Mars 2022 – Débat

2022-03-04 9 h 30

J.P.Petit :

Pour mieux articuler mes réponses et évoquer les questions, je décide de mettre en ligne sur mon site ce fichier.

Ce qui me semble, chez ceux qui défendent la position mainstream, où kes coordonnées t et r s'échangent leurs nature, r devenant une coordonnée de temps, c'est l'expression d'un a priori topologique qui se traduit par un refus de considérer que la géométrie associée à la solution de Schwarzschild puis traduire une non contractibilité locale (avec une sphère de gorge et deux nappes, etc)

- Scienceclic (Alessandro Roussel) évoque les « vecteurs de Killing », qui inciteraient à opter pour cette vision des choses

- L'autre option, la mienne en tout cas, est de tabler sur le fait que l'hypersurface soit « localement non contracie, avec une sphère de gorge ».

  Ca c'est le premier point, à éclaircir.

Le second se réfère à mon exploitation (qui est aussi la façon dont Flamm procède) qui consiste à dire que « la partie spatiale de la métrique peut être utilisée pour étudier une famille d'hypersurfaces 3D qui ne sont que « des coupes à t constant ».

Une façon de faire qui est mise en doute. Nous allons utiliser les lettres r et R pour afire a différence entre les deux façons d'exprimer la métrique.
J'ai, avec Rs positif :

(1)
$$ds^2 = \left(1 - \frac{Rs}{R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{Rs}{R}} - R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Etudions la géométrie d'une hypersurface 3D dont la métrique serait

(2)
$$d\sigma^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{Rs}{R}} + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Ca m'est paru intuitivement évident, en particulier à la lecture du papier de Flamm. Ais s'il y a un monde où il faut se méfier des « évidences » et de son « intuition », c'est bien la géométrie différentielle !

Alessandro remarque qu'on devrait écrire :

(3) $$d\sigma^2 = -\frac{dR^2}{1-\frac{Rs}{R}} - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Alors, pour r < Rs cette longueur devient imaginaire pure.

Avant cela je voudrai pointer un aspect fondamental, qui est ce que je crois personnellement comprendre. On a toujours, instinctivement, tendance à attribuer une « nature » aux coordonnées. Une démarche dangereuse, source d'erreur. Prenons par exemple ma réécriture de la métrique de Schwarzschild, telle qu'il aurait du écrire à l'issue de son calcul, où en fait il opte pour la version linéarise avec le passage de r à R selon :

(4) $$R = (r^3 + R_s^3)^{1/3}$$

Alors la métrique s'écrit :

(5)
$$ds^2 = \frac{(r^3+R_s^3)^{1/3} - R_s}{(r^3+R_s^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4}{(r^3+R_s^3)\left[(r^3+R_s^3)^{1/3} - R_s\right]} dr^2 - (r^3+R_s^3)^{2/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Attendu que :

(6) $$\{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq 0$$

Regardons comment évoluent les différents potentiels métriques

On a :

(7) $$g_{tt} = \frac{(r^3 + R_s^3)^{1/3} - R_s}{(r^3+R_s^3)^{1/3}} c^2$$

A priori c'est une fonction régulière, nulle en r = 0 (sur la sphère de Schwarzschild)

Puis :

(8) $$g_{rr} = -\frac{r^4}{(r^3+R_s^3)\left[(r^3+R_s^3)^{1/3} - R_s\right]}$$

Là, quand r tend vers zéro il faut faire un développement limité, en écrivant :

(9) $$g_{rr} \simeq -\frac{r^4}{R_s^4\left[(1+\frac{r^3}{R_s^3})^{1/3} - 1\right]} \simeq -\frac{r^4}{R_s^4\left[\frac{r^3}{3R_s^3}\right]} = -\frac{3r}{R_s}$$

qui tend vers zéro quand r tend vers zéro.
Ajoutons :

(10)
$$g_{\theta\theta} = -(r^3 + R_s^{\,3})^{2/3} \qquad g_{\varphi\varphi} = -(r^3 + R_s^{\,3})^{2/3}\sin^2\theta$$

qui ne posent pas de problème.

Le déterminant est :

(11)
$$g = c^2 {\frac{(r^3 + R_s^{\,3})^{1/3} - R_s}{(r^3 + R_s^{\,3})^{1/3}}}^{2} \frac{r^4}{(r^3 + R_s^{\,3})\left[(r^3 + R_s^{\,3})^{1/3} - R_s\right]} (r^3 + R_s^{\,3})^{4/3}\sin^2\theta$$

(12)
$$g = c^2\, r^4 \sin^2\theta$$

Nul sur la sphère de Schwarzschild. J'ai tendance à penser que la nullité du déterminant est synonyme de symétrie ou de symétries. Le fait que simultanément

(13)
$$r \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad g_{tt} \to 0 \quad \wedge \quad g_{rr} \to 0$$

m'inciterait à penser que la sphère de gorge est le lieu d'une double inversion, d'espace et de temps.

Un chose à faire serait de repasser à la représentation $\{\, t , x , y , z \,\}$ Logiquement on devrait avoir quatre potentiels et je conjecture qu'on pourrait avoir cette fois

(14)
$$r \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad g_{tt} \to 0 \quad \wedge \quad g_{xx} \to 0 \quad \wedge \quad g_{yy} \to 0 \quad \wedge \quad g_{zz} \to 0$$

J'ai parlé d'un « espace de définition des coordonnées », en invoquant le critère

(15)
$$ds^2 \geq 0$$

Dans ces conditions la variable r de Schwarzschild peut prendre n'importe quelle valeur, positive ou nulle. Cela implique que quand on passe à :

(16)
$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{R_s}{R}} - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

On ait la contrainte

(17)
$$R \geq R_s$$

Selon la formulation de la métrique (5) la question

(18) $$R = (r^3 + R_s^3)^{1/3} < R_s$$

est alors simplement sans objet, puisqu'elle implique que r cesse d'être réel.

On pourrait alors s'interroger sur le sens de la métrique 3D :

(19) $$d\sigma^2 = \frac{r^4}{(r^3 + R_s^3)\left[(r^3 + R_s^3)^{1/3} - R_s\right]} dr^2 + (r^3 + R_s^3)^{2/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Si on y fait $\theta = \pi / 2$ et dr = 0 il vient :

(20) $$d\sigma^2 = (r^3 + R_s^3)^{2/3} d\varphi^2$$

Ce qui nous incite à conclure que cet objet géométrique 3D n'est pas contractile. En intégrant on a le périmètre d'une courbe fermée :

(21) $$p = 2\pi(r^3 + R_s^3)^{1/3}$$

Ce périmètre possède une valeur minimale $p = 2\pi R_s$ qui correspond à la valeur r = 0 !

Une remarque en passant. Au lien de virer immédiatement vers des coupes à $\theta = \pi / 2$ on peut s'interroger sur l'aire des surface à r constant.

Quand on a un objet géométrique 3D défini par une métrique riemanienne, avec des coordonnées $\left\{ \xi^1, \xi^2, \xi^3 \right\}$ on définit un élément de volume :

(22) $$\sqrt{|g|}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^2$$

On remarque qu'à dessein je n'emploie par la lettre x pour désigner les coordonnées. En 2D, cet élément de « volume 2D » devient :

(23) $$\sqrt{|g|}\, d\xi^1 d\xi^2$$

Dans le cas de mon hypersurface correspond à r constant j'ai un élément de surface :

(24) $$dA = \sqrt{(r^3 + R_s^3)^{4/3} \sin^2\theta}\; d\theta d\varphi = (r^3 + R_s^3)^{2/3} \sin\theta d\theta d\varphi$$

L'aire se déduira par intégration selon :

(25) $$A = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (r^3 + R_s^3)^{2/3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \; d\theta d\varphi = 2\pi(r^3 + R_s^3)^{2/3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \; d\theta$$

(26) $$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \; d\theta = -\left[\cos\theta\right]_0^\pi = -\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) = 2$$

D'où :

(27) $$A = 4\pi (r^3 + R_s^3)^{2/3}$$

avec une aire minimale : $A = 4\pi R_s^2$ et donc une non-contractibilité.

Qu'est-ce que cela signifie ? Selon moi que l'objet géométrique défini par la métrique (5) n'est pas « plongeable » dans l'espace x , y z.

On obtient alors la représentation

(28) $$d\sigma^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{Rs}{R}} + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

qui devient alors *plongeable* dans l'espace $\left\{ R, \theta, \varphi \right\}$

mais qui secrète, dans cet espace 3D, une portion qui, selon moi, n'appartient pas à l'hypersurface.

Des ces deux représentations $\left\{ t, R, \theta, \varphi \right\}$ et $\left\{ t, r, \theta, \varphi \right\}$ et par delà les représentations

$\left\{ t, r, \theta, \varphi \right\}$ et $\left\{ t, R, \theta, \varphi \right\}$ quelle est « la bonne » ? Y en aurait-il une qui serait « meilleure que l'autre » ?

J'aurais tendance à dire que c'est une erreur de tenter de se créer une image mentale d'un espace de représentation 4D qui, de toute façon, reste hyperbolique. Vis à vis des hypersurfaces 3D les seules conclusions que l'on peut tirer sont :

- La représentation $\left\{ t, r, \theta, \varphi \right\}$, qui est fait en $\left\{ t, x, y, z \right\}$ ne produit aucune contrainte sur les valeurs (réelles) des coordonnées. Mais l'objet 3D, issu de « la partie spatiale de la métrique c'est pas plongeable dans un espace tridimensionnel euclidien.

- La représentation $\left\{ t, R, \theta, \varphi \right\}$ implique R > Rs pour avoir un ds^2 positif, donc un ds réel . Par contre l'objet, l'hypersurface 3D construit en examinant « la partie spatiale de la métrique » se prête à un plongement dans un espace tridimensionnel euclidien dont les coordonnées $\left\{ t, R, \theta, \varphi \right\}$ sont alors les coordonnées sphériques de cet espace. La surface de Flamm représente alors les coupes à θ = cst par de cette hypersurface. Ses courbes méridiennes sont des paraboles.

Mais nous n'avons toujours pas répondu à la question de la signification de ces hypersurfaces 3D.

Avant de revenir sur cette question clé, je voudrais attire l'attention sur le systèmes des coordonnées que j'ai publié en 2015 dans Modern Physics Letters A.

Je vais détailler le calcul, étape par étape, dans l'optique de l'inscrire ensuite dans la vidéo Janus 22-9

On partira de :

(29) $$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)c^2dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{R_s}{R}} - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

où on posera :

(30) $$R = R_s\left(1 + \text{Log ch}\rho\right)$$

$$\text{ch}\rho = \frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{2}$$

$$dR = R_s\, d\left(\text{Log ch}\rho\right)$$

$$d\left(\text{Log ch}\rho\right) = \frac{d\,\text{ch}\rho}{\text{ch}\rho} = \frac{\text{sh}\rho}{\text{ch}\rho}d\rho = \text{th}\rho d\rho$$

$$dR = R_s\,\text{th}\rho d\rho$$

(31) $$g_{tt} = \frac{R - R_s}{R}c^2 = \frac{\text{Log ch}\rho}{1 + \text{Log ch}\rho}c^2$$

(32) $$g_{rr} = -\frac{R}{R - R_s} - \; = -\frac{1 + \text{Log ch}\rho}{\text{Log ch}\rho}$$

(33) $$g_{\theta\theta} = -R_s^2\left(1 + \text{Log ch}\rho\right)^2$$

(34) $$g_{\varphi\varphi} = -R_s^2\left(1 + \text{Log ch}\rho\right)^2\sin^2\theta$$

Ce qui nous donne l'expression de la métrique avec cette nouvelle coordonnée d'espace

(35) $$ds^2 = \frac{L_n\,\text{ch}\rho}{1 + L_n\,\text{ch}\rho}c^2dt^2 - R_s^2\frac{1 + L_n\,\text{ch}\rho}{L_n\,\text{ch}\rho}\text{th}^2\rho d\rho^2 - R_s^2\left(1 + L_n\,\text{ch}\rho\right)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

La sphère de Schwarzschild est alors obtenue pour $\rho = 0$

L'espace de définition de cette variable d'espace devient à ce moment là :

(36) $$\rho \in \mathbb{R}$$

On a alors une surface avec deux nappes, correspondant à $\rho \geq 0$ et à $\rho \leq 0$ qui se rejoignent selon la sphère de Schwarzshild qui correspond alors à $\rho = 0$

L'idée de revêtement consiste alors à associer des points correspondant à $\pm\rho$ à des valeurs de opposées. Mais à la différence de Weyl l'inversion de la coordonnée de temps n'apparaît pas.

Ceci étant, voyons comment évoluent les potentiels métriques.

(37) $$g_{tt} = \frac{L_n \operatorname{ch}\rho}{1 + L_n \operatorname{ch}\rho} c^2$$

Tend vers zéro sur la sphère de gorge.

(38) $$g_{\rho\rho} = -R_s^2 \frac{1 + L_n \operatorname{ch}\rho}{L_n \operatorname{ch}\rho} \operatorname{th}^2\rho$$

Là il faut faire un développement limité.

(39) $$\operatorname{ch}\rho \simeq \frac{\rho^2}{2} + \text{etc}$$
$$e^{-\rho} = 1 - \rho + \frac{\rho^2}{2} + \text{etc}$$

(40) $$\operatorname{th}\rho \simeq \rho$$

(41) $$\operatorname{ch}\rho \simeq 1 + \frac{\rho^2}{2} \qquad \operatorname{Log}\operatorname{ch}\rho \simeq \frac{\rho^2}{2}$$

(42) $$g_{\rho\rho} \simeq -R_s^2 \frac{1 + \rho^2/2}{\rho^2/2} \rho^2 \simeq -2R_s^2$$

Il ne tend pas vers zéro sur la sphère de Schwarzschid. Mais avec ce changement de variable on élimine la singularité de coordonnées sur celle-ci.

Ce qui est intéressant et n'est pas le cas avec « le pont d'Einstein-Rosen est que cette forme de métrique devient Lorentzienne à l'infini. Quand est grand :

(43) $$\operatorname{ch}\rho \simeq \frac{e^\rho}{2} \qquad \operatorname{Log}\operatorname{ch}\rho \simeq \rho - \operatorname{Log}2 \simeq \rho$$

(44) $$ds^2 = \frac{\rho}{1+\rho} c^2 dt^2 - R_s^2 \frac{1+\rho}{\rho} t\, d\rho^2 - R_s^2 (\rho)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right)$$

qui tend vers :

(45) $$ds^2 = c^2 dt^2 - R_s^2 d\rho^2 - R_s^2 \rho^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right)$$

En posant

(46) $$R_s \rho = u$$

On retrouve a métrique de Lorentz écrite en coordonnées sphériques.

(47) $$ds^2 = c^2 dt^2 - du^2 - u^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$