Extension maximale de la métrique de Schwarzschild[1]

M. D. Kruskal[2]
Projet Matterhorn, Université de Princeton, Princeton, New Jersey
(Reçu le 21 décembre 1959)

Traduction libre de droits,
supervisée par Jean-Pierre Petit, avec l'aide de Laurent v. D.

On présente une transformation particulièrement simple de la métrique de Schwarzschild dans de nouvelles coordonnées, par laquelle la « singularité sphérique » est supprimée et l'extension maximale sans singularité est clairement exposée.

L'expression[3] bien connue de la métrique de Schwarzschild autour d'un centre de masse m (g) ou $m^* = \left(Gm/c^2\right)$ (cm) est

(1) $$ds^2 = -(1 - 2m^*/r)dT^2 + (1 - 2m^*/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\omega^2,$$

avec

(2) $$d\omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Kasner, Lemaître, Einstein et Rosen, Robertson, Synge, Ehlers, Finkelstein et Fronsdal ont montré[4] que les singularités à $r = 0$ et $r = 2m^*$ sont de caractère très différent (tableau I).

Tableau I. Singularités de la métrique de Schwarzschild, réelles et apparentes.

r	Représentation invariante de la courbure	Singularité dans la métrique ?	Singularité dans le système de coordonnées de Schwarzschild ?
0	Infini comme m^*/r^2	Oui	Oui
$2m^*$	Fini	Non	Oui

[1] Ce travail a été présenté sous forme abrégée par J. A. Wheeler au nom de l'auteur à la Conférence de Royaumont sur les théories relativistes de la gravitation, juin 1959.
[2] En congé 1959-60 à l'Institut Max-Planck d'astrophysique, Aumeisterstrasse 2, Munich 23, Allemagne.
[3] K. Schwarzschild, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Physik.-math. Kl. 189 (1916).
[4] E. Kasner, Am. J. Math. **43**, 130 (1921); G. Lemaître, Ann. soc. sci. Bruxelles **A53**, 51 (1933); A. Einstein et N. Rosen, Phys. Rev. **48**, 73 (1935); H. P. Robertson, conférence à Toronto, 1939 (non publié), cité par J. L. Synge; J. L. Synge, Proc. Roy. Irish. Acad. **A53**, 83 (1950); J. Ehlers, thèse, Hamburg, 1957 (non publié); D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958); C. Fronsdal, Phys. Rev. **116**, 778 (1959).

Leur conclusion — à savoir qu'il n'y a pas de véritable singularité à $r = 2m^*$ — peut être démontrée par un choix de coordonnées apparemment plus simple et plus explicite que tous ceux qui ont été présentés jusqu'ici à cette fin. Une façon de la trouver est de chercher un système de coordonnées à symétrie sphérique dans lequel les rayons lumineux radiaux ont partout la pente $dx^1/dx^0 = \pm 1$:

(3) $$ds^2 = f^2(-dv^2 + du^2) + r^2 d\omega^2.$$

En identifiant (3) avec (1) et en exigeant que f dépende uniquement de r et reste fini et non nul pour $u = v = 0$, on trouve les équations de transformation essentiellement uniques suivantes entre l'extérieur de la « singularité sphérique », $r > 2m^*$, et le quadrant $u > |v|$ dans le plan des nouvelles variables (tableau II).

Tableau II. Relation entre les nouvelles coordonnées
et les coordonnées de Schwarzschild.

Nouvelles coordonnées en termes de coordonnées de Schwarzschild	Coordonnées de Schwarzschild en termes de nouvelles coordonnées
$u = \left[\left(\frac{r}{2m^*}\right) - 1\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4m^*}\right) \cosh\left(\frac{T}{4m^*}\right)$	$\left[\left(\frac{r}{2m^*}\right) - 1\right] \exp\left(\frac{r}{2m^*}\right) = u^2 - v^2$
$v = \left[\left(\frac{r}{2m^*}\right) - 1\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4m^*}\right) \sinh\left(\frac{T}{4m^*}\right)$	$T/4m^* = \operatorname{arctanh}(v/u) = \frac{1}{2}\operatorname{arctanh}[2uv/(u^2 + v^2)]$
$f^2 = (32m^{*3}/r)\exp(-r/2m^*) =$ une fonction transcendantale de $(u^2 - v^2)$	

Les nouvelles coordonnées donnent une extension analytique, $\mathcal{E}$, de cette région limitée de l'espace-temps, $\mathcal{L}$, qui est décrite sans singularité par les coordonnées de Schwarzschild avec $r > 2m^*$. La métrique de la région étendue se raccorde en douceur et sans singularité à la métrique à la frontière de $\mathcal{L}$ à $r = 2m^*$. Le fait que cette extension soit possible était déjà indiqué par le fait que les invariants de courbure de la métrique de Schwarzschild sont parfaitement finis et se comportent bien à $r = 2m^*$.

L'espace étendu, $\mathcal{E}$, est en outre l'extension *maximale* sans singularité de $\mathcal{L}$ qui soit possible, pour la raison suivante : comme on peut le voir par un examen direct des géodésiques (peut-être plus simplement effectué principalement dans les coordonnées familières r, T, avec une attention particulière aux géodésiques sur lesquelles $r = 2m^*$ est soit isolé, soit partout), chaque géodésique, suivie dans n'importe quelle direction, soit se heurte à la « barrière » des singularités intrinsèques à $r = 0$ $(v^2 - u^2 = 1)$, soit est prolongeable à l'infini par rapport à sa « longueur naturelle ». (Celle-ci est mesurée en termes de nombre de transferts parallèles d'un vecteur tangent infinitésimal, n'est déterminée que jusqu'à un facteur d'échelle arbitraire, et non seulement s'accorde avec le temps ou la distance appropriés le long de géodésiques semblables au temps ou à l'espace, mais est définie même pour les géodésiques nulles). Mais il est évident que s'il y avait une transformation (aussi sauvage soit-elle à la frontière) entre $\mathcal{E}$ et une sous-région $\mathcal{E}'$ d'une autre extension $\mathcal{F}$ sans singularité, il devrait y avoir une géodésique (pour le moins) allant de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{F} - \mathcal{E}'$, en contradiction avec la propriété susmentionnée.

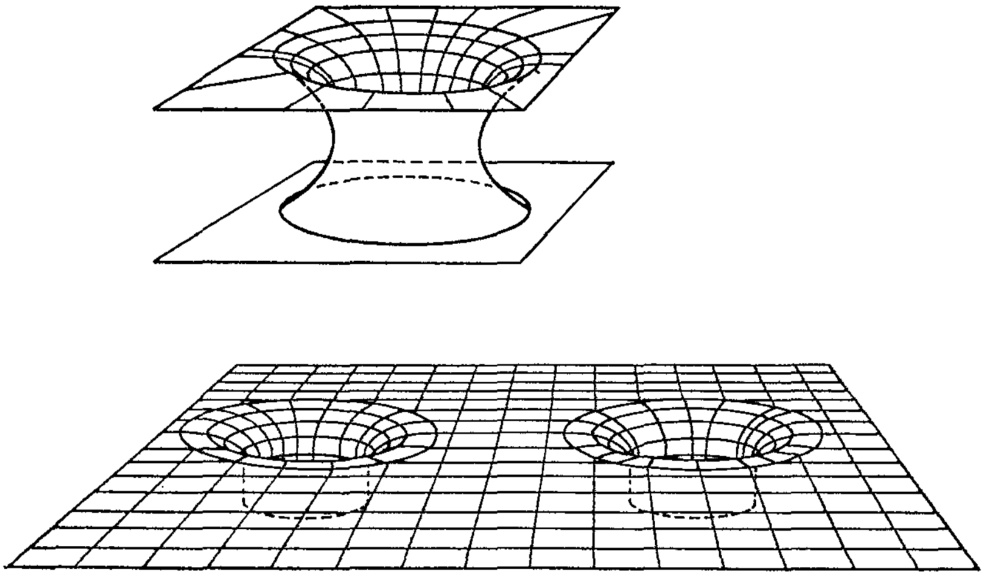

FIG. 1. Deux interprétations de la « métrique de Schwarzschild maximalement étendue » tridimensionnelle à l'instant $T = 0$. En haut : une connexion ou un pont au sens d'Einstein et Rosen entre *deux* espaces autrement euclidiens. En bas : un trou de ver au sens de Wheeler reliant deux régions dans *un* espace euclidien, dans le cas limite où ces régions sont extrêmement éloignées l'une de l'autre par rapport aux dimensions de la gorge du trou de ver.

L'extension maximale $\mathcal{E}$ a une *topologie non euclidienne* (Fig. 1) et tombe donc dans la classe des topologies considérées par Einstein et Rosen, Wheeler, et Misner et Wheeler[5]. Il est remarquable qu'elle présente justement un tel « pont » entre deux espaces autrement euclidiens, comme Einstein et Rosen ont cherché à l'obtenir en modifiant les équations de champ. On peut également l'interpréter comme décrivant la « gorge d'un trou de ver » au sens de Wheeler, reliant deux régions distantes dans *un* espace euclidien dans la limite où la séparation des bouches des trous de ver est très grande par rapport à la circonférence de la gorge. La longueur de la connexion du trou de ver peut bien sûr être excessivement courte par rapport à la distance entre les bouches du trou de ver dans l'espace euclidien approximatif. Cependant, comme le montre la figure 2, il est impossible d'envoyer un signal à travers la gorge de manière à contredire le principe de causalité ; en effet, la gorge « pince » le rayon lumineux avant qu'il ne puisse passer. Cet effet de pincement pose des problèmes de principe fondamentaux qui nécessitent une étude plus approfondie.

[5] J. A. Wheeler, Phys. Rev. **97**, 511 (1955); C. W. Misner et J. A. Wheeler, Ann. Physik **2**, 525 (1957).

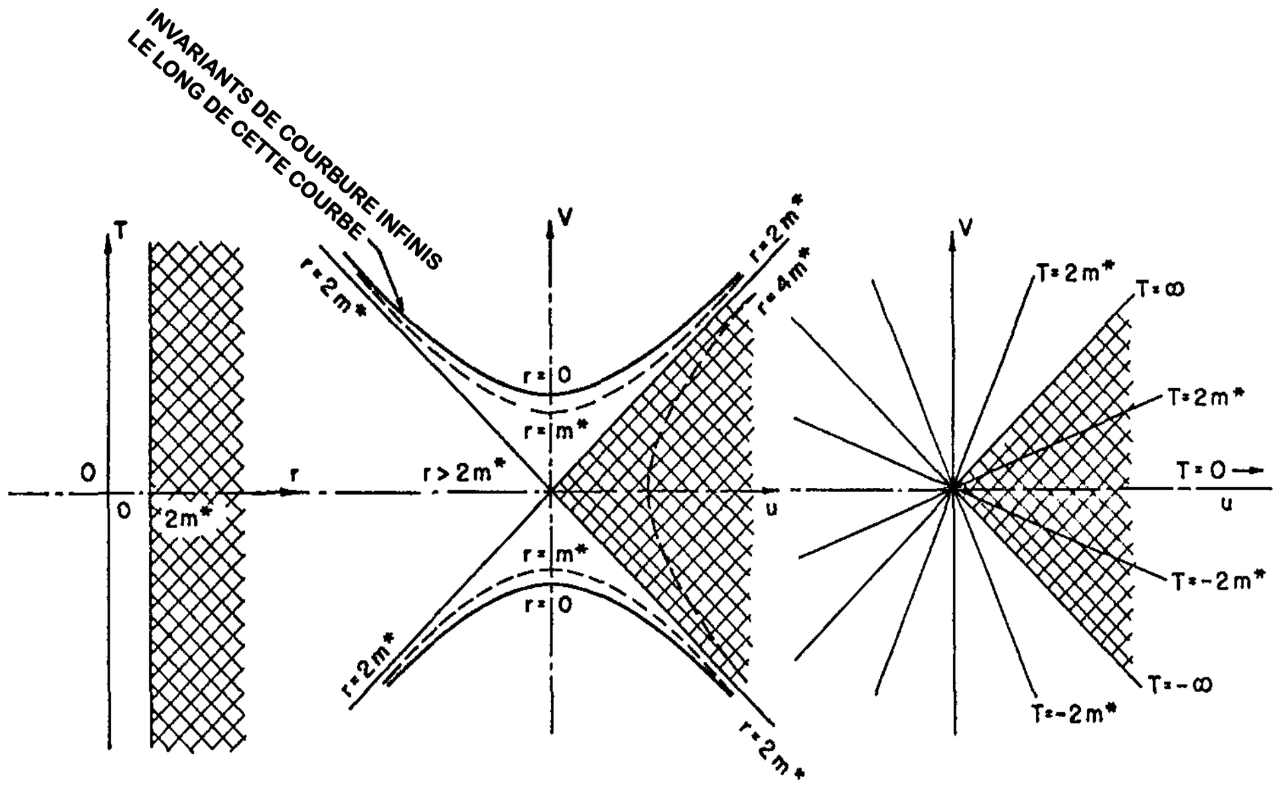

FIG. 2. Régions correspondantes des plans (r,T) et (u,v). Dans ce dernier, les courbes de constante r sont des hyperboles asymptotiques aux lignes $r=2m^*$ tandis que T est constante sur les droites passant par l'origine. L'extérieur de la sphère singulière, $r>2m^*$, correspond à la région $|v|<u$ (les zones hachurées). La ligne entière $r=2m^*$ dans le plan (r,T) correspond à l'origine $u=v=0$, tandis que deux familles unidimensionnelles de points limites idéaux avec $r\to 2m^*$ et $T\to\pm\infty$ correspondent aux points limites restants $u=|v|>0$.

Dans le plan (u,v), la métrique est entièrement régulière non seulement dans la zone de battement mais dans toute la zone comprise entre les deux branches de l'hyperbole $r=0$. Cela comprend deux images de l'extérieur de la singularité sphérique et deux de son intérieur. (Les expressions du tableau II sont valables dans le quadrant droit $u>|v|$. Pour obtenir des formules valables dans le quadrant gauche, remplacer partout u et v par leurs valeurs opposées. Pour obtenir des formules valables dans le quadrant supérieur ou inférieur, remplacer u par $\pm v$, v par $\pm u$, et $r/2m^*-1$ par son opposé partout. Notons que la formule pour r et la formule finale pour T restent invariantes sous ces substitutions). Les géodésiques nulles purement radiales $(d\theta=d\varphi=0)$ sont des lignes inclinées à 45°. Les points avec $r=2m^*$ n'ont pas de distinction topologique locale, mais une distinction globale : si une particule test traverse $r=2m^*$ vers l'intérieur (où r est semblable au temps et T semblable à l'espace), elle ne peut jamais en ressortir mais doit inévitablement heurter la singularité inamovible $r=0$ (invariants de courbure infinis). Cette circonstance garantit que l'on ne peut pas violer la causalité ordinaire dans l'« univers principal » en envoyant des signaux via le trou de ver effectivement plus rapides que la lumière.