

Thibault Damour, IHES
12 décembre 2022

Dans le document “Sur le “modèle Janus” de J. P. Petit” (mis en ligne sur <http://www.ihe.fr/~damour> le 4 Janvier 2019), j’avais expliqué en grand détail l’incohérence physique et mathématique de la version du modèle Janus publiée en 2014 par J. P. Petit and G. d’Agostini; c.a.d.

J. P. Petit. et G. d’Agostini, “Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy”, *Astrophys. Space Sci* DOI 10.1007/s10509-014-2106-5);

J. P. Petit, et G. d’Agostini, “Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe”. *Mod. Phys. Lett. A* Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

Quelques mois plus tard (le 12 Mars 2019), j’ai reçu une lettre de J. P. Petit affirmant qu’il avait maintenant résolu l’incohérence (que j’avais signalée) de la version 2014 du modèle Janus dans un nouvel article:

Jean-Pierre Petit, Gilles D’Agostini and Nathalie Debergh [disons PDD19], “Physical and Mathematical Consistency of the Janus Cosmological Model (JCM)”, *Progress in Physics*, **15**, issue 1, (2019) (<http://www.ptep-online.com>)¹

Dans sa lettre du 12 mars 2019 (et dans un courriel ultérieur du 3 avril 2019) J. P. Petit affirmait qu’il avait corrigé l’incohérence que j’avais pointée du doigt par “une légère modification des seconds membres des équations Janus”, et me demandait de modifier mon document du 4 janvier 2019 pour prendre en compte son travail de 2019. J’ai répondu à J. P. Petit dans un courriel d’avril 2019 en y disant que: “Dans votre dernier article, “Physical and Mathematical Consistency of the JCM” (January 2019), vous dites avoir corrigé l’incohérence (soulignée dans mon texte) du modèle Janus par “une légère modification des seconds membres des équations Janus”. Mais, les sections 3 et 4 de votre article, loin de fournir une déduction bien définie d’une théorie modifiée cohérente, sont mathématiquement incohérentes, et conduisent, selon votre article lui-même, à une incohérence mathématico-physique.”

Malgré cette réponse, il semble que ni J.P. Petit, ni ses collaborateurs (ni plusieurs de ses amis qui m’ont inondé de lettres recommandées ces derniers mois) n’ont apprécié l’incohérence mathématico-physique des équations de champ publiées dans leur article de 2019. Pour clarifier cette situation, je discute ci-dessous en détail les *graves incohérences* de la version 2019 du modèle Janus.

Les équations de base qui définissent “le modèle Janus-2019” concernent deux métriques (de signatures Lorentziennes $-++$), $g_{\mu\nu}^+$ et $g_{\mu\nu}^-$, sur une même variété quadri-dimensionnelle, et sont (équations (40), (41) de PDD19):

$$\begin{aligned} w_+ E_{\mu\nu}^+ &= \chi(w_+ T_{\mu\nu}^+ + w_- \varphi T_{\mu\nu}^-), \\ w_- E_{\mu\nu}^- &= -\chi(w_- T_{\mu\nu}^- + w_+ \varphi T_{\mu\nu}^+). \end{aligned} \quad (1)$$

Ici: $E_{\mu\nu}^\pm = E_{\mu\nu}(g_\pm) = R_{\mu\nu}^\pm - \frac{1}{2}R^\pm g_{\mu\nu}^\pm$ dénote le tenseur d’Einstein (de g_+ ou g_-); $w_\pm \equiv \sqrt{-\det g_\pm}$; $\chi = +8\pi G/c^4$ (avec mes conventions); les deux tenseurs

¹Notons en passant que la date exacte de publication de cet article n’est pas claire. Le volume 1 est étiqueté comme “January 2019”. Cependant, le dernier article de ce volume, c.a.d. “Non-commutativity: Unusual View”, by Valeriy V. Dvoeglazov, est marqué comme “Submitted on February 18, 2019”, ce qui est étrange pour un volume formellement publié en Janvier 2019. Quoiqu’il en soit, la première copie que j’ai reçue de ce travail m’a été envoyée par J. P. Petit le 12 mars 2019.

sources $T_{\mu\nu}^+$ et $T_{\mu\nu}^-$ sont censés représenter, respectivement, l'énergie-impulsion de la matière ordinaire (dite à "masse positive"), et d'une nouvelle matière, dite à "masse négative"; et finalement φ dénote la "matrice diagonale constante"

$$\varphi = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (2)$$

Les définitions (standard) de $T_{\mu\nu}^+$ (assurant sa conservation tensorielle par rapport à $g_{\mu\nu}^+$) et de $T_{\mu\nu}^-$ (assurant sa conservation tensorielle par rapport à $g_{\mu\nu}^-$) sont $w_+ T_{\mu\nu}^+ \equiv -2\delta S_{\text{matiere}+} / \delta g_+^{\mu\nu}$, et $w_- T_{\mu\nu}^- \equiv -2\delta S_{\text{matiere}-} / \delta g_-^{\mu\nu}$, où $S_{\text{matiere}+}$ dénote l'action de la matière ordinaire, et $S_{\text{matiere}-}$ l'action de la matière dite à "masse négative".

Avant même de discuter les incohérences des Eqs. (1), je tiens à faire remarquer que les structures apparaissant dans l'écriture de l'action de base de Janus-2019 (Eqs. (30)-(31)) ne font pas sens du point de vue mathématique et géométrique. En effet, l'idée centrale de définir un modèle Janus qui puisse être considéré comme une extension de la Relativité générale d'Einstein est de définir des équations de champ qui soient *covariantes sous les difféomorphismes de la variété quadri-dimensionnelle* sur laquelle vivent $g_{\mu\nu}^+$ et $g_{\mu\nu}^-$. Mais, cette condition de covariance est violemment brisée par l'introduction (dans l'équ. (1)) de la "matrice diagonale constante" φ , (2). En outre, l'utilisation de cette matrice dans la "dérivation" des éqs de champ utilise des manipulations formelles qui sont incompréhensibles. Même si on oublie cette "dérivation" pour ne regarder que les éqs de champ, Eqs. (1), le fait que la matrice constante φ apparaisse de façon cruciale dans les éqs (1) montre que ces équations ne sont pas covariantes sous les difféomorphismes (et n'ont donc aucun sens géométrique ou physique).

Une autre incohérence mathématique de la dérivation des éqs de champ est contenue dans l'éq. (39) de PDD19, cad

$$\delta g_-^{\mu\nu} = -\delta g_+^{\mu\nu}. \quad (3)$$

En effet, cette éq. affirme que les deux métriques ne peuvent pas être variées indépendamment. Mais, si c est le cas, la variation de l'action ne pourra donner qu'une seule éq. de champ, qui serait la différence des deux équations (1). Une telle unique éq. de champ ne définirait alors pas un système permettant de déterminer les deux métriques, $g_{\mu\nu}^+$ et $g_{\mu\nu}^-$, à partir de leurs deux sources $T_{\mu\nu}^+$ et $T_{\mu\nu}^-$.

Si on oublie cette incohérence, et si on étudie les conséquences physiques des deux équations (1), on va montrer que l'on obtient encore deux autres incohérences physico-mathématiques.

Une première nouvelle incohérence concerne l'idée de base du modèle Janus (tel qu'il a été défini dans un cadre newtonien), cad le fait que, dans ce modèle, *les masses positives attirent les masses positives; les masses négatives attirent les masses négatives, mais les masses positives et négatives se repoussent.*

Une conséquence particulière de ce principe fondamental du modèle Janus doit donc être qu'une étoile à masse négative, dont l'extérieur est décrit, d'après l'équ. (21) de PDD19, par une solution de Schwarzschild contenant une masse négative ($-m$ remplaçant $+m$) doit *attirer les masses d'épreuve négatives dans*

son voisinage. Mais en fait les éqs (1) impliquent le contraire: *les masses d'épreuve négatives dans le voisinage d'une solution de Schwarzschild ayant une masse négative sont repoussées.*

En effet, si l'on applique la deuxième équation (1) au cas d'une distribution de matière négative, $T_{\mu\nu}^-$ (spatialement séparée de la distribution de matière ordinaire $T_{\mu\nu}^+$, ou, pour simplifier, en absence de matière ordinaire), l'identité de Bianchi, $\nabla_\nu E_{\mu\nu}^- \equiv 0$, satisfaite par le tenseur d'Einstein, $E_{\mu\nu}^-$, implique que $T_{\mu\nu}^-$ doit satisfaire la loi de conservation

$$\nabla_\nu T_{\mu\nu}^- = 0. \quad (4)$$

Cette loi de conservation (par rapport à la connexion ∇_- de la métrique $g_{\mu\nu}^-$) implique, comme il est bien connu, qu'une particule d'épreuve à masse négative doit suivre une *géodésique* de la métrique $g_{\mu\nu}^-$. En particulier, une particule d'épreuve à masse négative autour d'une solution de Schwarzschild de masse négative, sera *repoussée*, et non attirée par la masse centrale négative. Nous avons donc ici une violation frappante d'une des idées de base du modèle Janus. Cela montre que les deux équations de champ (1) ne réussissent pas à donner une description relativiste de la situation physique qu'elles sont censées décrire.

Une autre incohérence (cette fois purement mathématique) des éqs. (1) apparaît quand on considère les analogues de l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff donnant la variation radiale de la pression d'une étoile de matière ordinaire (positive). Dans mon document précédent ("Sur le "modèle Janus" de J. P. Petit"), j'avais pointé du doigt que les équations de champ de Janus-2014 (qui différaient des éqs. (1) en ne contenant pas la matrice φ dans les membres droits) donnaient deux équations pour la variation radiale de la pression dont les membres de droite différaient par leur signe. Plus précisément, Janus-2014 impliquait que la pression devait satisfaire (à la limite newtonienne) les deux équations incompatibles

$$\begin{aligned} p'_+ &= -G\rho_+ \frac{M_+(r)}{r^2}, \\ p'_+ &= +G\rho_+ \frac{M_+(r)}{r^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Les auteurs de PDD19 ont cru corriger ce défaut fondamental de la théorie Janus en rajoutant le facteur matriciel φ , Eq. (2), apparaissant dans les membres droits de (1), dont l'effet est de changer le signe de $p_+(r)$ dans la deuxième équation (5). Il est vrai que cette modification élimine la violente contradiction entre les deux équations newtoniennes (5), en les remplaçant par l'unique (et correcte) équation de structure newtonienne

$$p'_+ = -G\rho_+ \frac{M_+(r)}{r^2}. \quad (6)$$

Quand on part des éqs de champ de Janus-2019, les analogues des équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff sont obtenues à partir des éqs. (1) en mettant $T_{\mu\nu}^-$ à zéro, et en résolvant les équations pour les deux métriques dans un cas

où la source $T_{\mu\nu}^+$ est stationnaire et à symétrie sphérique. Ces solutions ont été écrites² dans les éqs. (45), (46) de PDD19, c-a-d (avec $' = d/dr$)

$$\begin{aligned} p'_+ &= -G \left(\rho_+ + \frac{p_+}{c^2} \right) \frac{M_+(r) + 4\pi p_+ r^3 / c^2}{r(r - 2GM_+(r)/c^2)}, \\ p'_+ &= -G \left(\rho_+ - \frac{p_+}{c^2} \right) \frac{M_+(r) - 4\pi p_+ r^3 / c^2}{r(r + 2GM_+(r)/c^2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

où $p_+(r)$ est la pression (de la matière ordinaire), $\rho_+(r)$ sa densité, et $M_+(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho_+(r)$ est la masse (positive) contenue dans le rayon r . Notons que l'on passe de la première équation (7) à la seconde par les changements: $p_+ \rightarrow -p_+$ et $G \rightarrow -G$.

Il est vrai que si l'on prend formellement la limite newtonienne $\frac{1}{c^2} \rightarrow 0$ dans les équations (7), ces deux équations deviennent compatibles, car elles deviennent toutes deux identiques à l'unique équation de structure newtonienne (6).

Mais, il est physiquement inacceptable de négliger ainsi le fait que le modèle Janus-2019 prédit que *la variation radiale de la pression dans une étoile de matière ordinaire doit satisfaire deux équations incompatibles entre elles*. En effet, si l'on considère par exemple une étoile à neutrons, les termes relativistes supplémentaires dans (7), cad $\pm p_+/c^2$, $\pm 4\pi p_+ r^3/c^2$, et $\pm 2GM_+(r)/c^2$, sont numériquement très significatifs (de l'ordre de 10%), et conceptuellement très importants car ils modifient grandement la valeur de la masse maximum d'une étoile à neutrons. Comme il est rappelé dans l'éq. (5), les analogues des équations (7) dans Janus-2014 avaient des membres droits qui différaient d'environ 200%. La modification (géométriquement non-définie, car violant la covariance) introduite dans Janus-2019 a simplement formellement réduit la différence des membres de droite qui était de 200% à, disons, environ 20% (pour une étoile à neutrons). Cela ne change rien à l'incohérence mathématique fondamentale que le modèle Janus-2019 prédit que *la variation radiale de la pression dans une étoile de matière ordinaire doit satisfaire deux équations mathématiquement (et physiquement) incompatibles entre elles*.

CONCLUSION: Les équations de champ de la version 2019 du "modèle Janus", Eqs. (1), n'ont aucune dérivation logique d'un principe variationnel covariant, et sont mathématiquement et physiquement contradictoires. En outre, elles prédisent (contrairement à l'idée de base du modèle Janus newtonien) qu'une masse centrale négative doit repousser les masses négatives autour d'elle.

²En fait, la solution donnée par (46) n'est pas exacte car les auteurs ont négligé le facteur w_+/w_- devant le terme $\varphi T_{\mu\nu}^+$ dans l'équation pour la métrique $g_{\mu\nu}$. Mais la version correcte de l'équation (46) implique toujours une forme légèrement modifiée de la contradiction discutée ci-dessous.