé ; la dernière formulation ne se réfère qu'au parcours spatial du rayon lumineux et s'applique à chaque partie de celui-ci, si on le fait varier à volonté tout en gardant son point de départ et d'arrivée fixe.

Nous pouvons utiliser la même méthode pour déterminer un principe minimal pour la trajectoire d'un point de masse dans un champ gravitationnel statique. Supposons immédiatement que le point de masse m porte également une charge électrique e et est exposé à un champ électrostatique de potentiel Φ. Selon le § 1, le principe de variation, si ds signifie la différentielle du temps propre, est alors

(8) $$\delta\left\{m \int ds + e \int \Phi dt\right\} = 0.$$

Si nous ne faisons varier que t, et non les coordonnées spatiales, le côté gauche est

$$= \int \left\{mf \frac{dt}{ds} + e\Phi\right\} d\delta t.$$

Donc

(9) $$mf \frac{dt}{ds} + e\Phi = \text{const.} = E,$$

et le principe de variation (8), si on abandonne l'hypothèse qu'en plus de δx_1, δx_2, δx_3, δt disparaît aussi aux extrémités de l'intervalle d'intégration, doit être remplacé par

(10) $$\delta\left\{m\int ds + e\int \Phi dt\right\} = [E\delta t] = \delta\int E dt.$$

Si l'on introduit la valeur

$$ds = \sqrt{f dt^2 - d\sigma^2}$$

dans (9) et que l'on défini la quantité

$$U = \frac{E - e\Phi}{\sqrt{f}},$$

on obtient la loi de vitesse

(11) $$\frac{U d\sigma}{\sqrt{f(U^2 - m^2)}} = dt.$$

Si nous considérons la courbe de trajectoire spatiale arbitrairement variée avec ses extrémités fixées, alors (9) est également valable pour la courbe variée. Par conséquent, nous obtenons de (10) :

$$\delta\int \left\{\frac{m^2 f}{E - e\Phi} - (E - e\Phi)\right\} dt = \delta\int \frac{\sqrt{f}(m^2 - U^2)}{U} dt = 0.$$

Nous pouvons ici substituer l'expression (11) à dt, puisque cette équation reste présupposée valable pour la variation ; le temps est ainsi complètement éliminé et nous constatons *que la courbe de la trajectoire spatiale est caractérisée par le principe minimal*[10]

$$\delta\int \sqrt{U^2 - m^2}\, d\sigma = 0.$$

B. Théorie du champ gravitationnel statique à symétrie de révolution

§ 4. Point de masse sans et avec charge électrique

Pour la suite, il est nécessaire de faire quelques remarques sur la détermination de Schwarzschild du champ gravitationnel d'un point de masse au repos[11]. Un élément

[10] Voir aussi T. Levi-Civita, ‚« Statica Einsteinia », Rend. d. R. Accad. dei Lincei **26** p. 464, 1917.
[11] Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. **7** p. 189, 1916.

linéaire tridimensionnel à symétrie sphérique, si l'on utilise des coordonnées appropriées, a nécessairement la forme

$$d\sigma^2 = \mu(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2$$

où μ et l ne dépendent que de la distance

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

On peut encore disposer de l'échelle dans laquelle cette distance est mesurée de telle sorte que $\mu = 1$ soit omis ; qu'il en soit ainsi. Pour l'élément de ligne quadridimensionnel, nous avons l'approche de faire

$$ds^2 = fdx_4^2 - d\sigma^2$$

où aussi f est seulement une fonction de r. Si nous fixons toujours

$$1 + lr^2 = h$$

et la racine du déterminant hf égale à w, alors un bref calcul, que nous effectuons de manière expéditive pour le point $x_1 = r, x_2 = 0, x_3 = 0$, donne la valeur

$$-\frac{2lr}{h} \cdot \frac{w'}{w}$$

pour

$$H = g^{ik}\left(\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix}\right).$$

L'accent signifie la dérivé pour r. En outre,

$$-\frac{lr^3}{h} = \left(\frac{1}{h} - 1\right)r = v;$$

nous devons alors résoudre le problème de variation

$$\delta \int vw'dr = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \int wv'dr = 0;$$

v et w peuvent être considérés comme les fonctions à faire varier indépendamment. La variation de v résulte en

$$w' = 0, \quad w = \text{const.}$$

et avec une disposition appropriée de l'unité de temps encore arbitraire : $w = 1$. La variation de w donne lieu à

$$v' = 0, \quad v = \text{const.} = -2a;$$

$$f = \frac{1}{h} = 1 - \frac{2a}{r}.$$

a est relié à la masse m par l'équation $a = \varkappa m$; nous appelons a le *rayon gravitationnel de la masse* m.

Pour illustrer la géométrie avec l'élément de droite $d\sigma^2$, nous nous limitons au plan $x_3 = 0$ passant par le centre. Si nous y introduisons les coordonnées polaires

$$x_1 = rcos\vartheta, \quad x_2 = rsin\vartheta,$$

alors nous obtenons :

$$d\sigma^2 = hdr^2 + r^2 d\vartheta^2.$$

Cet élément de ligne caractérise la géométrie qui s'applique au paraboloïde de révolution[12] suivant dans l'espace euclidien de coordonnées rectangulaires x_1, x_2, z :

$$z = \sqrt{8a(r - 2a)},$$

Si celui-ci est rapporté au plan $z = 0$ de coordonnées polaires r, ϑ par projection orthogonale la projection couvre l'extérieur du cercle $r \geq 2a$ deux fois, l'intérieur pas du tout. Ainsi, par continuation analytique naturelle, l'espace réel dans l'espace de coordonnées de x_i utilisé pour la représentation couvrira deux fois la zone indiquée par $r \geq 2a$. Les deux revêtements sont séparés par la sphère $r = 2a$, sur laquelle se trouve la masse et la détermination de la dimension devient singulière, et l'on devra désigner ces deux moitiés comme l'« extérieur » et l'« intérieur » du point de masse.

Peut-être cela deviendra-t-il encore plus clair grâce à l'introduction d'un autre système de coordonnées, auquel je dois de toute façon transformer les formules de Schwarzschild pour les besoins de développements ultérieurs. Les formules de transformation doivent se lire

[12] Note de J.P.Petit : Weyl retrouve l'équation de la méridienne publiée quelques mois plus tôt : Ludwig Flamm : Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zestschrift XVII (septembre 1916) pp. 448-454. Ce dernier ne considère par cette géométrie de la solution extérieure de Schwarzchild isolément, mais la raccorde à la solution intérieure, à courbure constante. Weyl considère l'ensemble de cette géométrie en lui donnant une dimension topologique. Elle se présente alors comme un pont entre deux versants d'espace temps, quadridimensionnels, s'effectuant à travers une sphère de gorge.

$$x_1' = \frac{r'}{r} x_1, x_2' = \frac{r'}{r} x_2, x_3' = \frac{r'}{r} x_3 \; ; \quad r = \left(r' + \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'}.$$

Si je laisse de nouveau les accents après avoir effectué la transformation, le résultat est

(12) $$d\sigma^2 = \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad f = \left(\frac{r - a/2}{r + a/2}\right)^2.$$

Dans les nouvelles coordonnées, l'élément linéaire de l'espace gravitationnel se *conforme* donc à l'euclidien ; le rapport d'agrandissement linéaire est de

$$\left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2.$$

$d\sigma^2$ est régulier pour toutes les valeurs $r > 0$, f est constamment positif et ne devient nul que pour

$$r = \frac{a}{2}.$$

La circonférence du cercle $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ est

$$2\pi r \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2 ;$$

cette fonction, si l'on fait passer r de façon décroissante par les valeurs à partir de $+\infty$, diminue de façon monotone jusqu'à la valeur $4\pi a$, qui est atteinte[13] pour

$$r = \frac{a}{2},$$

mais recommence ensuite à augmenter à mesure que r diminue encore jusqu'à zéro, et enfin au-delà de toutes les limites. Selon la vue ci-dessus, ici la zone

$$r > \frac{a}{2}$$

correspondrait à l'extérieur,

$$r < \frac{a}{2}$$

à l'intérieur du point de masse. Si l'on continue analytiquement,

[13] Note de J.P.Petit : C'est le périmètre d'un grand cercle inscrit sur la sphère de gorge.

$$\sqrt{f} = \frac{r-a/2}{r+a/2}$$

devient négatif à l'intérieur, de sorte que le temps cosmique (x_4) et le temps propre y sont opposés pour un point au repos[14]. (Dans la nature, bien sûr, seule une partie de la solution qui n'atteint pas la sphère singulière peut jamais être réalisée).

Si le point de masse porte une charge électrique et que Φ est le potentiel électrostatique, le principe d'action est

$$\delta \int \left(v w' + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{\Phi'^2 r^2}{w} \right) dr = 0.$$

sur la base du système CGS.

La variation de v donne

$$w' = 0, \quad w = \text{const.} = 1.$$

comme ci-dessus.

Et la variation de Φ

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 \Phi'}{w}\right) = 0, \quad \text{donne} \quad \Phi = \frac{e}{r}.$$

La formule du potentiel électrostatique est donc la même que sans tenir compte de la gravité. La constante e est la charge électrique (dans la mesure électrostatique habituelle). Cependant, si l'on fait varier w, on obtient

$$v' + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{\Phi'^2 r^2}{w^2} = 0$$

et, à partir de là,

$$v = -2a + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{e^2}{r}, \quad \frac{1}{h} = f = 1 - \frac{2a}{r} + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{e^2}{r^2}.$$

---

[14] Note de J.P.Petit : Weyl joue sur $ds = c\,d\tau = \left[(r-a/2)/(r+a/2)\right] dx^\circ$. Pour une particule progressant sur une géodésique traversant la sphère de gorge ds est positif. Donc, dans l'autre versant d'espace temps le produit $d\tau\, dx^\circ$ devient négatif. La particule progresse dans un versant d'espace-temps correspondant à une coordonnée de temps x° inversée. Sa masse et son énergie sont inversées (théorème de J.M.Souriau : Structure of Dynamical Systems, Birkhauser Ed. 1997)

Comme on peut le voir, dans f, outre l'élément dépendant de la masse $-2a/r$, il y a également un élément électrique supplémentaire. $a = \varkappa m$ est à nouveau le rayon gravitationnel de la masse m. De façon tout à fait analogue, la longueur

$$a' = \frac{e\sqrt{\varkappa}}{c}$$

sera *le rayon gravitationnel de la charge électrique* e. Aux distances r comparable à a le terme de masse est ~ 1, mais aux distances $r \sim a'$ le terme électrique ~ 1. f reste positif pour toutes les valeurs de r lorsque $|a'| > a$; pour un électron, le quotient a'/a est de l'ordre de 10^{20}. À des distances comparables à

$$a'' = \frac{e^2}{mc^2},$$

le terme de masse et le terme électrique dans le potentiel gravitationnel f ont le même ordre de grandeur ; ce n'est que lorsque r est grand par rapport à a'' que le principe de superposition s'applique en ce sens que le potentiel électrostatique est déterminé par la charge, le potentiel gravitationnel par la masse au moyen des formules ordinaires. Par conséquent, a'', une quantité qui apparaît dans d'autres contextes comme le « rayon de l'électron », peut en tout cas être considérée comme le rayon de sa sphère d'action. La relation $a' = \sqrt{a \cdot a''}$ est valide.

Après avoir établi le champ du point de masse avec charge électrique, on peut facilement calculer, selon le dernier paragraphe du §3, le mouvement d'un spécimen soumis aux effets de force de ce champ, dont la masse et la charge sont faibles par rapport à celui qui génère le champ ; le problème est résolu strictement par des fonctions elliptiques, comme dans le cas sans charge (mouvement planétaire[15]).

§ 5. Le champ de masses distribuées avec une symétrie de rotation

Posséder des solutions strictes des équations de la gravitation me semble être d'une importance particulière pour la question des processus dans l'atome. Car il est possible que dans ces dimensions, la non-linéarité des lois exactes de la nature entre essentiellement en ligne de compte. Les mathématiciens savent depuis longtemps que dans le cas d'équations différentielles non linéaires, surtout en ce qui concerne leurs singularités, il existe des conditions qui, par rapport à celles qui se produisent dans le cas d'équations linéaires, sont extraordinairement compliquées, inattendues et, pour le moment, complètement incontrôlables. Les physiciens savent que des processus particuliers doivent se dérouler à l'intérieur de l'atome, auxquels le jeu des forces de

[15] K. Schwarzschild, ibid.

l'univers visible, régi par le principe de superposition, n'a aucune analogie. Je pense que ces deux choses peuvent être étroitement liées l'une à l'autre, et que l'on peut peut-être même en attendre l'interprétation finale de la théorie quantique. Pour de tels objectifs, certes encore lointains aujourd'hui, il m'a semblé intéressant, dans un premier temps, de déterminer strictement le champ gravitationnel de masses et de charges distribuées avec une symétrie de rotation selon la théorie d'Einstein. C'est ce qui est fait ici pour le cas du repos ; l'enquête conduit à des résultats étonnamment simples.

Les coordonnées sont : 1. le temps $x_4 = t$; 2. une coordonnée spatiale distinguée, l'angle de rotation $x_3 = \vartheta$ autour de l'axe de rotation, avec la période 2π ; $\vartheta = \text{const.}$ est un demi-plan méridien attaché à l'axe de rotation. En cela nous disposons 3. de deux coordonnées x_1, x_2, pour la détermination de ses points, que nous normaliserons plus précisément dans un instant. L'élément de ligne doit avoir la forme

$$ds^2 = f dx_4^2 - d\sigma^2,$$

où

$$d\sigma^2 = (h_{11} dx_1^2 + 2h_{12} dx_1 dx_2 + h_{22} dx_2^2) + l dx_3^2$$

les coefficients $f, l; h_{11}, h_{12}, h_{22}$ sont des fonctions uniquement de x_1, et x_2. Selon un théorème général sur les formes différentielles quadratiques positives de deux variables, il est possible de choisir les coordonnées x_1, x_2 plus exactement de telle sorte que la partie entre parenthèses avec les coefficients h obtienne la forme « isotherme »

$$h(dx_1^2 + dx_2^2)\,;$$

ainsi la paire de variables x_1, x_2 est alors déterminée jusqu'à un mapping conforme. Après un tel choix de variables,

$$[\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\frac{\partial \beta}{\partial x_2}$$

est généralement fixé pour deux fonctions α, β quelconques de x_1, x_2. Si j'introduis $r = \sqrt{lf}$, la racine du déterminant est

$$\sqrt{g} = w = hr.$$

Pour la densité de l'action H, la formule

$$2\mathfrak{H} = 2H\sqrt{g} = \left\{ {ik \atop r} \right\} \frac{\partial(g^{ik}\sqrt{g})}{\partial x_r} - \left\{ {ir \atop r} \right\} \frac{\partial(g^{ik}\sqrt{g})}{\partial x_k}$$

est valide en général.

Dans notre cas, le premier membre est égal à

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{r=1}^{2}\left\{ {ii \atop r} \right\}\frac{\partial\left(g^{ii}\sqrt{g}\right)}{\partial x_r} = \sum_{i=3}^{4}\sum_{r=1}^{2} \;;$$

on lui trouve immédiatement

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{2h}\left(\left[\frac{w}{l}, l\right] + \left[\frac{w}{f}, f\right]\right).$$

Le deuxième terme, cependant, devient

$$\mathfrak{H}'' = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left(g^{ii}\sqrt{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{[w,r]}{w}.$$

Maintenant

$$\left[\frac{w}{f}, f\right] = -w\frac{[f,f]}{f^2} + \frac{[w,f]}{f} = -w[lnf, lnf] + r[h, lnf] + h[r, lnf],$$

donc pour $lnh = \mu$, nous obtenons

$$\frac{1}{h}\left[\frac{w}{f}, f\right] = -r[lnf, lnf] + r[\mu, lnf] + [r, lnf].$$

Si nous formons l'autre terme de $\mathfrak{H}'$ de la même manière et que nous notons que

$$2lnr = lnl + lnf,$$

nous obtenons

$$\mathfrak{H}' = r[\mu, lnr] + [r, lnr] + \frac{1}{2}r([lnf, lnf] + [lnl, lnl]).$$

Si nous introduisons

$$\lambda = ln\sqrt{l/f},$$

alors nous obtenons

$$\frac{1}{2}([lnf, lnf] + [lnl, lnl]) = [lnr, lnr] + [\lambda, \lambda].$$

Ainsi, nous trouvons

$$\mathfrak{H}' = [\mu, r] - r[\lambda, \lambda].$$

Enfin,

$$\mathfrak{H}'' = \frac{[w,r]}{w} = \frac{[r,r]}{r} + \frac{[h,r]}{h} = 4[\sqrt{r},\sqrt{r}] + [\mu,r].$$

Ainsi, nous avons

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'') = [\mu,r] - \frac{1}{2}r[\lambda,\lambda] + 2\left[\sqrt{r},\sqrt{r}\right]$$

finalement.

Pour formuler le principe d'action, nous devons former

$$\delta\int \mathfrak{H} dx_1 dx_2$$

pour les variations $\delta\mu, \delta\lambda, \delta r,$ qui disparaissent au bord du domaine d'intégration (arbitraire). Si nous fixons

$$\Delta^2\alpha = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2} \quad \text{et} \quad \Delta\alpha = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(r\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(r\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\right)\right\}$$

en général, l'intégration partielle transforme

$$\delta\int \mathfrak{H} dx_1 dx_2 \quad \text{en} \quad \int \delta\mathfrak{H}^* dx_1 dx_2,$$

où

$$\delta\mathfrak{H}^* = -\delta\mu\cdot\Delta^2 r + \delta\lambda\cdot r\Delta\lambda - \delta r\left(\Delta^2\mu + \frac{1}{2}[\lambda,\lambda] + \frac{2}{\sqrt{r}}\Delta^2\sqrt{r}\right).$$

Pour la matière au repos (non chargée), dont la tension est négligeable, le tenseur énergie-impulsion T_{ik} est constitué de la seule composante

$$T_{44} = \frac{\varrho}{g^{44}} \quad (\varrho = \text{densité de masse absolue}),$$

et nous avons

$$\delta\mathfrak{M} \equiv -\sqrt{g}T_{ik}\delta g^{ik} = -\varrho\sqrt{g}\cdot\frac{\partial g^{44}}{g^{44}} = \varrho hr\delta ln f = \varrho^*(\delta r - r\delta\lambda)$$
$$(\varrho^* = h\varrho).$$

Selon le principe d'action, cette différentielle $\delta\mathfrak{M}$ doit maintenant correspondre à $\delta\mathfrak{H}^*$, coefficient pour coefficient. Cela donne (coefficient de $\delta\mu$) :

$$\Delta^2 r = 0.$$

r est donc une fonction potentielle dans le plan x_1x_2. Si z désigne la fonction potentielle conjuguée, de sorte que $z + ir$ est une fonction analytique de $x_1 + ix_2$, alors la transition de x_1, x_2 à z, r est une transformation conforme. Nous pouvons donc supposer a priori que

$$z = x_1, \quad r = x_2.$$

Dans la définition des symboles opérationnels $[], \Delta, \Delta^2$, nous remplaçons donc x_1, x_2 par z et r. Le système de coordonnées est maintenant complètement non ambigu, à l'exception d'une constante additive arbitraire dans z. Sur l'axe de rotation, r doit disparaître pour que l'élément de ligne y reste régulier. J'appelle z, r, ϑ les *coordonnées cylindriques canoniques* ; *la forme canonique correspondante de l'élément de ligne est*

$$f dt^2 - \left\{h(dz^2 + dr^2) + \frac{r^2 d\vartheta^2}{f}\right\}.$$

Le cas « euclidien » y est contenu avec $f = 1, h = 1$. Mais en général, pour pouvoir nous exprimer géométriquement, nous représentons l'espace gravitationnel par un espace image euclidien avec les coordonnées cylindriques z, r, ϑ. Le mappage des deux espaces l'un sur l'autre par le biais des coordonnées canoniques est clairement déterminé, sauf pour une translation arbitraire de l'espace image euclidien dans la direction de l'axe z. Dans cet espace image,

$$\Delta = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right\}$$

est l'opérateur potentiel commun pour les fonctions symétriques en rotation.

En égalisant les coefficients de $\delta\lambda$ dans

$$\delta\mathfrak{H}^* = \delta\mathfrak{M},$$

on obtient

(13) $$\Delta\lambda = -\varrho^*,$$

et en égalisant les coefficients de δr :

(14) $$\Delta^2\mu + \frac{1}{2}[\lambda, \lambda] - \frac{1}{2r^2} = -\varrho^*.$$

Considérons d'abord (13) et introduisons $\psi = ln\sqrt{f}$; puis

$$\lambda = lnr - 2\psi$$

et donc

(15) $$\Delta\psi = \frac{1}{2}\varrho^*,$$

ou, si nous revenons aux unités de mesure du système CGS, ajoutons le facteur $8\pi\varkappa$ à droite,

$$\Delta\psi = 4\pi\varkappa\varrho^*;$$

c'est-à-dire que la solution ψ régulière sur l'axe de rotation est remise en question. Nous sommes donc arrivés à l'équation de Poisson ordinaire dans le système de coordonnées canonique ; comme elle est linéaire, le principe de superposition s'applique à $\psi = ln\sqrt{f}$.

Pour l'anneau infiniment mince décrit par l'élément de surface $drdz$ du plan canonique r, z en rotation autour de l'axe z, on trouve

$$\psi = -\frac{\varkappa m}{R}$$

comme solution de l'équation de Poisson lorsque

$$2\pi\varrho^* rdrdz = m$$

est fixé, comme on le sait.

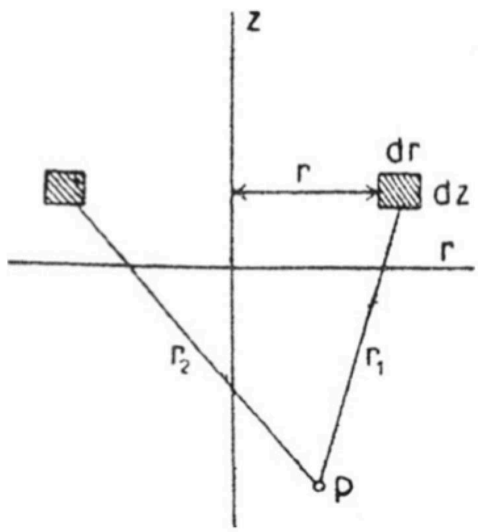

Fig.1.

R, la « distance » du point de contact P par rapport à l'anneau, est la moyenne arithmétique-géométrique des distances r_1, r_2 du point P par rapport aux deux points d'intersection de l'anneau avec le plan méridien dans lequel se trouve P :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\omega}{\sqrt{r_1 cos^2\omega + r_2 sin^2\omega}};$$

toutes les expressions s'entendent au sens euclidien, par rapport aux coordonnées canoniques ! Si seul cet anneau a une masse, alors

$$\sqrt{f} = e^{-\frac{\varkappa m}{R}};$$

pour les grands R, cela équivaut à

$$1 - \frac{\varkappa m}{R}.$$

m s'avère donc être la masse gravitationnelle contenue dans l'anneau et ϱ^* donc la densité de masse dans le système de coordonnées canonique. — Nous sommes arrivés au résultat simple suivant :

Si la distribution de la masse (à symétrie de révolution) *dans le système de coordonnées canonique est connue et que $c^2\psi$ est son potentiel newtonien, alors, selon la théorie d'Einstein,*

$$\sqrt{f} = e^{\psi}.$$

Nous introduisons également ψ au lieu de λ dans l'équation (14) ; nous avons :

$$[\lambda, \lambda] = \frac{1}{r^2} - \frac{4}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + 4[\psi, \psi].$$

Si nous multiplions ensuite (14) par $\frac{1}{2}$, ajoutons (15) ou de façon équivalente

$$\Delta^2\psi + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2}\varrho^*$$

et prenons

$$\gamma = ln\sqrt{hf} = \frac{\mu}{2} + \psi$$

comme inconnue, nous obtenons

(16) $$\Delta^2\gamma = -[\psi, \psi],$$

c'est-à-dire une équation de Poisson dans le plan r, z. Pour que l'élément de droite reste régulier sur l'axe de rotation, il faut que γ disparaisse sur celui-ci ; il faut donc prendre la solution uniquement déterminée de l'équation de Poisson dans le demi-plan méridien pour γ qui disparaît à l'infini et sur l'axe de rotation. Au demeurant, si l'on se contente de l'approximation qui résulte de la suppression des membres quadratiques, alors nous devons mettre $\gamma = 0,\ h = 1/f$.

Il est très instructif de voir comment le point de masse s'intègre dans la théorie générale de la distribution de masse à symétrie de rotation qui vient d'être développée. Nous partons de la représentation (12) et y introduisons des coordonnées cylindriques au lieu des coordonnées « rectangulaires » x_i :

$$x_1 = rcos\vartheta, \quad x_2 = rsin\vartheta, \quad x_3 = z;$$

le r dans (12) qui apparaît doit alors bien sûr être remplacé par $\sqrt{r^2 + z^2}$. Ensuite, nous effectuons la transformation conforme

$$(r + iz) - \frac{(a/2)^2}{r+iz} = r^* + iz^*(\vartheta = \vartheta^*)$$

dans le demi-plan méridien ; alors notre élément de ligne prend effectivement la forme canonique, et le calcul aboutit à

$$f = \frac{\frac{r_1+r_2}{2} - a}{\frac{r_1+r_2}{2} + a}, \quad hf = \frac{\left(\frac{r_1+r_2}{2} - a\right)\left(\frac{r_1+r_2}{2} + a\right)}{r_1 r_2},$$

où la signification de r_1, r_2 peut être prise dans la Fig. 2.

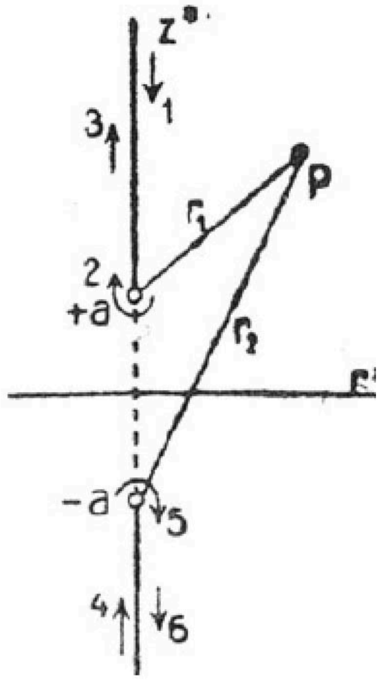

Fig. 2.

$\psi = ln\sqrt{f}$ dans l'espace canonique de coordonnées cylindriques z^*, r^*, ϑ^* est le potentiel newtonien de la distance

$$r^* = 0, \quad -a \leq z^* \leq +a,$$

qui est uniformément occupée par la masse : le « point de masse » apparaît donc dans les coordonnées canoniques non pas comme une sphère mais comme une distance, le demi-plan méridien comme le plan plein fendu le long des deux demi-droites fortement étendues, l'axe de rotation comme la fente (reliée à l'infini), qui doit être parcourue comme indiqué sur la figure par les flèches et les chiffres ajoutés. La moitié droite du plan plein correspond à l'extérieur, la moitié gauche à l'intérieur du point de masse. Cela confirme une fois de plus le point de vue que nous avons avancé au § 4 : si nous ne tenions pas compte de cet « intérieur », nous n'arriverions pas à la bonne solution. Voyons que $ln\sqrt{hf}$ est en fait la solution de l'équation (16) dans le plan solide fendu r^*, z^* qui disparaît aux bords de la fente. — On aurait naturellement été conduit à la solution stricte actuelle des équations gravitationnelles par la tâche de déterminer le champ d'une distance de longueur $2\varkappa m$ occupée par la masse m. Après avoir déterminé le champ gravitationnel, il se serait toutefois avéré, en mesurant la « distance » avec l'élément spatial invariant $d\sigma^2$, qu'il ne s'agit pas du tout d'une distance, mais d'une surface sphérique : dans la théorie stricte de la gravitation, on ne peut toujours déterminer qu'a posteriori à quel type de distribution de masse correspond une solution, à laquelle on est arrivé par une approche particulière.

§ 6. Le champ de charges distribuées avec une symétrie de rotation

Si les masses au repos portent des charges électriques statiques, alors, en plus du champ gravitationnel, un champ électrostatique apparaît, qui est dérivé d'un potentiel $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$. x_1, x_2 sont, comme au début du § 5, des coordonnées isothermes dans le demi-plan méridien. La densité effective de l'électricité est déterminée à partir de

$$L = -\frac{[\Phi\Phi]}{hf}, \quad L\sqrt{g} = -[\Phi\Phi]e^{\lambda} = -[\Phi\Phi]\frac{r}{f}.$$

L'intégrale de $\delta\left(L\sqrt{g}\right)$ sur une zone quelconque du plan x_1, x_2, si les variations $\delta\Phi$, $\delta\lambda$ disparaissent aux limites de la zone, est égale à l'intégrale de la différentielle

$$\delta\mathfrak{L}^* = -[\Phi\Phi]\frac{r}{f}\delta\lambda + 2r\Delta_f\Phi \cdot \delta\Phi,$$

$$\Delta_f = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right\}.$$

Si, selon le § 1, on considère non seulement l'effet de champ mais aussi l'effet de substance de l'électricité, le principe général d'action par variation de Φ donne d'abord :

(17) $$\Delta_f\Phi = -\varepsilon^* = -h\varepsilon \quad (\varepsilon = \text{densité de charge absolue}).$$

Pour déterminer le champ gravitationnel, cependant, nous obtenons l'équation

(18) $$\delta\mathfrak{H}^* = \delta\mathfrak{M} + \delta\mathfrak{L}^*.$$

en fixant $\delta\Phi = 0$.

À partir de là, nous retrouvons d'abord $\Delta^2 r = 0$; cela rend possible l'introduction des *coordonnées canoniques*, et dans ce sens nous fixons à nouveau $x_1 = z, x_2 = r$. L'équation (17) est maintenant :

(19) $$\Delta_f\Phi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right\} = -\varepsilon^*.$$

La constante additive arbitraire, qui apparaît dans Φ, est choisie, comme d'habitude, pour que Φ disparaisse à l'infini.

La comparaison des coefficients de $\delta\lambda$ dans (18) donne l'eq. (13) du paragraphe précédent avec la modification suivante : à droite de l'élément de masse ϱ^* est ajouté l'élément supplémentaire $1/f[\Phi\Phi]$, qui est dérivé de l'énergie électrique qui a également un effet gravitationnel ; ainsi :

(20) $$\Delta_f f = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right\} = \varrho^* + \frac{1}{f}[\Phi\Phi].$$

L'équation (14) du § 5 peut être repris tel quel. Nous formons l'expression $\frac{1}{2}\Delta_f(\Phi^2)$; sur la base des équations

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^2}{\partial z} = \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^2}{\partial r} = \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

et de la loi fondamentale électrostatique (19), elle a la valeur

$$-\varepsilon^*\Phi + \frac{1}{f}[\Phi,\Phi].$$

Si nous introduisons donc

$$f - \frac{1}{2}\Phi^2 = F, \quad \varrho^* + \varepsilon^*\Phi = \sigma^*,$$

nous pouvons remplacer la formule (20) par

(21) $$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{f}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right\} = \sigma^*.$$

Si la masse et la charge ne se trouvent que sur un seul anneau élémentaire, qui a un rayon r et une section transversale $drdz$ dans le système de coordonnées canonique, et que nous fixons

$$2\pi\sigma^* r dr dz = m, \quad 2\pi\varepsilon^* r dr dz = e,$$

il résulte des équations (19), (21) que nécessairement

$$F = \text{const.} - \frac{m}{e}\Phi.$$

Avec un choix approprié de l'unité de mesure du temps, celui qui se produit ici devient $\text{const.} = 1$, et nous avons

$$f = 1 - \frac{m}{e}\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2,$$

ou avec l'introduction du système CGS,

$$f = 1 - \frac{2m\varkappa}{e}\Phi + \frac{\varkappa}{c^2}\Phi^2.$$

Si nous insérons cette valeur dans (19), nous obtenons la loi de potentiel linéaire de l'électrostatique ordinaire pour

$$(22) \qquad \int \frac{d\Phi}{1-\frac{2m\varkappa}{e}\Phi+\frac{\varkappa}{c^2}\Phi^2}.$$

Si l'on détermine à partir de cette intégrale en fonction de la position dans le demi-plan méridien et de celle-ci Φ et f — nous allons effectuer le calcul tout à l'heure — on reconnaît que m est la masse gravitationnelle contenue dans l'anneau, e la charge contenue dans celui-ci. Par conséquent, σ^* et ε^* sont des densités de masse et de charge dans le système de coordonnées canonique ; *il est particulièrement remarquable que ce ne soit pas* ϱ^* *mais* $\sigma^* = \varrho^* + \varepsilon^*\Phi$ *qui apparaisse comme densité de masse.*[16]

Plus généralement, le problème peut être résolu de cette manière si l'on suppose que la masse et la charge sont distribuées arbitrairement mais de la même manière, c'est-à-dire que le rapport σ^*/ε^* est une constante indépendante du lieu. L'intégrale de volume euclidienne de σ^* dans l'espace des coordonnées canoniques, la masse totale, est désignée par m, l'intégrale de même forme de ε^*, la charge totale, par e. Ce rapport constant sera alors égal à m/e. (22) est aussi maintenant le potentiel électrostatique ordinaire de la distribution de charges ε^* dans l'espace canonique, déterminé sans tenir compte de la gravité. Nous introduisons (cf. § 4, dernier paragraphe) les rayons gravitationnels a, a' de la masse m (concentrée sur un point) et de la charge e et, en privilégiant le cas $a' > a$, nous fixons :

$$\frac{a}{a'} = sin\varphi_0.$$

Si nous calculons l'intégrale (22), nous arrivons au résultat suivant :

Si la distribution des charges (à laquelle, selon la condition préalable, la distribution des masses est proportionnelle) est connue dans le système de coordonnées canonique et que φ *est son potentiel « élémentaire », c'est-à-dire déterminé sans tenir compte de la gravité selon la théorie élémentaire, multiplié par le facteur constant*

$$\frac{\sqrt{\varkappa}}{c} cos\varphi_0,$$

[16] Si l'on prend $\varrho^* = 0$, on obtient le rayon habituel a'' pour la zone sur laquelle la charge d'un électron est répartie. Il n'est cependant pas exclu que le membre $\varepsilon^*\Phi$ soit presque entièrement compensé par un ϱ^* négatif ; je renvoie pour cela à la théorie de Mie. Il s'agirait justement d'expliquer pourquoi l'électron possède une si petite masse, c'est-à-dire d'où vient le nombre pur a/a' de la taille 10^{-20} ! La charge réelle de l'électron est donc peut-être concentrée dans une zone beaucoup plus petite, et a'' n'a que la signification du « rayon d'action ».

alors nous avons exactement

(23) $$\Phi = \frac{e}{a'} \frac{sin\varphi}{cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad \sqrt{f} = \frac{cos\varphi_0}{cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Dans le cas de l'anneau,

$$\varphi = \frac{a' cos\varphi_0}{R}$$

en particulier, où R signifie la « distance » du point récepteur P par rapport à l'anneau. Pour un grand R, cela donne pour $\sqrt{f}$ la formule asymptotique

$$1 - \frac{a}{R},$$

ce qui montre que m est bien la masse gravitationnelle, comme affirmé ci-dessus.

Sous les présentes hypothèses, il reste à calculer le second coefficient h de l'élément de ligne canonique. L'équation (14) du § 5, est à notre disposition à cet effet. Si on le traite de la même manière que là-bas, on obtient d'abord

$$\Delta^2 \gamma + \frac{\left[\sqrt{f}, \sqrt{f}\right]}{f} = \frac{1}{2} \frac{[\Phi, \Phi]}{f}$$

pour $\gamma = ln\sqrt{hf}$.

Si l'on passe au système CGS — le facteur $\frac{1}{2}$ du côté droit est alors à remplacer par $\varkappa / c^2$ — et que l'on utilise les expressions (23), cette équation de détermination pour γ prend la forme simple de

(24) $$\Delta^2 \gamma = [\varphi\varphi].$$

Si nous abandonnons la condition préalable de la proportionnalité de la charge et de la masse, la solution ne peut plus être déterminée de manière aussi simple. Or, pour l'électron et le noyau atomique, les rapports numériques sont tels que a/a' est très petit, de l'ordre de 10^{-20} et 10^{-17} respectivement.

Dans ces conditions, l'effet de masse peut donc être complètement négligé à côté de celui de la charge. Si nous spécialisons nos formules de cette manière, c'est-à-dire en fixant $a = 0,\ \varphi_0 = 0$, nous arrivons au théorème :

Si la distribution (à symétrie de révolution) des charges au repos, à côté desquelles l'action de masse peut être négligée, est connue dans le système de coordonnées canonique et que φ est leur potentiel élémentaire multiplié par $\sqrt{\varkappa}/c$, alors nous avons

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{\varkappa}} tan\varphi, \quad \sqrt{f} = \frac{1}{cos\varphi},$$

en tenant compte de la gravité.

L'apparition des fonctions trigonométriques, qui sont si étroitement liées aux nombres entiers en raison de leur périodicité, a quelque chose de surprenant ; dans les zones où φ atteint des valeurs comparables à 1, le principe de superposition ne s'applique plus, mais les potentiels des forces agissantes sont des fonctions trigonométriques de la grandeur qui satisfait à ce principe. Dans le cas de charges suffisamment concentrées, il peut arriver qu'une surface S les englobant se produise, sur laquelle φ atteint la valeur $\pi/2$ et donc Φ et $\sqrt{f}$ deviennent infinis. Puisque hf reste fini sur cette « surface limite du monde extérieur » selon (24), l'élément linéaire spatial $d\sigma^2 = 0$ devient sur elle ; mesuré au moyen de l'élément linéaire invariant, S s'avère donc être sans expansion. Pour la compréhension des processus dans l'atome, notre résultat peut difficilement être rendu utile ; car les déviations du champ de la charge électronique e par rapport à celui déterminé par la théorie classique sans gravitation ne sont perceptibles qu'à des distances de l'ordre de $a' \sim 10^{-33}$ cm !

La charge ponctuelle à symétrie sphérique apparaît dans le système de coordonnées canonique comme un disque circulaire de rayon a', sur lequel l'électricité est distribuée comme elle l'est selon l'électrostatique élémentaire sur une plaque métallique chargée.

(Reçu le 8 août 1917.)