Annexe à la cinquième partie de la video JANUS 22

24 octobre 2017

Jean-Pierre Petit
jp.petit@mailaps.org

Ceci est le premier pdf en tant que "pièce attachée à une video", ce qui visera à satisfaire les amateurs d'équations. Mais dans cette cinquième partie de JANUS 22 cette pièce est indispensable.

Dans mon site il y a un dossier

http://www.jp-petit.org/papers

avec un sous-dossier

http://www.jp-petit.org/papers/cosmo

où il sera possible de loger toute une bibliographie

Voici ce que vous pouvez d'ores et déjà télécharger :

Les deux articles de Schwarzschild, en allemand et anglais.

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Schwarzschild-exterior-de.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Schwarzschild-exterior-en.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Schwarzschild-interior-de.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Schwarzschild-interior-en.pdf

Ainsi que les versions récemment traduites en français, par les soins de H.Traccard

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Schwarzschild-exterior-fr.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Schwarzschild-interior-fr.pdf

Ainsi que les articles suivants :

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Abrams.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Antoci.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Corda.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1929-Oppenheimer.pdf
- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Hilbert.de.pdf

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Hilbert.en.pdf

Dans ce pdf il pourra y avoir des erreurs, des coquilles. Face à la demande vive des internautes, je dois produire tous ces documents à marche force (25 vidéos en 7 mois, dont une d'une heure !). Depuis 7 mois je suis au travail tous les matins à 5h30, 6h, sept jours sur sept, et je travaille le nombre d'heures qui est compatible avec ce que je peux encaisser, vu mon âge.

Si vous trouvez des erreurs, signalez-les-moi. L'avantage d'un tel pdf c'est qu'il est modifiable, ce qui n'est pas le cas des videos Youtube, impossible à modifier dès qu'elles sont téléchargées.

Ainsi, dans la dernière, la quatrième partie de JANUS 22 (référence [1]) j'ai téléchargé une mauvaise image tout à fait à la fin. La solution de Schwarzschild, dotée d'un terme croisé, n'est pas :

Schwarzschild's metric plus radial frame-dragging :

$$ds^2 = (1 - \frac{\alpha}{r})c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \frac{2\alpha}{r} c^2 dr\, dt$$

Mais :

Time-independent spherically symmetric solution with radial frame-draggin, Eddington 1924 :

$$ds^2 = (1 - \frac{\alpha}{r})c^2 dt_E^2 - (1 + \frac{\alpha}{r})\, dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \boxed{- \frac{2\alpha}{r} c^2 dr\, dt_E}$$

t_E = *"Eddington's time"*

Des choses doivent être tirées au clair. Comme cela ne peut pas s'effectuer via des séminaires dans les instances de recherche existantes et à travers des échanges avec des spécialistes, force m'est de "mettre tout cela sur la place publique". Il faut donc fournir aux lecteurs tous les éléments qui puissent leur permettre de se construire leur propre jugement.

Le premier élément c'est de pouvoir disposer d'un livre sur la Relativité Générale qui soit de qualité, auquel je puisse me référer. Je demande donc aux lecteurs de télécharger l'ouvrage d'Adler Schiffer et Bazin, publié aux éditions Mac Graw-Hill, intitulé *"Introduction to General Relativity".* [2]

Voici l'adresse où vous pouvez télécharger le pdf de cet ouvrage :

http://www.jp-petit.org/books/asb.pdf

Avant d'entrer dans le vif du sujet de cette cinquième partie de Janus 22 je vais extraire des passages de cet ouvrage qui illustre à lui seul le paradoxe de cette extension de la solution de Schwarzschild.

Page 186 on peut lire :

Next let us consider the above symmetry requirements and try to form the simplest line element which meets the demands of time-independence and radial symmetry. The reasoning which follows is based on plausibility only, in order to guess a heuristically reasonable and convenient line element. We should expect the line element to be invariant under inversion of the coordinate interval dx^0 (representing time); that is, ds^2 should be invariant under the replacement of dx^0 by $-dx^0$. This dictates that we use Gaussian coordinates in which the off-diagonal elements g_{0i} of the metric tensor are zero and the line element has the form $g_{00}\,(dx^0)^2 + g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ with the g_{ik} independent of x^0. This is referred to as a *static* metric; it is to be distinguished from a metric which is merely independent of time, or *stationary*, as discussed in Sec. 3.7. Second, if there is to be *no preferred angular direction* in space, the line element should be independent of a change of $d\theta$ to $-d\theta$ and a change of $d\varphi$ to $-d\varphi$. This requires that there be no terms of the form $dr\,d\theta$, $d\theta\,d\varphi$, etc., in the line element, so the metric tensor must be entirely diagonal for the type of solution we desire. Thus we may write ds^2 as

Traduction :

> Le raisonnement est fondé sur des seuls crirères de plausibilité, de manière à « deviner » quellle formulation de la métrique pourrait, à travers cette démarche heuristique, apparaître comme raisonable et commode.
>
> On devrait alors s'attendre (?...) à ce que la métrique soit invariante en changeant $dx°$ en – $dx°$ (Pourquoi ?). Ceci imposerait, en utilisant des coordonnées Gaussiennes, l'absence de terme croisé dr dx° dans le tenseur métrique et que celle ci ait la forme $g_{oo}(dx°)^2 + g_{ik}dx^i dx^k$ avec des g_{ik} indépendants de x°. Une expression que les auteurs qualifient alors de *métrique statique*, par opposition à une métrique stationnaire, telle que discutée à la section 3.7.

Je vois souvent des étudiants dire :

- *Mais comment trouver des idées de recherche, pour des travaux théoriques ? ».*

Ce à quoi je réponds :

- Prenez des ouvrages de théorie, considérés comme des documents de base, et localisez tous les passages portrant les mots « reasonable, assume, convenient, heuristic, etc … et demandez-vous ce qu'il adviendait si vous cessiez soudain d'être « raisonable », « commode », « heuristique » ….

Les seules contraintes qu'un théoricien est censé suivre doivent se référer à la physique, aux phénomènes, aux observations. Et encore, on doit prendre ces contraintes avec des pincettes. Car les observations et les expériences sont toujours décodées à travers un crible logique, un modèle.

Jadis l'Académie de Sciences française se refusait à examiner des météorites car « des pierres ne pouvaient pas tomber du ciel ». On verra comment, dans son ouvrage, le grand Steven Weinberg lui-même élimine d'emblée les états d'énergie négative, simplement parce que « ça n'existe pas ».

Le passage que je viens de citer est important car il est la clé de la suvivance du modèle des trous noirs. Comme vous le verrez dans la suite de ce document, quand on enlève cette contrainte d'absence de terme croisé en $dr\ dx°$, qui ne repose sur rien d'autre qu'une « plausibilité », alors le château de cartes s'effondre.

Et ils partent donc avec :

(6.4) $$ds^2 = Ac^2dt^2 - B\,dr^2 - C(\,r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2\,)$$

et ils ajoutent :

The above element is the simpliest form which is dictated by the symmetry requirements

Non… des conditions imposées par les symétries choisies collent avec

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - B\,dr^2 - C(\,r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2\,) + D(r)\,dr\,dt$$

Dans une telle formulation on a toujours ce qui découle d'hypothèses purement physiques : la symétrie sphérique et les coefficients sont indépendants du temps.

Continuons. Quelques lignes plus loin :

By means of (6.5) we can express $\hat{B}$ also as a function of the new radial coordinate $\hat{r}$. It is now clear that writing the line element (6.3) in terms of $\hat{r}$ by substituting from (6.6) and (6.7) yields a line element in which the coefficient of the angular term $d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2$ is 1. This, however, is equivalent to taking $C \equiv 1$ in the line element (6.4), so we conclude that, by a suitable choice of the radial coordinate, we can put the line element in the form

(6.8) $$ds^2 = Ac^2\,dt^2 - B\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)$$

les auteurs répercutent l'erreur commise par Hilbert en décembre 1916 en introduisant "une nouvelle coordonnée radiale" :

Téléchargez :

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Hilbert.de.pdf

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Hilbert.en.pdf

Prenons la version anglaise. Allez à la page 1029. Que lisez-vous ?

potentials $g_{\mu\nu}$ at infinity, and which moreover offers advantages for my later investigations. The assumptions about the $g_{\mu\nu}$ are the following:

1. The metric is represented in a Gaussian coordinate system, except that g_{44} is left arbitrary, i.e. we have

$$g_{14} = 0, \qquad g_{24} = 0, \qquad g_{34} = 0.$$

2. The $g_{\mu\nu}$ are independent of the time coordinate x_4.
3. The gravitation $g_{\mu\nu}$ is centrally symmetric with respect to the origin of coordinates.

According to Schwarzschild the most general metric conforming to these assumptions is represented in polar coordinates, where

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\vartheta \\ w_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ w_3 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ w_4 &= l, \end{aligned}$$

le temps !

by the expression

$$F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dl^2 \tag{42}$$

where $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ are still arbitrary functions of r. If we put

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

then we are equally justified in interpreting r^*, ϑ, φ as spatial polar coordinates. If we introduce r^* in (42) instead of r and then eliminate the sign *, the result is the expression

$$M(r)dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + W(r)dl^2, \tag{43}$$

Vous trouvez l'expression « centrally symmetric » (« à symétrie centrale » : ce qui totalement différent de « à symétrie sphérique ». Ca implique que l'objet ait … un centre). Et Hilbert estime qu'il est « également justifié » d'identifier sa variable r * à la composante « rayon » de coordonnées polaires.

Ca date de 1916. L'erreur est partie de là et tous l'ont reconduite. Ca n'est que 2003 que l'Italien Antoci l'a détectée. Téléchargez :

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/Antoci.pdf

L'article d'Antoci de 2003 a été publié dans General Relativity and Gravitation. Or on m'a fait récemment passer un article de 2006 d'un eEspagnol, J. Senovilla, paru dans la même revue, intitulé « The Schwarzschild solution correction to the editorial note ». A travers ce papier la revue revient sur l'article d'Antoci, à travers un article informe.

On nage dans la plus complète irrationalité !

Au passage, dans ce texte de Hilbert de 1916 allez voir, dans cette version anglaise, le passage où sa variable temps devient imaginaire pure :

THE FOUNDATIONS OF PHYSICS (SECOND COMMUNICATION) 1033

It is easy to convince oneself that these equations indeed imply that all $K_{\mu\nu}$ vanish; they therefore represent essentially the most general solution of equations (36) under the assumptions 1., 2., 3., we made. If we take as integrals of (44) $m = \alpha$, where α is a constant, and $w = 1$, which evidently is no essential restriction, then for $l = it$ (43) results in the desired metric in the form first found by Schwarzschild

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dl^2. \qquad (45)$$

et, en bas, la signature de la métrique, inversée. Je n'invente rien ….

Continuant dans cet ouvrage de base d'Adler, Schiffer et Bazin, 1967, on trouve une autre perle. Mais vous trouverez cela dans tous les livres traitant de Relativité Générale.

Voici l'extrait, page 187 :

with only two unknown functions of r. In order to exhibit clearly the signature of $g_{\mu\nu}$ and the sign of the determinant $\|g_{\mu\nu}\| = g$, let us write $A(r)$ as the intrinsically positive function $e^{\nu(r)}$ and $B(r)$ as $e^{\lambda(r)}$. The line element accordingly is written as

$$(6.9) \qquad ds^2 = e^{\nu(r)}c^2\,dt^2 - e^{\lambda(r)}\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Traduction (ouvrez bien vos yeux !)

De manière à expliciter clairement la signature de la métrique (+ - - -) et le signe du déterminant $\|g_{\mu\nu}\| = g$ de celle-ci nous allons exprimer les termes A(r) et B(r) à l'aide des fonctions intrinséquement positives e^{ν} et e^{λ} . La métrique s'écrit alors :

$$(6.9) \qquad ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Anticipant sur ce qui sera développé, allez à la page 193 (et ouvrez encore bien vos yeux !)

where $-2m$ is an arbitrary constant of integration. Thus, from the three equations $R_{00} = R_{11} = R_{22} = 0$, we have solved for the functions $\nu(r)$ and $\lambda(r)$ which appear in the line element (6.9)

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \qquad (6.47)$$

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1 - 2m/r}$$

Donc r ne peut être inférieur à $2m$, sinon les exponentielles deviendraient … négatives !

Mais, si vous avez le courage de vous taper cela, vous découvrirez, autour de la page 230 comment on parient « quand même » à explorer cet intérieur de la sphère de Schwarschild :

For $r < 2m$ we must repeat some of our derivation. From (6.191) we see that F is negative, so that the relative sign of g and h must be positive. Proceeding as before with g and h both positive, we arrive at a transformation appropriate to the interior of the Schwarzschild radius

$$u = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}}\, e^{r/4m} \sinh \frac{x^0}{4m}$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}}\, e^{r/4m} \cosh \frac{x^0}{4m} \qquad (6.204)$$

$$f^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-r/2m}$$

This transformation relates $r < 2m$ to the region $v > |u|$, labeled I in

Mais revenons à la construction de cette solution de Schwarzschild.

Il faut calculer les “symboles de Christoffel”. Grâce à quoi on construit le tenseur de Ricci, équation (6.25). On tombe alors sur deux équations différentielles. Dans cet ouvrage l’indice zéro se réfère à la variable chronologique et les indices 1, 2, 3 aux dimensions d’espace. On a donc :

(6.31) $$R_{oo} = 0$$

(6.32) $$R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$$

Puisque la solution de Schwarzschild se réfère à l’équation d’Einstein avec un second membre nul.

L’équation d’Einstein c’est :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Mais, dans le vide ça devient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

équation qui se ramène à :

$$R_{\mu\nu} = 0$$

c'est le "scalaire de Ricci". Il est nul quand le tenseur est nul. *Donc ces deux équations sont équivalentes.*

N'entrons pas dans le détail, classique, de la construction de cette solution. Au final on obtient les équations différentielles :

(6.36) $$\nu' + \lambda' = 0$$

Un raisonnement rapide, fondé sur l'invariance par translation temporelle, montre que cela se réduit à :

(6.38) $$\lambda = -\nu$$

Et on aboutit à l'équation différentielle :

(6.39) $$\lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} = 0$$

ou :

(6.40) $$(r e^{-\lambda})'' = 0$$

page suivante, d'autres considérations amènent à ramener cela à :

(6.45) $$(r e^{-\lambda})' = 1$$

L'intégration immédiate conduit à :

(6.46) $$e^{-\lambda} r = r + constant$$

Une constant d'intégration qui peut être a priori positive ou négative. On la prend négative. On fait classiquement intervenir une grandeur notée $2m$. Or ce n'est pas une masse, mais une longueur. C'est la grandeur que Schwarzschild a dénommé α . Alors on a :

(6.46) $$e^{-\lambda} r = r - 2m = r - \alpha$$

ou :

(6.47)

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1-\frac{2m}{r}} = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}$$

et comme $v = -\lambda$:

$$e^{v} = 1-\frac{2m}{r} = 1-\frac{\alpha}{r}$$

On a les coefficients de la métrique solution. Mais on notera qu'Adler, Schiffer et Bazin expriment la solution, en faisant intervenir un *chronologic marker* x°

(6.53) $$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)(dx°)^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2\,(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

Et de vérifier que cette métrique tend bien vers la métrique de Lorentz quand elle tend vers l'infini. Les conditions aux limites sont donc satisfaites.

Plus loin l'exploitation de cette métrique, en construisant les géodésiques et en les voyant s'identifier aux conique newtoniennes à une distance suffisante, conduit à préciser cette constant d'intégration $2m$ en écrivant :

(6.54) $$m = \frac{G\,M}{c^2}$$

où M est une masse.

➔ Je ne sais pas pourquoi ces auteurs désignent la constante de gravité par la lettre k. J'utilise donc le symbole traditionnel G.

Je pense que c'est parce que, beaucoup plus loin, ils se servent de la lettre G pour désigner le tenseur du premier membre de l'équation de champ (équation (10.77))

Cette longueur caractéristique $2m$ devient alors le classique rayon de Schwarzschild :

$$R_s = 2m = \alpha = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Pourquoi ai-je évoqué ce bout de calcul, extrait de l'ouvrage ?

Pour deux raisons. La première est de vous montrer que ces grandeurs α ou m ne sont que des constantes d'intégration, qui peuvent a priori être positives ou négatives. Ainsi on peut écrire la solution (6.53) sous la forme :

$$ds^2 = \left(1-\frac{2G\,M}{c^2\,r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2G\,M}{c^2\,r}} - r^2\,(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

Mais :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2G|M|}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2G|M|}{c^2 r}} - r^2 (\, d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \,)$$

est aussi solution de l'équation d'Einstein. A quoi correspond-t-elle ? Aux géodésiques décrites par des particules soumises à une… antigravitation, c'est-à-dire à une force répulsive, en $1/r^2$, exercée par une masse *M* négative.

Seconde remarque : à quoi correspond, quand $m > 0$, l'hypersurface pour $r < 2m$? $(ou\ r < \alpha)$ c'est-à-dire quand :

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} < 0$$

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} = 1 - \frac{\alpha}{r} < 0$$

Nous voilà avec des exponentielles e^{ν} et e^{λ} négatives ?!?!?

Dans l'ouvrage, cela va vous emmener à la section

6.8 : *The Schwarzschild radius, Kruskal coordinates, and the Black Hole*

Je reproduis ici le discours tenu, qui explique les propos d'Aurélien Barrau au Collège de France :

> When *r* becomes less than *2m*, the signs of the components g_{00} and g_{11} change, g_{11} becoming positive and g_{00} becoming negative. This forces us to reconsider the physical meaning of *t* and *r* as time and radial markers inside the Schwarzschild radius. Indeed a word-line along the *t* axis, (*r*, θ , φ) constant, has $ds^2 < 0$ and is *spacelike* curve, while a world-line along the *r* axis has $ds^2 > 0$ and is a *timelike* curve. It would just appear natural to reinterpret *r* as a time marker and *t* as a radial marker for events which occur inside the Schwarzschild radius.

Pour ceux qui auraient des difficultés avec l'anglais, la traduction est :

> Quannd *r* devient plus petit que *2m*, les signes des composants (de la métrique) g_{00} et g_{11} changent, g_{11} devenant positif et g_{00} négatif. Ceci nous contraint à reconsidérer les sens physiques du marqueur de temps *t* et du marqueur d'espace *r*. En vérité, si on chemine le long d'une "ligne d'univers" selon l'axe *t* , à (*r*, θ , φ) constants, on a $ds^2 < 0$, ce qui correspond à une courbe *de type espace*,

tandis que si on chemine le long de l'axe r on aura $ds^2 > 0$, ce qui correspond à une courbe du genre temps. Il apparaîtrait naturel (…) de réinterpréter r comme un marqueur de temps et t comme un marqueur radial pour les évènements qui se produisent à l'intérieur (de la sphère) ayant pour rayon le rayon de Schwarzschild.

D'où viennent ces expressions "courbes du genre temps" et "courbes du genre espace" ?

Considérons la métrique de Lorentz, écrite avec des coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) :$$

Envisageons de trajectoires radiales, à θ et φ constants. Alors :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2$$

Les trajectoires à la vitesse c correspondent à $ds = 0$. Et c'est là qu'on voit apparaître le classique "cône de lumière".

Ce faisant on… plonge dans un espace de Minkowski (t , r , φ) dans $\mathbb{R}^3$. Et on fait ainsi la même erreur qu'en plongeant l'hypersurface de Schwarzschild dans $\mathbb{R}^4$. On est amené à se poser des questions *qui n'ont pas de raison d'être*, parce qu'on est *en dehors de l'objet géométrique.*

La représentation de la Relativité Restreinte à l'aide du modèle du "Cosmic Park" est plus saine, car alors les points tels que $v > c$ disparaissent. L'équivalent d'une excursion en dehors du cône de lumière équivaut dans le Cosmic Park à tenter de descendre dans une sphère-goutte liquide plus profondément qu'en son centre.

L'obsession du plongement induit des erreurs. Cela a amené des physiciens à inventer les concepts de

- courbes du genre temps (*timelike curves*)
- courbes du genre espace (*spacelike curves*)

Les secondes sont dénuées de sens physique. En Relativité Restreinte elles correspondraient à des trajets à une vitesse supérieure à c. Des trajets effectués dans la portion imaginaire (…) de l'hypersurface considérée.

On voit que l'idée de dire que des évènements ont un sens physique si $ds^2 > 0$ a quelque chose de sain, de salvateur.

Les expressions "ligne d'univers du genre temps" et "ligne d'univers du genre espace" ne sont que des mots, rien d'autre.

Dans la suite du chapitre les auteurs calculent le temps de chute libre, évalué avec la grandeur s, et le trouvent fini.

Là, je peux donner ces bouts de calculs.

Les géodésiques sont des trajets de plus court chemin.

Il se trouve, pour ceux qui ne connaissent pas les équations de Lagrange, que j'ai réalisé une initiation sympa [3] à ce sujet à :

http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/BOURBAKOF/Bourbakof_fr.pdf

C'est au chapitre "Le Séminaire" page 12.

Les physiciens s'amuseront à voir cela présenté de cette façon. Les non physiciens y trouveront une initiation à ce problème "des extrema liés", débouchant sur

Les équations de Lagrange

Repartons de l'expression de la métrique. Je garde les notations du livre cité et cela nous envoie à la section :

6.3 *The general Relativistic Kepler problem and the perihelic shift or Mercury*

(Le problème des trajectoire képlériennes relativistes et de l'avance du périhélie de Mercure)

La métrique est écrite selon :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \right)$$

or :

$$ds = \pm \left[\sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} \right] ds$$

On pose : $\frac{dt}{ds} = \dot{t}$ $\frac{dr}{ds} = \dot{r}$ $\frac{d\theta}{ds} = \dot{\theta}$ $\frac{d\varphi}{ds} = \dot{\varphi}$

Si on envisage un trajet le long d'une courbe quelconque joignant deux points fixes A et B, la distance parcourue, le long de cette hypersurface sera :

$$s = \int_A^B \left[\sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 \dot{x}^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2} \right] ds$$

C'est-à-dire :

$$s = \int_A^B F(r, \theta, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})\, ds$$

C'est de la forme :

$$s = \int_A^B F(x_i, \dot{x}_i)\, ds$$

avec :

$$F = \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2}$$

Le trajet est alors de longueur minimale si les équations de Lagrange suivantes sont satisfaites :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

La première équation donne :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{t}}\right) = 0$$

puisque F ne dépend pas de la variable t. Ce qui donne :

(6.77) $$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

ou :

(6.81) $$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = l = Cst$$

La fonction F ne dépend pas de θ , ce qui donne :

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}}\right] = 2\dot{\theta} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \theta = \text{ constant}$$

Les trajectoires sont planes et se situent dans un plan θ = constante. On construira donc les trajectoires dans un plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\sin\theta = 1$;

La fonction F est également indépendante de φ , ce qui donnera :

(6.80) $$\frac{d}{ds}\left[r^2 \dot{\varphi}\right] = 0 \qquad \rightarrow \qquad r^2 \dot{\varphi} = h = \text{ constant}$$

On retrouve la loi des aires des trajectoires newtoniennes.

Maintenant si on reprend la forme de la métrique :

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2\,(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

et qu'on divise par ds^2, on obtient une autre équation :

$$1 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\,\dot{t}^2 - \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$$

Si on entre dans cette équation les résultats précédemment obtenus on obtient :

(6.82) $$1 = \frac{c^2\,l^2}{1-\frac{2m}{r}} - \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

Posons :

(6.83) $$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$$

Combinons (6.80) et (6.83) :

(6.84) $$\dot{r} = \dot{\varphi}\,r' = \frac{h}{r^2}\,r'$$

On peut alors obtenir l'équation différentielle donnant $\varphi(r)$

(6.85) $$\left(1-\frac{2m}{r}\right) = c^2l^2 - \frac{h^2}{r^4}\,r'^2 - \frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)$$

mais il est plus commode de passer à une variable

(6.86) $$r = \frac{1}{u}$$

(6.87) $$r' = -\frac{u'}{u^2} \qquad u' = \frac{du}{d\varphi}$$

(6.88) $$(\,1-2mu\,) = c^2\,l^2 - h^2u'^2 - h^2u^2(\,1-2mu\,)$$

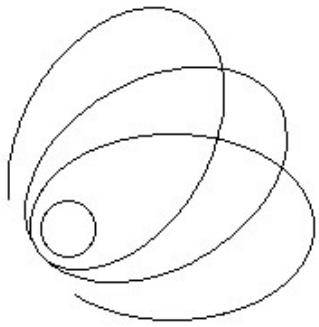
(6.89) $$u'^2 = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{c^2\,l^2-1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2}u - u^2 + 2mu^3$$

d'où on tire immédiatement :

(6.90) $$\varphi = \varphi_o + \int_{u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3}}$$

En programmant ça on construit aisément les trajectoires quasi képlériennes avec avance du perihelie. Et aussi les trajectoires paraboliques, hyperboliques.

Ci-après une courbe que j'avais calculée il y a plus de vingt ans, avec indication de la sphère de Schwarzschild, qui donne une indication sur l'importance de l'avance du perihelia pour des objets proches de la criticité :



Si on fait $2m = 0$ on retombe sur les classiques coniques de Kepler.

Signification de la constant l :

On a :

(6.82) $$1 = \frac{c^2 l^2}{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

qui donne :

$$\dot{r}^2 = c^2 l^2 - 1 + \frac{2m}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2mh^2}{r^3}$$

On peut poser : $\lambda = cl$ Quand on fait tendre r vers l'infini :

$$\frac{dr}{ds} \to \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

on a donc $|\lambda| > 1$

Si, à grande distance $dr = 0$ cela veut dire que $|\lambda| = 1$ se réfère à une masse qui est à vitesse nulle à l'infini.

Quid de $v = \frac{dr}{dt}$? En utilisant (6.81) pour r grand :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{c\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda}$$

ce qui donne :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On sait que l'énergie de la particule de masse *m* est :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si la vitesse *v* à l'infini est faible devant *c* on peut faire un développement en série.

$$\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

Donc :

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Tout cela pour montrer que la construction des géodésiques à partir d'une métrique n'est pas un travail d'une grande complexité.

Reste à tracer de la même façon les trajectoires des photons. Par définition ceux-ci correspondent à $ds = 0$

On aura donc une similitude dans les équations de Lagrange. On obtient encore deux constantes :

(6.142) $$r^2\dot{\varphi} = \tilde{h} \qquad \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = \tilde{l}$$

Mais la dernière équation devient :

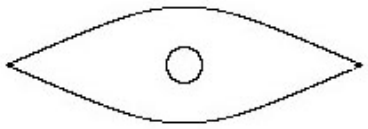
$$0 = \frac{c^2\tilde{l}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}\dot{r}^2 - \frac{\tilde{h}^2}{r^2}$$

On repassera en $r = \frac{1}{u}$ et on obtient alors :

$$\varphi = \varphi_o + \int_{u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{c^2 l^2}{h^2} - u^2 + 2mu^3}} = \varphi_o + \int_{u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{h^2} - u^2 + \alpha u^3}}$$

Le lecteur pourra programmer ces trajectoires et mettre en évidence l'effet de lentille gravitationnelle (positif).

Ci-après un fort effet de lentille gravitationnelle. La sphère de Schwarzschild est indiquée. Image qui donne une idée de la distorsion optique de l'arrière-plan, lié à la présence d'une étoile à neutrons sub-critique.



L'inversion de la masse.

On a vu que le paramètre *m* dans l'expression de la métrique de Schwarzschild, solution de l'équation d'Einstein sans second membre, n'était qu'une constante d'intégration, qui peut être prise positive ou négative. Lorsqu'on introduit $m < 0$ dans l'expression du tracé des géodésiques on obtient ceci :

Particules matérielles :

$$\varphi = \varphi_o + \int_{u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} - \frac{2|m|}{h^2} u - u^2 - 2|m| u^3}}$$

Photons :

$$\varphi = \varphi_o + \int_{u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{c^2 l^2}{h^2} - u^2 - 2|m| u^3}} = \varphi_o + \int_{u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{h^2} - u^2 - |\alpha| u^3}}$$

C'est encore facile à programmer et là encore on pourra construire des géodésiques correspondant alors à une *répulsion*, et un effet de lentille gravitationnelle *négative* (introduit en 1995 dans ma publication dans *Astrophysics and Space Science*). [4]

Remarque sur la coordonnée temps et sur la masse

Gardons en tête que dans ces expressions *t* n'est qu'un nombre, un "time marker". Quand on n'a pas de termes croisés on constate que l'expression de la métrique est invariante quand on change *t* en –*t*.

En règle générale les équations de la physique présentent ce type d'invariance. Quand on construit par exemple la solution de Friedman de l'équation d'Einstein (avec second membre), qui décrit l'évolution d'un cosmos homogène et isotrope on tombe sur l'équation :

$$R^2 \frac{d^2R}{dt^2} + (\text{constante})^2 = 0 \quad \text{ou :} \quad a^2 \frac{d^2a}{dt^2} + (\text{constante})^2 = 0$$

R (ou a) est le "space scale factor", la dimension caractéristique de l'univers. Comme on a une dérivée seconde, l'équation de Friedman est invariante quand on change t en $-t$.

La métrique, avec une masse négative :

On peut inverser la masse dans la métrique de Schwarzschild, et on obtient :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2|m|}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2|m|}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Si on calcule les géodésiques on trouvera évidemment les deux expressions données plus haut.

Le découplage temporel, pivot du modèle du trou noir.

Dans ce qui précède on a donc construit les géodésiques de la métrique

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Quelle signification donner alors au "time marker" t ?

Les théoriciens lui confèrent alors le statut de temps vécu par un observateur distant.

Observateur distant : r grand devant $2m$. La métrique est alors celle de Lorentz, formulée à l'aide des coordonnées $\{ t , r , \theta , \varphi \}$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Pour un observateur immobile, on a :

$$ds^2 = c^2 dt^2$$

τ étant le temps propre, via $s = c\,\tau$, le temps propre τ de cet observateur distant s'identifie alors avec le time marker t.

Tout cela a l'air imparable. Mais on verra plus loin qu'il n'en est rien.

Reprenons nos équations de Lagrange pour des géodésiques radiale ($h = 0$)

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t} = l$$

$$1-\frac{2m}{r} = c^2 l^2 - \dot{r}^2$$

On se souvient alors que $c\,l = \lambda$ est égal à l'unité quand la vitesse de la masse témoin est nulle à l'infini. Donc ces équations se résument à :

(6.180) $$\dot{t} = \frac{1}{c\left(1-\frac{2m}{r}\right)} \qquad \dot{r}^2 = \frac{2m}{r}$$

La seconde équation est une équation différentielle permettant de calculer le temps d'une chute libre depuis une position $r = r_o$. On a :

$$ds = -\frac{1}{\sqrt{2m}}\, r^{\frac{1}{2}}\, dr$$

Donc un temps de chute libre, de la position $r = r_o$ à la position $r = r_1$ qui est :

$$\Delta s = \frac{2}{3\sqrt{2m}}\left[r_o^{\frac{3}{2}} - r_1^{\frac{3}{2}}\right] \qquad \tau = \frac{\Delta s}{c}$$

Que l'on prenne la valeur $2m$ de la sphère de Schwarzschild pour r , ou même qu'on attribue à la variable r la valeur zéro, ce temps de chute libre est fini, et extrêmement bref.

Si on adopte, comme les théoriciens, une valeur de r proche du rayon de Schwarzschild et comme état final $r = 0$ on trouve :

$$\tau = \frac{2}{3}\left(\frac{2m}{c}\right)$$

C'est à dire un temps qui est de l'ordre de celui que met la lumière à traverser l'objet. Si le rayon d'une étoile à neutrons en implosion est de l'ordre d'une vingtaine de kilomètres ce temps d'implosion est de :

$$\tau = \frac{2}{3}\,\frac{2.10^4 m}{3.10^8 m/s} = 4.45\ 10^{-5} s$$

Or dans mes vidéos je parle de temps d'implosion d'un millième de seconde. Mais c'est moins encore.

Ceci étant, j'incite le lecteur à se poser sur la formule donnant le temps d'implosion, quand le rayon final r_1 est nul :

$$\tau = \frac{2}{3c\sqrt{2m}} r_o^{\frac{3}{2}}$$

Le calcul semble donner une valeur réelle qui évoque le temps que mettrait une étoile à neutrons de se transformer en tête d'épingle.

De toute façon c'est censé chiffrer, selon cette solution métrique, la "longueur s" parcourue, puisque *s* est bel et bien une longueur, qui s'exprime en mètres, parcourue par un objet cheminant sur une géodésique qui comporte deux tronçons.

Le premier, en supposant que $r_o > 2m = \alpha$ (rayon de Schwarzschild)

Le second se référant à $0 < r < 2m$ c'est à dire à une portion de surface où $ds^2 < 0$ donc où la longueur d*s* est… imaginaire pure ! A une portion de surface où, comme l'ont explicitement mentionné les autres « le temps devient l'espace et l'espace dient le temps ».

Alors, quel sens physique donner à ce temps d'implosion ???

Peu importe, nous allons maintenant recalculer ce temps de chute libre selon une géodésique radiale, mais en le décomptant avec la variable t_s , ce "temps de Schwarzschild" qui a été identifié au temps vécu par un observateur distant. On a :

$$\dot{t} = \frac{1}{c\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \qquad \dot{r}^2 = \frac{2m}{r}$$

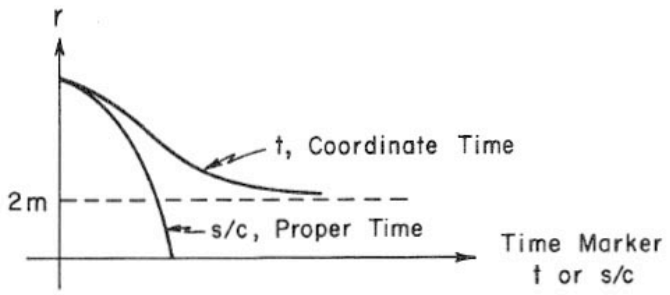
Ce qui nous permet de calculer :

$$t_S = -\frac{1}{c\sqrt{2m}} \int_{r_o}^{2m} \frac{r^{3/2}}{r - 2m} dr$$

qui est une intégrale qui *diverge* quand *r* approche la valeur 2*m*, le "rayon de Schwarzschild".

C'est ce qui est traduit dans l'ouvrage d'Adler, Schiffer et Bazin [2] à la figure 6.2 :

Fig. 6.2
Fall toward the origin of a Schwarzschild geometry in terms of coordinate time t and proper time on the test body s/c.



Le rayon est en ordonnée. Une particule en chute libre descend, donc. Quand elle atteint "la singularité centrale" c'est quand elle touche l'axe des abscisses, quand r devient nul. En un temps propre fini, avec une belle courbe en trait plein. Même si, pour $r < 2m$ ce temps devient… imaginaire pur.

Cette chute, vue par un observateur distant, est censée se dérouler en un temps infini. D'où l'asymptote de la courbe.

Ainsi, si cette métrique décrit un objet en implosion (bien que cette solution soit indépendante du temps) les théoriciens en ont conclu que, pour un observateur distant, un tel spectacle devrait durer un temps *infini*. Tout serait "en arrêt sur image". Il y a eu suffisamment de choses publiées dans les ouvrages de vulgarisation pour qu'il soit inutile de revenir là-dessus.

Subsidiairement, le théoricien, questionné à propos de l'issue d'une implosion aussi catastrophique, qui se déroule en quelques cent millièmes de seconde peut répondre :

- *Je ne me sens nullement tenu de décrire le résultat d'un phénomène qui, pour moi, se déroule en un temps infini.*

Ajoutons que ces mêmes théoriciens ont introduit le concept de "censure cosmique". En effet, si on étudie cette fois les géodésiques de longueur nulle, les trajets des photons, on découvre que nulle information ne peut émerger, émanant d'objets se situant "à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild".

La boucle est bouclée, le voile du mystère se referme. Tout cela semble inattaquable…

L'essence du modèle Janus.

Ce modèle, en l'état, est représenté par la donnée de deux équations de champ.

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}}\, T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[\sqrt{\frac{g^{(+)}}{g^{(-)}}}\, T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

Dont la solution est un couple de métriques ($g_{\mu\nu}^{(+)}$, $g_{\mu\nu}^{(-)}$)

La donnée du problème est représentée par le champ. ($T_{\mu\nu}^{(+)}$, $T_{\mu\nu}^{(-)}$) les deux métriques représentent deux façons différentes de "lire" cette solution.

Le géodésiques sont les chemins empreintés par des particules dotées d'une masse ou de masse nulle mais avec une énergie *E*.

On peut poser que les géodésiques issues de la métrique $g_{\mu\nu}^{(+)}$ seront suivies par les particules dotées d'une masse positive et par les photons d'énergie positive.

Et que la métrique $g_{\mu\nu}^{(-)}$ engendre des géodésiques qui seront suivies par des particules de masse négative et par des photons d'énergie négative.

En Relativité Générale on emploie les mots de "particule témoin" et "d'observateur distant". En RG classique il n'y a qu'une espèce de particule témoin et qu'un seul type d'observateur.

Dans le modèle Janus il y en a deux.

Quand les internautes posent la question :

- Que se passe-t-il quand… ?

L'adverbe de temps " quand " doit être précisé :

- Qui observe, et cet observateur est fait de quoi ?

- Fait de masse positive, il est "orthochrone",

- Fait de masse négative, il est "antichrone" (ou "rétrochrone").

Selon le type d'observateur les évènements observés changent.

Nous avons décidé (arbitrairement) que nous étions constitués de masses positives et que notre temps était… le bon. Nous sommes donc "orthochrones".

Y aurait-il des observateurs antichrones ?

Par "observateurs" il faut aussi comprendre "des êtres conscients, pour lesquels un sens d'écoulement passé → futur a un aspect intuitif, vécu".

Apportons tout de suite une réponse, à garder en tête : cet univers Janus est dissymétrique. Je cherche le mot. Peut-on parler de “versant”, ou de “secteur” ?

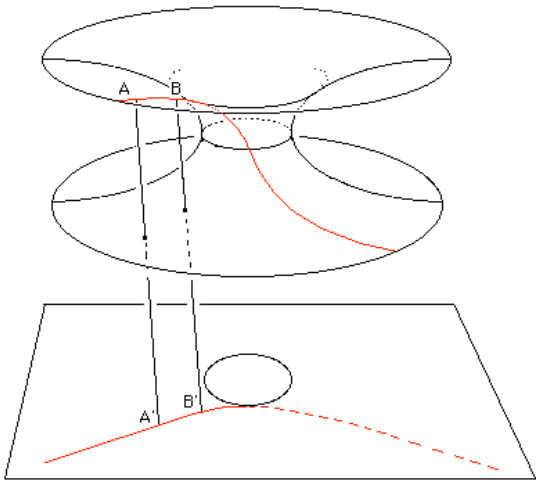
Finalement, j’opte pour le mot “côté” car ce mot me semble être le plus proche de la structure géométrique du modèle.

La configuration en orbifold

Prenons le diabolo 2D. De part et d’autre de son cercle de gorge on a deux nappes. Mais si on écrase ce diabolo dans une presse on le transforme en un objet géométrique qui est un *orbifold* : une surface bordée par une courbe circulaire, où on identifie le recto et le verso. Bref, *les deux côtés de la surface*.

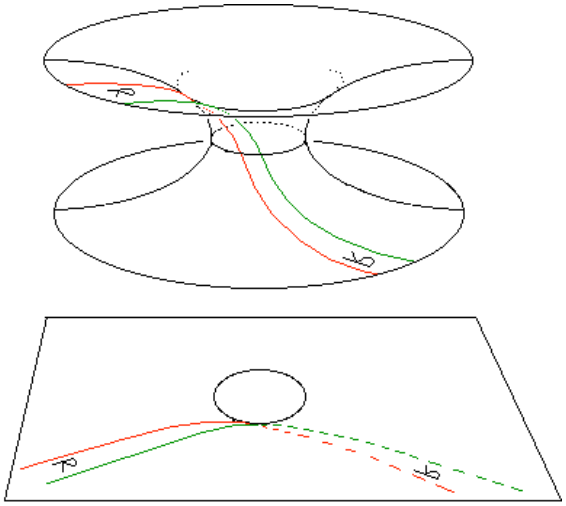
Lorsque le diabolo 2D a été ainsi écrasé, on ne peut l’observer que d’un seul côté à la fois, qu’on nommera arbitrairement le “recto”, l’autre étant le “verso”.

Ci-après ce diabolo et son recto. Sur cette face une trajectoire géodésique en trait plein. Quand la “particule-témoin” passe “de l’autre côté” sa trajectoire géodésique s’inscrit alors en tireté. Une dualité “trait plein-trait tireté” qui s’inverserait si l’observateur se situait “de l’autre côté”.



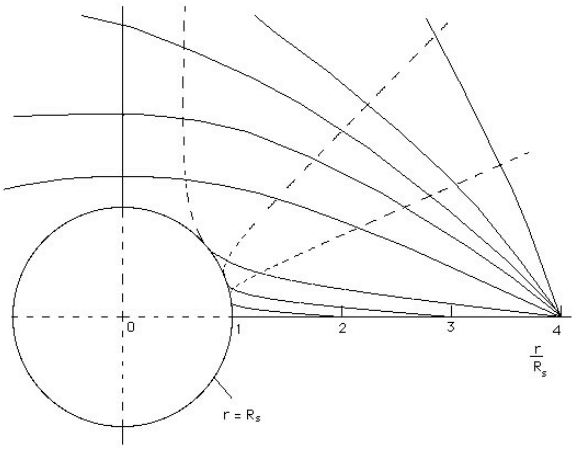
Si on transporte par glissement le voisinage d’une géodésique porteuse de la lettre R, assimilable à une décalcomanie glissant sur la surface et si on opère sur le diabolo, aucun trajet ne mettra en évidence une énantiomorphie. La surface est orientable.

Mais si on passe à une représentation de type orbifold, c’est à dire qu’on écrase le diabolo, alors une énantiomorphie apparait, ce qu’illustre le dessin ci-après. La lettre R, comme une décalcomanie, lorsqu’elle passe sur l’autre face après avoir franchi le cercle, s’inverse :



Dans l'orbifold on a identifié l'endroit et l'envers d'une surface, en introduisant un mode de passage de l'un à l'autre (par ce cercle-bord).

Au passage, voici l'allure des géodésiques découlant de la métrique du diabolo :



Pour le diabolo 2D (avec $\alpha > 0$) :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

puis, pour le diabolo 3D (avec $\alpha > 0$) :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Il faut d'abord inscrire dans l'intuition ce concept d'orbifold 3D. Cette hypersurface 3D met en communication deux espace euclidiens 3D à travers une sphère de gorge. C'est une hypersurface orientable.

Comment définira-t-on l'orientabilité en 3D ?

On envisagera un tétraèdre avec des faces orientées. L'extrait de l'article :

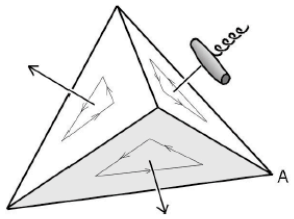


Fig. 7 : Oriented tetrahedron

To show 3D space orientation we will use a tetrahedron. To illustrate the

---

Tétraèdre orienté.

Le sens de "vissage" sur ses quatre faces définit un sens "intérieur-extérieur". Si on considère son image en miroir, ce sens de vissage est inversé, ce qui veut dire que l'orientation intérieur-extérieur est aussi inversée, si on la fonde précisément sur ce sesns de vissage.

La variété (manifold) 3D définie par la métrique ci-dessus est orientable. Si on transporte ce tétraèdre témoin en lui faisant ou non franchir la sphère de gorge on ne tombera jamais sur un tétraèdre inversé. Si on superpose deux triangles, les sens de vissages qu'ils portent sur leurs faces resteront les mêmes. .

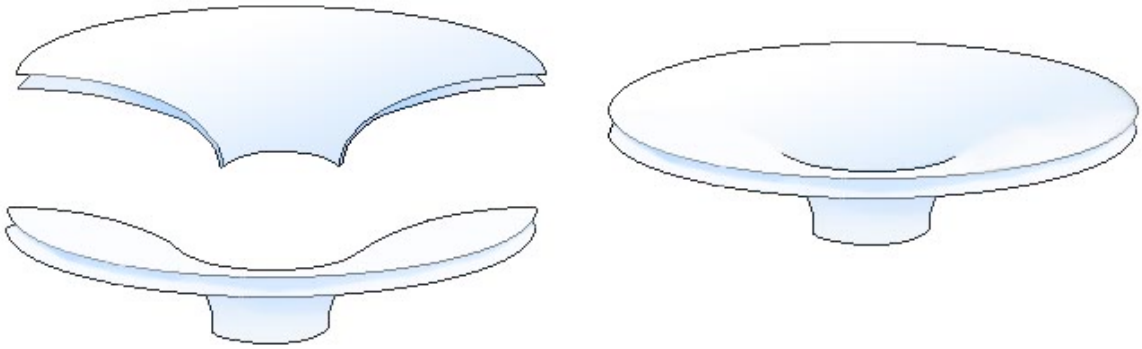
Le passage à une configuration orbifold 3D

Mais si on passe à une configuration de type orbifold une énantiomorphie apparaîtra. Je sais que c'est un peu difficile à imaginer : "écraser deux espaces 3D l'un contre l'autre".

Ça n'est qu'une image. Cela signifie simplement qu'on identifie les couples de points conjugués.

Cela revient à envisager un objet qui a la structure d'un pli. Le concept de "variété à pli" n'existe pas en mathématiques. Mais cela serait peut-être l'objet à créer.

Revenons au 2D. Au lien d'écraser la surface dans une presse on peut envisager de la replier :



ce qui a l'avantage de préserver sa courbure. Ce qui est plus difficile à imaginer, par contre, c'est de "plier" une hypersurface 3D le long de sa sphère de gorge. Cela amène les points "conjugués" en coïncidence.

Comment imaginer l'inversion des objets au passage de la structure de gorge ?

C'est schématisé en 2D dans ma publication de 2015 [5] dont voici des illustrations qui en sont extraites :

Figure 5 shows how vicinities of adjacent points are linked by enantiomorphy relationship.

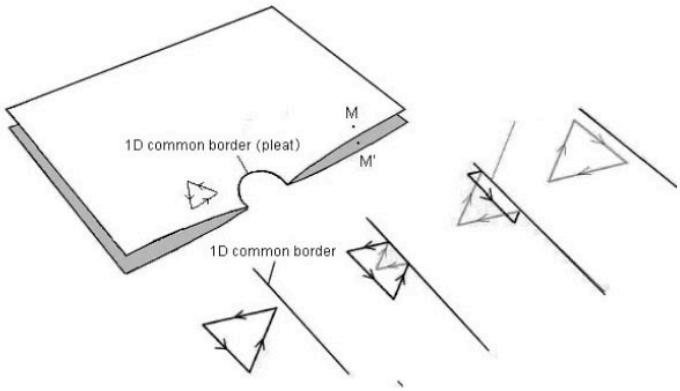


Fig. 5 : When the triangle crosses the common boundary, its orientation is reversed

---

On distingue au passage une chose. Le diabolo 2D est une surface orientable. Mais le fait de la transformer en orbifold fait apparaître une région, le long de la courbe fermée qui était avant le cercle de gorge, où on ne peut plus définir de vecteur normal.

On est ainai amené à opérer une différence de « nature » entre les objets, 2D, qui appartiendraient au recto de notre surface et ceux qui appartiendraient au verso. Le

cercle « n'appartient ni au recto, ni au verso, puisqu'en ce lieu ceci n'est plus définissable. Lorsqu'un objet le franchit il passe d'une face à l'autre.

Lorsqu'on passe à une représentation cosmologique et qu'on envisage un espace temps configuré en orbifild la question qui se posera sera « comment de tels objets peuvent-il interagir ? «

En passant au 3D l'image ci-après, toujours extraite de l'article, montre l'inversion du tétraèdre au passage de la surface de gorge :

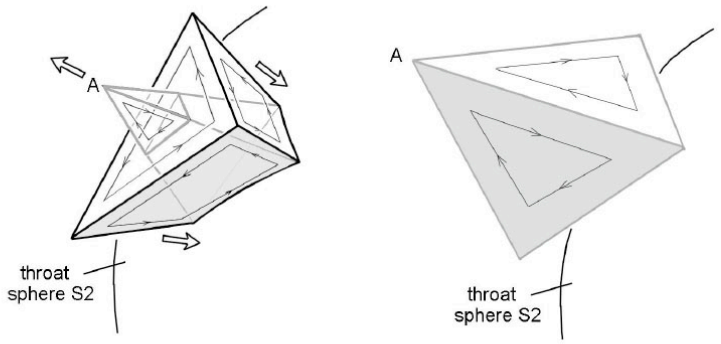


Fig. 8 : By crossing the throat sphere, the tetrahedron is inverted

---

Si, dans sa représentation sous la forme d'un manifold (variété 3D) l'objet géométrique 3D est doté d'une surface de gorge sans problème, sa configuration en orbifold va modifier la topologie de celle-ci. Ce n'est plus une sphère mais un "projectif P2" dont l'image est donnée par la surface inventée par Werner Boy, et qui est abondamment décrite dans ma bande dessinée "Le Topologicon" [6].

Là, il devient difficile, même pour moi, de se forger une image mentale de l'objet.

Je dirais :

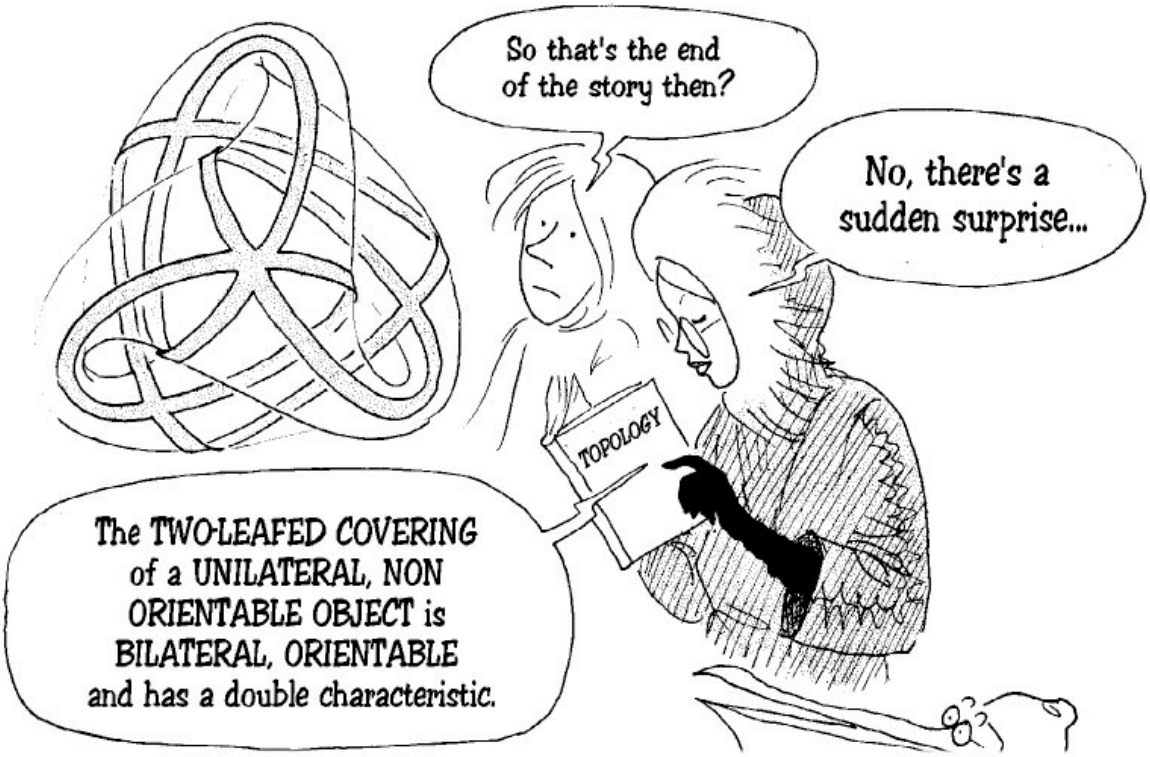
- *Si à ce stade vous avez de la fumée qui sort par les oreilles, c'est normal…*

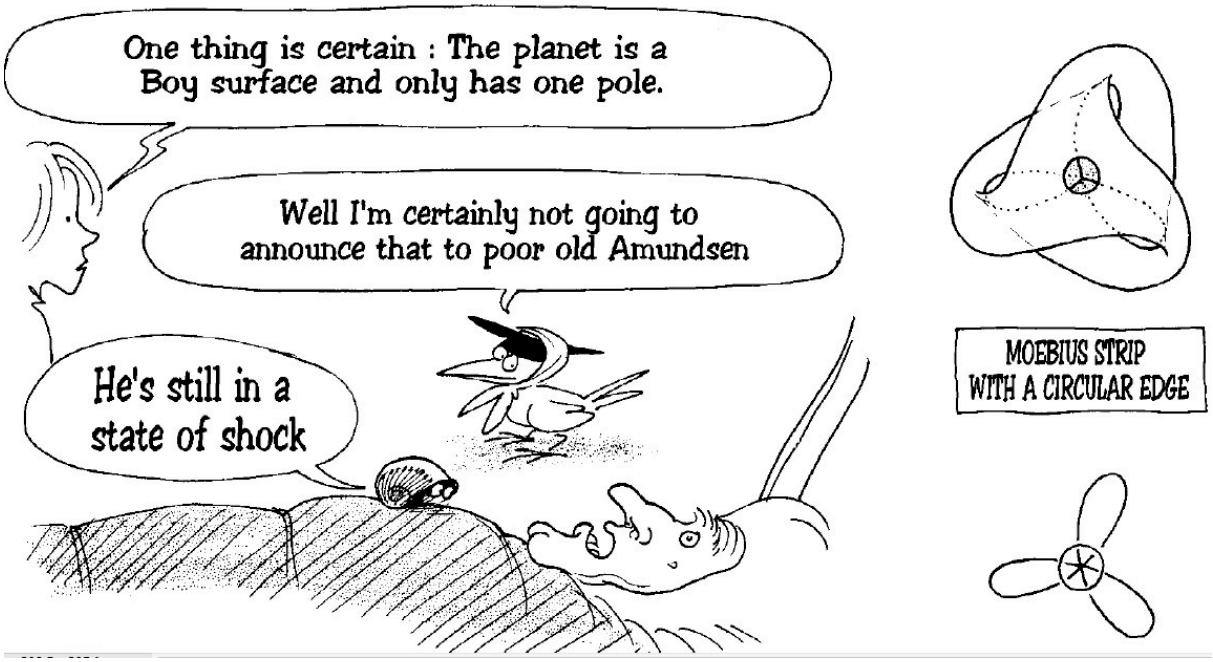
Voici l'image de cette surface de Boy, extraite de la BD, ci-après. Dans cette image on a figuré les voisinages de "méridiens" qui sont des rubans de Möbius à un demi tour, qui se croisent sur le pôle.

Dans la figure ci-après on a porté l'accent sur l'ensemble d'auto-intersection et un petit bouchon circulaire a été enlevé pour qu'on découvre le point triple, où trois nappes se recoupent.

Mais cet ensemble d'auto-interstection et ce point triple… N'EXISTENT PAS ! Cela provient du fait qu'on ne peut pas *plonger* une surface de Boy dans $\mathbb{R}^3$. On ne peut que *l'immerger* dans $\mathbb{R}^3$. Dans les opérations de plongement et d'immersion le plan tangent

varie continuement. Dans l'opération de plongement la surface ne se recoupe pas elle-même. Par contre si on l'immerge, elle peut (et ici ne peux que) se recouper elle-même.





C'est également le cas de la bouteille de Klein, dont l'ensemble d'auto-intersection se réduit à une courbe fermée. Une courbe QUI N'EXISTE PA NON PLUS. Ceci n'est qu'un "accident d'immersion". La "vraie" bouteille de Klein ne se recoupe pas elle-même. Elle habite simplement dans un espace qui est inaccessible à notre entendement.

Donc, si on part de la métrique :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{\alpha}{r}} + r^2(\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

et qu'on décide de lui donner une configuration d'orbifold elle représentera un repli d'un espace 3D orientable, quoique non contractile. L'orbifold comprend une surface de gorge inorientable en forme de surface de Boy.

On a vu, pour cet objet 3D, que les coordonnées $\{\, r\,, \theta\,, \varphi\,\}$ ne sont pas de "bonnes coordonnées" puisqu'il existe une zone où l'élément de longueur cesse d'être réel. On passe alors à un meilleur jeu de coordonnées $\{\, \rho\,, \theta\,, \varphi\,\}$, à l'aide du changement de variable "magique" :

$$r = \alpha\,(\,1 + Log\, ch\rho\,)$$

présenté dans l'article de 2015 [5]. La métrique se formule alors selon :

$$ds^2 = \alpha^2 \frac{1 + Log ch\rho}{Log ch\rho}\, th^2\rho\, d\rho^2 + \alpha^2(\,1 + Log ch\rho\,)^2(\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

Profitons-en, au passage, pour montrer comment ce changement de variable a permis d'éliminer la singularité de coordonnée en $r = \alpha$

Un cosinus hyperbolique c'est

$$ch\rho = \frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{2}$$

On a $e^0 = 1$, donc $ch(0) = 1$ et $Log\left[ch(0)\right] = 0$

Par ailleurs le sinus hyperbolique est :

$$sh\rho = \frac{e^{\rho} - e^{-\rho}}{2}$$

et la tangente hyperbolique :

$$th\rho = \frac{e^{\rho} - e^{-\rho}}{e^{\rho} + e^{-\rho}}$$

on a : $th(0) = 0$ ainsi le coefficient de $d\rho^2$ est-il une forme indéterminée $\frac{zero}{zero}$.

On va lever cette indétermination en effectuant un développement en série autour de la variable $\rho = 0$ On a, pour les exponentielles :

$$e^{\rho} = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!} + \ \ldots \qquad\qquad e^{-\rho} = 1 - \rho + \frac{\rho^2}{2} - \ \frac{\rho^3}{3!} + \ldots$$

$$ch\rho = 1 + \frac{\rho^2}{2} + \ldots \qquad\qquad Log\, ch\rho = \frac{\rho^2}{2} + \ldots$$

$$sh\rho = \rho + \frac{\rho^3}{3} + \ldots$$

$$th\rho = \rho + \ldots$$

On trouve que $\dfrac{1 + Log\, ch\rho}{Log\, ch\rho}\, th^2\rho$ tend vers 2. La singularité a disparu.

Nous considérons une hypersurface 3D configurée en orbifold. Il est alors difficile d'imagfiner que le plaige de tout à l'heure, le long d'une courbe fermée, puisse alors s'opérer le longe d'une 2-surface fermée.

Dans le cas du diabolo à deux dimensions c'est sur une courne fermée qu'on ne pouvait plus définir de normale. Dans notre « diabolo 3D » cette perte d'orientation affectera cette fois une surface fermée. Elle sera unilatère.

D'où vient ce "changement de variable magique" ?

Ces jours-ci, après m'être creusé la tête pendant pas mal d'années, j'ai réussi à élaborer enfin un cheminement qui conduit à ce changement de variable. En fait on n'arrive à rien si on tente de comprendre d'où sort une formule aussi compliquée :

$$r = \alpha\ (\,1 + Log\, ch\rho\,)$$

Il est plus simple de regarder ce qui émerge après différentiation :

$$dr = \alpha\, th\rho\ d\rho$$

D'où vient le problème ? Pourquoi envisager un changement de coordonnées ? Prenons la métrique du diabolo 2D, ou même 3D (avec α positif)

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \dfrac{\alpha}{r}} + r^2\, d\varphi^2 \qquad\qquad ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \dfrac{\alpha}{r}} + r^2(\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

On a un terme

$$\frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{r}}\, dr^2 = \frac{r}{r - \alpha}\, dr^2$$

qui change de signe quand r devient inférieur à α. Pire encore, le dénominateur devient nul. D'où l'idée d'une… singularité. On pense alors à envisager un changement de variable classique du genre :

$$r = \alpha\left(1 + f(\rho) \right)$$

avec : $f(\rho) \geq 0$ et $f(0) = 0$

On aura :

$$dr = \alpha\, f'(\rho)\, d\rho \qquad\qquad \frac{r}{r-\alpha}\, dr^2 = \alpha^2 (1+f)\, \frac{f'^2}{f}\, d\rho^2$$

Le tout est de choisir de telle manière que la fraction $\frac{f'^2}{f}$ tende vers une limite quand $\rho \to 0$. Une solution très simple : $f(\rho) = \rho^2$. Alors la fraction tend vers 4. J'ai éliminé ma singularité de coordonnées. La métrique s'écrit alors :

En 2D : $$ds^2 = 4\,\alpha^2 (1+\rho^2)\, d\rho^2 + \alpha^2 (1+\rho^2)^2 d\varphi^2$$

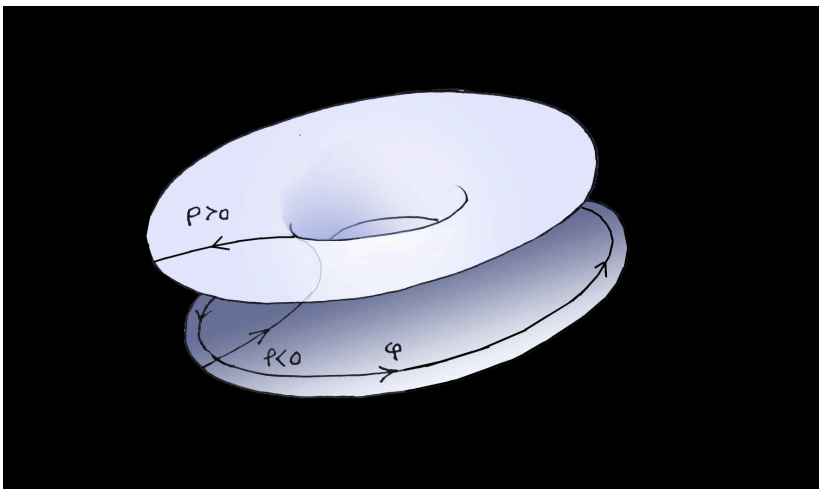
En 3D : $$ds^2 = 4\,\alpha^2 (1+\rho^2)\, d\rho^2 + \alpha^2 (1+\rho^2)^2 (\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

Quand $\rho \to \infty$

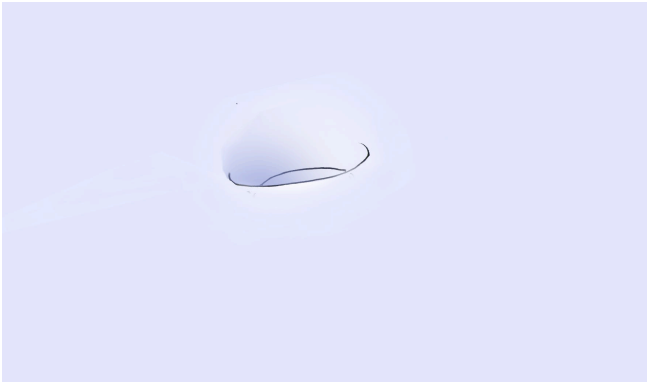
En 2D : $$ds^2 \to 4\,\alpha^2 \rho^2\, d\rho^2 + \alpha^2 \rho^4\, d\varphi^2$$

En 3D : $$ds^2 \to 4\,\alpha^2 \rho^2\, d\rho^2 + \alpha^2\ \rho^4 (\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

Ma foi, j'imagine que j'ai toujours le droit d'écrire tout cela. S'agissant du diabolo 2D, quelle que soit la coordonnée r ou ρ, ça n'empêche pas cet objet d'être ici, non contractile (selon son prolongement isométrique dans $\mathbb{R}^3$).

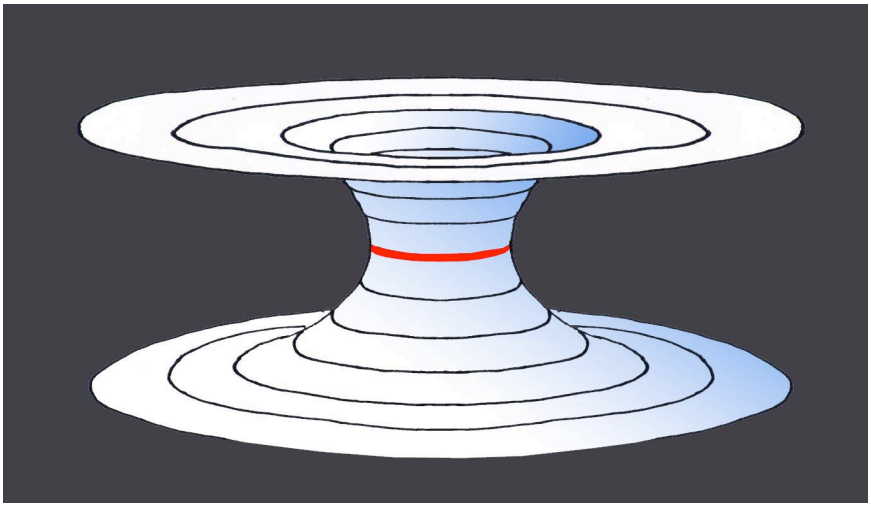


ou plutôt, puisque cet objet n'a pas de bords circulaires :



Dans cet objet la seule grandeur qui ait un sens c'est la longueur s . Les coordonnées ne sont que différents systèmes de repérage, plus ou moins pertinents.

Au voisinage de la gorge les courbes correspondent à ceci :



Est-ce à dire que j'ai terminé l'étude de cet objet défini par sa métrique ?

Non !

Qu'est-ce qu'un espace euclidien ?

C'est un espace où on peut trouver un jeu de coordonnées tel que les coefficients de la métrique deviennent constants, indépendants des coordonnées. Quand les signes de tous les termes sont positifs on dit que l'espace est proprement euclidien.

Est-ce que les objets étudiés ici tendent, pour les grandes valeurs de s (comptées à partir de la gorge et "radialement") vers des espace euclidiens .

Les représentations en $\{\rho, \varphi\}$, pour l'objet 2D et en $\{\rho, \theta, \varphi\}$, pour l'objet 3D, ne l'indiquent guère. Ce qui ne veut pas dire qu'il n'y ait pas un autre choix de coordonnées qui fasse apparaître cette propriété sous-jacente.

Reprenons :

$$r = \alpha\left(1 + f(\rho) \right)$$

avec : $f(\rho) \geq 0$ et $f(0) = 0$

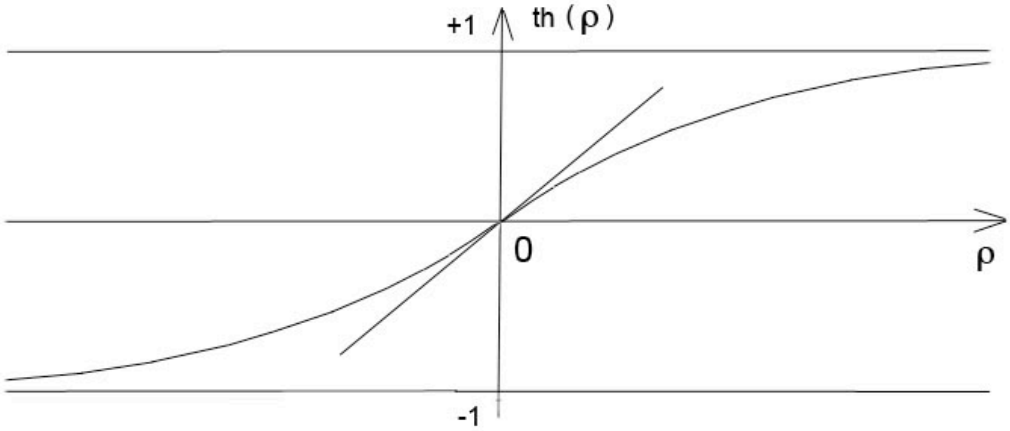
et :

$$dr = \alpha\ f'(\rho)\, d\rho \qquad\qquad \frac{r}{r-\alpha} dr^2 = \alpha^2 (1+f) \frac{f'^2}{f} d\rho^2$$

On a $dr = \alpha\, f'\, d\rho$. Il faudrait une fonction f telle que $dr \sim d\rho$ à l'infini.

On on sait, par exemple en 2D, après analyse du plongement isométrique qu'on a près de la gorge une allure parabolique. Donc quelque chose comme $dr = \rho\, d\rho$ pourrait être intéressant.

On a une fonction $f'(\rho)$ qui tend vers une limite à l'infini, c'est la fonction $f'(\rho) = \alpha\, th\rho$.



$$sh\rho = \frac{e^{\rho} - e^{-\rho}}{2} \qquad\qquad ch\rho = \frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{2} \qquad\qquad th\rho = \frac{e^{\rho} - e^{-\rho}}{e^{\rho} + e^{-\rho}}$$

On remonte à $f(\rho)$ en intégrant :

$$r = \alpha \int th\rho\, d\rho = \alpha \int \frac{sh\rho}{ch\rho} d\rho$$

Comme $sh\rho$ est la dérivée de $ch\rho$ (et vice-versa) : $sh\rho\, d\rho = d(ch\rho)$

L'inégrale est de la forme $\int \frac{du}{u} = Logu$ donc

$$r = \alpha\ Log\ ch\rho + Cst$$

Et on arrive en finale à :

$$r = \alpha\,(\,1 + Log\;ch\rho\,)$$

C'est donc de là que venait ce mystérieux changement de variable. Ça a pris du temps, mais j'ai quand même fini par trouver.

Celui-ci donne aux métriques les formes :

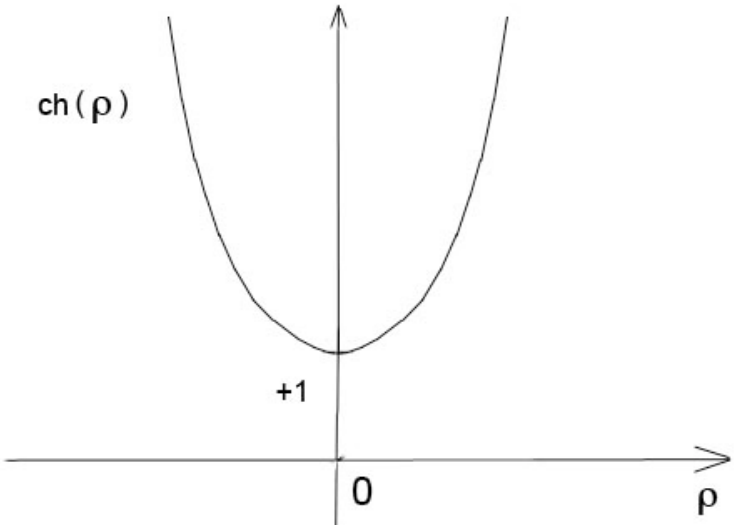
En 2D :

$$ds^2 = \alpha^2\,\frac{1 + Log ch\rho}{Log ch\rho}\,th^2\rho\;d\rho^2 + \;\alpha^2(\,1 + Log ch\rho\,)^2\,d\varphi^2$$

En 3D :

$$ds^2 = \;\alpha^2\,\frac{1 + Log ch\rho}{Log ch\rho}\,th^2\rho\;d\rho^2 + \;\alpha^2(\,1 + Log ch\rho\,)^2\,(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\,)$$

Quelle est la forme de la fonction $ch\rho$?



Quand on a $\rho \to \infty$ $\quad ch\rho \to \dfrac{e^{\rho}}{2}$ $\quad Log\,ch\rho \to \rho - Log\,2 \simeq \rho$ $\quad th^2\rho \to 1$

La forme de la métrique tend vers :

En 2D :

$$ds^2 = \;\alpha^2 d\rho^2 + \;\alpha^2\rho^2\,d\varphi^2$$

En 3D :

$$ds^2 = \;\alpha^2 d\rho^2 + \;\alpha^2\rho^2\,(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\,)$$

Il faut encore transformer ces métriques en leurs expressions en coordonnées cartésiennes.

Pour ce faire il faudrait envisage de nouveaux changements de variable

$$\{ \rho , \varphi \} \rightarrow \{ x , y \}$$

$$\{ \rho , \theta , \varphi \} \rightarrow \{ x , y , z \}$$

Le taupin pourra s'amuser à ça. Limitons-nous au 3D, avec le changement de variable inverse.

On part de $ds^2 = dx^2 + dy^2$ et on pose :

$$x = \alpha \rho \cos \varphi \qquad y = \alpha \rho \sin \varphi$$

$$dx = -\alpha \rho \sin \varphi \, d\varphi + \alpha \cos \varphi \, d\rho \qquad dy = \alpha \rho \cos \varphi \, d\varphi + \alpha \sin \varphi \, d\rho$$

On trouve :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \alpha^2 \, d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 \, d\varphi^2$$

Ce qu'il faut bien comprendre c'est que cette propriété est *intrinsèque*. Si ces diabolos n'étaient pas euclidiens à l'infini il n'y aurait aucun jeu de coordonnées qui permettrait de donner à la métrique une forme euclidienne.

Imaginons un être qui vive dans le diabolo 2D. Il pourrait construire un triangle constitué par des géodésiques et, pour des grandes valeurs de *s* (en s'éloignant du cercle de gorge) il constaterait que la somme des trois angles vaut π.

De même cet être qui vivrait dans le diabolo 3D pourrait, loin de la sphère de gorge, construire une sorte de cube dont les faces seraient des entrelas de géodésiques, il constaterait alors que la somme des huit angles solides de son polyèdre vaut 4 π.

Passons à la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\varphi^2)$$

Qu'on écrira :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) c^2 dt_S^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\varphi^2)$$

Là encore, une Remarque qui me semble importante :

Quand on fait tendre *r* vers l'infini cette métrique devient "improprement" euclienne (ou "euclidienne avec une signature hyperbolique (+ - - -) »)

$$ds^2 = c^2 dt_S^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

C'est une propriété intrinsèque liée à cette hypersurface solution. Le fait d'être euclidien ou improprement euclidien est synonyme d'espace "plat", sans courbure, bien que cette idée d'espace plat avec un espace hyperbolique parle peu à l'imagination.

Cela veut simplement dire que l'espace découlant de la métrique de Schwarzschild (extérieure) est "plat à l'infini ». Ça n'est pas une question de choix de coordonnées. Il est comme ça intrinsèquement.

Dans cette forme d'écriture de la métrique de Schwarzschild et avec ces coordonnées $\{ t_S , r , \theta , \varphi \}$ la variable chronologique est ce que nous avons appelé "le temps de Schwarzschild".

On fait disparaître les deux singularités de coordonnées, toujours à l'aide du changement de variable magique :

$$r = \alpha (1 + Log\, ch\rho)$$

et l'expression de la métrique, dans ce jeu des coordonnées $\{ t_S , \rho , \theta , \varphi \}$

$$ds^2 = \alpha^2 \frac{Log ch\rho}{1 + Log ch\rho} c^2 dt_S^2 - \alpha^2 \frac{1 + Log ch\rho}{Log ch\rho} th^2\rho \, d\rho^2 - \alpha^2 (1 + Log ch\rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Passage à une configuration orbifold.

Si nous voulons faire interagir les particules cheminant de part et d'autre de la surface de gorge nous sommes conduits à une configurant orbifold, le long d'une surface fermée qui est un projectif P3. En termes de physique ceci se traduira par une P-symétrie.

Mais le terme $g_{t_S t_S}$ est nul sur la surface de gorge, ce qui signifie qu'en ce point nous ne pouvons plus orienter le temps. Cette surface est donc un lieu où s'opère l'inversion de la coordonnée chronologique ce qui, physiquement, se traduira par une T-symétrie.

Cette configuration orbifold fait interagir des particules qui sont en relation de PT-symétrie. Or on sait que la T-symétrie entraîne une inversion de la masse (Souriau 1970, cf. chapitre 14 de la référence [7]). Donc, au passage de la surface de gorge la masse des particules s'inverse, idée qui avait été présenté en 2015 dans le papier "natural mass inversion process" [5].

Une configuration de type orbifold diffère de la classique notion de manifold (« manifold », en français, se traduit par "variété"). Quand on équipe une variété d'une métrique Riemanienne elle devient "une variété riemanienne". Mais, classiquement, on

exige qu'en tout point on puisse définir des coordonnées (dites "gaussiennes"). Ceci implique que le déterminant de la métrique soit partout non-nul.

Dans l'orbifold on autorise le fait que certaines régions soient sur ce plan, singulières, inorientables. Ainsi l'espace-temps, ainsi configuré, est-il "localement inorientable", à la fois vis-à-vis de l'espace, et du temps.

Quid du Big Bang ?

On est alors immédiatement tenté de se demander si la structure de cette "singularité initiale" ne correspondrait pas tout simplement à une structure de type orbifold. Celle-ci permet tout d'abord d'éviter cette singularité, qui disparait, le Big Bang étant réduit au statut de "singularité de coordonnées" (qu'un changement de coordonnées permet donc de faire disparaître).

Avec une structure de type orbifold la coordonnée temps se trouve inversée au franchissement de la surface de gorge, de même que l'énergie et la masse. On a également une situation d'énantiomorphie, d'effet mirroir. Au total nous aurons une PT-symétrie.

Mais pourquoi s'arrêter en si bon chemin. Pourquoi ne pas ajouter une 5e coordonnée de Kaluza (gérant la charge électrique) ? Et même de p coordonnées de Kaluza, pour tenir compte de toutes les charges quantiques.

La surface de gorge étant inorientable, son franchissement entraîne l'inversion des coordonnées additionnelles, donc une C-symétrie.

Tel que conjecturé jadis par Andreï Sakharov, le Big Bang, devenu ici non singulier, correspond à une

CPT-symétrie

Au moment où les deux "côtés" de l'univers se forment (le mot "avant" perd son sens) l'espace et le temps sont inorientables, l'énergie est nulle, toutes les charges quantiques sont nulles.

Ce schéma répond à la question de *l'avant Big Bang*. (du grain à moudre pour les philosophes).

On retombe sur la question de l'observateur. Le sens du temps est inséparable du choix que l'on fait de l'observateur. Ici il y en a potentiellement deux, constitués de masses positives ou de masses négatives. Si on passe de l'un à l'autre, la conception passé-futur est inversée.

Mais ces deux côtés, "versants d'espace-temps" ne sont pas symétriques. L'un des deux héberge des créatures vivantes, pensantes, conscientes, l'autre, non.

Pourquoi ? Cela a délà été évoqué dans des travaux antérieurs, dès 1995 [4]. A l'issue de l'ère radiative la valeur absolue de la densité de matière dans le "côté négatif" prime :

$$\left|\rho^{(-)}\right| >> \rho^{(+)}$$

En s'affranchissant du rayonnement ("découplage") les deux populations peuvent être le siège d'une instabilité gravitationnelle. Mais le temps caractéristique d'un tel phénomène est alors le temps de Jeans. Alors :

$$t_J^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\left|\rho^{(-)}\right|}} << t_J^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\left|\rho^{(+)}\right|}}$$

Ainsi la masse négative se constitue-t-elle en conglomérats (des « Great Repellers ») , repoussant la masse positive dans l'espace intersticiel, lui conférant ainsi une structure lacunaire (Astrophysics and Space Science 1995).

Ce faisant, la masse positive est violemment comprimée, selon des plaques, géométrie optimale pour permettre un refroidissement radiatif, favorisant l'instabilité gravitationnelle (naissance de galaxies).

Les conglomérats de masse négative sont sphéroidaux. Ils sont contitués d'espèce légères de masse négative (hydrogène, hélium…). Mais ces objets se comportent alors comme des proto-étoiles dotées d'un *cooling time* , d'un temps de refoidissement, excédant l'âge de l'univers. En effet, la quantité de chaleur à évacuer croit comme le cube du rayon de l'objet, alors que la surface de son "radiateur" croit comme le carré.

Pour qu'une proto-étoile puisse se muer en étoile il est nécessaire que la température en son centre dépasse la valeur seuil de 700.000 degrés. Pour les conglomérats de masse négative cela ne se produira jamais. La nucléosynthèse ne pourra pas opérer en créant les atomes lourds des planètes et les constituants de la vie.

Donc, dans ce versant négatif de l'univers, pas de galaxies, pas d'étoiles, pas de planètes, pas d'espèces lourdes et… pas de vie.

Un observateur susceptible de capter les photons d'énergie négative émis par ces objets les percevrait comme une distribution de masse sphéroïdales, aux contours flous, émettant dans le rouge et l'infrarouge.

Quel passé lointain pour l'univers ?

Quand on remonte dans le passé de l'univers on devrait donc tomber sur un moment où la masse et la "flèche du temps" s'inversent.

Les accélérateurs de particules sont censés nous permettre d'explorer cet état d'un passé lointain de l'univers. Quand on dote les particules d'une énergie E, on associe aussitôt à cet état un équivalent thermique selon la relation E = k T, k étant la constante de Boltzmann.

Mais est-ce licite ?

Est-ce qu'en raisonnant ainsi on n'est pas dans la situation d'un expérimentateur qui, projetant l'une contre l'autre deux molécules d'air à 800 mètres par seconde se dit "je reconstitue un état de l'air lorsque ce gaz est porté à 1200 K".

La vitesse des éléments est là. Mais il manque la densité (donc la pression). Il est possible alors qu'on passe à côté d'un phénomène qui ne peut s'observer que quand les deux sont réunis, quand les vitesses des composants dépassent un seuil au sein d'une densité suffisante, bref lorsqu'on atteint une valeur critique de la pression, qu'un accélérateur de particule ne peut recontituer.

De quel phénomène pourrait-il s'agir ?

On a vu que quand le noyau de fer, situé au centre d'une étoile massive, subissait une très forte "rétro-compression" dans le phénomène de supernova, les électrons commençaient par disparaître, ne trouvant plus assez de place pour loger leur fonction d'onde, selon le schéma :

Proton + électron → *neutron plus neutrino.*

Un tel processus donne alors naissance à une étoile à neutrons. Mais que se passe-t-il quand cette compression continue, que les conditions soient telles que les neutrons ne puissent plus encaisser cette pression ? Les théoriciens imaginent alors une disparition des neutrons, et leur conversion en une soupe de quarks et de gluons, en chute libre.

Pourquoi ne pas imaginer que l'inversion de la masse en excès permette alors, dans une étoile à neutrons, à celle-ci en de s'échapper ?

Rappelons au passage que ce schéma est analogue à ce qui se passe lors de la compression du noyau de fer de l'étoile massive se muant en supernova. Dans ce cas c'est l'énergie qui trouve le moyen de s'échapper, sur la forme de neutrinos.

A l'échelle de l'univers, ce serait l'ensemble de la masse qui subirait cette inversion. Quand celle-ci s'opérerait-elle ? Quand les baryons ne pourraient plus loger leur fonction d'onde, la dimension caractéristique étant la classique longueur d'onde de Compton :

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \quad \text{pour les baryons : } 1{,}133\ 10^{-15}\ \text{m}$$

L'horizon du passé correspondrait alors à l'époque où les baryons se retrouvaient tassés, les distances qui les séparent devenant inférieures à leur distance de Compton.

Cela expliquerait pourquoi l'escalade en énergie, dans les accélérateurs de particules, ne cadre pas avec l'image qu'on se fait d'un passé lointain du cosmos.

Retour vers la solution de Schwarzschild

Cette solution extérieure de Schwarzschild n'a de sens qu'en prolongeant une métrique intérieure qui décrit la géométrie à l'intérieur d'une goutte de matière, de masse *M*. On peut donc écrire :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt_S^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right)$$

Cette expression métrique décrit donc le comportement de masses-témoins +1, positives, dans un tel champ de gravité.

Si d'aventure une masse, appartenant à cet "autre côté de l'univers", donc de masse -1, passait par là, elle subirait une force de répulsion et suivrait une géodésique issue de la métrique :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt_S^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

On a donc, à ce stade, transformé le modèle du trou noir en un couple "trou noir-fontaine blanche", toujours avec ce thème du gel du temps.

Ce gel du temps est la carte faible de ce château de cartes qu'est le modèle du trou noir.

On sait que les étoiles à neutrons sont des objets qui tournent sur eux-mêmes très rapidement avec des vitesses de rotation atteignant mille tours par seconde.

Avec sa symétrie sphérique, statique, un modèle basé sur la métrique de Schwarzschild ne colle donc pas avec la réalité physique.

Un modèle d'objet avec rotation relève d'un autre groupe de symétrie. Schwarzschild c'est O(3) × R, la symétrie sphérique. L'objet en rotation est axisymétrique. Il est invariant par rotation, selon O(2). On ne peut donc pas passer d'un objet à l'autre par un simple changement de coordonnées.

La métrique de Kerr (1963)

En 1963, le Néo-Zélandais Roy Kerr construit la version non-linéaire d'une solution de l'équation d'Einstein indépendante du temps et axisymétrique [8].

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha \, \mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + a^2 \cos^2\theta} \right) dt_K^2 - \frac{\mathrm{P}^2 + a^2 \cos^2\theta}{\mathrm{P}^2 + a^2 - \alpha \, \mathrm{P}} d\mathrm{P}^2$$

$$- (\mathrm{P}^2 + a^2 \cos^2\theta) d\theta^2 - \left[(\mathrm{P}^2 + a^2) \sin^2\theta + \frac{\alpha \, \mathrm{P} \, a^2 \sin^4\theta}{\mathrm{P}^2 + a^2 \cos^2\theta} \right] d\varphi^2 - \frac{2 \, \alpha \, \mathrm{P} \, a \sin^2\theta}{\mathrm{P}^2 + a^2 \cos^2\theta} dt_K \, d\varphi$$

Pour éviter toute confusion, au lieu d'utiliser la variable ρ , que je fais apparaître quand j'utilise le changement "la variable magique" j'ai utilisé la lettre grecque P ("rho majuscule").

Le paramètre *a* se réfère à la rotation ajoutée à ce modèle. Quand il est nul on retrouve la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\mathrm{P}}\right) dt_{\mathrm{S}}^{\,2} - \frac{d\mathrm{P}^2}{1 - \frac{\alpha}{\mathrm{P}}} - \mathrm{P}^2 (\,\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\,)$$

La solution de Kerr, comme l'avait fait celle de Schwarzschild en 1916 vis-à-vis d'un travail antérieur d'Einstein, de 1915, , étend une solution approchée publié en 1918 par Lense et Thiring [9].

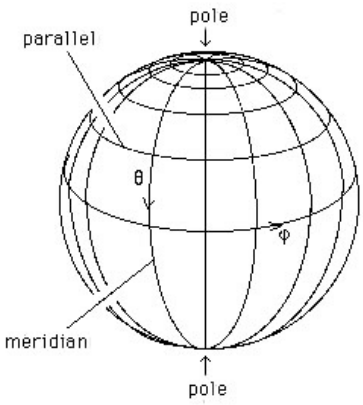
Cette solution fait apparaître un phénomène que je juge essentiel, qu'on appelle le "frame-dragging" et qui traduit la présence dans cette expression métrique d'un terme croisé en $dr\,dt_{\mathrm{E}}$.

(on notera que l'absence de ce terme croisé est « heuristiquement justifiée » par Adler Schiffer et Bazin en début de chaitre 6, comme quelque chose de « convenient » et de « reasonable »).

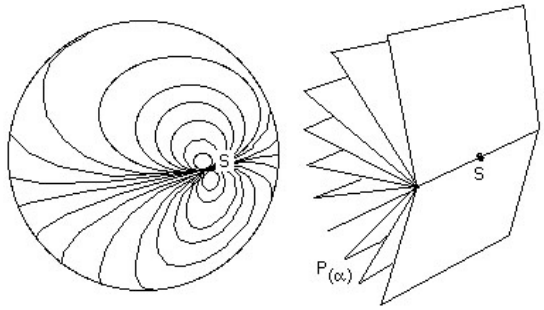
En Relativité Générale les trajectoires des photons correspondent à ds = 0. C'est la définition même des photons. Et vous savez que les géodésiques sont des attributs intrinsèques d'un objet géométrique, indépendants du choix fait pour les coordonnées, qui sont une façon de "lire" l'objet.

A titre d'exemple je prendrai celui de la sphère, qui possède son ensemble de courbes géodésiques (tous les grands cercles qui peuvent être tracés sur cette sphère). Mais pour repérer toute courbe sur cette sphère il est nécessaire de se doter d'un outil de lecture : d'un jeu de coordonnées.

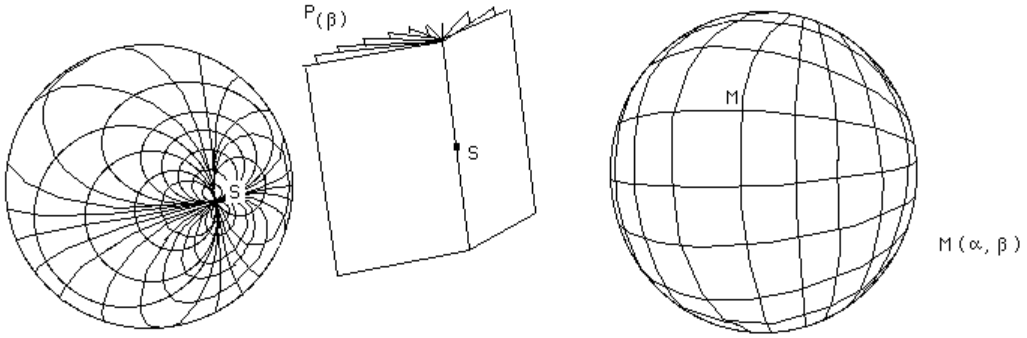
Comme la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sphère S2 est 2, cette lecture impliquera nécessaire l'apparition de singularités de coordonnées : les pôles.



Mais les dessins ci-après montrent qu'on peut envisager la cartographie de cette sphère S2 avec un pôle unique. On peut créer une première famille de courbes en coupant par exemple la sphère par des plans passant par une tangente à la sphère en un point :



On peut alors créer une seconde famille de courbes en coupant la sphère par des plans passant par une tangente à celle-ci, perpendiculaire à la première. On obtiendra globalement ceci :



Ceci pour bien insister sur ce qui est intrinsèque et sur ce qui est contingent (qui dépend du mode de représentation à l'aide d'un système de coordonnées).

Bien sûr, qui peut imaginer, dans sa tête, une hypersurface ayant des géodésiques de longueur nulle.

Rassurez-vous, je ne suis pas plus capable de le faire que vous.

L'axisymétrie de la solution de Kerr est une solution intrinsèque.

Plaçons-nous dans un plan $\theta = \pi / 2$

$$ds^2 = (1-\frac{\alpha}{\mathrm{P}})c^2\, dt_{\kappa}^{\,2} - \frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{P}^2 + a^2 - \alpha\,\mathrm{P}}\, d\mathrm{P}^2 - \left(\mathrm{P}^2 + a^2 + \frac{\alpha\, a^2}{\mathrm{P}} \right) d\varphi^2 - \frac{2\alpha\, a}{\mathrm{P}}\, d\varphi\, dt_{\kappa}$$

On peut ensuite considérer des trajets à ds nul (lumière)le long de courbes P : Cst et évaluer la vitesse

$$\mathrm{v}_{\varphi} = \frac{\mathrm{P}\, d\varphi}{dt_{\kappa}}$$

dans ce système de référence particulier.

$\frac{d\varphi}{dt_{\kappa}}$ sera solution de l'équation du second degré :

$$\left(\mathrm{P}^2 + a^2 + \frac{\alpha\, a^2}{\mathrm{P}}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt_{\kappa}}\right)^2 + \frac{2\alpha\, a}{\mathrm{P}}\frac{d\varphi}{dt_{\kappa}} - (1-\frac{\alpha}{\mathrm{P}})c^2 = 0$$

On trouvera deux valeurs différentes, ce qui est est le signe d'un phénomène d'entraînement du système de coordonnées. Je citerai à cet effet le commentaire extrait de l'ouvrage d'Adler, Schiffer et Bazin :

- *Loosely speaking, we may think of the rotating source as "dragging" space around with it; in a Machian sense the source "competes" with the Lorentzian boundary conditions at infinity in the establishment of a local inertial frame.*

Cette phrase est comme formulée au conditionnel : " Tout se passe comme si ...."

Traduction :

- De manière schématique, on peut imaginer que la source en rotation « entraîne » en quelque sorte l'espace avec elle ; au sens de Mach cette source entre en compétition avec les conditions Lorentziennes à l'infini en tentant d'établir son propre référentiel inertiel.

Dans la suite de l'ouvrage, comme dans tous ses homologues, dans toutes les langues, ou dans tous les cours délivrés en milieu académique l'attention se porte alors sur les incidence de cette métrique de Kerr vis à vis de la modification de la ... singularité centrale !

On passe à côté de l'essentiel, pour se concentrer sur l'illusoire.

Il faut écouter les "messages" que nous adressent les équations. Celui-ci en est un qui milite en face de l'idée exprimée par Ernst Mach, contemporain d'Einstein, selon laquelle l'espace était lié à la matière, cet effet se faisant sentir quand la densité dépasse un certain seuil (celui de l'étoile à neutrons).

Ainsi cet objet dense, en rotation, entraîne-t-il l'espace dans son mouvement.

Je ne sais pas si quelqu'un a construit la solution non linéaire de l'équation d'Einstein qui correspondrait à un astre constitué d'un fluide incompressible, en rotation, ce qui serait le pendant de la solution intérieure de Schwarzschild. Si ça n'est pas fait, il faudrait le faire.

Les théoriciens ont construit leur modèle du trou noir, qui occupe aujourd'hui une position centrale dans leur cosmologie, en tant que spectacle de l'implosion d'une étoile à neutrons en " arrêt sur image". Ce thème du découplage temporal, présenté plus haut, est indispensable pour justifier un tel modèle. Mais il s'appuie sur une solution de l'équation d'Einstein exempte de terme croisé en $dr\, dt$. Est-ce justifié ?

La métrique d'Eddington

En 1924 Arthur Eddington suggère un autre système de coordonnée, qui a une incidence sur la coordonnée de temps. Voici le passage-clé :

7.1 Eddington's Form of the Schwarzschild Solution

A. S. Eddington, in 1924, obtained a useful form of the Schwarzschild solution, upon which we shall base our derivation of the Kerr solution. The Schwarzschild solution is put into Eddington's form by a coordinate transformation containing a new time marker

$$(7.1)\quad \bar{x}^0 = x^0 + 2m \log\left|\frac{r}{2m} - 1\right| \qquad \bar{r} = r \qquad \bar{\theta} = \theta \qquad \bar{\varphi} = \varphi$$

237

Ici Eddington exprime une nouvelle coordonnée de temps $\bar{x}°$ en fonction de celle qui est présente dans la formulation classique de la métrique de Schwarzschild, c'est à dire $x°$. On identifier ces deux chronological markers à :

$$ct_S = x° \quad \text{“ temps de Schwarzschild “}$$

$$ct_E = \bar{x}° \quad \text{“ temps d'Eddington “}$$

Voyons ce que cela donne. On part de la métrique de Schwarzschild avec son “temps de Schwarzschild” :

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)c^2 dt_S^2 - \frac{r\,dr^2}{r-\alpha} - r^2\,(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

Le changement de coordonnée temporelle suggéré par Eddington équivaut à :

$$ct_S = ct_E - \alpha\,\mathrm{Log}\left|\frac{r}{\alpha} - 1\right|$$

Différencions :

$$c\,dt_S = c\,dt_E - \frac{\alpha\,dr}{r-\alpha}$$

$$\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)c^2\,dt_S^2 - \frac{r\,dr^2}{r-\alpha} = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)\left[c^2\,dt_E^2 + \frac{\alpha^2 dr^2}{(r-\alpha)^2} - \frac{2\alpha c\,dr\,dt_E}{r-\alpha}\right] - \frac{r\,dr^2}{r-\alpha}$$

$$= \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)c^2\,dt_E^2 + \left(\frac{\alpha^2}{r(r-\alpha)} - \frac{r}{r-\alpha}\right)dr^2 - \frac{2\alpha c}{r}\,dr\,dt_E$$

ou :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 + \left(\frac{\alpha^2 - r^2}{r(r-\alpha)}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr\, dt_E - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Avec ce temps d'Eddington on a bien un terme croisé en $dr\, dt_E$. Mais celui-ci ne s'est pas attaché à cet aspect des choses. On voit très bien le but qu'il poursuivait : faire disparaître la singularité de coordonnée en $r = \alpha$, ce qu'il avait obtenu au passage. Mais il ne s'est absolument pas posé la question du calcul du temps de chute libre. Tout autre terme croisé est éliminé, autre que $d\varphi\, dt$, voir le passage :

The Kerr Solution **255**

A further simplification of this result can be made. We wish to show ultimately that the Kerr solution is appropriate to some form of rotating body, and so it is reasonable to suppose that space-time is, loosely speaking, dragged around with the body. This suggests that we attempt to make the line element formally as similar as possible to that of rotating flat space, (4.83). This form of the flat-space line element contains only one off-diagonal term in the metric tensor, a term in $d\varphi\, dt$. Motivated by this physical consideration, as well as mathematical simplicity, we shall introduce a coordinate transformation that eliminates the $du\, d\rho$ and $d\rho\, d\varphi$ terms of (7.104).

J'ai souligné deux phrases. La première dit :

- *... il est ainsi raisonable de supposer que l'espace-temps, pour ainsi dire, se trouve entraîné autour de l'objet.*

Les auteurs se basent ensuite sur la forme que prend la métrique *de Lorentz* quand on introduit la rotation à l'aide du changement de coordonnée (4.82). Et de conclure :

> *- Motivés par cette considération physique, aussi bien que par la recherche de simplicité physique, nous introduirons un changement de coordonnées qui élimine les termes en du dρ et dρ dφ de l'équation* (7.104).

Ce faisant ils en concluent que le seul terme croisé ne peut être qu'en *dr dφ*, ce en quoi ils commettent une erreur.

En conclusion, ce qui est à retenir c'est que la forme de métrique, inspirée par celle d' Eddington en :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} dr\, dt_E - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

avec $\delta = \pm 1$ doit être prise en considération.

En effet :

- Les termes de la métrique sont indépendants du temps.

- On a une symétrie sphérique

- La métrique tend vers la forme Lorentzienne à l'infini.

@ Calcul du temps de chute libre avec le temps d'Eddington

Dans les ouvrages le modèle du trou noir s'appuie sur la solution de Schwarzschild. C'est également avec cette solution qu'on été construites la majorité des images de synthèse qui ont connu une large diffusion auprès du public. Cette solution décrit aunsi « le trou noir de Schwaraschild ».

On repart sur les équations de Lagrange.

$$F = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \dot{t}_E^{\,2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \dot{r}^2 + \frac{2\delta\alpha c}{r} \dot{r}\, \dot{t}_E - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad r^2 \sin^2\theta\, \varphi = \mathrm{h} = \mathrm{Cst}$$

On peut considérer des trajectoires géodésiques dans le plan $\theta = \pi / 2$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \dot{t}_{\mathrm{E}}}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \left(1 - \frac{\alpha}{\mathrm{r}}\right) c\, \dot{t}_{\mathrm{E}} + \frac{\delta\alpha}{\mathrm{r}} \dot{\mathrm{r}} = \mu = \mathrm{Cst}$$

$$c\dot{t}_{\mathrm{E}} = \frac{\mu r - \delta\alpha \dot{r}}{r - \alpha} \qquad \frac{\delta\alpha}{r} \dot{r} = \mu - \left(1 - \frac{\alpha}{\mathrm{r}}\right) c\, \dot{t}_{\mathrm{E}} \qquad \dot{r} = \frac{r}{\delta\alpha}\left[\mu - \left(1 - \frac{\alpha}{\mathrm{r}}\right) c\, \dot{t}_{\mathrm{E}}\right]$$

On utilise là encore l'équation :

$$1 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \dot{t}_E^{\,2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \dot{r}^2 + \frac{2\delta\alpha}{r} \dot{r}\, c\dot{t}_E - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)$$

On va d'emblée se limiter à des trajectoires radiales ($d\theta = d\varphi = 0$)

$$1 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \dot{t}_E^{\,2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \dot{r}^2 + \frac{2\delta\alpha}{r} \dot{r}\, c\dot{t}_E \qquad with: \qquad c\dot{t}_E = \frac{\mu r - \delta\alpha \dot{r}}{r - \alpha}$$

on obtient :

$$\dot{r} = v \sqrt{\mu^2 - 1 + \frac{\alpha}{r}} \quad \text{avec} \quad v = \pm 1$$

$$\frac{dt_E}{dr} = \frac{\dot{t}_E}{\dot{r}} = \frac{\nu}{c}\,\frac{\mu r - \delta\alpha\nu\sqrt{\mu^2 - 1 + \frac{\alpha}{r}}}{(r-\alpha)\sqrt{\mu^2 - 1 + \frac{\alpha}{r}}}$$

$$\Delta t_E = \frac{\nu}{c}\int_{r_1}^{\alpha} \frac{\mu r - \delta\alpha\nu\sqrt{\mu^2 - 1 + \frac{\alpha}{r}}}{(r-\alpha)\sqrt{\mu^2 - 1 + \frac{\alpha}{r}}}\,dr$$

Cette intégrale est susceptible de diverger quand α tend vers 1 . Alors :

$$\frac{dt_E}{dr} \to \frac{\nu}{c}\,\frac{r - \delta\alpha\nu}{r-\alpha}$$

Considérons les trajectoires plongeantes : $\nu = -1$

$$\frac{dt_E}{dr} \to \frac{\nu}{c}\,\frac{r + \delta\alpha\nu}{r-\alpha}$$

Le temps de chute sera fini si $\delta = -1$

Avec ce choix les trajectoires d'évasion s'effectrueront en un temps infini. La sphère de Schwarzschild se comporte comme une one-way membrane.

La métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)c^2 dt_E^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)dr^2 - \frac{2\alpha c}{r}\,dr\,dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)$$

Elle est lorentzienne à l'infini. On peut envisager la métrique telle que $\delta = -1$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)c^2 dt_E^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)dr^2 + \frac{2\alpha c}{r}\,dr\,dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)$$

Alors on obtient une one-way membrane inverse. Les temps d'évasion sont finis et les temps de chute libre infinis.

Le découplage temporel, clé de ce modèle du trou noir, disparaît.

Conclusion

Dans une première partie de l'étude, nous avons remis en cause l'interprétation de la géométrie de Schwarzschild, sur la base de considérations topologiques. Mais ça ne remettait pas fondamentalement en question l'existen des objets baptisés trous noirs.

Cette seconde étude débouche sur une objection plus lourde. Le modèle repose sur une non prise en compte d'un phénomène de frame-dragging radial dont l'existence est suggérée par l'existence d'un frame-dragging azimutal quand l'objet possède un moment de rotation. On constate alors que le temps de chute libre de particules devient fini. Le thème de l'arrêt sur image, pour un observateur distant, vivant alors au rythme du temps t_E , le « temps d'Eddington », ne tient plus.

Si le modèle du trou noir fait long feu, il reste à répondre à la question :

- *Que se passe-t-il quand une étoile à neutrons voit sa masse dépasser la valeur critique au delà de laquelle les neutrons ne peuvent plus résister à l'énorme pression gravitationnelle ?*

Un modèle qui est une alternative à celui du trou noir.

Dans une vidéo précédente nous avons montré, ce que Schwarzschild lui même avait découvert en février 1916, il y a un siècle (…) qu'une criticité physique se produisait avant que la critcité géométrique ne soit atteinte.

Je rappelle la forme de la métrique intérieure (géométrie à l'intérieur d'une sphère emplie d'un matériau de densité constante, incompressible).

La traduction de ce second article de Schwarzschild est accessible à l'adresse mentionnée en début de ce pdf.

Dans le Adler Schiffer et Bazin ces questions d'objet hyperdense sont traitées au chapitre 14. Les références bibliographiques liées à ce chapitre sont données ci-après. A la dernière ligne on trouve ce qui a été à la base de tous les autres travaux : le second papier publié par Schwarzschild en février 1916 qui, rappelons-le, n'a été traduit en anglais (la langue scientifique internationale), qu'en 1999, en français en 2017

Je n'ai pas exploré le contenu de tous les articles cités, si ce n'est celui d'Oppenheimer :

- http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1929-Oppenheimer.pdf

Dans cet article on remarquera deux choses. Primo quand Oppenheimer évoque la métrique extérieure (de Schwarzschild) il fixe la siggnature en introduisant dans son équation (1), d'emblée, deux fonctions exponentielles e^{ν} et e^{λ} , qui sont des fonctions strictement positives, en principe. Deux lignes plus loin les valeurs de ces fonctions sont explicitées et deviendraient alors négatives pour $r < r_o$ (…) .

produced by rotation, the line element outside the boundary r_b of the stellar matter must take the form

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (1)$$

with $e^{\nu} = (1 - r_0/r)$

and $e^{\lambda} = (1 - r_0/r)^{-1}$.

Here r_0 is the gravitational radius, connected with the gravitational mass m of the star by $r_0 = 2mg/c^2$, and constant. We should now expect that since the pressure of the stellar matter is insufficient to support it against its own gravitational attraction, the star will contract, and its boundary r_b will necessarily approach the gravitational radius r_0. Near the surface of the star,

in which primes represent differentiation with respect to r and dots differentiation with respect to t.

The energy-momentum tensor T_{ν}^{μ} is composed of two parts: (1) a material part due to electrons, proto adi- ation. f as that dial direct ates would the pressi adi- ation may be considered to be in equilibrium with the matter at this temperature, except for a flow of radiation due to a temperature gradient.

We have been unable to integrate these equa-

"gravitational radius"

Rayon de Schwarzschild

Ensuite, le fait d'appeler r_0 le « rayon gravitationnel » évoque l'idée qu'à l'époque le fait de désigner cette grandeur comme « le rayon de Schwarzschild » n'était pas encore passé dans les mœurs.

Le chapitre 14 reprend l'ensemble des travaux cités.

Bibliographie du chapitre 14 du Adler, Schiffer & Bazin :

Bibliography

Adams, R. C., J. M. Cohen, R. J. Adler, and C. Sheffield (1973): Analytic Neutron Star Models, *Phys. Rev.*, **D8**:1651.

Adler, R. J. (1974): A Fluid Sphere in General Relativity, *J. Math. Phys.*, **15**:727.

Carter, B. (1971): Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom, *Phys. Rev. Letters*, **26**:331.

Cohen, J. M., and A. G. W. Cameron (1971): Neutron Star Models, Including the Effects of Hyperon Formation, *Astrophys. Space Sci.*, **10**:227.

Israel, W. (1967): Event Horizons in Static Vacuum Space-Times, *Phys. Rev.*, **164**: 1776.

Oppenheimer, J. R., and H. Snyder (1939): On Continued Gravitational Contraction, *Phys. Rev.*, **56**:455.

Ruffini, R., and J. A. Wheeler (1971): Relativistic Cosmology and Space Platforms, *Proc. Conf. Space Physics, ESRO Paris Meeting.*

Schwarzschild, K. (1916): Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pp. 424–434.

Le chapitre 14 présente l'équation TOV, de Tolmann-Oppenheimer-Volkov comme une contribution majeure, sans mentionner le fait que celle-ci ne fait qu'expliciter le résultat de base, celui du papier de Sxhwarzschild de février 1016. Peu importe ….

En (14.22) on trouvera cette fameuse équation TOV :

$$\frac{p'}{c^2} = -\frac{\nu'}{2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \tag{14.21}$$

If the expression (14.19) is substituted for ν', we obtain finally

$$p' = -\frac{(\rho + p/c^2)(m + 4\pi\kappa p r^3/c^4)c^2}{r(r-2m)} \tag{14.22}$$

This is the famous TOV equation.

In Sec. 14.3 we shall discuss the use of the TOV equation in the construction of stellar models. Let us now show that the TOV equation is the relativistic generalization of the Newtonian equation of hydrostatic equilibrium. Consider, in the context of classical theory, a small rec-

qui elle-même découle de l'expression de cette « métrique intérieure de Schwarzschild » que j'ai déjà montrée dans la vidéo précédente :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}}\right]^2 c^2\,dt^2 - \frac{dr^2}{1-r^2/\hat{R}^2} \\ &\qquad - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad \text{for } r \le r_0,\ \hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho} \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\,dt^2 - \frac{dr^2}{1-2m/r} \\ &\qquad - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad \text{for } r \ge r_0,\ m = \frac{\kappa M}{c^2} \end{aligned} \tag{14.47}$$

On retrouve la grandeur $\hat{R}$ dont j'ai déjà parlé ainsi que cette évocation de la criticité physique, apparaissant avant la criticité géométrique. Je pense qu'il est important de citer ce qui suit, dans les pages 472 et 473 de ce livre :

We have so far supposed that the radius r_0 of the model star is greater than the Schwarzschild radius $2m$ so that no metric singularity occurs for $r > r_0$. This restricts the mass M accordingly

$$r_0 > 2m = \frac{2\kappa M}{c^2} \qquad M < \frac{c^2 r_0}{2\kappa} \tag{14.48}$$

We have also assumed that r_0 is less than $\hat{R}$, the parameter introduced in (14.28), so that no metric singularity occurs for $r < r_0$; it is interesting to note that this leads to the same result as above, (14.48). To see this we substitute into

$$r_0^2 < \hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho} \tag{14.49}$$

the expression for ρ obtained from (14.46)

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r_0^3} \tag{14.50}$$

to obtain again (14.48).

A slightly more stringent condition on M can be obtained from the pressure equation (14.42). If the pressure is never to become infinite inside the fluid, the denominator of (14.45) must never vanish. This will be so if $A > B$, or

$$\frac{3}{2}\left[1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right]^{1/2} > \frac{1}{2} \tag{14.51}$$

Traduction :

- Nous avons jusque là supposé que le rayon r_o de notre modèle d'étoile était plus grand que le rayon de Schwarzschild $2m$, de telle façon d'éviter l'apparition d'une singularité de la métrique. Ceci réduit la mase M, selon :

$$r_o > 2m = \frac{2GM}{c^2} \qquad M < \frac{c^2 r_o}{2G} \tag{14.48}$$

- Nous avons aussi supposé que r_o était inférieur au paramètre $\hat{R}$, introduit en (14.28), de telle façon qu'aucun singularité ne puisse apparaître pour $r < r_o$; il est intéressant de voir que ceci nous mène au même résultat que ci-dessus, en (14.48). Pour voir cela nous substituons dans

$$r_o^2 < \hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho} \tag{14.49}$$

l'expression de la densité ρ obtenue à partir de (14.46)

(14.50) $$\rho = \frac{3M}{4\pi r_o^3}$$

pour obtenir de nouveau (14.48).

Une condition légèrement plus restrictive peut être obtenue sur M à partir de l'équation (14.42) donnant la pression. Si la pression ne devient jamais infinie dans le fluide, le dénominateur de (14.45) ne doit jamais s'annuler.

(*qui n'est autre que la relation trouvée par Schwarzschild en février 1916*)

Ce sera le cas si $A > B$, ou

(14.51) $$\frac{3}{2}\left[1-\frac{r_o^2}{\hat{R}^2}\right]^{1/2} > \frac{1}{2}$$

Je reprends avec le haut de la page 473 :

Role of Relativity in Stellar Structure and Gravitational Collapse **473**

The square of this relation yields

(14.52) $$r_0^2 < \tfrac{8}{9}\hat{R}^2 = \frac{c^2}{3\pi\kappa\rho}$$

so by substituting for ρ from (14.50), we obtain, finally,

(14.53) $$M < \frac{4}{9}\frac{c^2 r_0}{\kappa}$$

which is only slightly smaller than the previously imposed limit (14.48). Note also that (14.53) guarantees that the coefficient of $(dx^0)^2$ in the line element is positive even at the center of the sphere.

Traduction :

Le carré de cette relation conduit à :

(14.52) $$r_o^2 < \frac{8}{9}\hat{R}^2 = \frac{c^2}{3\pi G\rho}$$

en substituant pour ρ ce qui émane de (14.50) on obtient finalement :

(14.53) $$M < \frac{4}{9}\frac{c^2 r_o}{G}$$

qui est seulement légèrement inférieur à la précédente limite (14.48).

Les auteurs ne voient dans cette proximité des deux valeurs qu'une simple coincidence. Je pense que, ce faisant, ils passent à côté d'un phénomène essentiel : l'apparition d'une criticité physique avant que ne se manifeste la criticité géométrique, quand le rayon de l'étoile est rejoint par le rayon de Schwarzschild.

La phrase suivante est tout aussi importante. Sa traduction :

> Remarquons aussi que la relation (14.53) garantit que le coefficient de $(dx°)^2$ dans la métrique reste positif, même au centre de la sphère.

Quand la masse atteint la valeur correspondant à la relation (14.53), quand la criticité physique est atteinte, que la pression s'envole vers l'infini, le coefficient du terme représentant le carré de l'élément de la vriable chronologique devient nul.

Je reproduis maintenantune courbe je n'avais calculée il y a plus de vingt ans. En fait, la constitution de cette longue série de vidéos m'a amené, outre d'évoquer ce qui avait déjà fait l'objet de publications dans des revues à comité de lecture, à évoquer ce qui n'a jamais pu l'être, donc ces calculs-là. Bien évidemment, quand je suis arrivé à ce résultat j'ai composé un article dont le titre était « *questionable black hole* » (« Le trou noir en question »). L'article n'a jamais été critiqué, et même simplement lu, le rejet, instantanné, étant accompagné (comme pour les simulations de la structure spirale galactique) par la classique phrase :

- *Sorry, we don't publish speculative works.*

A l'époque Internet n'existait pas. Quand j'ai créé mon site internet, ma motivation initiale avait été de mettre à disposition ces travaux, ce que j'ai fait.

Aucun écho

2017 marque le retour de cette affaire. J'ai pu remarquer que mes vidéos avaient reçu une certaine attention, non seulement de ceux qui avait un minimum de vernis pathjématique, mais aussi d'autres qui, même s'ils ne suivaient pas la partie équations, comprenait le sens de la démarche.

Il peut paraître singulier de prendre ainsi « le public à témoin » , mais cela reste le seul recours possible quand on ne peut même pas être entendu par les spécialistes.

Je continue la rédaction de ce pdf, qu'attendent tous ceux qui ont un niveau de mathématiques supérieures, c'est à dire qui manient l'algèbre, la triginométrie, l'exponentuelle et le logarithme, et les équations différentielles.

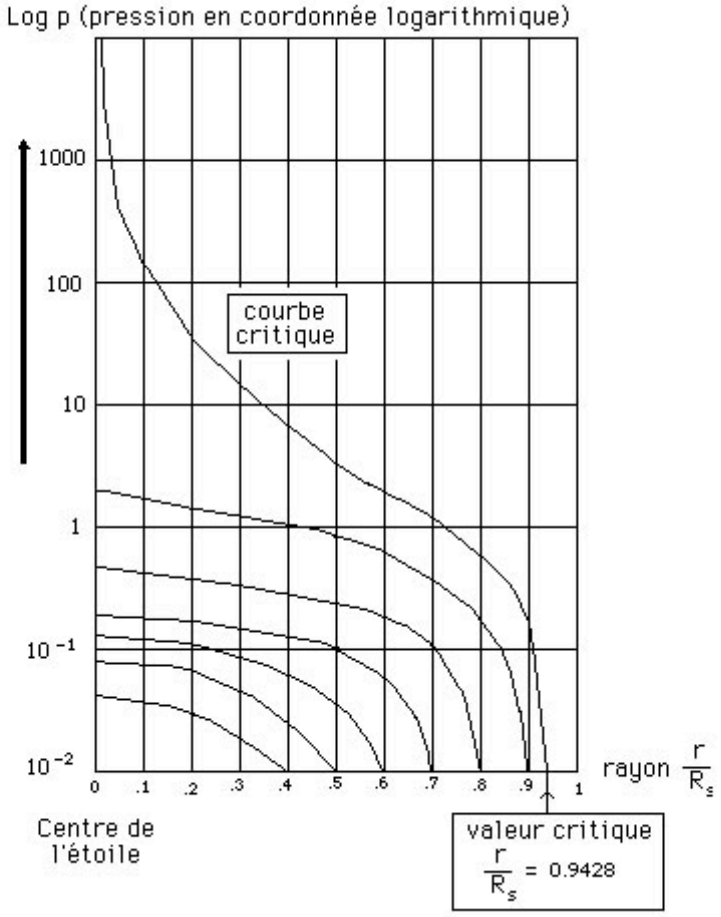
Quand j'aurais bouclé cette série, je referai le siège des grandes revues de publication, et le fait d'avoir popularisé tout cela fera qu'une masse importante de lecteurs pourra lire et comprendre les articles soumis. Ce gens découvriront du même coup la légèreté des réponse de ces mêmes revues, traduisant le plus souvent le fait que ces articles n'ont même pas été lus.

Jadis, quand les échanges se faisaient par voie postale on ne pouvait pas trop évaluer le temps que l'expert concerné pouvait avoir passé sur un article, ou même simplement l'attention que le comité de rédaction de la revue pouvait avoir consacré à l'article.

Aujourd'hui la messagerie électronique permet d'avoir accès à cette information. Ainsi, quand j'envoie un papier à la revue Astronomy and Astroophysics, le message de rejet me parvient-il cinq minutes après réceptions dudit article, avec une réponse en coupé-collé.

La criticité physique

Revenons à l'exploitation de l'équation TOV. Cela donne ceci :

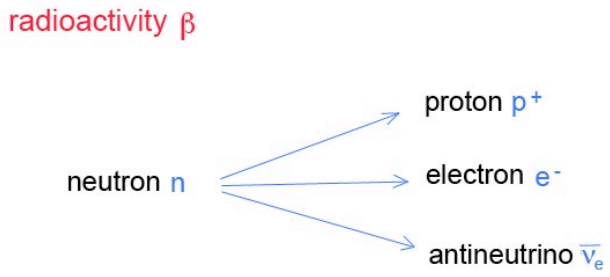


On voit comment la pression s'envole vers l'infini quand la criticité physique est atteinte. Mais alors, que se passe-t-il ?

Partant du principe qu'une valeur infinie n'a pas de sens en physique on doit table sur l'idée que quelque chose se passe quand la pression atteint une certaine valeur critique.

La pression, ou un des paramètres du milieu.

On a vu que l'étoile à neutrons se constituait quand le noyau de fer situé au centre d'une étoile massive se transformant en supernova se trouvait comprimé au point que les électrons ne parvenaient plus à caser leur fonction d'onde. On avait alors l'inverse de la décomposition spontanée des neutrons par radioactivité béta :



c'est à dire la réaction

proton + électron -> neutron + neutrino.

On ne trouve pas grand chose en tant que description de la structure interne d'une étoile à neutrons, sauf qu'au centre on devrait trouver une plasma composé de quarks et de gluons. Evidemmen, personne n'ira voir.

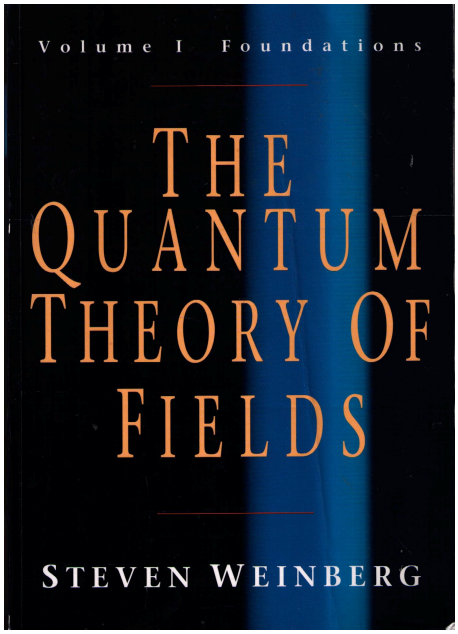
Je fais l'hypothèse que lorsque les neutrons ne peuvent plus « caser leur fonction d'onde » ils inversent leur masse et peuvent ainsi s'échapper. Si on table sur une masse volumique moyenne de 5 10^{17} k/m^3 (Wikipedia) et si on calcule la distance moyenne entre neutrons, on trouve 7 10^{-14} m . La distance de Compton du neutron est voisine de 10^{-15} m. Sachant que la densité au centre de l'étoile est supérieure peut être cent fois la densité moyenne indiqué, les ordres de grandeur se rejoignent.

Mais ça n'est qu'une conjecture.

La négation a priori des états d'énergie négative

Inutile d'espérer que la Mécanique Quantique nous fournisse un schéma d'inversion de masse. Les états d'énergie négative sont systématiquement exclus de la théorie quantique des champs, d'entrée de jeu, parce que considéré comme a priori impossible.

L'ouvrage de référence (édition 2005) est celui du prix Nobel Steven Weinberg



Ci-après, ce qu'on trouve pages 75-76 :

$$\mathsf{P}\, i H \mathsf{P}^{-1} = i H\,,$$

where $H \equiv P^0$ is the energy operator. If P were antiunitary and antilinear then it would anticommute with i, so $\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1} = -H$. But then for any state Ψ of energy $E > 0$, there would have to be another state $\mathsf{P}^{-1}\Psi$ of energy $-E < 0$. There are no states of negative energy (energy less than that of the vacuum), so we are forced to choose the other alternative: P *is linear and unitary, and commutes rather than anticommutes with* H.

On the other hand, setting $\rho = 0$ in Eq. (2.6.6) yields

$$\mathsf{T}\, i H \mathsf{T}^{-1} = -i H\,.$$

If we supposed that T is linear and unitary then we could simply cancel the is, and find $\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1} = -H$, with the again disastrous conclusion that for any state Ψ of energy E there is another state $\mathsf{T}^{-1}\Psi$ of energy $-E$. To avoid this, we are forced here to conclude that T *is antilinear and antiunitary*.

Now that we have decided that P is linear and T is antilinear, we can conveniently rewrite Eqs. (2.6.3)–(2.6.6) in terms of the generators (2.4.15)–(2.4.17) in a three-dimensional notation

Dans ces passages, Weinberg explique les choix restrictifs qui sont fait, concernant les opérateurs P et T de la théorie quantique des champs.

Traduction :

> Si P était un opérateur antilinéaire et antiunitaire cela voudraiot dire allrs qu'il commute avec i et qu'ainsi $\mathsf{P}\,\mathsf{H}\,\mathsf{P}^{-1} = -\mathsf{H}$. Mais alors pour tout état Ψ d'énergie positive E > 0 il y aurait alors un état d'énergie $\mathsf{P}^{-1}\Psi$ d'énergie –E <0. Il n'y a pas d'états d'énergie négative (d'une énergie plus faible que l'énergie du vide) et ainsi nous sommes contraints d'opter pour l'autre

alternative, selon laquelle P *est linéaire et unitaire et commute avec* H *au lieu d'anticommuter*.

D'un autre côté, en posant $\rho = 0$ dans l'équation (26.6) on obtient :

$$T\, i\, H\, T^{-1} = -\, i\, H$$

Si nous supposions que l'opérateur T était unitaire alors nous pourrions enlever la lettre i des deux côtés de l'équation et nous trouverions que $T\, H\, T^{-1} = -\, H$, ceci ayant encore pour conséquence désastreuse que pour tout état Ψ d'énergie E > 0 on aurait un état $T^{-1}\Psi$ d'énergie –E. Pour éviter cela nous sommes contraints de conclure que T est *antilinéaire* et *antiunitaire*.

Maintenant que nous avons décidé que P était linéaire et T antilinéaire nous pouvons etc …..

A la page 104 de l'ouvrage, nous trouvons :

No examples are known of particles that furnish unconventional representations of inversions, so these possibilities will not be pursued further here. From now on, the inversions will be assumed to have the conventional action assumed in Section 2.6.

Traduction :

Il n'existe pas de cas connus où des particules traduisent une représentation de telles inversions de telle façon que nous ne poursuivrons pas l'investigation de ces possibilités . A partir de maintenant les actions de ces ainversions seront supposées correspondre aux hypothèses faites dans la section 2.6

Come j'ai essayé de le dire au physicien théoricien Vernizzi, au colloque COSMO 17 de Paris, en août 2017, on doit prendre en compte les états d'énergie négative, car il existe maintenant un phénomène, le constat de l'accélération de l'expansion cosmique, sous l'effet d'une *pression négative*.

Comme il venait de le dire dans son exposé. Il contesta alors qu'une telle pression négative puisse être identifiée à une densité d'énergie négative. La lui ai alors montré son erreur. Mécontent, il répondit :

- *Bon, vous avez raison. J'en tiendrai compte à l'avenir.*

et il tourna les talons.

Là il convient d'expliquer comment intervient le terme de pression en Relativité Générale, dans le tenseur impulsion-énergie.

Celui-ci, dans sa formulation « mixte » s'écrit (Adler Schiffer et Bazin) début du chapitre 13 ;

13.1 Einstein's Equations and the Robertson-Walker Metric

In the following sections we shall consider a fluid continuum of a highly idealized nature which consists of galactic clusters. This fluid will be described by an average density ρ and an average internal pressure p, both of which can be functions of time but not of space. From this we are led to a very simple general form for $T^{\mu}{}_{\nu}$. The co-moving coordinates of a galactic cluster on the average satisfy $\dot{x}^0 = 1$, $\dot{x}^1 = \dot{x}^2 = \dot{x}^3 = 0$, so from the fluid energy-momentum tensor (10.41) and the fact that $g_{00} = 1$ in the Robertson-Walker metric (12.56), we obtain

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} \end{pmatrix} \tag{13.1}$$

425

Dans l'ouvrage, la solution instationnaire qui débouchera sur la solution de Friedmann est traitée en mettant cette matrice dans le second membre de l'équation d'Einstein. Bien sût, pour tout cela soit clair il me faudrait reprendre tout cela dans le détail. Mais, à la page suivante les équations (13.4a) et (13.4b) sont précisément les deux équations, dites « équations d'Einstein », au pluriel, qui représentent l'aboutissement de cette démarche. Les lettre ρ et p représentent effectivement les deux termes de densité et de pression présents dans la matrice (13.1), ci-dessus. Voici ces deux équations :

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho = -\Lambda - G^0{}_0 = -\Lambda + \left[\frac{3k}{R(t)^2} + \frac{3R'(t)^2}{c^2R(t)^2}\right] \tag{13.4a}$$

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\left(\frac{p}{c^2}\right) = \Lambda + G^i{}_i = \Lambda - \left[\frac{k}{R(t)^2} + \frac{R'(t)^2}{c^2R(t)^2} + \frac{2R''(t)}{c^2R(t)}\right] \tag{13.4b}$$

Einstein's equations

For later use we shall now also obtain an equivalent system. By taking linear combinations we get two new equations with different structure; one contains only a second-order derivative, and the other is independent of Λ:

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = \Lambda - \frac{3R''(t)}{c^2R(t)} \tag{13.5a}$$

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \frac{k}{R^2(t)} + \frac{R'^2(t) - R(t)R''(t)}{c^2R^2(t)} \tag{13.5b}$$

On les combine en (13.5a) et nous voyez que dans la parenthèse deux termes figurent avec un signe plus. On peut écrire d'ailleurs :

$$\left(\rho c^2 + p \right)$$

Il est clair que ρc^2 est une densité d'énergie. Comme on ne saurait additionner des radis et des navets, p est de même nature que ρc^2. C'edst bien une densité d'énergie par unité de volume.

Or, dans l'équation l'Einstein une densité de matière ρ (donc d'énergie ρc^2) freine l'expansion cosmique.

Il s'en suit que dans le « fluide cosmique » une pression positive joue le même rôle, alors qu'on pourrait s'attendre à ce que la pression puisse être un moteur de l'expansion, et non un frein.

C'est la raison pour laquelle (au moins là) tout le monde s'accorde pour dire que l'accélération de l'expansion va avec un $p < 0$.

Et comme, ce qui est clair avec ce qui est ci-dessus, cette pression p est « de même nature que ρc^2, c'est à dire que c'est aussi une densité d'énergie,

il s'en suit qu'il faut prendre en compte des énergies négatives.

Dans la vidéo JANUS 22 partie 4/5 je me suis appuyé sur des éléments empruntés à la théorie cinétique de gaz. Dans ce cas on considère que la pression est une force qui résulte du rebond d'une particule de masse *m*, animée d'une vitesse *V* sur une paroi. Dans ce rebond, elle cède à la paroi de la quantité de mouvement.

Quand on suppose que le fluide en contact avec cette paroi correspond à une distribution des vitesses Maxwellienne on peut calculer une valeur moyenne de cette « pression-force sur une paroi » et on trouve la valeur :

$$p = \frac{1}{3} \rho < \mathrm{V}^2 >$$

Comme $p = n\ m$ où n est le nombre de densité, le nombre de particule par unité de volume, essentiellement positif, une pression négative correspond au rebond de masses négatives.

On remarque au passage que si on met en contact une paroi avec des masses négatives *celle-ci l'attire à elle au lieu de la repousser.*

Tout cela pour faire en sorte de vous familiariser avec ce concepte de pression négative.

Toujours est-il que ce constat devrait amener les tenants de la Théorie Quantique des Champs à réexaminer cet ensemble théorique quand par exemple l'opérateur d'inversion de temps T est linéaire et unitaire. Si l'ouvrage de Weinberg pouvait ^petre qualifié de « tome I » il faudrait initier la constitution du « tome II ».

Si j'avais 40 ans de moins, c'est à dire 40 ans, je m'y mettrais.

Les incidences sont énormes, dans le domaine de la Mécanique Quantique. Cela entraîne au passage une remise en question du fameux « théorème CPT » (un « théorème de physicien », disait Souriau).

Ce qui pourrait émerger de cette remise en question, c'est une modèlisation de l'inversion de la masse et de l'énergie, dans le domaine d'une physique théorique « revisitée ». En l'absence de tels éléments on est obligé d'en rester à une conjecture.

Mais cette prise en compte d'états d'énergie négative aurait également des incidences sur l'ensemble de cette physique théorique appliquée que constituent les expériences menées dans les accélérateurs de particules, où l'on prétend « reconstituer les conditions de l'univers primitif ».

Ca n'est pas exact dans la mesure où il manque le paramètre « densité ». Les physiciens savent que les milieux très denses ne se comportent pas de la même manière que les milieux ultra-raréfiés.

On pourrait même dire que ce qu'on observe dans le collisionneur du CERN n'a rien à voir avec ce qui s'est produit au cours de l'histoire cosmique.

Quand on envisage cette idée d'une inversion des masses quand la densité et la pression dépassent un certain seuil, on remet en question ce qui correspond au passé lointain de l'univers jusqu'au « temps de Planck ». La théorie GUT (Grand Unification Theory) ne correspond peut être à rien de physique. De même que la supersymétrie. Tout simplement parce qu'on se réfèrerait à des conditions … qui n'ont jamais existé.

Les quarks, en dépit de leur fonctionnement si bien huilé seraient-ils nos modernes épicycles ?

Revenons à la cosmologie

Ce qui cadre avec la physique, dans une situation supposée stationnaire et à symétrie sphétique, c'est le couplage entre une solution « de Schwarzschild intérieure » avec une solution « de Schwarzschild extérieure », c'est à dire, je réécris tout cela :

$$(14.47)\quad ds^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}}\right]^2 c^2\,dt^2 - \frac{dr^2}{1-r^2/\hat{R}^2}$$

$$- r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad \text{for } r \le r_0,\ \hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho}$$

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\,dt^2 - \frac{dr^2}{1-2m/r}$$

$$- r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad \text{for } r \ge r_0,\ m = \frac{\kappa M}{c^2}$$

et , extrait de la page 194 :

Let us now summarize the results of this section by exhibiting the *Schwarzschild line element*

$$(6.53)\quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

This result must be considered to be the main achievement of general relativity theory in the field of celestial mechanics; it is an exact solution,

On se rappelle que m est une simple constante d'intégration (qui est d'ailleurs une longueur et non une masse) . Pour rendre tout ceci explicite nous allons faire apparaître la masse M qui est censée est à l'origine de tout cela.

On a :

$$M = \frac{4}{3}\pi r_n^3 \rho \qquad \rho = \frac{3M}{4\pi r_n^3} \qquad \hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho}$$

$$\frac{r_n^2}{\hat{R}^2} = \frac{2G\,M}{r_n c^2} \qquad \frac{r^2}{\hat{R}^2} = \frac{2G\,M r^2}{r_n^3 c^2}$$

D'où, pour la métrique extérieure et une étoiles sous-critique :

Métrique intérieure de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2G\,M}{r_n c^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2G\,M r^2}{r_n^3 c^2}}\right]^{1/2} c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2G\,M r^2}{r_n^3 c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Métrique extérieure de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G\,M}{c^2}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2G\,M}{c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

En écrivant cela, je n'invente rien. Je ne fais que reproduire le résultat de Karl Schwarzschild de janvier-février 1916. Ces métrique permettent de construire les géodésiques suivies par une particule de masse +1 dans le champ créé par une masse $M > 0$.

Dans le contexte du modèle Janus.

Considérons toujours une partie de l'espace où se situe une masse M, localisée dans une sphère de rayon r_n et entouré par du vide.

Alors, si une masse négative circule dans cette portion d'espace, elle suivra les géodésiques correspondant aux métriques :

Métrique intérieure:

$$\mathrm{ds}^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{2\mathrm{G}\,M}{r_\mathrm{n}\,\mathrm{c}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2\mathrm{G}\,M\,r^2}{r_\mathrm{n}^{\,3}\,\mathrm{c}^2}} \right]^{1/2} \mathrm{c}^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{2\mathrm{G}\,M\,r^2}{r_\mathrm{n}^{\,3}\,\mathrm{c}^2}} - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Métrique extérieure:

$$\mathrm{ds}^2 = \left(1+\frac{2\mathrm{G}\,M}{\mathrm{c}^2}\right)\mathrm{c}^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{2\mathrm{G}\,M}{\mathrm{c}^2}} - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Inversement, si on se situe dans les régions de l'univers où se situent les gros conglomérats, sphéroïdaux, de masse négative, au centre des grands vides, il suffira de changer M en $-M$ dans ces métriques. Ces métriques, en supposant qu'on puisse attribuer à toutes les étoiles à neutrons la même masse volumique ρ, décriront la géométrie associée à des étoiles à neutrons sous-critique, telles que :

(14.56) $$\mathrm{M} < \frac{\mathrm{c}^3}{6.90\,\mathrm{G}^{3/2}\,\rho^{1/2}}$$

Si on opte pour une densité de matière de 5 10^{17} k/m^3 on obtient une masse critique de l'ordre de quelques masses solaires.

Cas de l'étoile à neutron couplée avec une autre étoile

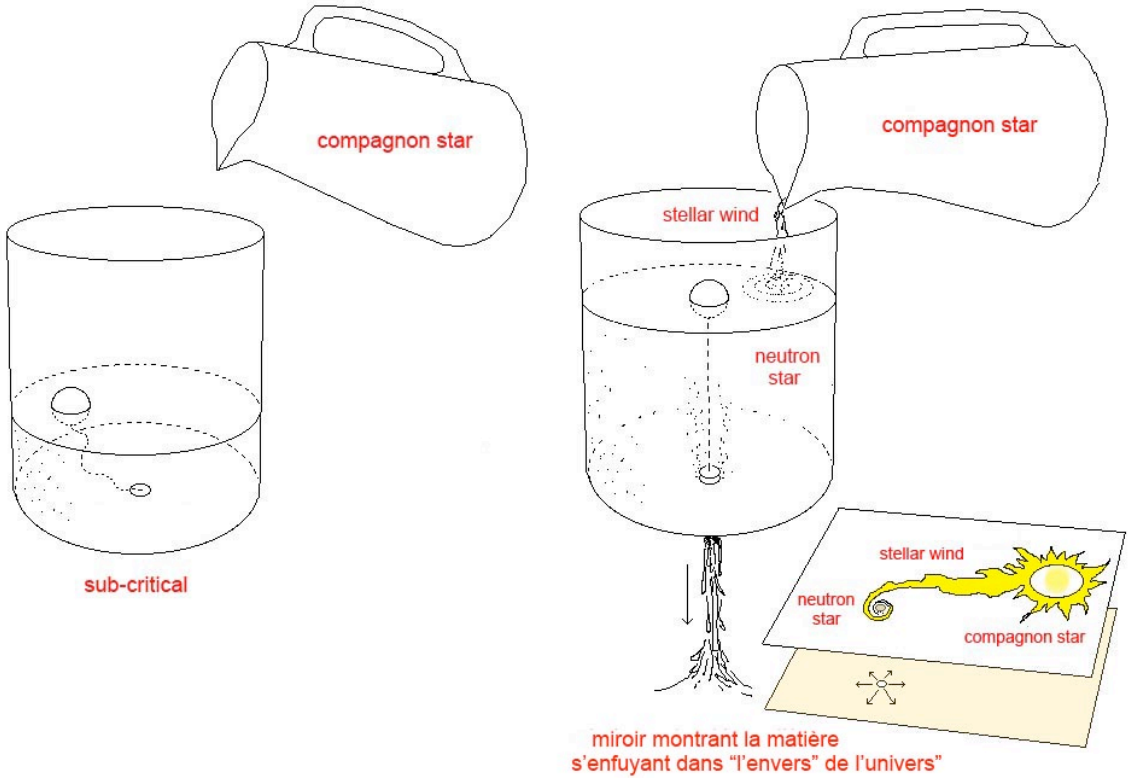
Dans ce cas il y a apport de matière. Celui-ci peut être sporadique. Mais on peu tabler sur une flux continu moyen. Auquel cas le modèle que l'on propose est celui d'une étoile à neutron munie d'un « débit de fuite », constant, modèle qui se prête à une description à l'aide de solutions métriques stationnaires.

Pourquoi une fuite, avec inversion de masse ? Parce que, quand on considère le cendre de l'étoile, lorsque la masse atteint la valeur critique, que :

$$r_n = \sqrt{\frac{8}{9}}\;\hat{R}$$

le terme g_{tt} de la métrique devient nul. C'est synonyme de l'inversion de la coordonnée temps, donc de l'inversion de la masse et de l'énergie.

Les dessins ci-après évoquent un tel modèle :



On peut proposer un modèle où la solution intérieure se trouve tronquée quand la pression dépasse une valeur critique, à déterminer. Dans ces conditions l'équilibre est maintenu au prix d'un débit de fuite à travers une surface de gorge.

Cette matière est apportée par l'étoile compagne sous forme de vent stellaire. Si, au fil du temps, la masse ainsi transférée peut se chiffrer en masses solaires, le flux moyen reste faible. On rappelle qu'une masse solaire c'est 2 10^{30} kilos ! Il faudrait chiffrer tout cela, mais je pense que l'aire de la surface de gorge qui se situe au cœur de l'étoiles à neutrons avec début de fuite devrait être très limitée, dans le mesure où elle est traversée par un flux d'une matière très dense, s'écoulant à une vitesse relativiste.

Quand la masse positive converge vers cette surface de gorge elle « vit » ce champ gravitationnel comme une attraction. Quand elle a franchi cette surface, sa masse se trouve inversée et elle s'écarte alors de cette région de l'espace. Elle suit les géodésiques du couple de métriques :

Métrique intérieure:

$$\mathrm{ds}^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{2\mathrm{G}\,M}{r_\mathrm{n}\,\mathrm{c}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2\mathrm{G}\,M\,r^2}{r_\mathrm{n}^{\,3}\,\mathrm{c}^2}} \right]^{1/2} \mathrm{c}^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{2\mathrm{G}\,M\,r^2}{r_\mathrm{n}^{\,3}\,\mathrm{c}^2}} - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Métrique extérieure:

$$\mathrm{ds}^2 = \left(1+\frac{2\mathrm{G}\,M}{\mathrm{c}^2}\right)\mathrm{c}^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{2\mathrm{G}\,M}{\mathrm{c}^2}} - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

A ce stade on serait en droit de se demander si le phénomène inverse ne pourrait pas exister. Y aurait-il des étoiles à neutrons dans ce « monde négatif », en couple avec des « néga-étoiles » qui pourraient injecter cette masse négative dans notre « versant d'univers » ? Autrement dit des « fontaines blanches ».

Le cosmos présente sous cet angle une forte dissymétrie. J'ai évoqué cela dans des vidéos précédentes. A l'issue de l'ère radiative la valeur absolue de la densité de la matière négative est beaucou plus élevée. Au sein de celle-ci l'instabilité gravitationnelle créer des conglomérats sphéroïdaux qui repoussent notre propre matière dans l'espace résiduel.

On peut comparer ces objets à d'immenses proto-étoiles dotées d'un « cooling time » grand devant l'âge de l'univers. Donc dans ce « versant négatif » : pas d'atomes lourds, pas d'étoiles, pas de nuclésynthèse, pas de planètes, et … pas de vie.

Et en particulier pas d'étoiles à neutrons, donc pas de fontaines blanches.

Que devient la matière quand sa masse est inversée ?

J'anticipe sur ce dont je m'occuperai plus loin. L'univers est une variété, dotée de deux métriques $g_{\mu\nu}^{(+)}$ et $g_{\mu\nu}^{(-)}$. A ces métrique on assoccie deux facteurs d'échelle $a^{(+)}$ et $a^{(-)}$. On peut, et on doit se doter d'un jeu de coordonnées qui sont de simples nombres $\left\{ \xi^{o}, \xi^{1}, \xi^{2}, \xi^{3} \right\}$. Deux points A et B , dintinct, correspondent à des écarts :

$\left\{ \Delta\xi^{1}, \Delta\xi^{2}, \Delta\xi^{3} \right\}$. On peut d'ailleurs orienter les coordonnées de telle façon que cet écart devienne : $\left\{ \Delta\xi^{1}, 0, 0 \right\}$. Dans ces conditions on a deux distances :

$$a^{(+)}\Delta\xi^{1} \text{ et } a^{(-)}\Delta\xi^{1}$$

avec $a^{(+)} >> a^{(-)}$ et, coréllativement $c^{(+)} << c^{(-)}$.

Les particules ont des « tailles » caractéritiques, qu'on peut lier à la distance de Compton.

$$\lambda_{c} = \frac{h}{m\,c}$$

Une particule de masse *m* est donc associée à sa longueur de Compton λ_{c} Si cette particule passe dans un « secteur négatif » elle se trouve en quelque sorte « greffée » dans un monde où elle apparaît comme Gulliver, en étant « plus grande ». Ce qui revient à dire qu'elle perd de l'énergie.

Si on opte pour une hypothèse de conservation de l'énergie il faut que la longueur d'onde de la particule s'adapte à celle des particules « homologues », résidant dans ce secteur négatif. C'est faisable si cette particule subit une contraction de Lorentz, c'est à dire si elle *apparaît* à une vitesse relativiste (vis à vis de la vitesse de la lumière $c^{(-)} >> c^{(+)}$ associée à ce secteur), c'est à dire que sa longueur de Compton passe à :

$$\lambda'_c = \lambda_c \sqrt{1 - \frac{v^{(-)2}}{c^{(-)2}}}$$

Jetable (je montrerai plus loin pourquoi) sur

$$a^{(+)} \simeq 100\ a^{(-)} \qquad\qquad c^{(-)} \simeq 10\ c^{(+)}$$

Pour assurer cette conservation de l'énergie cela nous conduirait à : $\frac{v^{(-)}}{c^{(-)}} \simeq 1$. Les particules voyant leurs masses inversées s'écarteraient alors à des vitesses relativistes.

Le problème de la fusion d'étoiles à neutrons subcritiques.

C'est un problème incontournable. Alan Hulse et Soseph H.Taylor avaient découvert un pulsar double PSR-1913+16 en 1974. La mise en évidence du ralentissement de la rotation autour du centre de gravité de ces deux étoiles à neutrons qui ne constituent leur a valu le prix Nobel en 1993. Ce ralentissement, du à la perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles était prévisible depuis le travail de Peters P.C. et Mathews J. Mattews, 1963[1], qui avait chiffré la perte d'énergie correspondante.

Ce ratentissement est, depuis, mesuré avec précision et très bien corrélée avec la prédiction théorique. Les masses estimées pour ces deux étoiles à neutrons sont 1.4 masse solaire. Le système est situé à 21 années lumière de distance, donc relativement proche. La distance entre les deux objet : 2/3 du diamètre du Soleil. Les orbites ont une excentricité de 0,6 . L'avance du périhélie est de 4° par an.

Passons maintenant à la détection récente des ondes gravitationnelles. La théorie prévoit que l'espace traversé par de telles ondes subit d'infimes fluctuations de « jauge », anticorrélées dans deux directions orthogonales, à la manière d'une sphère se déformant alternativement en prenant la forme d'un ellipsoïde allongé ou aplati.

D'où la conception d'un banc comportant deux bras disposés perpendiculairement, de telle manière que quand la longueur d'un bras s'accroît, l'autre se raccourcit.

L'amplitude relative des variations de longueur des bras est de 10^{-20}

Avec une longueur de bras de 4 km cela donne une variation de $4\ 10^{-17}$ m

La mise en évidence du phénomène est fondée sur une mesure d'interférence entre deux rayonnements issus de cavités résonantes laser, situées dans les bras, de 4 km de long.

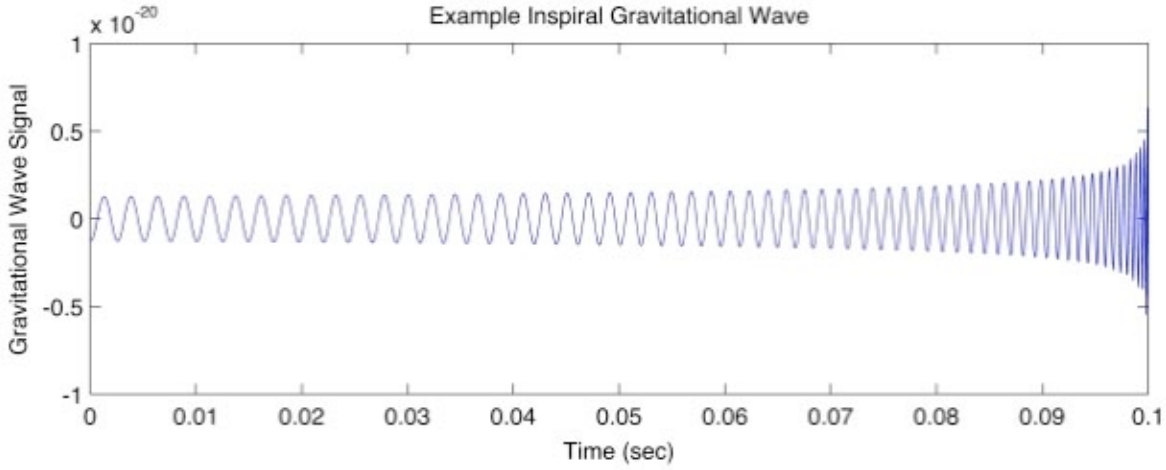
Dans ces bras on maintient un ultra-vide de 10^{-12} bar ! Il y a différentes sources de bruit de fond qui doivent être maitrisées. On pense aussitôt au bruit lié à la sismicité, qui va des très basses fréquences à 10 Hz. Il est éliminé par l'inertie, grâce à une suspension

[1] Peters P.C. & Mathews J. : Gravitation radiation from point masses in a Keplerian orbit. Phys. Rev. (1963) Vol. 131 pp 453-440 DOI 10.1103/PhysRev. 131.435

pendulaire complexe. Il y a ensuite un bruit thermique qui pourra être réduit en abaissant la température des composants, ce qui est prévu.

Le bruit prépondérant est ce qu'on appelle le « bruit de grenaille », qui est lié au caractère corpusculaire de la matière, au fait que le rayonnement arrive par paquets de photons. On le réduira en accroissant la puissance des lasers (donc le flux de « grenaille »).

Mais, même en recherchant une réduction du bruit de fond maximale le rapport signal/bruit de l'expérience est trop faible pour que la simple analyse d'un enregistrement puisse permettre de faire émerger le signal. La seule chose possible est de calculer la corrélation entre un signal enregistré et un « expected signal » (le signal auquel on s'attend), c'est à dire le signal qui serait émis par deux objets de masses m_1 et m_2 orbitant autour d'un centre de gravité commun et in fine, fusionnant pour donner un seul objet.



An example signal from an inspiral gravitational wave source. [Image: A. Stuver/LIGO]

La période de l'onde enregistrée se réduit, en même temps que son intensité s'accroit. La forme du signal dépend des masses des objets et des paramètres de leur mouvement de giration autour d'un centre de gravité commun.

Je suis en train d'essayer d'y voir plus clair dans ce déploiement théorique. On trouve deux types de résultats. Les premiers se réfèrent à la fusion de deux étoiles à neutrons ayant des masses équivalant à celle du soleil. Dont après fusion la masse totale resterait subcritique. Quand les deux étoiles sont en giration il y a émission d'ondes gravitationnelles. Les théoriciens indiquent que la puissance d'émission maximale se situe alors quand on est à une distance du collapse égale à une demi-période.

Par contre, quand on envisage la fusion de trous noirs, l'émission maximale a lieu lors du merging, de la fusion. Selon ce schéma les deux horizons des deux trous noirs sont censés fusionnner, ce scénario étant abordé à travers des simulations numériques. La puissance maximale est alors émise au moment du mergin.

Je suggère un scénario alternatif où je considère la fusion de deux étoiles à neutrons, de telle manière que la somme des deux masses excède la masse critique (situons celle-ci entre 2,5 et 3 masses solaires. Il y aurait alors une très puissante émission sous forme

d'onde gravitationnelle, du à l'inversion subséquente de la masse en excès. Serai-je à même de chiffrer tout cela ? Je n'en sais rien. En tout cas, pour moi, l'abord par simulation numérique serait exclu. Disons que cela constitue une source du signal qui soit différente de la fusion de deux trous noirs.

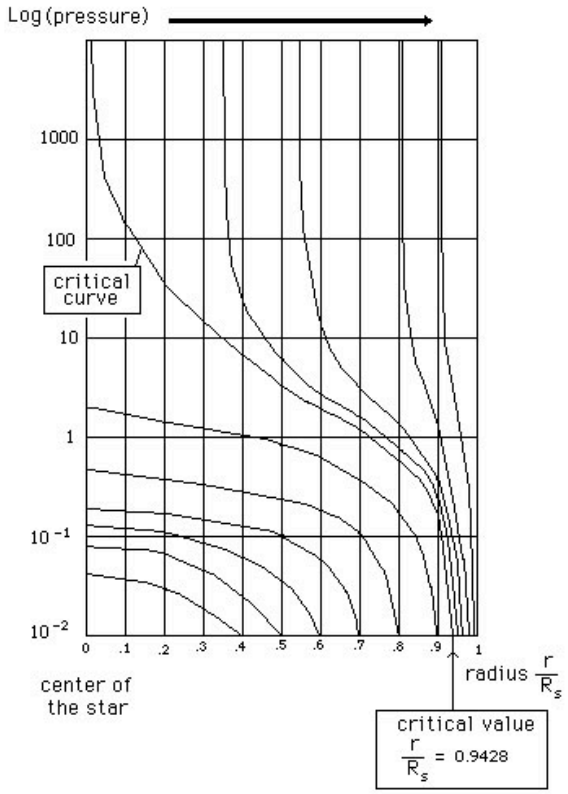
Mais les partisans de l'existence de ces objets disent partout que « c'est la preuve de l'existence de ces objets ». Une assertion que je juge non scientifique, car elle renvoie à une phase comme :

- Car on ne voit pas ce que ça pourrait être d'autre ….

Argument déjà invoqué pour « les trous noirs géants tapis au centre des galaxies ».

On pourrait étendre de tels raisonnement à l'horreur du vide faisant monter le mercure dans les baromètres ou au épicycles (« parce qu'on ne voit quoi d'autre pourrait être responsable de ce phénomène ») ou aux épicycles « rendant très bien compte du mouvement des planètes ».

Ce que je peux montrer c'est la solution de l'équation TOV pour des masses s'approchant de plus en plus de la masse critique (pour des valeurs du rayon s'approchant de plus en plus de $\hat{R}$). La valeur du rayon pour laquelle la pression s'envole vers l'infini croit alors très vite. Ca évoque un véritable « coup de fouet » :



En s'inspirant d'un tel schéma on serait amené à penser qu'au moment de la fusion des deux étoiles à neutrons une surface de gorge prendrait naissance au centre et se déploierait très rapidement, éliminant la masse en excès. Cette différence de masse, inversée, serait éliminée à un rythme élevé parce qu'aussitôt dispersée à une vitesse qui, pour un observateur fait de matière (mais qui ne pourrait pas physiquement observer ce

phénomène) avoisinerait les trois millions de km/s. Un phénomène qu'on pourrait alors assimiler à l'annihilation pure et simple de cette masse en excès.

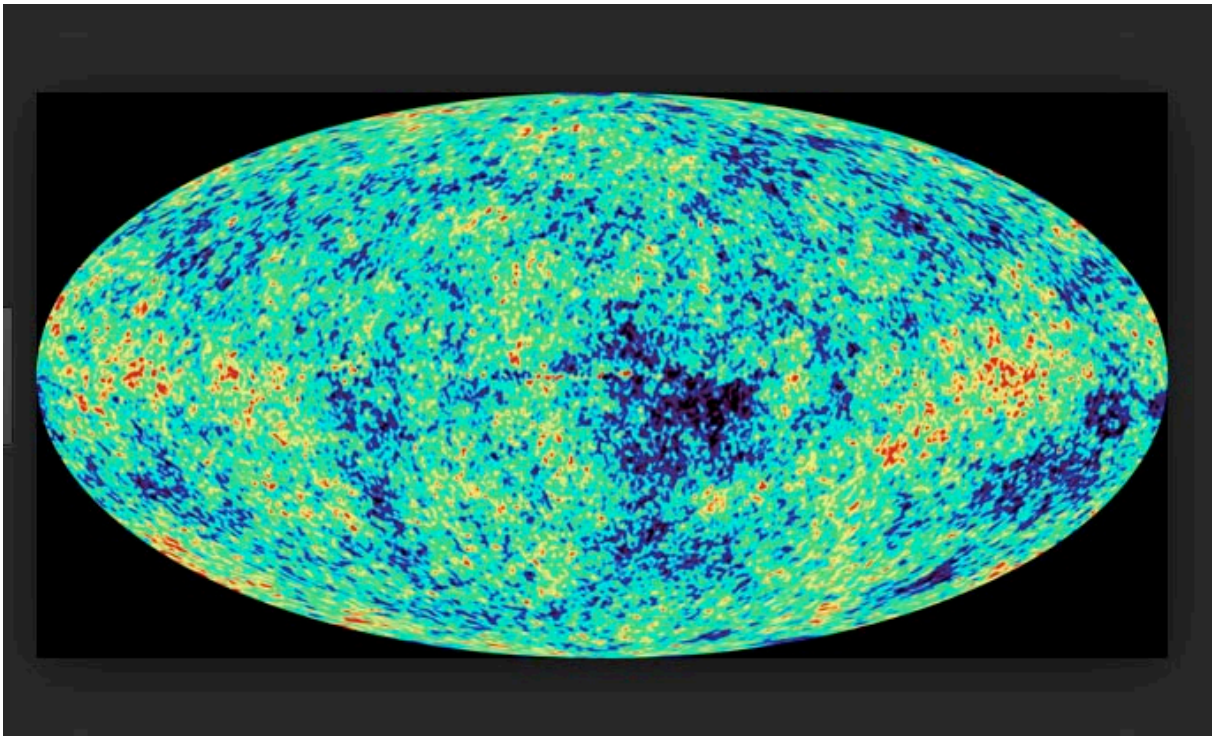
On imagine aisément la puissance du signal sous forme d'onde gravitationnelle qui serait émis et qui, selon moi, équivaudrait aussi à plusieurs masses solaires en équivalent-énergie.

Voilà tout ce que je peux dire sur ce point pour le moment.

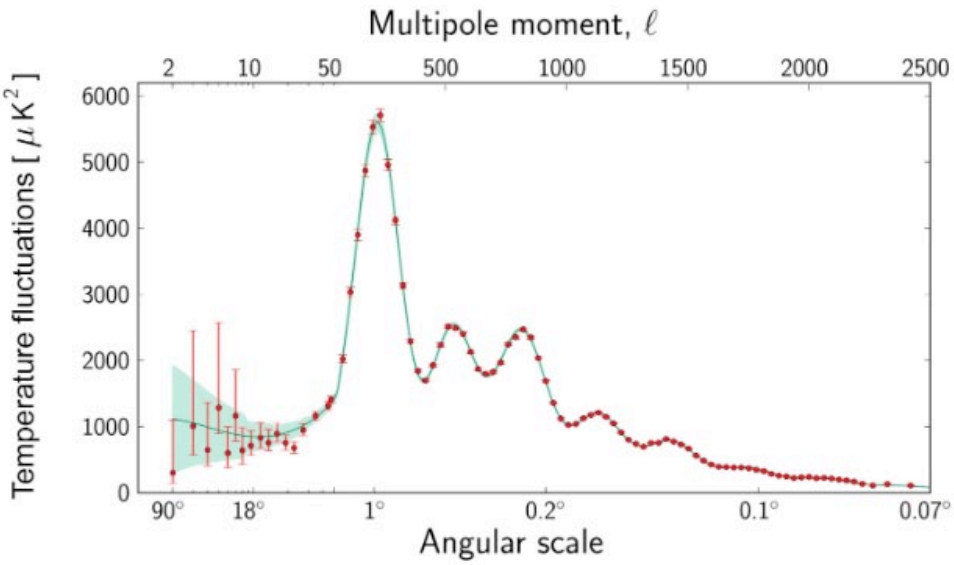
Je vais terminer ce pdf en donnant ma propre interprétation des fluctuations du CMB.

L'origine des fluctuations du CMB.

On connaît cette image.



Selon le modèle standard du moment, le spectre de ces différentes fluctuations est analysé. On obtient un bon accord avec l'analyse de cette image. Mais on se souviendra que ce modèle « de concordance » comporte six paramètres libres.



Comme on peut le voir les fluctuations les plus importantes correspondent à une période d'un degré, soit le 360ième de l'image contenant les données.

Comment le modèle Janus peut-il rendre compte de telles fluctuations ?

La théorie de l'instabilité gravitationnelle fait émerger une longueur caractéristique qui est la longueur de Jeans

$$L_J = \frac{<V>}{\sqrt{4\pi G\rho}}$$

où <V> est la valeur moyenne de l'agitation thetrmique dans le milieu et $1/\sqrt{4\pi G\rho}$ le « temps caractéristique d'accrétion ». On perçoit aisément la signification physique d'une telle formule.

Soit une surdensité ayant une extension spatiale caractéristique L_J. Cette fluctuation va se dissiper sur l'action de la simple agitation thermique en un temps qui est de l'ordre de celui que met une particule à traverser cette perturbation à la vitesse <V>, soit

$$\text{Temps de dispersion : } \frac{L}{<V>}$$

La perturbation s'amplifiera si le temps d'accrétion est inférieur au temps de dispersion :

$$\text{Temps d'accrétion : } \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}} < \text{Temps de dispersion : } \frac{L}{<V>}$$

C'est à dire pour toutes les surdensités ayant une dimension supérieure à L_J .

Le « gaz de photons contribue au champ de gravité. Dans l'ère radiative le tenseur énergie-matière se constitue à partir du rayonnement. Dans sa classique formulation « mixte » voici la matrice énergie matière, du second membre de l'équation de champ.

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho_{\mathrm{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p_{\mathrm{r}}}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_{\mathrm{r}}}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{\mathrm{r}}}{c^2} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la pression dans le « fluide cosmique » est la pression de radiation :

$$p_{\mathrm{r}} = \frac{\rho_{\mathrm{r}} c^2}{3}$$

La densité ρ_{r} s'exprime en kilos par mètre cube.

Il n'est pas absurde, en considérant un univers qui s'etendrait bien au delà de son propre horizon, d'imaginer que celui-ci puisse connaître des fluctuations dont la longueur d'onde se calculerait en injectant dans la distance de Jeans les paramètres liés au gaz de photons :

$$\mathrm{L_J} = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{4\pi \mathrm{G} \rho_{\mathrm{r}}}}$$

Une telle étude pourrait être considérée comme dénuée d'intérêt, avec une unique population, dans la mesure où de telles fluctuations s'étendraient sur des distances excédant l'horizon cosmologique. Mais la situation change si, au lieu de considérer une unique population, on en a deux.

On sait que dans cet « envers de l'univers » (l'univers « vu » par les éléments de masse négative) le facteur de jauge d'espace $\mathrm{a}^{(-)}$ est plus faible, tandis que la vitesse de la lumière $\mathrm{c}^{(-)}$ est plus élevée.

De telles fluctuations de densité pourront exister, dans l'ère radiative, à l'intérieur de cette population des masses négatives. Ce monde là possède aussi sa propre valeur d'horizon cosmologique et, pour un observateur constitué de masse négative, de telles fluctuations seraient effectivement inobservable.

Mais elles donnent leur empreinte dans le monde des masses positives, qui possède un un horizon plus vaste.

Dans le modèle mettant en jeu des fluctuations de jauge génétralisées (Astrophysics and Space Science 1995) l'horizon, de même que la longueur de Jeans, croissent comme la jauge d'espace a. On peut donc considérer que la segmentation du panorama cosmique du fait de l'instabilité gravitationnelle dans les espèces négatives fournit directement le rapport $a^{(-)} / a^{(+)} = 1/360$.

Comme par ailleurs on a (il faudra que je crée un autre pdf avec le détail des calculs de ce « modèle de jauge ») :

$$\frac{c^{(-)}}{c^{(+)}} = \sqrt{\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}}} = \sqrt{360} = 19.1$$

cela fournirait une indication de rapport entre les distances et les vitesses de la lumière entre les deux « secteurs », au point de vue des ordres de grandeur, s'entend.

avec

- *Deux ordres de grandeur pour les distances*
- *Un pour les vitesses de la lumière.*

Tout cecu restant, évidemment, très schématique.

Ceci remet au goût du jour le problème des voyages interstellaires qui seraient ainsi « moins impossible qu'on ne le croirait » , si, comme évoqua en 2015 dans un article paru dans Modern Physics Letters A une nef peut réaliser ce voyage en maîtrisant la technique d'inversion de sa masse.

Affaire à suivre.

A propos de la détection des ondes gravitationnelles.

Etant donné l'infime rapport signal/bruit une détection directe est exclue.

La série temporelle à analyser est a(t) = n(t) + s(t)

n(t) (noise) étant le bruit et s(t) le signal.

Une détection directe pourrait être basée sur le calcul d'une fonction d'autocorrélation où on effectue un calcul de la corrélation de la fonction « série temporelle » avec la même fonction, décalée d'un temps τ .

$$R_a(\tau) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} a(t+\tau)\, a(t)\, dt$$

On passe à une intercorrélation entre la série temporelle a_1(t) et une série a_2(t) correspondant à un « expected signal » (le signal auquel on s'attend)

$$a_1 * a_2(\tau) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} a_1(t)\, a_2(t+\tau)\, dt$$

où on effectue une corrélation entre la série temporelle et l'expected signal , déphasé du temps τ .

Cette description est évidemment très schématique. On trouvera une analyse très bien détaillée dans les notes de cours de :

http://lappweb.in2p3.fr/~buskulic/cours/Notes_cours_Buskulic_Jijel.pdf

C'est une analyse classique de traitement de signal, mettant en œuvre des théorèmes bien connus des statisticiens, celui de Perceval, de Wiener Khinchine, etc .

Pour procéder de la sorte il faut se donner un profil de signal, qui dépend de différents paramètres. On parle donc d'un espace des paramètres. Le statisticien recherchera la combinaison de paramètres (masse totale, rapport des deux masses, distance initiale entre les deux objets timing ...) qui fourniront la plus forte intercorrélation avec la séquence temporelle.

Bien évidemment, si deux détecteurs indiquent une probabilité de présence de ce signal avec les mêmes paramètres, la fiabilité de la détection s'accroîtra énormément.

Dans cette méthode de détection l'ordinateur essaye de multiples combinaisons des paramètres, dont le nombre est d'emblée considérable (250.000 pour la première détection par LIGO).

La constitution de la forme d'un signal implique la mise en œuvre d'un modèle.

Dans la phase de convergence spirale, le couple d'objets peut être assimilé à deux points-masses orbitant autour d'un centre de gravité commun. La rotation s'exprime alors en terme de vitesse angulaire ω , en radians par seconde, qui obéit alors à la troisième loi de Kepler :

$$\omega^2 = \frac{G\,M}{a^3}$$

où G est la constante de la gravitation et M = m_1 + m_2 la masse totale et *a* la moitié de la distance entre les objets. .

Si $\mu = \dfrac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$ est la « masse réduite » et c la vitesse de la lumière, alors la puissance dissipée par émission d'ondes gravitationnelles est donnée par :

$$P = \frac{32 G\, \mu^2\, a^4 \omega^6}{5 c^5}$$

L'énergie (gravitationnelle) du système des deux masses est :

$$E = -\frac{G\, m_1\, m_2}{2\, a}$$

On peut différencier :

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{G\, m_1\, m_2}{2}\, \frac{\dot{a}}{a^2} \qquad \text{et} \qquad 2\, \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -3\, \frac{\dot{a}}{a}$$

d'où :

$$\dot{E} = \frac{G\, m_1\, m_2}{2}\, \frac{\dot{a}}{a^2} = -\frac{2}{3}\, \frac{G\, m_1\, m_2}{a\, \omega}\, \dot{\omega} = -\frac{G\, m_1\, m_2}{3}\, \frac{\dot{\omega}}{\omega} \left(\frac{\omega^2}{G\, M} \right)^{1/3}$$

$$\dot{E} = -\frac{G^{2/3}\, m_1\, m_2}{3 M^{1/3}}\, \omega^{-1/3}\, \dot{\omega}$$

On écrit

$$\dot{E} = -P$$

ce qui donne :

$$\dot{\omega} = \frac{96\, G^{5/3}}{5\, c^5}\, \mu\, M^{2/3}\, \omega^{11/3}$$

La fréquence de giration est $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$

A chaque révolution du système binaire le champ gravitationnel passe deux fois par un maximum, donc la fréquence *f* de l'onde gravitationnelle est égale $\dfrac{\omega}{\pi}$

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \mathrm{G}^{5/3} \mu \frac{\mathrm{M}^{2/3}}{\pi \mathrm{c}^5} \omega^{11/3} = \frac{96}{5} \mathrm{G}^{5/3} \mu \frac{\mathrm{M}^{2/3}}{\pi \mathrm{c}^5} \pi^{11/3} f^{11/3}$$

en posant $\hat{\mathrm{M}} = \mu^{3/5} \mathrm{M}^{2/5}$, appelé « chirp mass » (la « masse d'interférence ») on a :

$$\frac{d\,f}{dt} = \frac{96\,\mathrm{G}^{5/3}}{5\,\mathrm{c}^5} \pi^{8/3} \hat{\mathrm{M}}^{5/3} f^{11/3}$$

En intégrant on obtient alors l'évolution de la fréquence de l'onde gravitationnelle, en phase avec le mouvement de rotation du système, en fonction du temps, et cela à l'aide de simples outils non relativistes, newtoniens.

Sachant que l'amplitude de l'onde varie, à un facteur près, comme $f^{-7/6}$ [2]lorsqu'on la calcule en supposant une évolution quasi-stationnaire (adiabatique) du système et en restant dans une approximation newtonienne on obtient la forme d'onde ci-après.

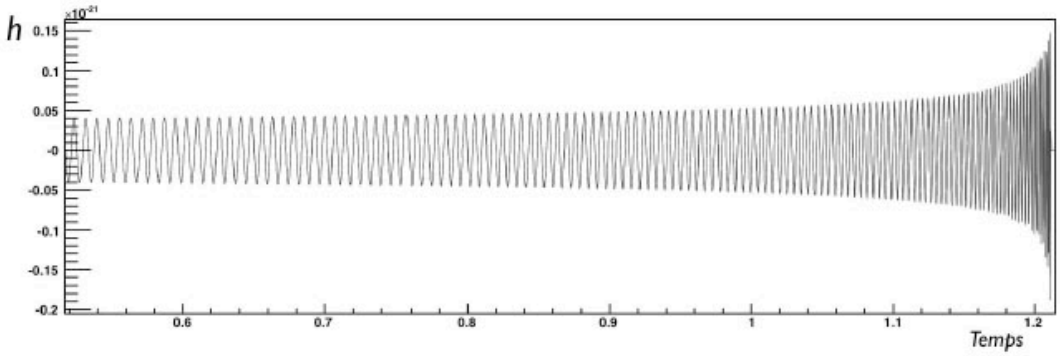


FIG. 6 – Forme d'onde due à la chute (phase spiralante) de deux corps compacts l'un sur l'autre, telle qu'elle devrait être observée dans un détecteur idéal.

Ci-après une courbe (source Cnrs) représentant la forme de l'onde lors de la fusion de deux étoiles à neutrons qui nous donne l'ordre de grandeur de la durée du signal : un dixième de seconde.

[2] J'extrais cela des notes de cours de Damir Buskulic. Mais ne serait-ce pas plutôt une loi en $f^{+7/6}$ si on considère que la puissance croit avec la fréquence ? C'est à éclaircir car si la fréquence de rotation croit, la distance a entre les deux étoiles diminue. Par ailleurs je serai peneur d'éclaircissements sur cette situation d'évolution isentropique, voir son pdf

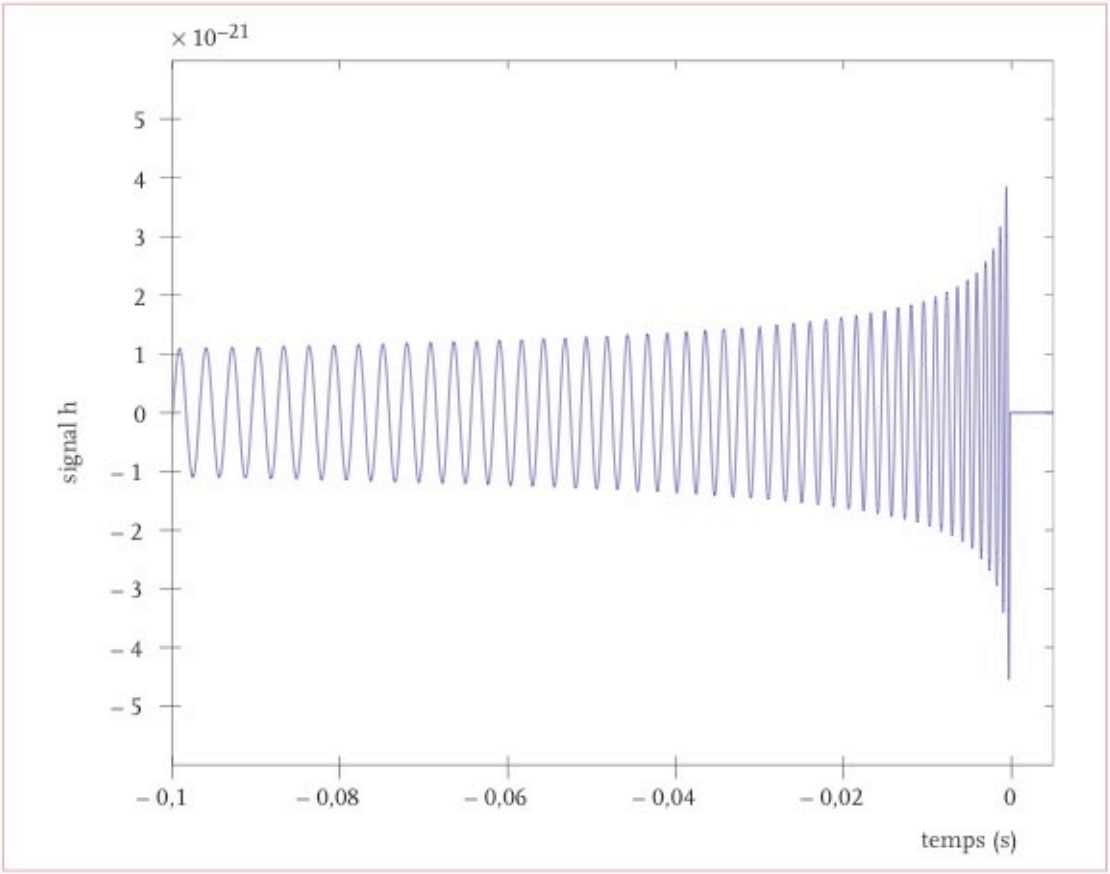


Figure 2 – Forme du signal d'onde gravitationnelle pour la fin de la coalescence de deux étoiles à neutrons. Le temps zéro correspond à l'instant du plongeon des deux astres pour n'en former qu'un seul. On observe une forme de « chirp » où la fréquence du signal augmente en même temps que l'amplitude.

Ce type de calcul conduit à une fréquence qui tend vers l'infini, car il s'agit de deux masses ponctuelles régies par une dynamique newtonienne. Mais au fur et à mesure que les étoiles à neutrons se rapprochent les vitesses d'orbitation croissent et leur proximité fait qu'on ne peut plus décrire leur évolution par une physique newtonienne.

Les théoriciens se sont efforcés de décrire l'évolution relativiste du système. La percée décisive a été faite aux Etats-Unis où a été développée une *relativité générale numérique,* incluant la prise en compte des spins des composants de la paire.

Ce traitement des ondes gravitationnelles trouve son origine dans les travaux de Peters et Matews, 1963[3], à une époque où nos actuels théoriciens étaient encore en culottes courtes.

Quantitativement, on imagine très bien l'issue d'un tel phénomène, quand la somme des masses des deux étoiles à neutrons reste inférieure à une valeur critique. Les deux objets se fondent pour n'en former qu'un seul. On peut imaginer que les deux étoiles forment, à la manière de deux bulles de savon fusionnant, un objet affectant transitoirement la forme d'une cacahuète, puis très rapidement adoptant une forme

[3] P.C.Peters et J. Matews Phys. Rev. 131 : 435

grossièrement elliptique, oscillante, ces oscillations s'amortissant rapidement. L'amortissement est alors encore partiellement lié à une émission d'ondes gravitationnelles. On n'a plus affaire à deux masses distinctes mais à un objet dont la géométrie fluctue. Cet écart à la sphéricité, associé au mouvement de rotation entraîne une émission d'ondes gravitationnelles, mais moins intense que ce que le couple émettait avant fusion.

C'est l'explication du fait que le signal gravitationnel enregistré par LIGO-VIRGO en août 2017 soit arrivé 2 secondes avant le bref flash gamma signant, lui, l'instant de la fusion, génératrice d'un énorme accroissement de température, avec nucléosynthèse, etc .

L'évènement du 14 septembre 2015 qui fut marqué par l'attribution d'un prix Nobel, est supposé se référer à une collision entre deux objets ayant des masses de 36 et 29 masses solaires, qui ne pourraient alors pas être identifiés à des étoiles à neutrons. Cette détermination des masses, qui a été faite sur la base d'une modélisation de la fusion de deux trous noirs, fait état d'un défaut de masse de plusieurs masses solaires, après fusion, cette masse ayant été convertie en énergie sous forme d'une émission d'ondes gravitationnelles.

Beaucoup considèrent cet événement comme la preuve de l'existence des trous noirs.

Peut-être ….

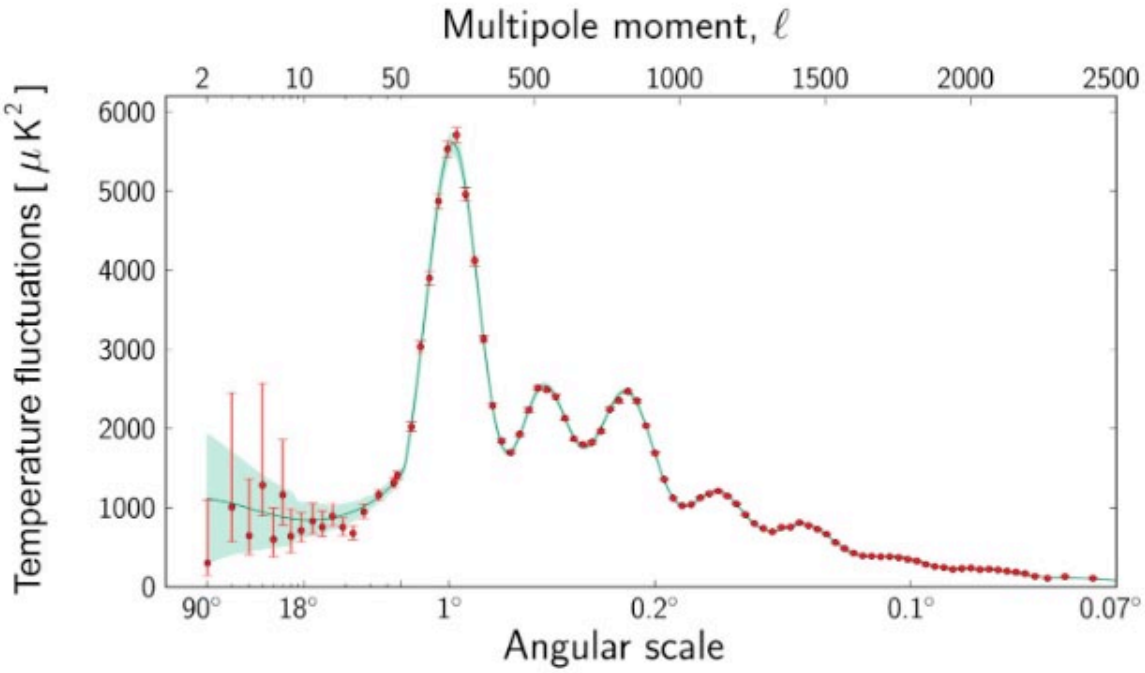
L'argument invoqué est :

- On ne voit pas ce que cela pourrait être d'autre ….

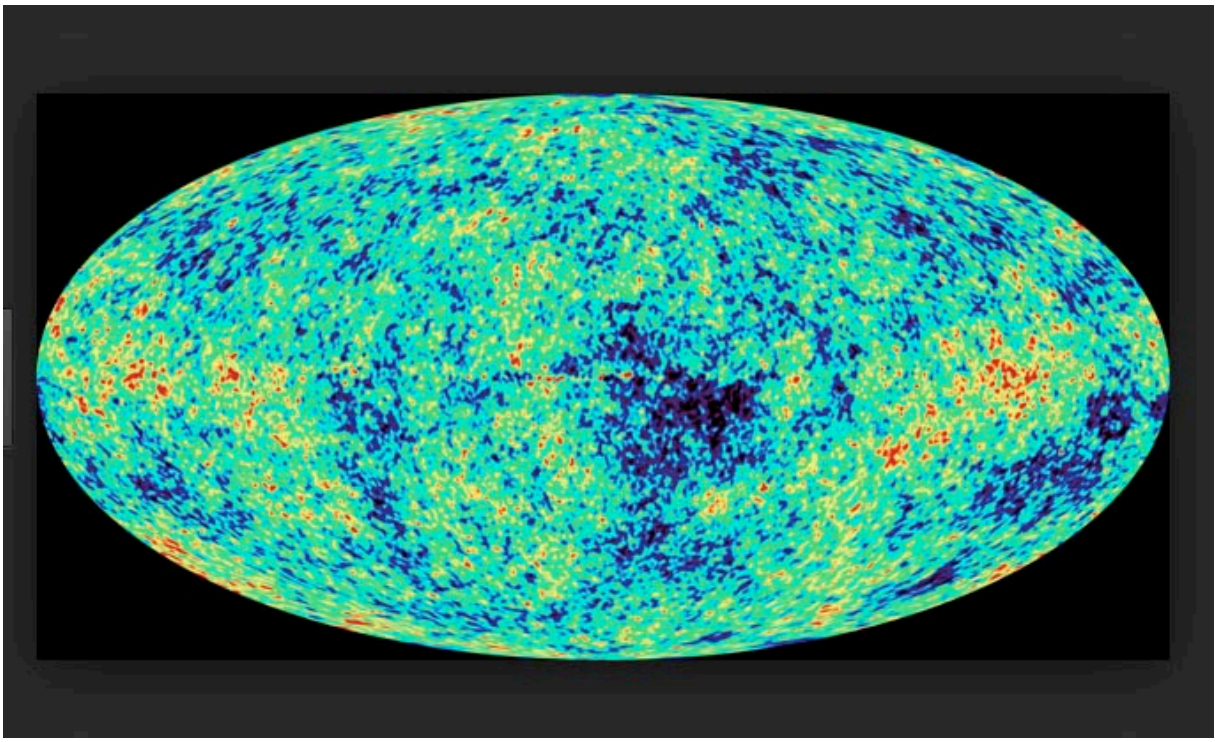
Rappelons que cet argument fut brandi il y a 30 ans pour justifier l'existence de la matière sombre en tant qu'explication des forts effets de lentille gravitationnelle. A cette époque l'existence de ce composant était considérée comme « avéré ». C'est encore ce qui est aujourd'hui invoqué à propos des importantes vitesses des étoiles dans le centre de notre galaxie, en tant que « preuve indirecte » que l'objet autour duquel elles gravitent serait « un trou noir géant ». Et on peut lire sous la plume de beaucoup « qu'aujourd'hui cette présence d'un trou noir géant au centre de notre galaxie est considérée comme un fait avéré » .

Dans le même ordre d'idée la théorie de l'inflation est considérée également comme acquise, étant donné qu'on ne voit pas ce qui d'autre pourrait justifier l'homogénéité de l'univers primitif.

Le modèle actuel, dit « de concordance » s'appuie sur le fait que, sur la base de cette théorie actuelle, dépendant de six paramètres libres, rend bien compte du spectre des fluctuations de courte longueur d'onde. Ci-après une courbe donnant l'importance de ces fluctuations en fonction du logarithme de leur longueur d'onde.



On notera le pic pour une amplitude angulaire d'un degré. Ci-après les données à partir desquelles cette courbe a été établie. Le diamètre de cet ellipsoïde correspond à 360°.



Là encore l'argument est :

- On ne voit pas ce qui, d'autre, pourrait engendrer ces fluctuations.

On remarquera que la corrélation disparaît pour les perturbations de longueurs d'onde plus importante (partie gauche de la courbe).

Il est plus confortable de dresser une conclusion sur la base de plusieurs phénomènes, qui se recoupent. Dans le cas de l'événement d'août 2017 on dispose :

- D'un signal gravitationnel qui cadre avec la fusion de deux étoiles à neutrons.

  Mais en outre :

- De l'enregistrement d'un flash gamma qui renforce cette hypothèse.
- De signaux optiques dans de multiples fréquences
- De la détection d'atomes dont on attribue la formation à une nucléosynthèse rapide, cadrant avec le milieu issu de la fusion de deux étoiles à neutrons.

Pour l'interprétation du signal gravitationnel de 2015 il n'y a que l'accord avec la forme d'onde théorique associée à la fusion de deux objets hypothétiques, de deux trous noirs.

Je pense que l'intensité du signal enregistré pourrait résulter de la collision de deux étoiles à neutrons sub-critiques, phénomène au cours duquel une masse en excès, qui se chiffrerait en masses solaires, pourrait être brutalement inversée et aussitôt dispersée à une vitesse relativiste, avec à la clé un signal gravitationnel tout aussi puissant.

Mais, à l'instant t, je ne suis pas à même de fournir une forme de signal ainsi qu'un modèle théorique du phénomène.

A propos de la technique de détection des ondes gravitationnelles.

Etant donné que ces ondes sont 10^{39} fois moins puissantes que les ondes électromagnétiques leur détection apparaissait a priori hautement problématique. Le travail qui a abouti à des installations comme LIGO et VIRGO s'est étendu sur plus de trente années. C'est la raison pour laquelle les trois scientifiques, qui ont du se battre pour pousser un tel projet, et qui ont finalement été récompensés par un prix Nobel sont … si âgés.

Left: Bryce Vickmark/MIT. Centre: Caltech. Right: Caltech Alumni Assoc.

Rainer Weiss (left), Barry Barish (centre), and Kip Thorne (right), who led work to detect gravitational waves.

Les ondes gravitationnelles agissent sur la métrique de l'espace temps, sur la valeur locale de la « jauge d'espace ». Elles sont de nature quadripolaire au sens où quand l'espace se distend dans une direction, il se contracte dans une direction perpendiculaire.

En physique il existe une technique (initiée par Michelson, pour mettre en évidence la constance de la vitesse de la lumière) qui se fonde sur l'interférométrie. En effet il est plus facile en physique de mettre en évidence par ce procédé une différence entre deux longueurs que de mesurer une longueur elle-même.

Par longueur il faut penser aussitôt à *longueur d'onde*.

Dans les montages LIGO et VIRGO on part de deux « cavités résonantes » qui sont des lasers (travaillant dans l'infrarouge). Ce sont des enceintes cylindriques de très grande longueur, 4 kilomètres, où on fait un vide très poussé (10^{-12} bar). A l'extrémité de ces deux tubes, deux miroirs dotés d'un très grand pouvoir de réflexion, et d'une planéité maximale.

Comme des balles entre deux raquettes de ping-pong, les photons font des allers-retours entre ces deux miroirs. La propriété laser fait que la longueur d'onde de ce rayonnement s'ajuste de manière extrêmement précise en fonction de la distance qui sépare les deux miroirs.

L'onde gravitationnelle va distendre/contracter avec une certaine périodicité les longueurs L_1 et L_2 de deux cavités laser disposée perpendiculairement. Le caractère « quadripolaire » des ondes gravitationnelles fait que lors qu'une des cavité se distend, l'autre se contracte, et vice-versa, avec des altérations concomitantes des longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 des rayonnements installés dans les deux cavités résonantes.

Un des miroirs de chaque chambre est semi-transparent, ce qui fait que ces rayonnements de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 .et peuvent être « extraits » et conjugués pour produire des interférences. L'interféromètre mesurera alors le rapport $\Delta\lambda / \lambda$.

Le problème est que cette quantité est infime !

La variation de longueur des deux chambres, de 4 km de long, correspond au milliardième de la taille d'un atome ! Soit une variation sur les longueurs de l'ordre de 10^{-21}. Le déplacement des franges d'interférence est de 10^{-18} mètre , soit le millième de la « taille » d'un proton (longueur de Compton : 10^{-15} mètre).

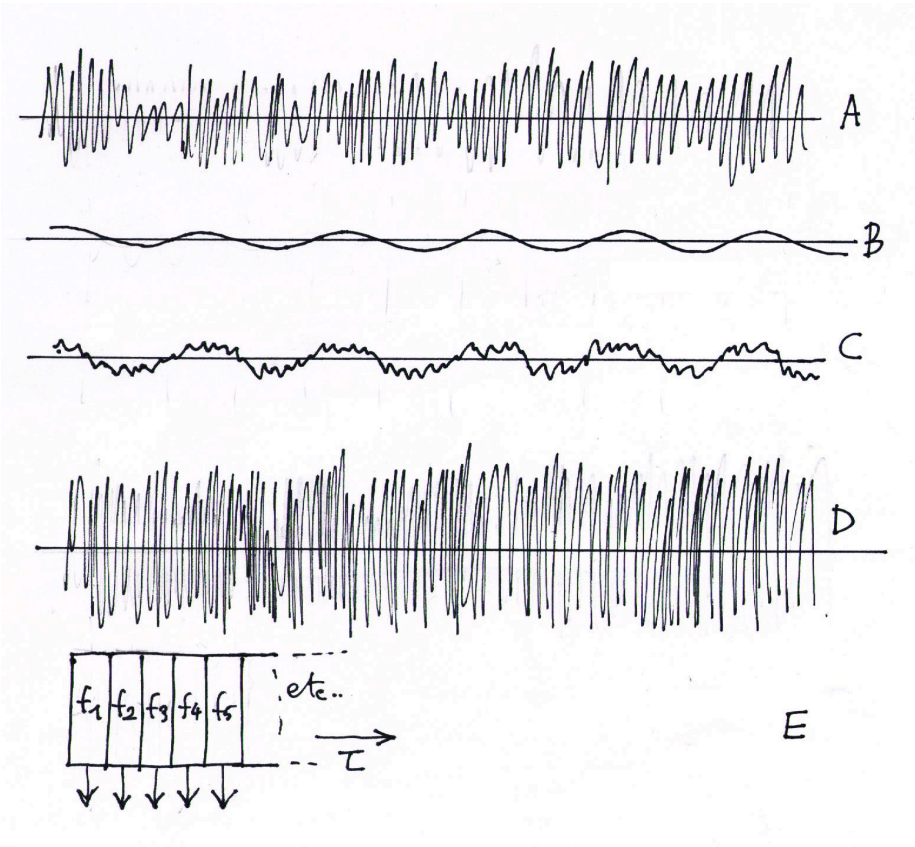
Comme indiqué dans les notes de cours de Damir Buskulic, toute tentative de détection directe, par les méthodes habituelles, serait condamnée à l'échec étant donné la faiblesse du rapport signal/bruit.

On est donc contraint d'opérer un filtrage en recherchant dans ce bruit un signal ayant une forme donnée, émanant d'un modèle. Dans l'ensemble cu après A est censé représenter un bruit n(t), trop important pour faire apparaître un signal s(t)til. On traite alors, par ordinateur, l'échantillon, digitalisé, en opérant l'équivalent de ce qu'en électronique on appelle un filtre « passe-bande », qui laisse passer les fréquences autour d'une fréquence *f*, qui est précisément celle du signal dont on estime qu'il pourrait être caché dans cet échantillon.

Si ce signal B n'est pas présent le traitement donnera quelque chose qui reste incohérent, qui n'est qu'une partie de bruit extrait de ce bruit, entre la fréquence $f + \Delta f$ et la fréquence $f - \Delta f$ (schématiquement, la coupure liée au filtrage, électronique ou numérique n'est pas aussi franche)

Si le signal B était présent on obtiendra l'échantillon traité C avec du bruit résiduel.

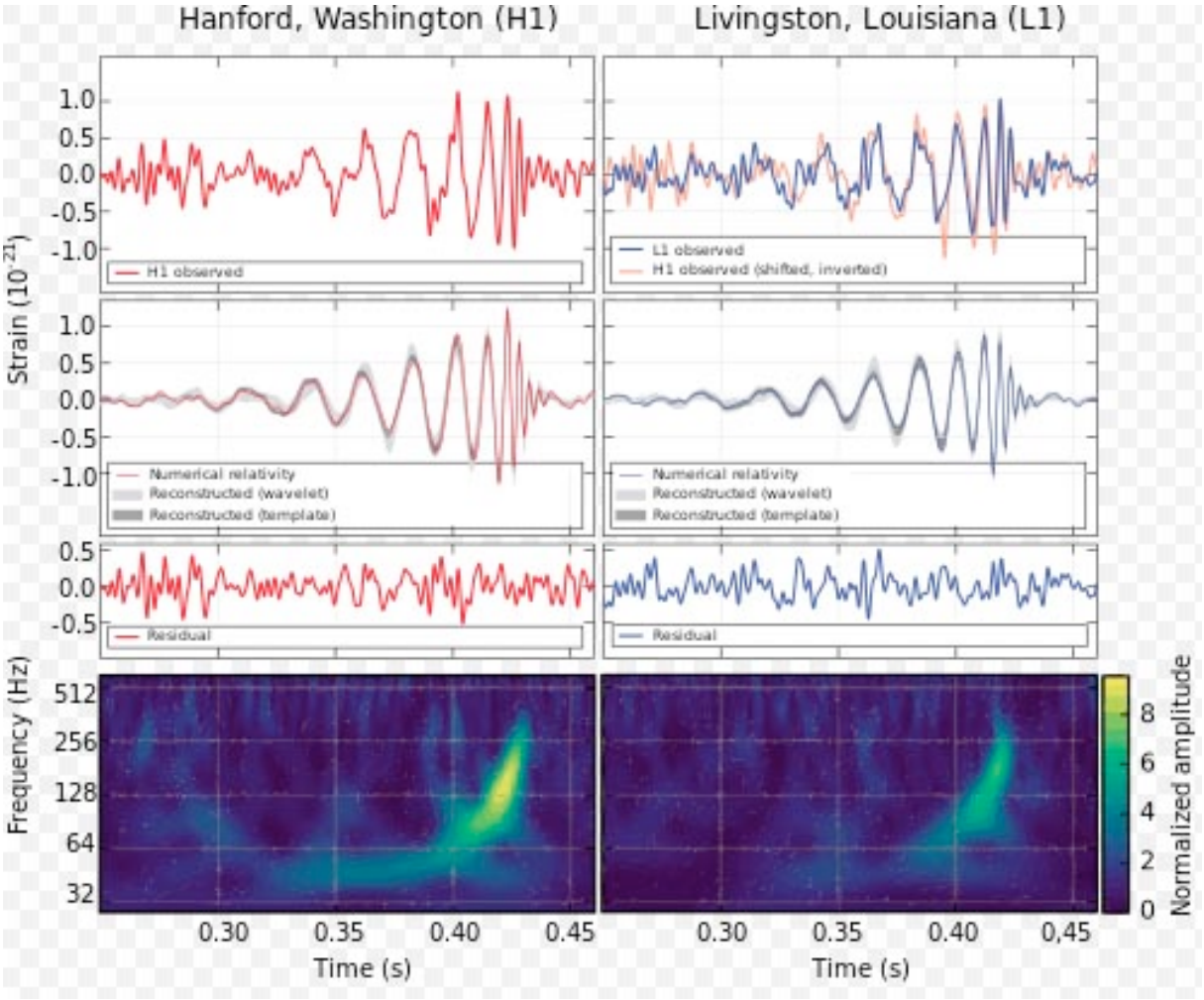
L'identification du signal, dans le cas des ondes gravitationnelle, revient à un « multi-filtrage » passe-bande, après avoir découpé l'échantillon en sous-séquences, qui seront filtrées avec des fréquences croissantes f_1 , f_2 , f_3 , etc …. Cotte croissance de la fréquence correspondant à la forme d'onde issue du modèle.



Mais cette succession de fréquences, qui correspond à « l'événement fusion des deux objets », se situe précisément dans le temps. Mais on ignore quand. On devra donc déplacer ce « calque » selon une translation temporelle τ . Si le signal est présent, quand on tombera pile dessus, il se dégagera. Le résultat d'un tel traitement est indiqué dans les figures ci-après. Pour un certain jeu de paramètres (évolution de la fréquence au cours du temps) ce multi-filtrage a donné le résultat correspondant aux deux figures du haut. Il subsiste une certaine quantité de bruit résiduel, après filtrage. Les courbes de la troisième ligne correspondent à du bruit résiduel pur. C'est à dire ce qu'aurait donné ce multi-filtrage, avec ce même jeu de paramètres, en l'absence de signal.

La différence est immédiatement significative. L'œil humain sait très bien apprécier les corrélations. Il est visible que le même signal s'est manifesté, à Hanford et àLivingston,

avec des déphasages légèrement différents, les deux stations n'ayant pas reçu les deux trains d'ondes au même moment.



On distingue sur ces signaux trois phases. A gauche l'accroissement progressif de la fréquence, liée à l'accroissement de la vitesse de rotation des deux objets, encore distincts, autour de leur centre de gravité commun.

Le pic correspond à l'instant de la fusion. Puis on a une suite d'oscillations rapidement amorties.

On détecte donc quelque chose.

Reste à identifier ce « quelque chose » à un modèle multi-paramétrique reposant sur des hypothèses.

- S'agissant d'une collision d'étoiles à neutrons, le scénario a une forte crédibilité.

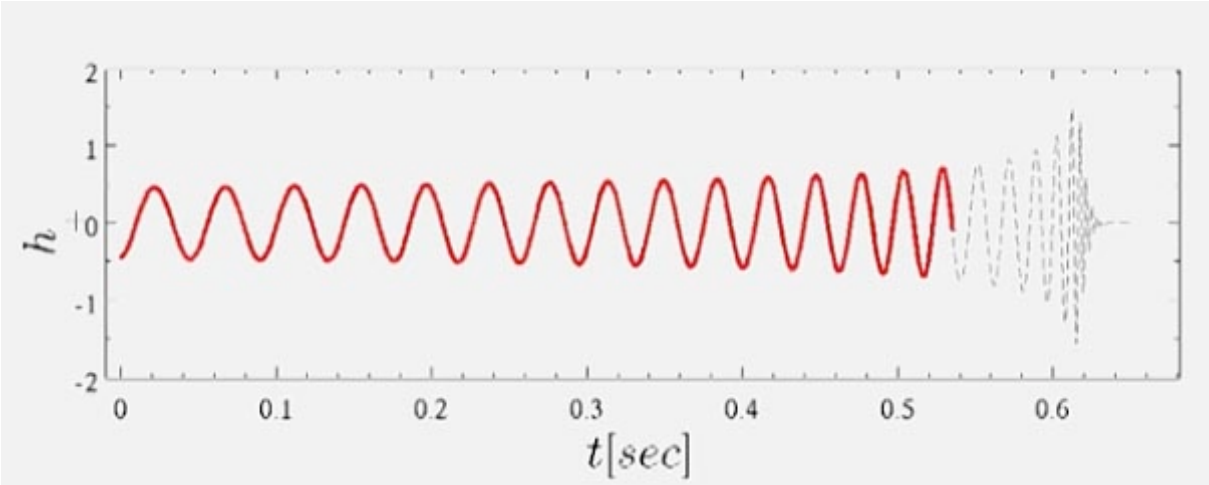
- S'agissant du scénario d'une collision de trous noir c'est moins probant étant donné qu'on n'a pas de preuve observationnelle de l'existence de tels objets et que, par ailleurs, comme je le montre, leur « crédibilité théorique » est sujette à caution.

Les sources de bruits.

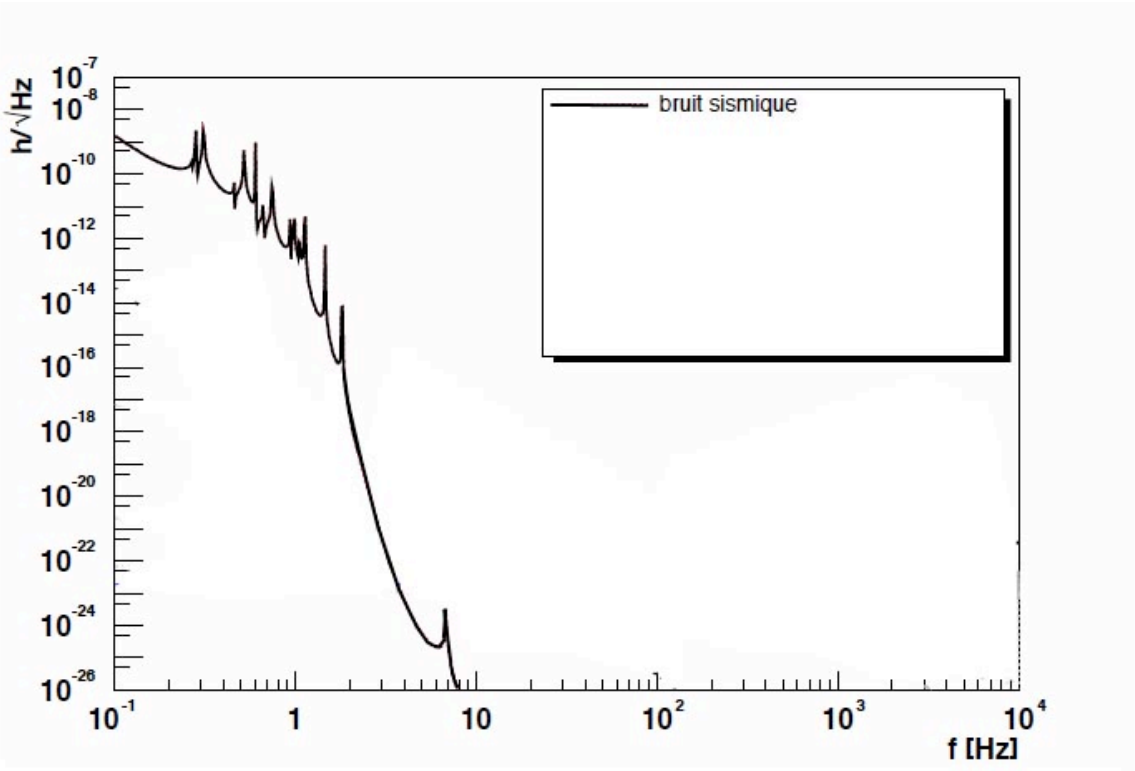
On pense aussitôt au bruit sismique, généré par tout ce qui bouge sur la planète, y compris la planète elle-même.

A toute source de bruit il faut associer une plage de fréquence. Pour le bruit sismique ces fréquences sont basses et ce bruit décroit rapidement quand cette fréquence s'élève.

Le signal que l'on cherche à détecter a lui même sa propre plage de fréquence. Dans l'évènement d'octobre 2015 l'ordre de grandeur de la durée totale est la demi-seconde et la plage de fréquence se situe entre 10 et 100 hertz.



Comparons avec la courbe correspondant au bruit sismique, compte tenu évidemment des techniques d'amortissement mises en œuvre :



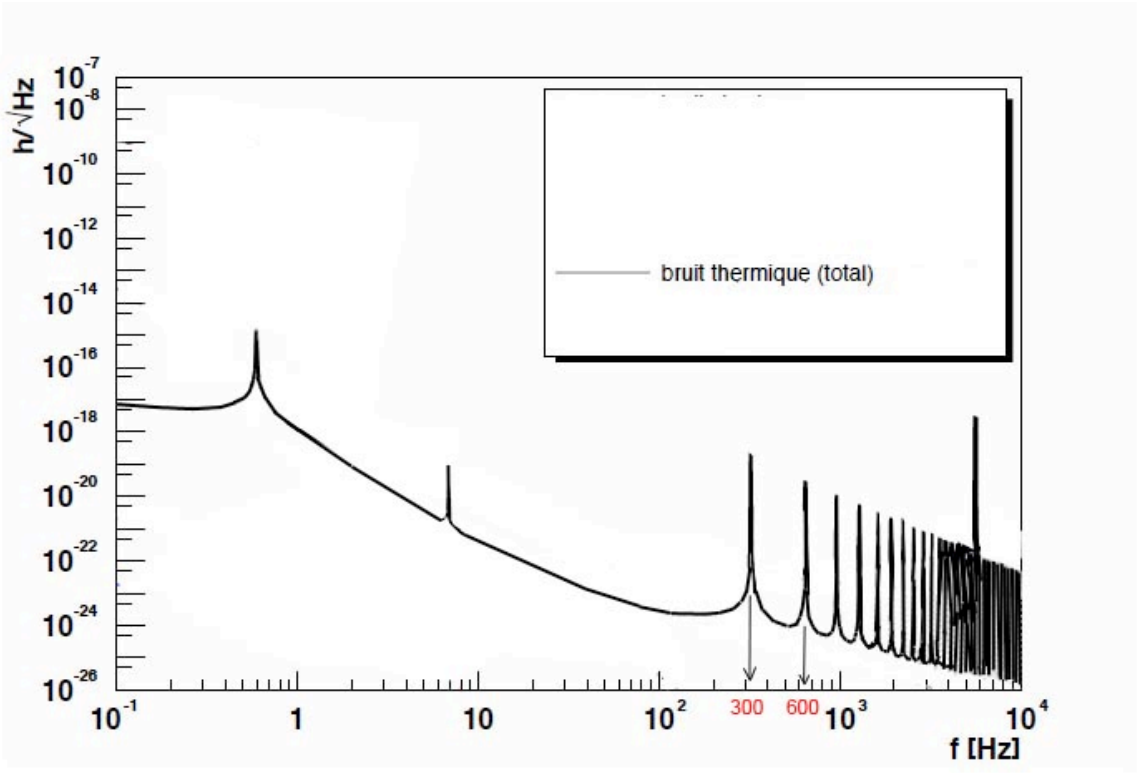
Ce bruit sismique s'effondre quand on approche 10 hertz. Il est donc négligeable.

L'histoire de ces détecteurs, plus qu'une course vers le développement d'outils théoriques, laquelle a culminé avec la mise en oeuvre d'une « relativité générale numérique », permettant de gérer le caractère très non linéaire du phénomène à détecter, a impliqué la conjonction d'une foule d'astuces techniques. LIGO n'est pas l'œuvre de trois hommes, mais d'un millier, chacun ayant apporté sa pierre à l'édifice.

Pour le bruit sismique on a joué sur l'inertie des objets à suspendre, en l'occurrence des miroirs, fixés par un système de plusieurs pendules, pour les oscillations horizontales, et de « lames de ressort » pour les oscillations verticales.

Deux systèmes d'amortissement ont été mis en œuvre. Passifs, en jouant sur l'inertie du montage, et actifs en faisant jouer une contre-réaction à l'aide « d'actionneurs ».

La seconde source de fluctuations est d'ordre thermique, synonyme de vibrations. Elles pourront être réduites en mettant en œuvre la cryogénie, un refroidissement à très basse température des composants, ce qui est prévu, par exemple pour un projet en cours, au Japon.



On distingue deux types de sources de bruit, dont un « mode violon » qui présente des pics correspondant à des résonances. A droite on trouve un pic à 300 hertz, suivi par ses harmoniques à 600 hertz, etc.

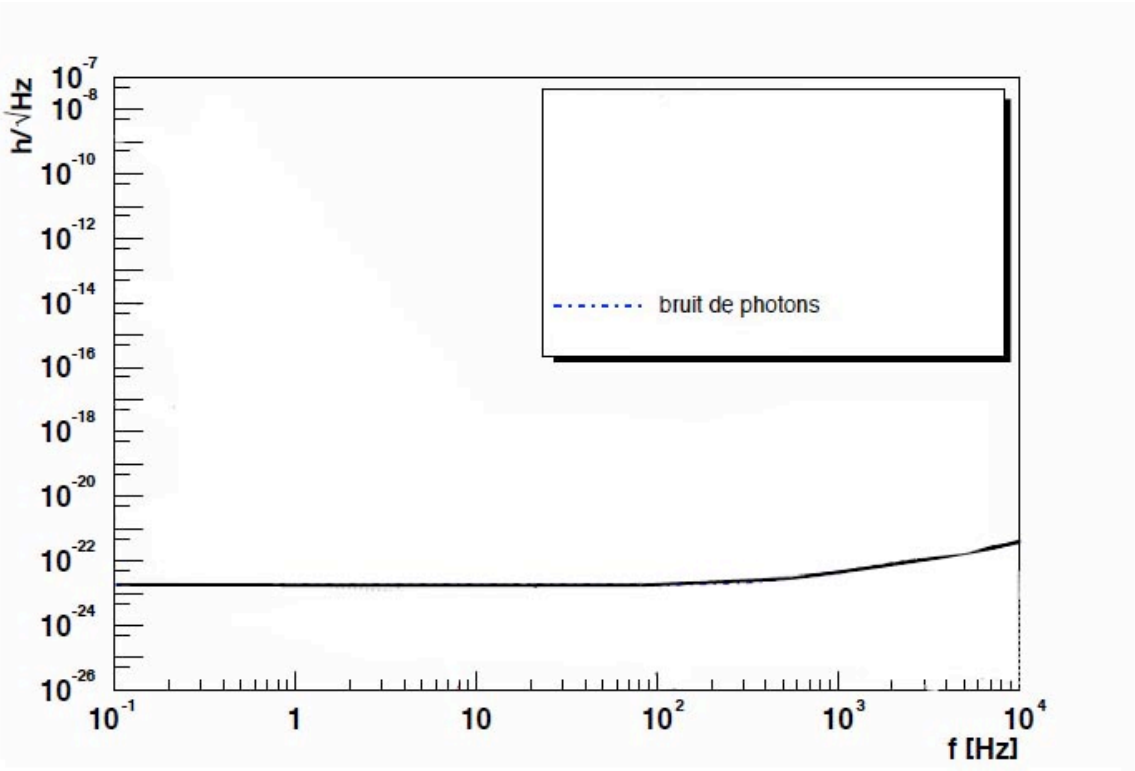
Une troisième source de bruit est appelée « l'effet de grenaille ». Les longueurs d'ondes des photons incidents s'organisent autour d'une valeur moyenne, l'énergie de ces photons croissant comme l'inverse de leur longueur d'onde en vertu de la relation :

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

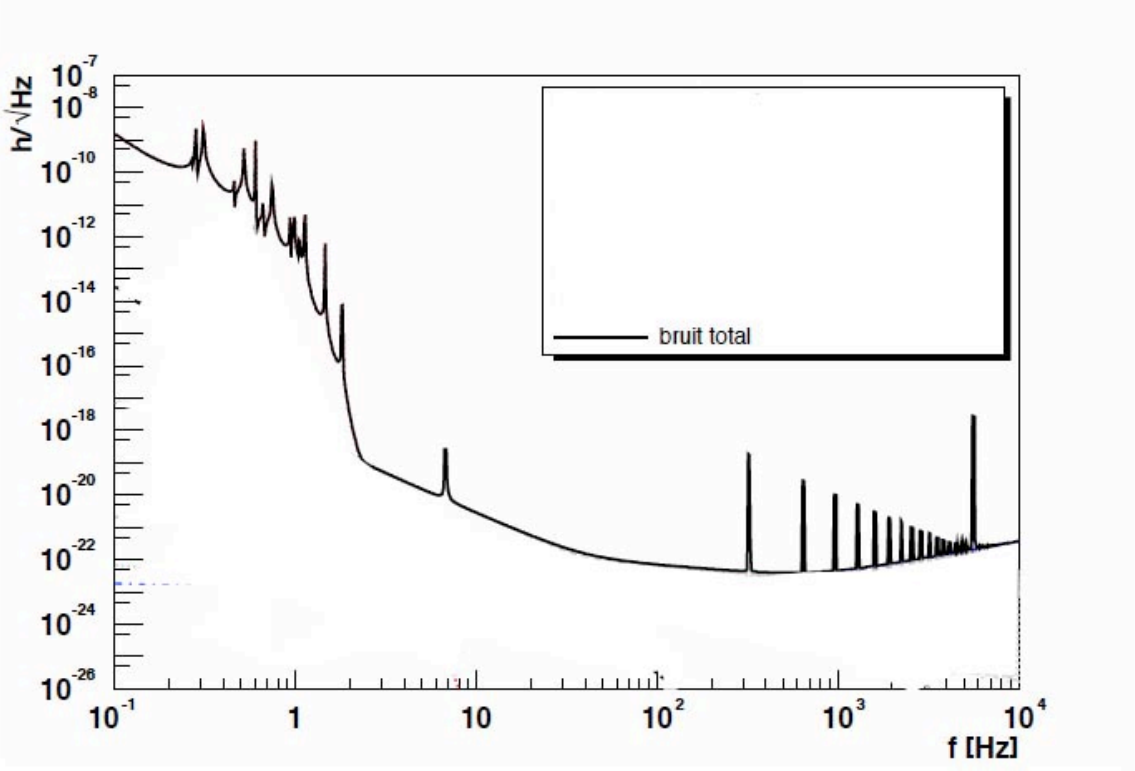
Ce qui arrive sur les miroirs est un déferlement de photons, tels « de la grenaille », dotés d'énergies différentes. Cette variabilité déteint sur la mesure des raies d'interférences qui « s'épaississent ».

Pour réduire ce bruit il faut que le système devienne plus sensible à la valeur moyenne du phénomène, en augmentant le nombre des photons incidents, donc la puissance du laser. C'est également prévu.

Actuellement c'est la source de bruit la plus importante aux fréquences considérées :



Voici enfin la courbe globale :



Quoiqu'il en soit, des améliorations sont prévues, qui devraient accroître d'un facteur dix le nombre des détections opérées.

Tout ceci amène à conclure qu'une nouvelle astronomie vient de naître, qui aura fort à faire pour gérer un rythme quotidien de mesures (qui vont de pair avec le rythme quotidien des détections de flashes gamma).

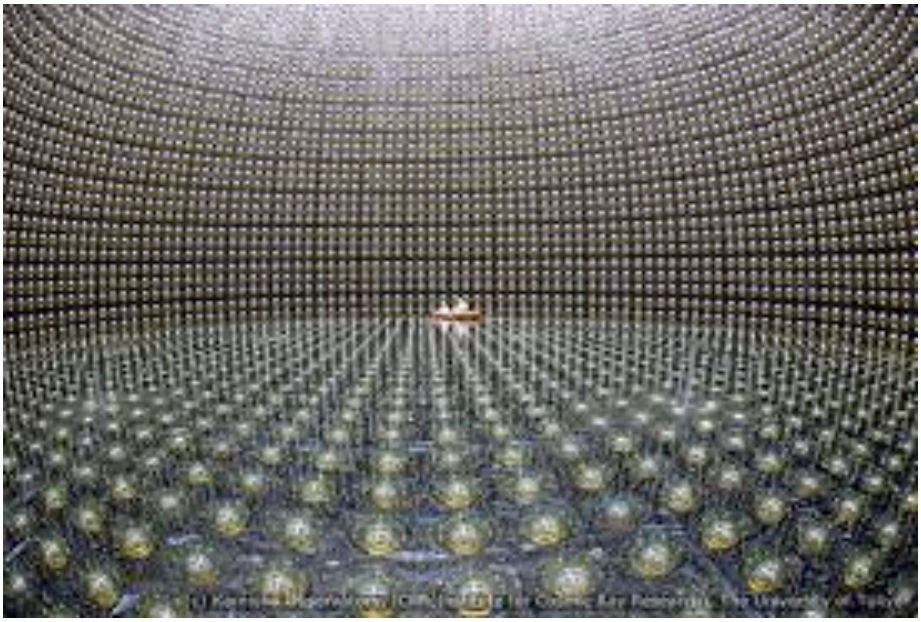
Je repense à mes rencontres, il y a 20 ans, avec les courageux pionniers qui se lançaient dans le montage du système LIGO, en se disant « déte cterons-nous un jour quelque chose ? ».

A titre d'anecdote, quand les Américains ont remis en marche leur système LIGO, en même temps que les gens de VIRGO procédaient aussi de leur côté à une amélioration de leur appareil, ils furent surpris de voir leur banc détecter un signal quelques jours seulement après sa mise en marche.

Une bonne surprise après une succession d'échecs cuisants, pour des manips également lourdes. On citera l'échec des tentatives de détection d'astroparticules dans les tunnels du Mont Cenis et du Gran Sasso. Je repense à la phrase du Français, disant

- Comme ça fait 22 ans qu'on cherche, on ne doit pas être loin .

Une autre expérience infructueuse, visant à mettre en évidence la décomposition du photon, à travers la captation d'un signal par un des milliers de détecteurs tapissant la paroi d'une immense cuve emplie d'eau, installée dans une ancienne mine de sel, au Japon, est le système Kamiokande. La durée de vie du proton était alors située entre 10^{31} et 10^{36} ans …



Deux techniciens, à bord d'un canot pneumatique, inspectent la chambre

Je me rappelle de la conclusion d'un scientifique, dans un article, qui écrivait :

- Unfortunately, the proton did not cooperate.

(Malheureusement, le proton n'a pas coopéré)

Références

[1] Petit, J.-P. (2017). "JANUS 22 – 4/5 : Contestation en règle du modèle du trou noir". YouTube.

[2] Adler, R.; Bazin, M.; Schiffer, M. (1975). "Introduction to General Relativity" (2nd ed.). New York: McGraw-Hill. ISBN 978-0070004207.

[3] Kolev, B.; Petit, J.-P. (2005). "Le Fantastique Voyage de Nicolas Bourbakof". Savoir Sans Frontières.

[4] Petit, J.-P. (April 1995). "Twin universes cosmology". *Astrophysics and Space Science*. **227** (2): 273–307. doi:10.1007/BF00627375.

[5] Petit, J.-P.; d'Agostini, G. (March 2015). "Cancellation of the central singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process". *Modern Physics Letters A*. **30** (9): 1550051. doi:10.1142/S0217732315500510

[6] Petit, J.-P. (1985). "Le Topologicon". *Les Aventures d'Anselme Lanturlu*. Savoir Sans Frontières.

[7] Souriau, J.-M. (1970). "Structure des Systèmes Dynamiques". Dunod.

[8] Kerr, R. P. (1963). "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics". *Physical Review Letters*. **11** (5): 237–238. doi:10.1103/PhysRevLett.11.237.

[9] Lense, J.; Thirring, H. (1918). "Über die Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie". *Physikalische Zeitschrift*. **19**: 156–163.
translated as:
Mashhoon, B.; Hehl, F.W.; Theiss, D.S. (1984). "On the gravitational effects of rotating masses: The Thirring-Lense papers". *General Relativity and Gravitation*. 16 (8): 711. doi:10.1007/BF00762913.
translation freely available by:
Delphenich, D. H. (2014). "On the influence of the proper rotation of a central body on the motion of the planets and the moon, according to Einstein's theory of gravitation".