Calculs pratiques en relativité générale dans le cas des métriques diagonales

David Pigeon [1]

23 mai 2023

Le présent texte se focalise exclusivement sur l'exploration d'une variété d'espace-temps (M, g), où la métrique g est diagonale.

Au sein du premier chapitre, une étude comparative est entreprise pour évaluer deux méthodes distinctes permettant de calculer avec précision les composantes des tenseurs classiques liés à la courbure, tels que le tenseur de courbure, le tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci et le tenseur d'Einstein.

La première approche adoptée est la méthode standard, qui s'appuie sur l'utilisation de la base de champs de vecteurs $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

La seconde méthode, connue sous le nom de méthode des "tétrades", se distingue par l'utilisation d'une base alternative $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, spécialement choisie pour orthonormaliser la métrique g et ainsi faciliter les calculs et les interprétations géométriques.

On applique ces deux méthodes dans le contexte d'une métrique h spécifique, présentant des propriétés diagonales et une symétrie sphérique. Cette métrique englobe les métriques connues telles que celles de Schwarzschild, de Reissner-Nordström et de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Le deuxième chapitre est dédié à la résolution de l'équation d'Einstein pour la métrique h en présence d'un tenseur énergie-impulsion général. Les efforts se concentrent sur l'analyse et la résolution de l'équation d'Einstein pour en déduire les premières propriétés des fonctions apparaissant dans la métrique.

Des exemples sont présentés pour illustrer l'application des résultats obtenus. Une attention particulière est accordée à l'étude de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, qui est utilisée pour décrire l'expansion de l'Univers dans le cadre de la cosmologie. Dans un second temps, une analyse plus détaillée est consacrée aux métriques de Schwarzschild et de Reissner-Nordström, qui représentent respectivement les solutions pour un objet massif non chargé et chargé dans un espace-temps courbé.

Enfin, des résultats généraux sont démontrés concernant la forme générale de la métrique dans ces cas spécifiques.

1. Professeur agrégé en classes préparatoires et chargé de TD à l'université de Caen-Normandie.
Contact : david.pigeon@unicaen.fr

Table des matières

Chapitre 1

Calculs des objets associés à la courbure pour les métriques diagonales

1.1 Généralités et notations

On fixe pour toute la suite une variété différentiable M de dimension 4. On se donne un atlas maximal sur M et on suppose en chaque point p de M donné une carte de M du type :

$$(U, \varphi := (x^0, x^1, x^2, x^3))$$

avec $p \in U$ sur laquelle on fera les calculs. On a donc un difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^4$ et donc pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a une application infiniment différentiable :

$$x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

appelée l'**application coordonnées i-ème**.

On note $\mathscr{C}^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions f infiniment différentiables de M dans $\mathbb{R}$ (sur chaque carte U la fonction $f_{|U} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ soit infiniment différentiables au sens usuel). Dans toute la suite, tous les objets considérés seront infiniment différentiables.

Pour simplifier la notation, nous utiliserons par la suite le symbole M à la place de U. Il sera ainsi sous-entendu que nous travaillons dans une carte munie de coordonnées.

Des références pour les notions traitées dans ce chapitre sont :

[2], [6], [8], [9], [11], [17], [20].

1.1.1 Fibrés tangent et cotangent

On commence par définir la notion de vecteurs et d'espace tangent.

Définition 1.1.1.1: Espace tangent en un point

Soit $p \in M$.

(i) Un **vecteur en p de M** est une fonction :

$$v : \mathscr{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tous $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^\infty(M)$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $v(af_1 + bf_2) = av(f_1) + bv(f_2)$;

(b) $v(f_1 f_2) = f_1(p)v(f_2) + f_2(p)v(f_1)$.

(ii) L'**espace tangent T_pM en p de M** est défini comme l'ensemble des vecteurs en p de M.

On remarque que si $f := a$ est constante sur M alors $v(f) = 0$ car on a par le point (i.b) :

$$v(1) = 2v(1)$$

i.e. $v(1) = 0$ et donc on a par le point (i.a) :

$$\begin{aligned} v(f) &= v(a) \\ &= av(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notation 1.1.1.2: Notation pour l'espace tangent en un point

Soit $p \in M$.

(1) On définit deux lois sur T_pM. Pour tous $v_1, v_2 \in T_pM$, tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, on pose :
   (a) $(v_1 + v_2)(f) := v_1(f) + v_2(f)$;
   (b) $v_1(af) := av_1(f)$.

(2) L'élément $\partial_{i,p} : \mathscr{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ par :

$$\partial_{i,p}(f) := \frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)}.$$

On a le résultat classique suivant.

Proposition 1.1.1.3: Structure d'espace vectoriel de T_pM

(i) On a :

$$\partial_{i,p} \in T_pM.$$

(ii) Les $\partial_{i,p}$ sont linéairement indépendants.

(iii) Soit $p \in U$. Le triplet $(T_pM, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 engendré par les $\partial_{i,p}$ *i.e.* on a :

$$T_pM = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\partial_{i,p}\right).$$

Démonstration. (i) Soit $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^\infty(M)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a par linéarité de la dérivation, de la composition à gauche et de l'évaluation :

$$\begin{aligned} \partial_{i,p}(af_1 + bf_2) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left((af_1 + bf_2) \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(af_1 \circ \varphi^{-1} + bf_2 \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} \\ &= a\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_1 \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} + b\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_2 \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} \\ &= a\partial_{i,p}(f_1) + b\partial_{i,p}(f_2) \end{aligned}$$

Par la dérivation d'un produit, on a :

$$\begin{aligned} \partial_{i,p}(f_1 f_2) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left((f_1 f_2) \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left((f_1 \circ \varphi^{-1})(f_2 \circ \varphi^{-1})\right)_{|\varphi(p)} \\ &= f_1\left(\varphi^{-1}(\varphi(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_2 \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} + f_2\left(\varphi^{-1}(\varphi(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_1 \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} \\ &= f_1(p)\partial_{i,p}(f_2) + f_2(p)\partial_{i,p}(f_1) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\partial_{i,p} \in T_pM.$$

(ii) Soit $a^0, a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{3} a^i \partial_{i,p} = 0$$

i.e. pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, on a :

$$\sum_{i=0}^{3} a^i \partial_{i,p}(f) = 0.$$

Comme $x^j : M \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathscr{C}^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{3} a^i \partial_{i,p}(x^j) \\ &= \sum_{i=0}^{3} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(x^j \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(p)} \\ &= \sum_{i=0}^{3} a^i \delta^i_j(\varphi^{-1}(\varphi(p))) \\ &= \sum_{i=0}^{3} a^i \delta^i_j \\ &= a^j \end{aligned}$$

Ainsi les $\partial_{i,p}$ sont linéairement indépendants.

(iii) Soit $v \in T_pM$ $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ et $q \in M$. Posons :

$$F := f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$z := (z^0, z^1, z^2, z^3) := \varphi^{-1}(q) \quad y := (y^0, y^1, y^2, y^3) := \varphi^{-1}(p).$$

Notons :

$$\lambda := (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ s & \longmapsto & (1-s)y + sz \end{array}$$

le segment reliant y et z dans $\mathbb{R}^4$. Comme F est différentiable sur $\mathbb{R}^4$ et comme $\lambda' = z - y$, on a par le théorème fondamental de l'analyse et la dérivée d'une composée :

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= F(z) - F(y) \\ &= F(\lambda(1)) - F(\lambda(0)) \\ &= [F(\lambda(s))]_0^1 \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (F \circ \lambda)(s) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{3} \left(\lambda^i\right)'(s) \partial_i F(\lambda(s)) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{3} (z^i - y^i) \partial_i F((1-s)y + sz) \mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=0}^{3} (z^i - y^i) \int_0^1 \partial_i F((1-s)y + sz) \mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=0}^{3} (z^i - y^i) G_i(z) \\ &= \sum_{i=0}^{3} (x^i \circ \varphi(q) - x^i \circ \varphi(q)) G_i(\varphi(q)) \end{aligned}$$

avec :

$$G_i(z) := \int_0^1 \partial_i F((1-s)y + sz)\mathrm{d}s.$$

Ainsi la fonction f est donnée par :

$$f : q \longmapsto f(p) + \sum_{i=0}^{3}(x^i \circ \varphi(q) - x^i \circ \varphi(p))G_i(\varphi(q)).$$

Comme v est linéaire et nulle sur les constantes et en utilisant les lois vérifiées par v, on a en appliquant v :

$$\begin{aligned} v(f) &= v(f(p)) + \sum_{i=0}^{3} v\left((x^i \circ \varphi(q) - x^i \circ \varphi(p))G_i(\varphi(q))\right) \\ &= v(f(p)) + \sum_{i=0}^{3}(x^i \circ \varphi(q) - x^i \circ \varphi(p))_{q=p} v\left(G_i(\varphi(p))\right) + \sum_{i=0}^{3} G_i(\varphi(p)) v(x^i \circ \varphi - x^i \circ \varphi(p)) \\ &= \sum_{i=0}^{3} v(x^i \circ \varphi)\partial_{i,p}(f) \end{aligned}$$

En posant :

$$v^i := v(x^i \circ \varphi)$$

on a donc :

$$v = v^i \partial_{i,p} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\partial_{i,p}\right).$$

□

Définition 1.1.1.4: Fibrés tangent et contangent

(i) (a) Le **fibré tangent de** M est défini par :

$$\begin{aligned} TM &:= \bigcup_{p \in M} \{(p, v),\ v \in T_pM\} \\ &= \{(p, v),\ p \in M\ \wedge\ v \in T_pM\} \end{aligned}$$

il est muni naturellement d'une application projection :

$$\pi : \begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & M \\ (p, v) & \longmapsto & p \end{array}$$

(b) Un **champ de vecteurs** est une section de TM *i.e.* une application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$.

(ii) (a) Soit $p \in M$. L'**espace cotangent** T_p^*M **en** p **de** M est défini comme le dual de T_pM *i.e.* on a :

$$T_p^*M := (T_pM)^*.$$

Les éléments de T_p^*M sont appelés **covecteurs**.

(b) Le **fibré cotangent** de M est défini par :

$$\begin{aligned} T^*M &:= \bigcup_{p \in M} \left\{(p, \phi),\ \phi \in T_p^*M\right\} \\ &= \left\{(p, \phi),\ p \in M\ \wedge\ \phi \in T_p^*M\right\} \end{aligned}$$

il est muni naturellement d'une application projection :

$$\pi^* : \begin{array}{ccc} T^*M & \longrightarrow & M \\ (p, \phi) & \longmapsto & p \end{array}$$

(c) Un **champ de covecteurs** ou **1-forme (différentielle)** est une section de T^*M *i.e.* une application $\alpha : M \longrightarrow T^*M$ telle que $\pi^* \circ \alpha = \mathrm{Id}_M$.

Exemple 1.1.1.5: Fibrés tangent et contangent

(1) On note pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$, la section :

$$\begin{array}{rccc} \partial_i : & M & \longrightarrow & TM \\ & p & \longmapsto & (p, \partial_{i,p}) \end{array}$$

La famille $\mathscr{C} := (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ forme une base de champs de vecteurs *i.e.* pour tout $p \in M$, $(\partial_{0,p}, \partial_{1,p}, \partial_{2,p}, \partial_{3,p})$ est une base de T_pM.

(2) On note $\left(\mathrm{d}x^{0,p}, \mathrm{d}x^{1,p}, \mathrm{d}x^{2,p}, \mathrm{d}x^{3,p}\right)$ la base duale de $(\partial_{0,p}, \partial_{1,p}, \partial_{2,p}, \partial_{3,p})$ *i.e.* pour tout $j \in \{0,1,2,3\}$ on a une forme linéaire :

$$\mathrm{d}x^{j,p} : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\mathrm{d}x^{j,p}\left(\partial x_{i,p}\right) = \delta_i^j.$$

On note alors la section :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}x^j : & M & \longrightarrow & T^*M \\ & p & \longmapsto & \left(p, \mathrm{d}x^{j,p}\right) \end{array}$$

La famille $\mathscr{C}^* := \left(\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3\right)$ forme une base de champs de covecteurs *i.e.* pour tout $p \in M$, $\left(\mathrm{d}x^{0,p}, \mathrm{d}x^{1,p}, \mathrm{d}x^{2,p}, \mathrm{d}x^{3,p}\right)$ est une base de T_p^*M.

Dans toute la suite, on omettra par abus l'indice "p". Donc on confond dans les notations vecteurs et champs de vecteurs, et covecteurs et champs de covecteurs. On aura donc par exemple :

$$\mathrm{d}x^j\left(\partial_i\right) = \delta_i^j.$$

1.1.2 Le langage des tenseurs

Soit des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E, F, E_1, \ldots, E_k$.

- On note :

$$\mathscr{L}_k(E_1 \times \cdots \times E_k, F)$$

l'ensemble des **applications k-linéaires de** $E_1 \times \cdots \times E_k$ **dans** F ;

- On note :

$$E^* := \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$$

l'**espace dual de** E et $E^{**} := (E^*)^*$ l'**espace bidual de** E. On a un isomorphisme canonique entre E et son bidual E^{**} donné par :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ u & \longmapsto & (\phi \longmapsto \phi(u)) \end{array}$$

On les identifie à partir de maintenant.

On fixe pour cette sous-section des bases $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' := (f_1, \ldots, f_m)$ sur E et F respectivement. On note $\mathscr{B}^* := (e^1, \ldots, e^n)$ et $\mathscr{B}'^* := (f^1, \ldots, f^m)$ les bases de E^* et F^* respectivement déduites de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ (on a $e^i(e_j) = \delta_j^i$ et $f^i(f_j) = \delta_j^i$).

Définition 1.1.2.1: Produit tensoriel

Le **produit tensoriel des espaces vectoriels** $E_1, \ldots, E_k$ est défini par :

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_k := \mathscr{L}_k(E_1^* \times \cdots \times E_k^*, \mathbb{R}).$$

Les éléments de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ sont appelés **tenseurs**.

Exemple 1.1.2.2: Exemples usuels

(1) Pour tout $T \in E \otimes F$, on a une décomposition :

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{ij} e_i \otimes f_j = T_{ij} e_i \otimes f_j.$$

La deuxième égalité est la **convention d'Einstein** que nous adoptons à partir de maintenant. On a donc :

$$T(e^k, f^l) = T_{ij} e_i \otimes f_j (e^k, f^l) = T_{ij} e_i(e^k) f_j(f^l) = T_{ij} \delta_i^k \delta_j^l = T_{kl}.$$

(2) On a :

$$E \otimes E := \mathscr{L}_2(E^* \times E^*, \mathbb{R}) \ , \ E \otimes E^* := \mathscr{L}_2(E^* \times E, \mathbb{R})$$

Pour tous $k, l \in \mathbb{N}$, on a par exemple :

$$E^{\otimes(k+1)} := E^{\otimes k} \otimes E \qquad E^{\otimes k} \otimes E^{\otimes l} := E^{\otimes(k+l)}$$
$$E^{\otimes 1} := \mathscr{L}(E^*, \mathbb{R}) = E^{**} = E \qquad \left(E^{\otimes k}\right)^{\otimes l} := E^{\otimes(kl)}$$
$$E^{\otimes 0} := \mathbb{R}$$

On a un isomorphisme canonique $(E^*)^{\otimes k} = \left(E^{\otimes k}\right)^*$ qui nous permet d'identifier ces deux espaces vectoriels.

On pose :

$$\mathscr{T}^{k,l} E := E^{\otimes k} \otimes (E^*)^{\otimes l}$$

On construit ainsi l'ensemble :

$$\mathscr{T} E := \bigoplus_{k,l \geq 0} \mathscr{T}^{k,l} E.$$

- Les éléments de $\mathscr{T}^k E := \mathscr{T}^{k,0} E$ (avec $k > 0$) sont appelés **tenseurs contravariants**.
- Les éléments de $\mathscr{T}^{0,l} E$ (avec $l > 0$) **tenseurs covariants**.
- Les éléments de $\mathscr{T}^{k,l} E$ (avec $k, l > 0$) **tenseurs mixtes**.

On construit de façon naturelle une loi + entre tenseurs de même type ainsi qu'une multiplication par un scalaire. Ce qui fait du triplet $(\mathscr{T} E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une tenseur T de type (k, l) admet une unique décomposition du type :

$$T = T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l}$$

On dira que c'est la **décomposition de T dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$**.

On construit ci-dessous une opération de multiplication.

Définition 1.1.2.3: Produits de tenseurs

Soit $x_1, \ldots, x_k \in E$ et $\psi^1, \ldots, \psi^k \in E^*$. On a un élément :

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes \psi^1 \otimes \cdots \otimes \psi^l \ \in \ \mathscr{T}^{k,l} E := E^{\otimes k} \otimes (E^*)^{\otimes l}$$

défini pour tous $\phi^1, \ldots, \phi^k \in E^*$ et $y_1, \ldots, y_l \in E$ par :

$$\left(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes \psi^1 \otimes \cdots \otimes \psi^l\right)(\phi^1, \ldots, \phi^k, y_1, \ldots, y_l) := \prod_{i=1}^{k} \phi^i(x_i) \times \prod_{j=1}^{l} \psi^j(y_j).$$

Ce produit se généralise par linéarité aux formes multilinéaires quelconque ainsi le produit $S \otimes T$ de tenseurs d'ordre (k_1, l_1) et (k_2, l_2) est d'ordre $(k_1 + k_2, l_1 + l_2)$.

Exemple 1.1.2.4: Exemples simples de produits de tenseurs

(1) Le **produit de** $x, y \in E$ est un élément $x \otimes y \in E \otimes E = \mathscr{L}_2(E^* \times E^*, \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall \phi, \psi \in E^*,\ (x \otimes y)(\phi, \psi) := \phi(x)\psi(y).$$

(2) Le **produit de** $\phi, \psi \in E^*$ est un élément $\phi \otimes \psi \in E^* \otimes E^* = \mathscr{L}_2(E \times E, \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x, y \in E,\ (\phi \otimes \psi)(x, y) := \phi(x)\psi(y).$$

(3) Le **produit de** $x \in E$ **et** $\psi \in E^*$ est un élément $x \otimes \psi \in E \otimes E^* = \mathscr{L}_2(E^* \times E, \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall \phi \in E^*, \forall y \in E,\ (x \otimes \psi)(\phi, y) := \phi(x)\psi(y).$$

Ces produits sont associatifs, non commutatifs et distributifs par rapport à +.
Le quadruplet $(\mathscr{T}E, +, \cdot, \otimes)$ est ainsi une $\mathbb{R}$-algèbre graduée.
On finit cette sous-section par la contraction de tenseur.

Définition 1.1.2.5: La contraction d'un tenseur

Soit un tenseur $T := x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y^1 \otimes \cdots \otimes y^l \in E^{\otimes k} \otimes (E^*)^{\otimes l}$ d'ordre (k, l) avec $k, l \geq 1$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $j \in \{1, \ldots, l\}$. La **contraction de** T **suivant les indices** i **et** j est le tenseur :

$$[T]^i_j = y^j(x_i) x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y^1 \otimes \cdots \otimes y^{j-1} \otimes y^{j+1} \otimes \cdots \otimes y^l$$

C'est un tenseur d'ordre $(k-1, l-1)$.

Ces contractions sont associatives et distributives par rapport à +. On peut montrer qu'elles sont indépendantes de la base choisie.

Exemple 1.1.2.6: La trace d'un tenseur de type $(1,1)$

Soit un tenseur $T \in \mathscr{T}_1^1 E$ de type $(1, 1)$. Comme

$$\mathscr{T}_1^1 E = E \otimes E^* = \mathscr{L}(E)$$

alors T est vu aussi comme une application linéaire de E. Notons la décomposition dans la base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$ par :

$$T := \mathrm{T}^i_j e_i \otimes e^j.$$

La **trace de** T est définie par :

$$\mathrm{tr}(T) := [T]^1_1.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T) &= [T]^1_1\\ &= \mathrm{T}^i_j e^j(e_i)\\ &= \mathrm{T}^i_j \delta^j_i\\ &= \mathrm{T}^j_j\end{aligned}$$

Cette définition est donc la même que la définition standard de trace d'un endomorphisme. La trace est indépendante de la base choisie.

1.1.3 Champs tensoriels

On note $\mathscr{T}^{k,l}M$ l'ensemble des **champs tensoriels réels de** M **de type** (k,l) *i.e.* l'ensemble des champs $\mathscr{A}$ tels que en chaque point $p \in M$, on ait un tenseur $\mathscr{A}_p$ de type (k,l). On a donc une application k-linéaire :

$$\mathscr{A}_p : (T_pM)^k \times \left(T_p^*M\right)^l \longrightarrow \mathbb{R}$$

grâce à l'égalité :

$$\mathscr{T}^{k,l}T_pM = (T_pM)^{\otimes k} \otimes \left(T_p^*M\right)^{\otimes l}.$$

On note alors $\mathscr{T}M$ l'ensemble des champs tensoriels de M *i.e.*

$$\mathscr{T}M := \bigsqcup_{k,l\geq 0} \mathscr{T}^{k,l}M.$$

Toutes les opérations définies sur les tenseurs dans la sous-section précédente s'étendent au champs tensoriels naturellement.

Exemple 1.1.3.1: Exemples de champs tensoriels

(1) Un **champ scalaire** est un champ tensoriel de type $(0,0)$.
(2) Un **champ de vecteurs** est un champ tensoriel de type $(1,0)$.
(3) Un **champ de covecteurs** ou **1-forme** est un champ tensoriel de type $(0,1)$.
(4) Une **application linéaire de** M **dans** M (*i.e.* pour tout $p \in M$, on a une application linéaire de T_pM) peut-être vu comme un tenseur de type $(1,1)$.

Définition 1.1.3.2: Exemples de champs tensoriels

Une **métrique d'espace-temps (de signature** $(1,3)$**)** est un champ tensoriel g de type $(0,2)$ tel que pour tout $p \in M$:

(i) g_p soit **symétrique** *i.e.* pour tous champs de vecteurs X et Y et tout $p \in M$, on a :

$$g_p(X(p),Y(p)) = g_p(Y(p),X(p)).$$

(ii) g_p soit **non dégénérée** *i.e.* pour tous champs de vecteurs X et Y et tout $p \in M$, on a :

$$g_p(X(p),Y(p)) = 0_{\mathbb{R}} \implies X(p) = 0_{T_pM} \ \vee \ Y(p) = 0_{T_pM}.$$

(iii) g_p soit **de signature** $(1,3)$ *i.e.* il existe une base $\mathscr{B}_p$ de T_pM telle que

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{B}_p}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On dit alors que le couple (M,g) est une **variété d'espace-temps** ou **variété lorentzienne de signature** $(1,3)$.

On omettra par la suite la lettre "p". On dira par exemple que g est symétrique et on écrira au lieu de $g_p(X(p),Y(p)) = g_p(Y(p),X(p))$ simplement :

$$g(X,Y) = g(Y,X).$$

Exemple 1.1.3.3: Métriques à symétrie sphérique

(1) **Métrique sur la 2-sphère unité**. Considérons la 2-sphère unité de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{S}^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

Le changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et sphériques est donné par :

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,\pi[\times[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathscr{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ & (\vartheta,\varphi) & \longmapsto & (x,y,z) := (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \end{array}$$

La matrice jacobienne du changement de variables vaut :

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial x}{\partial\phi} \\ \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons :

$$\delta := \mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$$

et $h_\Omega := f^*\delta$ la métrique sur la 2-sphère unité déduite de δ par la paramétrisation f. Comme :

$$\mathscr{M}at_{(\partial_x,\partial_y,\partial_z)}(\delta) = I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{M}at_{(\partial_\varphi,\partial_\psi)}(h_\Omega) &= {}^tJ\mathscr{M}at_{(\partial_x,\partial_y,\partial_z)}(\delta)J \\ &= {}^tJI_3J \\ &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$h_\Omega := \mathrm{d}\vartheta\otimes\mathrm{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi$$

(2) **Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques**. La métrique η est donnée dans la base $\mathscr{C}^*$ par :

$$\eta = \mathrm{d}x^0\otimes\mathrm{d}x^0 - \mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^1 - \mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^3\otimes\mathrm{d}x^3.$$

Donc on a :

$$N_{\mathscr{C}} := \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et sphériques est donné par :

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 := t \\ x^1 := r\sin\vartheta\cos\varphi \\ x^2 := r\sin\vartheta\sin\varphi \\ x^3 := r\cos\vartheta \end{array}\right.$$

La matrice jacobienne du changement de variables vaut :

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial t} & \frac{\partial x^0}{\partial r} & \frac{\partial x^0}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x^0}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x^1}{\partial t} & \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x^1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t} & \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x^2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial t} & \frac{\partial x^3}{\partial r} & \frac{\partial x^3}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x^3}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ 0 & \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 & \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons :

$$\mathscr{B} := (\partial_t, \partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\phi) \quad , \quad \mathscr{B}^* := (\partial_t, \partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\phi)$$

Posons pour simplifier :

$$N_{\mathscr{B}} := \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\eta) \ , \ c(\vartheta) := \cos\vartheta \ , \ s(\vartheta) := \sin\vartheta \ , \ c(\phi) := \cos\phi \ , \ s(\phi) := \sin\phi.$$

Par changement de base on a :

$$\begin{aligned}
&N_{\mathscr{B}} \\
&= {}^t J N_{\mathscr{C}} J \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s(\vartheta)c(\varphi) & s(\vartheta)s(\varphi) & c(\vartheta) \\ 0 & rc(\vartheta)c(\varphi) & rc(\vartheta)s(\varphi) & -rs(\vartheta) \\ 0 & -rs(\vartheta)s(\varphi) & rs(\vartheta)c(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s(\vartheta)c(\varphi) & rc(\vartheta)c(\varphi) & -rs(\vartheta)s(\varphi) \\ 0 & s(\vartheta)s(\varphi) & rc(\vartheta)s(\varphi) & rs(\vartheta)c(\varphi) \\ 0 & c(\vartheta) & -rs(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s(\vartheta)c(\varphi) & -s(\vartheta)s(\varphi) & -c(\vartheta) \\ 0 & -rc(\vartheta)c(\varphi) & -rc(\vartheta)s(\varphi) & rs(\vartheta) \\ 0 & rs(\vartheta)s(\varphi) & -rs(\vartheta)c(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s(\vartheta)c(\varphi) & rc(\vartheta)c(\varphi) & -rs(\vartheta)s(\varphi) \\ 0 & s(\vartheta)s(\varphi) & rc(\vartheta)s(\varphi) & rs(\vartheta)c(\varphi) \\ 0 & c(\vartheta) & -rs(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\eta &= \mathrm{d}x^0 \otimes \mathrm{d}x^0 - \mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 - \mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^3 \otimes \mathrm{d}x^3 \\
&= \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 \mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta - r^2 \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

1.1.4 La métrique diagonale du texte

On rappelle ce qui a été défini.

- Une variété différentielle M de dimension 4.
- En chaque point p de M, on se donne une carte de M du type :
$$(U, \varphi := (x^0, x^1, x^2, x^3))$$
sur laquelle on fera les calculs
- $\mathscr{C} := (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ la base de champs de vecteurs sur U associée aux coordonnées $x := (x^0, x^1, x^2, x^3)$ *i.e.* on a :
$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}.$$
- $\mathscr{C}^* := (\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^0)$ la base duale associée à $\mathscr{C}$ de champs de covecteurs *i.e.* on a :
$$\mathrm{d}x^i\,(\partial_j) = \delta^i_j.$$

On omet les "p" dans les notations ainsi que le "U".

On se donne sur M une métrique g d'espace-temps (de signature $(1,3)$) qui soit en coordonnées locales de la forme :

$$\begin{aligned} g &= \eta_k \left(e^{u_k(x)}\mathrm{d}x^k\right) \otimes \left(e^{u_k(x)}\mathrm{d}x^k\right) \\ &= \eta_k e^{2u_k(x)}\mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^k \\ &= e^{2u_0(x)}\mathrm{d}x^0 \otimes \mathrm{d}x^0 - e^{2u_1(x)}\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 - e^{2u_2(x)}\mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^2 - e^{2u_3(x)}\mathrm{d}x^3 \otimes \mathrm{d}x^3 \end{aligned}$$

avec

$$\eta_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k := 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad , \quad \eta_{ij} := \delta^i_j \eta_i \quad , \quad \delta^i_j := \delta^{ij} := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note aussi :

- les composantes de g par :

$$\mathrm{g}_{ij} := g\left(\partial_i, \partial_j\right) = \eta_{ij} e^{2u_i(x)}$$

- la métrique :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_k \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^k \\ &= \mathrm{d}x^0 \otimes \mathrm{d}x^0 - \mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 - \mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^3 \otimes \mathrm{d}x^3 \end{aligned}$$

  et donc on a :

$$\eta_{ij} := \eta\left(\partial_i, \partial_j\right).$$

- les dérivées :

$$u_{i,k} := \partial_k u_i := \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \quad , \quad u_{i,kl} := \partial^2_{kl} u_i := \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^l}.$$

On omettra par la suite la variable "x" dans les fonctions u_i.

Exemple 1.1.4.1: Exemple de la métrique h

Dans tout ce texte, on prendra comme exemple la métrique diagonale h suivante :

$$\begin{aligned} h &= e^{2u(t,r)}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - e^{2v(t,r)}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 e^{2b(t)}\left(\mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi\right) \\ &= e^{2u(t,r)}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - e^{2v(t,r)}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 e^{2b(t)} h_\Omega \end{aligned}$$

avec :

$$h_\Omega := \mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi$$

la métrique sur la 2-sphère unité en coordonnées sphériques (voir le point (2) de l'exemple **??**). On est donc dans le cas où :

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) := (t, r, \vartheta, \phi).$$

et

$$\begin{aligned} u_0(t,r) &:= u(t,r) \\ u_1(t,r) &:= v(t,r) \\ u_2(t,r) &:= b(t) + \ln(r) \\ u_3(t,r,\vartheta) &:= b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta) \end{aligned}$$

On notera pour les indices ou exposants :

$$(0,1,2,3) \equiv (t, r, \vartheta, \phi)$$

On notera les dérivées par rapport à t avec un point (par exemple $\dot{u}$ et $\ddot{u}$) et les dérivées par rapport à r avec une apostrophe (par exemple u' et u'').
Cette métrique nous permettra de traiter deux cas usuels dans le prochain chapitre.

(a) Les **métriques intérieure et extérieure de Schwarzschild (SCHW)**, et la **métrique de Reissner–Nordström (RN)** qui correspondent au cas où :

$$b = 0.$$

(b) La **métrique de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)** qui correspond au cas où :

$$\dot{u} = u' = 0 \quad , \quad v(t,r) = v(r) + b(t).$$

1.1.5 Orthonormalisation

La base $\mathscr{C}$ n'est pas orthonormale pour g en générale *i.e.* on a en générale :

$$g(\partial_i, \partial_j) = \mathrm{g}_{ij} \neq \eta_{ij}.$$

On va construire une base orthonormale $\mathscr{C}_\perp := (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ associée à $\mathscr{C}$. Notons :

$$\theta_k := f^k \partial_k.$$

On veut que :

$$\eta_k = g\left(\theta_k, \theta_k\right) = g\left(f^k\partial_k, f^k\partial_k\right) = \left(f^k\right)^2 g\left(\partial_k, \partial_k\right) = \left(f^k\right)^2 \mathrm{g}_{kk}$$

i.e. on a donc :

$$f^k = \sqrt{\frac{\eta_k}{\mathrm{g}_{kk}}} = \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{g}_{kk}|}} = e^{-u_k}$$

Ainsi on a :

$$\theta_k = f^k \partial_k = \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{g}_{kk}|}} \partial_k = e^{-u_k} \partial_k \tag{1.1.5.1}$$

On note $\mathscr{C}_\perp^* := (\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3)$ la base duale associée à $\mathscr{C}_\perp$ avec :

$$\theta^k := f_k \mathrm{d}x^k.$$

On a donc :

$$1 = \theta^k(\theta_k) = f^k \mathrm{d}x^k\left(f_k \partial_k\right) = f^k f_k \mathrm{d}x^k\left(\partial_k\right) = f^k f_k$$

i.e. on a :

$$f_k = \left(f^k\right)^{-1} = e^{u_k}.$$

Ainsi on a :

$$\theta^k = f_k \mathrm{d}x^k = e^{u_k} \mathrm{d}x^k. \tag{1.1.5.2}$$

On a donc :

$$g = \theta^0 \otimes \theta^0 - \theta^1 \otimes \theta^1 - \theta^2 \otimes \theta^2 - \theta^3 \otimes \theta^3 = \eta_k \theta^k \otimes \theta^k = \eta_{ij} \theta^i \otimes \theta^j.$$

Exemple 1.1.5.1: Suite 1 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1) avec :

$$u_0(t,r) := u(t,r) \qquad u_1(t,r) := v(t,r)$$
$$u_2(t,r) := b(t) + \ln(r) \qquad u_3(t,r,\vartheta) := b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta)$$

On note :

$$\mathscr{B}_\perp := (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) := (\theta_t, \theta_r, \theta_\vartheta, \theta_\phi)$$

la base orthonormale associée à :

$$\mathscr{B} := (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) := (\partial_t, \partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\phi)$$

et

$$\mathscr{B}_\perp^* := (\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3) := (\theta^t, \theta^r, \theta^\vartheta, \theta^\phi)$$

la base duale associée à $\mathscr{B}_\perp$. On a donc :

$$\theta_t = \theta_0 = e^{-u}\partial_t \qquad \theta_r = \theta_1 = e^{-v}\partial_t$$
$$\theta_\vartheta = \theta_2 = r^{-1}e^{-b}\partial_\vartheta \qquad \theta_\phi = \theta_3 = r^{-1}\sin^{-1}\vartheta e^{-b}\partial_\phi$$
$$\theta^t = \theta^0 = e^u \mathrm{d}t \qquad \theta^r = \theta^1 = e^v \mathrm{d}r$$
$$\theta^\vartheta = \theta^2 = re^a \mathrm{d}\vartheta \qquad \theta^\phi = \theta^3 = r\sin\vartheta e^a \mathrm{d}\phi$$

Ainsi on a :

$$h = \theta^t \otimes \theta^t - \theta^r \otimes \theta^r - \theta^\vartheta \otimes \theta^\vartheta - \theta^\phi \otimes \theta^\phi.$$

1.1.6 Les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$

On note pour toute la suite :

- $\mathscr{E} := (e_0, e_1, e_2, e_3)$ une base de champs de vecteurs sur M ;
- $\mathscr{E}^* := (e^0, e^1, e^2, e^3)$ la base duale associée à $\mathscr{E}$ *i.e.* on a :

$$e^i(e_j) = \delta^i_j.$$

Les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$ nous serviront à traiter le cas général. Posons :

$$\mathbf{g}_{ij} := g(e_i, e_j)$$

i.e. on a :

$$g = \mathbf{g}_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Il est à noter que contrairement à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\perp$, la métrique g n'est pas diagonale dans $\mathscr{E}$ *i.e.* on peut avoir :

$$i \neq j \ \wedge \ \mathbf{g}_{ij} \neq 0.$$

1.1.7 Notations des tenseurs

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k, l). On note :

$$\mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} := \mathscr{A}\left(e^{j_1}, \ldots, e^{j_k}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_l}\right)$$
$$\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} := \mathscr{A}\left(\mathrm{d}x^{j_1}, \ldots, \mathrm{d}x^{j_k}, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_l}\right)$$
$$\mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} := \mathscr{A}\left(\theta^{j_1}, \ldots, \theta^{j_k}, \theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_l}\right)$$

On utilisera des lettres spécifiques suivant la base avec laquelle on calcule les composantes des champs tensoriels. Voici un tableau qui explique la forme de lettres utilisées :

Champs tensoriels	**Dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$**	**Dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$**	**Dans les bases $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$**
$\mathscr{R}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{T}$, ...	$\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{T}$, ...	R, G, T, ...	$\mathbb{R}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{T}$, ...

Ainsi on a les décompositions :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\ e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}\otimes e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_l}\\ \mathscr{A} &= \mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\ \partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_k}\otimes \mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{i_l}\\ \mathscr{A} &= \mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\ \theta_{j_1}\otimes\cdots\otimes\theta_{j_k}\otimes\theta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{i_l}\end{aligned}$$

Proposition 1.1.7.1: Relations entre les composantes

On a :

$$\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} = \exp\left(\sum_{n=1}^{l} u_{i_n} - \sum_{n=1}^{k} u_{j_n}\right)\mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\ \partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_k}\otimes \mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{i_l}\\ =&\mathscr{A}\\ =&\mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\ \theta_{j_1}\otimes\cdots\otimes\theta_{j_k}\otimes\theta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{i_l}\\ =&\mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\ e^{-u_{j_1}}\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{-u_{j_k}}\partial_{j_k}\otimes e^{u_{i_1}}\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{u_{i_l}}\mathrm{d}x^{i_l}\\ =&\exp\left(\sum_{n=1}^{l} u_{i_n} - \sum_{n=1}^{k} u_{j_n}\right)\mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\ \partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_k}\otimes \mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{i_l}\end{aligned}$$

Ainsi par unicité de la décomposition de $\mathscr{A}$ dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$, on a :

$$\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} = \exp\left(\sum_{n=1}^{l} u_{i_n} - \sum_{n=1}^{k} u_{j_n}\right)\mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}.$$

□

On donne dans l'exemple suivant, les principaux champs tensoriel étudié dans ce chapitre.

Exemple 1.1.7.2: Exemples usuels

(1) Le tenseur de courbure se décompose en :

$$\begin{aligned}\mathscr{R} &= \mathbf{R}^{i}{}_{jkl}\ e_i\otimes e^j\otimes e^k\otimes e^l\\ \mathscr{R} &= \mathrm{R}^{i}{}_{jkl}\ \partial_i\otimes \mathrm{d}x^j\otimes \mathrm{d}x^k\otimes \mathrm{d}x^l\\ \mathscr{R} &= \mathbb{R}^{i}{}_{jkl}\ \theta_i\otimes\theta^j\otimes\theta^k\otimes\theta^l\end{aligned}$$

Ainsi on a par la proposition précédente 1.1.7.1 :

$$\mathrm{R}^{i}{}_{jkl} = e^{-u_i+u_j+u_k+u_l}\mathbb{R}^{i}{}_{jkl}.$$

(2) Le tenseur de Riemann se décompose en :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}\mathrm{m} &= \mathbf{R}_{ijkl}\ e^i\otimes e^j\otimes e^k\otimes e^l\\ \mathscr{R}\mathrm{m} &= \mathrm{R}_{ijkl}\ \mathrm{d}x^i\otimes \mathrm{d}x^j\otimes \mathrm{d}x^k\otimes \mathrm{d}x^l\\ \mathscr{R}\mathrm{m} &= \mathbb{R}_{ijkl}\ \theta^i\otimes\theta^j\otimes\theta^k\otimes\theta^l\end{aligned}$$

Ainsi on a par la proposition précédente 1.1.7.1 :

$$\mathrm{R}_{ijkl} = e^{u_i+u_j+u_k+u_l}\mathbb{R}_{ijkl}.$$

(3) Le tenseur de Ricci se décompose en :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}\mathrm{ic} &= \mathbf{R}_{jl}\ e^j \otimes e^l \\ \mathscr{R}\mathrm{ic} &= \mathrm{R}_{jl}\ \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^l \\ \mathscr{R}\mathrm{ic} &= \mathbb{R}_{jl}\ \theta^j \otimes \theta^l\end{aligned}$$

Ainsi on a par la proposition précédente 1.1.7.1 :

$$\mathrm{R}_{jl} = e^{u_j+u_l}\mathbb{R}_{jl}.$$

(4) Le tenseur d'Einstein se décompose en :

$$\begin{aligned}\mathscr{G} &= \mathbf{G}_{jl}\ e^j \otimes e^l \\ \mathscr{G} &= \mathrm{G}_{jl}\ \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^l \\ \mathscr{G} &= \mathbb{G}_{jl}\ \theta^j \otimes \theta^l\end{aligned}$$

Ainsi on a par la proposition précédente 1.1.7.1 :

$$\mathrm{G}_{jl} = e^{u_j+u_l}\mathbb{G}_{jl}.$$

1.1.8 Descendre les exposants avec le tenseur g

Dans cette sous-section, on définit une opération qui fait baisser les indices. On rappelle que :

$$g = \mathbf{g}_{ij} e^i \otimes e^j$$

avec :

$$\mathbf{g}_{ij} := g\left(e_i, e_j\right).$$

Exemple 1.1.8.1: Un calcul simple

Soit deux champs de vecteurs $X := X^k e_k$ et $Y := Y^l e_l$. Calculons $g(X,Y)$ avec la décomposition donnée de g. On a :

$$\begin{aligned}g(X,Y) &= \mathbf{g}_{ij} e^i \otimes e^j \left(X^k e_k, Y^l e_l\right) \\ &= \mathbf{g}_{ij} e^i \left(X^k e_k\right) e^j \left(Y^l e_l\right) \\ &= \mathbf{g}_{ij} X^k Y^l e^i \left(e_k\right) e^j \left(e_l\right) \\ &= \mathbf{g}_{ij} X^k Y^l \delta^i_k \delta^j_l \\ &= \mathbf{g}_{kl} X^k Y^l\end{aligned}$$

Comme g est non dégénérée, on peut associer un isomorphisme naturel à g de TM vers T^*M.

Définition 1.1.8.2: Rabaissement du i-ème exposant

L'**isomorphisme musical plat associé à** g est l'application $\mathfrak{a}_g$ définie par :

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_g : \ TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto Y \longmapsto g(X,Y)\end{aligned}$$

On notera aussi pour tout champ de vecteurs X :

$$X^\flat := \mathfrak{a}_g(X).$$

Notation 1.1.8.3: Notations usuelles

Soit un champ de vecteurs $X := \mathbf{X}^i e_i$. Posons :

$$\mathbf{X}_i := X^\flat(e_i)$$

i.e. on a :

$$X^\flat = \mathbf{X}_i e^i.$$

Comme :

$$\mathfrak{a}_g(e_i)(e_j) = g(e_i, e_j) = \mathbf{g}_{ij}$$

on a :

$$\mathfrak{a}_g(e_i) = \mathbf{g}_{ij} e^j$$

et par linéarité, on a :

$$\begin{aligned} X^\flat &= \mathfrak{a}_g(X) \\ &= \mathfrak{a}_g(\mathbf{X}^i e_i) \\ &= \mathbf{X}^i \mathfrak{a}_g(e_i) \\ &= \mathbf{X}^i \mathbf{g}_{ij} e^j. \end{aligned}$$

Ainsi par unicité de la décomposition, on a :

$$\mathbf{X}_j = \mathbf{X}^i \mathbf{g}_{ij}.$$

Matriciellement, on a :

$$G := \mathscr{M}at_{\mathscr{C},\mathscr{C}^*}(\mathfrak{a}_g) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(g) = (\mathbf{g}_{ij})_{ij}.$$

Exemple 1.1.8.4: Exemple de $\mathfrak{a}_g$ et de g dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\perp$

(1) Dans $\mathscr{C}$, on a :

$$g_{ij} = \eta_{ij} e^{-u_j}.$$

Ainsi on a :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C},\mathscr{C}^*}(\mathfrak{a}_g) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} e^{u_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{u_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{u_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{u_3} \end{pmatrix}.$$

(2) Dans $\mathscr{C}_\perp$, on a :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}_\perp,\mathscr{C}_\perp^*}(\mathfrak{a}_g) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}_\perp}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.8.5: L'isomorphisme musical plat

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l) avec $k \geq 1$ et $n \in \{1,\dots,k\}$. Le **champ tensoriel n-rabaissé de $\mathscr{A}$** est le champ tensoriel $[\mathscr{A}]_n$ de type $(k-1, l+1)$ défini pour tous champs de covecteurs $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_{n+1},\dots,\alpha_k$ et tous champs de vecteurs $X_0,\dots,X_l$ par :

$$[\mathscr{A}]_n(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_{n+1},\dots,\alpha_k,X_0,\dots,X_l) := g(X_0, \mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\bullet,\alpha_{n+1},\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l)).$$

On a alors la relation :

$$[\mathscr{A}]_n\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_k,X_0,\ldots,X_l\right)=\mathfrak{a}_g\left(\mathscr{A}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\bullet,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_k,X_1,\ldots,X_l\right)\right)\left(X_0\right).$$

La proposition suivante montre pourquoi le mot "rabaissé" a été utilisé.

Proposition 1.1.8.6: Rabaissement du n-ème exposant

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l) avec $k\geq 1$ et $n\in\{1,\ldots,k\}$. Posons :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}&:=\mathscr{A}\left(e^{j_1},\ldots,e^{j_k},e_{i_1},\ldots,e_{i_l}\right)\\ \mathbf{A}^{j_1\cdots j_{n-1}j_{n+1}\cdots j_k}_{j_n i_1\cdots i_l}&:=[\mathscr{A}]_n\left(e^{j_1},\ldots,e^{j_{n-1}},e^{j_{n+1}},\ldots,e^{j_k},e_{j_n},e_{i_1},\ldots,e_{i_l}\right)\end{aligned}$$

Alors on a :

$$\mathbf{A}^{j_1\cdots j_{n-1}j_{n+1}\cdots j_k}_{j_n i_1\cdots i_l}=\mathbf{A}^{j_1\cdots j_{n-1}mj_{n+1}\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\mathbf{g}_{mj_n}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{j_1\cdots j_{n-1}j_{n+1}\cdots j_k}_{j_n i_1\cdots i_l}&=[\mathscr{A}]_n\left(e^{j_1},\ldots,e^{j_{n-1}},e^{j_{n+1}},\ldots,e^{j_k},e_{j_n},e_{i_1},\ldots,e_{i_l}\right)\\&=g\left(e_{j_n},\mathscr{A}\left(e^{j_1},\ldots,e^{j_{n-1}},\bullet,e^{j_{n+1}},\ldots,e^{j_k},e_{i_1},\ldots,e_{i_l}\right)\right)\\&=g\left(e_{j_n},\mathbf{A}^{j_1\cdots j_{n-1}mj_{n+1}\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}e_m\right)\\&=\mathbf{A}^{j_1\cdots j_{n-1}mj_{n+1}\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}g\left(e_{j_n},e_m\right)\\&=\mathbf{A}^{j_1\cdots j_{n-1}mj_{n+1}\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\mathbf{g}_{mj_n}\end{aligned}$$

□

Comme g est diagonale dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\perp$, on a donc le résultat suivant.

Corollaire 1.1.8.7: Rabaissement du n-ème exposant

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l). On a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{j_1\cdots j_{n-1}j_{n+1}\cdots j_k}_{j_n i_1\cdots i_l}&=\eta_{j_n}e^{2u_{j_n}}\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\\ \mathbb{A}^{j_1\cdots j_{n-1}j_{n+1}\cdots j_k}_{j_n i_1\cdots i_l}&=\eta_{j_n}\mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\end{aligned}$$

On voit donc que l'action définie fait baisser les exposants d'un champ tensoriel. On reprend les calculs sur deux exemples simples.

Exemple 1.1.8.8: Deux exemples simples

(1) Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}:=\mathbf{A}^i{}_j e_i\otimes e^j$ de type $(1,1)$. On note :

$$\mathbf{A}_{kl}:=[\mathscr{A}]_1\left(e_k,e_l\right)$$

i.e. on a :

$$[\mathscr{A}]_1=\mathbf{A}_{kl}\ e^k\otimes e^l.$$

Comme :

$$[\mathscr{A}]_1(X,Y)=g\left(X,\mathscr{A}\left(\bullet,Y\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\bullet, e_l) &= \mathbf{A}^i{}_j e^j(e_l)\, e_i \\ &= \mathbf{A}^i{}_j \delta^j_l e_i \\ &= \mathbf{A}^i{}_l\ e_i\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{kl} &= [\mathscr{A}]_1(e_k, e_l) \\ &= g(e_k, \mathscr{A}(\bullet, e_l)) \\ &= g\left(e_k, \mathbf{A}^i{}_l\ e_i\right) \\ &= \mathbf{A}^i{}_l g(e_k, e_i) \\ &= \mathbf{A}^i{}_l \mathbf{g}_{ki}\end{aligned}$$

On a donc par exemple :

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{kl} &= \eta_{ki}\mathbb{A}^i{}_l \\ &= \eta_k \mathbb{A}^k{}_l \\ \mathrm{A}_{kl} &= \mathrm{g}_{ki}\mathrm{A}^i{}_l \\ &= \mathrm{g}_{kk}\mathrm{A}^k{}_l \\ &= \eta_k e^{2u_k}\mathrm{A}^k{}_l\end{aligned}$$

(2) Soit un champ de vecteurs $X \coloneqq \mathbf{X}^i e_i$ *i.e.* X est un champ tensoriel de type $(1,0)$. On note :

$$\mathbf{X}_k \coloneqq [X]_1(e_k)$$

i.e. on a :

$$X^\flat = [X]_1 = \mathbf{X}_k e^k$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_k &= [X]_1(e_k) \\ &= g(e_k, X) \\ &= g\left(e_k, \mathbf{X}^i e_i\right) \\ &= \mathbf{X}^i g(e_k, e_i) \\ &= \mathbf{X}^i \mathbf{g}_{ki}\end{aligned}$$

On a donc par exemple :

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_k &= \mathbb{X}^i \eta_{ki} \\ &= \eta_k \mathbb{X}^k \\ \mathrm{X}_k &= \mathrm{X}^i \mathrm{g}_{ki} \\ &= \mathrm{X}^k \mathrm{g}_{kk} \\ &= \eta_k e^{2u_k}\mathrm{X}^k\end{aligned}$$

1.1.9 Monter les indices avec le tenseur g^*

Dans cette sous-section, on définit une opération qui cette fois-ci fait monter les indices.

Définition 1.1.9.1: L'isomorphisme musical dièse

L'**isomorphisme musical dièse associé à** g est l'application inverse $\mathfrak{a}_g^{-1}$ de $\mathfrak{a}_g$ définie par :

$$\mathfrak{a}_g^{-1} : \quad T^*M \longrightarrow TM$$

On notera aussi pour tout champ de covecteurs α :

$$\alpha^\sharp := \mathfrak{a}_g^{-1}(\alpha).$$

Notation 1.1.9.2: Définition de $\mathfrak{a}_g^{-1}$ et g^*

(1) On note :

$$\mathbf{g}^{ij} := \mathfrak{a}_g^{-1}(e^i)(e^j)$$

On a donc :

$$\mathfrak{a}_g^{-1}(e^i) = \mathbf{g}^{ij} e_j.$$

Comme :

$$\mathfrak{a}_g^{-1} \circ \mathfrak{a}_g = \mathrm{Id}_{TM} \quad , \quad \mathfrak{a}_g \circ \mathfrak{a}_g^{-1} = \mathrm{Id}_{T^*M}$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{TM}(e_k) &= e_k \\ &= \delta_k^j e_j \\ \mathfrak{a}_g^{-1}\left(\mathfrak{a}_g(e_k)\right) &= \mathfrak{a}_g^{-1}\left(\mathbf{g}_{ki} e^i\right) \\ &= \mathbf{g}_{ki} \mathfrak{a}_g^{-1}\left(e^i\right) \\ &= \mathbf{g}_{ki} \mathbf{g}^{ij} e_j \end{aligned}$$

D'où par unicité de la décomposition, on a :

$$\mathbf{g}_{ki} \mathbf{g}^{ij} = \delta_k^j.$$

(2) Soit un champ de covecteurs $\alpha := \boldsymbol{\alpha}_i e^i$. Posons :

$$\boldsymbol{\alpha}^j := \alpha^\sharp(e_j)$$

i.e. on a :

$$\alpha^\sharp = \boldsymbol{\alpha}^j e_j.$$

Comme :

$$\mathfrak{a}_g^{-1}(e^i) = \mathbf{g}^{ij} e_j$$

on a par linéarité :

$$\begin{aligned} \alpha^\sharp &= \mathfrak{a}_g^{-1}(\alpha) \\ &= \mathfrak{a}_g^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_i e^i) \\ &= \boldsymbol{\alpha}_i \mathfrak{a}_g^{-1}(e^i) \\ &= \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{g}^{ij} e_j. \end{aligned}$$

Ainsi par unicité de la décomposition, on a :

$$\boldsymbol{\alpha}^j = \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{g}^{ij}.$$

(3) On associe à $\mathfrak{a}_g^{-1}$ le tenseur g^* de type $(2,0)$ défini pour tous champs de covecteurs $\alpha := \boldsymbol{\alpha}_i e^i$ et $\beta := \boldsymbol{\beta}_j e^j$ par :

$$g^*(\alpha,\beta) := \beta(\mathfrak{a}_g^{-1}(\alpha)).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} g^*(e^i,e^j) &= e^j(\mathfrak{a}_g^{-1}(e^i)) \\ &= e^j(\mathbf{g}^{ik} e_k) \\ &= \mathbf{g}^{ik}\delta_k^j \\ &= \mathbf{g}^{ij} \end{aligned}$$

et par bilinéarité :

$$\begin{aligned} g^*(\alpha,\beta) &= g^*(\boldsymbol{\alpha}_i e^i, \boldsymbol{\beta}_j e^j) \\ &= g^*(e^i,e^j)\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_j \\ &= \mathbf{g}^{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_j \\ &= \boldsymbol{\alpha}^j\boldsymbol{\beta}_j \\ &= \boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}^i \end{aligned}$$

avec :

$$\boldsymbol{\alpha}^i e_i := \alpha^\sharp \quad , \quad \boldsymbol{\beta}^j e_j := \beta^\sharp.$$

Et donc on a :

$$g^* = \mathbf{g}^{ij} e_i \otimes e_j$$

Matriciellement, on a :

$$G^{-1} = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}^*,\mathscr{C}}(\mathfrak{a}_g^{-1}) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}^*}(g^*) = \left(\mathbf{g}^{ij}\right)_{ij}.$$

Exemple 1.1.9.3: Exemple de $\mathfrak{a}_g^{-1}$ et de g^* dans les bases $\mathscr{C}^*$ et $\mathscr{C}_\perp^*$

(1) Dans $\mathscr{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_{ki}\mathrm{g}^{ij} &= \delta_k^j \\ \mathrm{g}_{ki} &= \eta_{ik} e^{u_k} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\mathrm{g}^{ij} = \eta_{ij} e^{-u_k}.$$

Ainsi on a :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}^*,\mathscr{C}}(\mathfrak{a}_g^{-1}) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}^*}(g^*) = \begin{pmatrix} e^{-u_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-u_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-u_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-u_3} \end{pmatrix}.$$

(2) Dans $\mathscr{C}_\perp^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{g}_{ki}\mathbb{g}^{ij} &= \delta_k^j \\ \mathbb{g}_{ki} &= \eta_{ki} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\mathbb{g}^{ij} = \eta_{ij}.$$

Ainsi on a :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}_\perp^*,\mathscr{C}_\perp}(\mathfrak{a}_g^{-1}) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}_\perp^*}(g^*) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}_\perp}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.9.4: Elévation du n-ème indice

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l) avec $l \geq 1$ et $n \in \{1,\ldots,l\}$. Le **champ tensoriel n-élevé de** $\mathscr{A}$ est le champ tensoriel $[\mathscr{A}]^n$ de type $(k+1,l-1)$ défini pour tous champs de covecteurs $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ et tous champs de vecteurs $X_1,\ldots,X_{n-1},X_{n+1},\ldots,X_l$ par :

$$[\mathscr{A}]^n(\alpha_0,\ldots,\alpha_k,X_1,\ldots,X_{n-1},X_{n+1},\ldots,X_l) := g^*(\alpha_0,\mathscr{A}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,X_1\ldots,X_{n-1},\bullet,X_{n+1},\ldots,X_l)).$$

Les deux notions sont alors reliées par :

$$[\mathscr{A}]^n(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,X_1,\ldots,X_{n-1},X_{n+1},\ldots,X_l) = \mathfrak{a}_g^{-1}(\mathscr{A}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,X_1\ldots,X_{n-1},\bullet,X_{n+1},\ldots,X_l))(\alpha_0).$$

La proposition suivante montre pourquoi le mot "élevé" a été utilisé.

Proposition 1.1.9.5: Élévation du n-ème indice

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l) et $n \in \{1,\ldots,l\}$. Posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} &:= \mathscr{A}\left(e^{j_1},\ldots,e^{j_k},e_{i_1},\ldots,e_{i_l}\right) \\ \mathbf{A}^{i_n j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}i_{n+1}\cdots i_l} &:= [\mathscr{A}]^n\left(e^{i_n},e^{j_1},\ldots,e^{j_k},e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}},e_{i_{n+1}},\ldots,e_{i_l}\right) \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\mathbf{A}^{i_n j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}i_{n+1}\cdots i_l} = \mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}m i_{n+1}\cdots i_l}\mathbf{g}^{m i_n}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{i_n j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}i_{n+1}\cdots i_l} &= [\mathscr{A}]^n\left(e^{i_n},e^{j_1},\ldots,e^{j_k},e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}},e_{i_{n+1}},\ldots,e_{i_l}\right) \\ &= g^*\left(e^{i_n},\mathscr{A}\left(e^{j_1},\ldots,e^{j_k},e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}},\bullet,e_{i_{n+1}},\ldots,e_{i_l}\right)\right) \\ &= g^*\left(e^{i_n},\mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}m i_{n+1}\cdots i_l}e^m\right) \\ &= \mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}m i_{n+1}\cdots i_l}g^*\left(e^{i_n},e^m\right) \\ &= \mathbf{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}m i_{n+1}\cdots i_l}\mathbf{g}^{m i_n} \end{aligned}$$

□

Comme g^* est diagonale dans $\mathscr{C}^*$ et $\mathscr{C}_\perp^*$, on a donc le résultat suivant.

Corollaire 1.1.9.6: Elévation du i-ème indice

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l) avec $l \geq 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{i_n j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}i_{n+1}\cdots i_l} &= \mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\eta_{i_n}e^{-2u_{i_n}} \\ \mathbb{A}^{i_n j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{n-1}i_{n+1}\cdots i_l} &= \mathbb{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\eta_{i_n}e^{-2u_{i_n}} \end{aligned}$$

On voit donc que l'action définie fait élever les indices d'un champ tensoriel. On reprend les calculs sur deux exemples simples.

Exemple 1.1.9.7: Deux exemples simples

(1) Soit $\mathscr{A} := \mathbf{A}^i{}_j e_i \otimes e^j$ un champ tensoriel de type $(1,1)$. On note :

$$\mathbf{A}^{kl} := [\mathscr{A}]^1\left(e^k, e^l\right).$$

Comme :

$$\begin{aligned}
[\mathscr{A}]^1(\alpha,\beta) &= g^*(\alpha, \mathscr{A}(\beta,\bullet)) \\
\mathscr{A}\left(e^l,\bullet\right) &= \mathbf{A}^i{}_j e_i\left(e^l\right) e^j \\
&= \mathbf{A}^i{}_j \delta^l_i e^j \\
&= \mathbf{A}^l{}_j\ e^j
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{kl} &= [\mathscr{A}]^1\left(e^k, e^l\right) \\
&= g^*\left(e^k, \mathscr{A}\left(e^l,\bullet\right)\right) \\
&= g^*\left(e^k, \mathbf{A}^l{}_j\ e^j\right) \\
&= \mathbf{A}^l{}_j g^*\left(e^k, e^j\right) \\
&= \mathbf{A}^l{}_j \mathbf{g}^{kj}
\end{aligned}$$

On a donc par exemple :

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^{kl} &= \eta^{kj}\mathbb{A}^l{}_j \\
&= \eta_k \mathbb{A}^l{}_k \\
\mathrm{A}^{kl} &= \mathrm{g}^{kj}\mathrm{A}^l{}_j \\
&= \eta_k e^{-2u_k}\mathrm{A}^l{}_k
\end{aligned}$$

(2) Soit un champ de covecteurs $\alpha := \boldsymbol{\alpha}_i e^i$ *i.e.* α est un tenseur de type $(0,1)$. On note :

$$\boldsymbol{\alpha}^k := [\alpha]^1\left(e^k\right)$$

i.e. on a :

$$\alpha^\sharp = [\alpha]_1 = \boldsymbol{\alpha}^k e_k$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^k &= [\alpha]^1\left(e^k\right) \\
&= g^*\left(e^k, \alpha\right) \\
&= g^*\left(e^k, \boldsymbol{\alpha}_i e^i\right) \\
&= \boldsymbol{\alpha}_i g^*\left(e^k, e^i\right) \\
&= \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{g}^{ki}
\end{aligned}$$

On a donc par exemple :

$$\begin{aligned}
\alpha^k &= \alpha_i \eta^{ki} \\
&= \eta^{kk}\alpha_k \\
\alpha^k &= \alpha_i \mathrm{g}^{ki} \\
&= \alpha_k \mathrm{g}^{kk} \\
&= \eta^{kk} e^{-2u_k}\alpha^k
\end{aligned}$$

1.2 Connexions associées à la courbure

1.2.1 Dérivée et crochet de Lie

On commence par rappeler la définition de la dérivée de Lie et du crochet de Lie suivant un champ vectoriel. Ils sont utiles pour définir la connexion de Levi-Civita. On se limite à la dérivée de champs scalaire. Par la définition du vecteur tangent (voir 1.1.1.1), on a défini l'objet "$X(f)$", que l'on peut voir comme une action de X sur f, c'est ce que l'on appelle aussi la dérivée de Lie de f suivant X.

Définition 1.2.1.1: Dérivée de Lie

Soit un champ de vecteurs $X \coloneqq X^j\partial_j$ et une champ scalaire f. La **dérivée de Lie suivant** X est définie par :

$$X(f) \coloneqq X^i\partial_i(f).$$

Remarque 1.2.1.2: Remarque sur la dérivée de Lie

On peut étendre la définition de la dérivée de Lie suivant X à ΩM (l'algèbre des formes différentielles sur M) comme l'unique application linéaire :

$$\mathscr{L}_X : \Omega M \to \Omega M$$

telle que :

(i) pour tout champ scalaire f, on ait :

$$\mathscr{L}_X(f) \coloneqq X(f) \coloneqq \mathrm{d}f\,(X)\,;$$

(ii) $\mathscr{L}_X$ soit une dérivation de l'algèbre ΩM, *i.e.* :

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega M,\ \mathscr{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathscr{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathscr{L}_X(\beta);$$

(iii) les applications $\mathscr{L}_X$ et d commutent.

On ne se servira dans la suite que de la définition sur les champs scalaires.

Lemme 1.2.1.3: Autre expression de la dérivée de Lie

Soit un champ de vecteurs X. On a

$$X(f) = \mathrm{d}f\,(X)\,.$$

Démonstration. Comme :

$$\mathrm{d}f = \partial_i(f)\mathrm{d}x^i$$

on a directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f\,(X) &= \mathrm{d}f\left(X^j\partial_j\right)\\
&= X^j\mathrm{d}f\,(\partial_j)\\
&= X^j\partial_i(f)\mathrm{d}x^i\,(\partial_j)\\
&= X^j\partial_i(f)\delta^i_j\\
&= X^i\partial_i(f)\\
&= X(f)
\end{aligned}$$

□

On en déduit alors la définition du crochet de Lie.

Définition 1.2.1.4: Crochet de Lie

Soit deux champs de vecteurs X et Y. Le **crochet de Lie de X et Y** est l'application $[X,Y]$ qui à tout champs scalaire f associe le champs scalaire :

$$[X,Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

On a en particulier par le théorème de Schwartz :

$$\begin{aligned}[\partial_i,\partial_j](f) &= \partial_i(\partial_j(f)) - \partial_j(\partial_i(f)) \\ &= \partial_{i,j}(f) - \partial_{j,i}(f) \\ &= 0\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$[\partial_i,\partial_j] = 0. \tag{1.2.1.1}$$

Lemme 1.2.1.5: Descriptions locales

Soit deux champs de vecteurs X et Y et un champ scalaire f.

(i) On a :

$$Y(X(f)) = Y^j\partial_j X^i \partial_i f + Y^j X^i \partial^2_{ji} f$$

(ii) On a :

$$[X,Y](f) = \left(X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i\right)\partial_i f.$$

Démonstration. (i) Comme :

$$X(f) = X^i\partial_i f$$

on a :

$$\begin{aligned}Y(X(f)) &= Y^j\partial_j\left(X^i\partial_i f\right) \\ &= Y^j\partial_j X^i\partial_i f + Y^j X^i\partial^2_{ji} f\end{aligned}$$

(ii) Comme :

$$\partial^2_{ji} f - \partial^2_{ij} f = 0$$

on a :

$$\begin{aligned}[X,Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= X^j\partial_j Y^i\partial_i f + X^j Y^i\partial^2_{ji} f - Y^j\partial_j X^i\partial_i f - Y^j X^i\partial^2_{ji} f \\ &= \left(X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i\right)\partial_i f + X^j Y^i\left(\partial^2_{ji} f - \partial^2_{ij} f\right) \\ &= \left(X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i\right)\partial_i f\end{aligned}$$

□

On finit avec l'identité de Jacobi.

Proposition 1.2.1.6: Identité de Jacobi

Soit trois champs de vecteurs X, Y et Z. On a :

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]](f) &= X((YZ-ZY)(f)) - (YZ-ZY)(X(f)) \\ &= X(Y(Z(f))) - X(Z(Y(f))) - Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f)))\end{aligned}$$

En supprimant les parenthèses et les f, on a en permutant les variables X, Y et Z :

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= XYZ - XZY - YZX + ZYX \\ [Y,[Z,X]] &= YZX - YXZ - ZXY + XZY \\ [Z,[X,Y]] &= ZXY - ZYX - XYZ + YXZ\end{aligned}$$

Ainsi en sommant les trois équations, on a :

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

□

1.2.2 Connexion de Levi-Civita

On commence par une définition simplifiée de connexion qui met en avant les deux propriétés essentielles qui nous serviront dans les calculs.

Définition 1.2.2.1: Connexion de Koszul

Une **connexion** ∇ est une application linéaire qui à tous champs de vecteurs X et Y associe un champ de vecteurs $\nabla_X Y$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) (**Linéarité en** X) Pour tout champ scalaire f et pour tous champs de vecteurs X et Y, on a :

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y.$$

(ii) (**Règle de Leibniz**) Pour tout champ scalaire f et pour tous champs de vecteurs X et Y, on a :

$$\nabla_X(fY) = \mathrm{d}f(X)Y + f\nabla_X Y = \mathrm{d}f(X)Y + \nabla_{fX} Y.$$

On définit alors la connexion de Levi-Civita comme l'unique connexion sans torsion et g-parallèle.

Proposition 1.2.2.2: La connexion associée à g

La connexion de Levi-Civita est l'unique connexion ∇ sur TM telle que :

(i) ∇ est **sans torsion** *i.e.* pour tous champs de vecteurs X et Y on a :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

(ii) g est **parallèle** *i.e.* pour tous champs de vecteurs X, Y et Z, on a :

$$Z\left(g(X,Y)\right) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Démonstration. On fait un raisonnement par analyse synthèse.

- **Analyse-Unicité**. Soit deux champs de vecteurs X et Y sur M. Comme la métrique g est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, il suffit pour calculer $\nabla_X Y$ d'avoir une expression de $2g(\nabla_X Y, Z)$ pour tout champ de vecteurs Z. Par bilinéarité et symétrie de g, on a pour tout champ de vecteurs

Z :

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) =& g(2\nabla_X Y, Z)\\ =& g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X)\\ &+ g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X)\\ =& g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)\\ &+ g([X,Y], Z) + g([Z,X], Y) - g([Y,Z], X)\\ =& X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)\end{aligned}$$

Ainsi la valeur $\nabla_X Y$ est uniquement déterminée.

- **Synthèse-Existence**. Pour tous champs de vecteurs X et Y, on définit par $\nabla_X Y$ comme l'unique champ de vecteurs sur M tel que pour tout champ de vecteur Z, on ait :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X).$$

Montrons que ∇ est bien une connexion sur M. On a pour tout champ de vecteurs Z :

(i) On a pour tout champ de vecteurs Z et tout champ scalaire $f \in \mathscr{C}^p(X, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X(fY), Z) =& X(g(fY,Z)) + (fY)(g(Z,X)) - Z(g(X,fY))\\ &+ g([X,fY],Z) + g([Z,X],fY) - g([fY,Z],X)\\ =& \mathrm{d}f(X).g(Y,Z) - \mathrm{d}f(Z).g(X,Y) + \mathrm{d}f(X).g(Y,Z)\\ &+ \mathrm{d}f(Z).g(X,Y) + f.2g(\nabla_X Y, Z)\\ =& 2g(\mathrm{d}f(X).Y + f\nabla_X Y, Z)\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{fX} Y, Z) =& (fX)(g(Y,Z)) + Y(g(Z,fX)) - Z(g(fX,Y))\\ &+ g([fX,Y],Z) + g([Z,fX],Y) - g([Y,Z],fX)\\ =& \mathrm{d}f(Y).g(Z,X) - \mathrm{d}f(Z).g(X,Y) - \mathrm{d}f(Y).g(X,Z)\\ &+ \mathrm{d}f(Z).g(X,Y) + f.2g(\nabla_X Y, Z)\\ =& 2g(f\nabla_X Y, Z).\end{aligned}$$

D'où le résultat par dégénérescence de g.

(ii) Montrons que ∇ est sans torsion. On a pour tout champ de vecteurs Z :

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) =& X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z)\\ &+ g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) - Y(g(X,Z)) - X(g(Z,Y))\\ &+ Z(g(Y,X)) - g([Y,X],Z) - g([Z,Y],X) + g([X,Z],Y)\\ =& 2g([X,Y],Z).\end{aligned}$$

D'où le résultat par dégénérescence de g.

(iii) Montrons que g est parallèle pour ∇. On a pour tout champ de vecteurs Z :

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(Y, \nabla_X Z) =& X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z)\\ &+ g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) + X(g(Z,Y)) + Z(g(Y,X))\\ &- Y(g(X,Z)) + g([X,Z],Y) + g([Y,X],Z) - g([Z,Y],X)\\ =& 2X(g(Y,Z)).\end{aligned}$$

D'où le résultat par dégénérescence de g.

Ainsi ∇ est l'unique connexion de Koszul vérifiant le théorème. □

On a donc montrer que ∇ vérifie :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X\left(g(Y,Z)\right) + Y\left(g(Z,X)\right) - Z\left(g(X,Y)\right) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X).$$

On étend la définition de la connexion à des champs tensoriels quelconques. Pour cela on définit l'action de ∇ sur les 1-formes et vis à vis des deux opérations + et $\otimes$.

Définition 1.2.2.3: Connexion sur les tenseurs

Soit un champ scalaire f, deux champs tensoriels A et B, deux champs de vecteurs X et Y et un champ de covecteurs α.

(i) On note :
$$\nabla_X f \coloneqq X\left(f\right).$$

(ii) On note :
$$\left(\nabla_X \alpha\right)\left(Y\right) \coloneqq X\left(\alpha(Y)\right) - \alpha\left(\nabla_X Y\right).$$

(iii) On note :
$$\nabla_X\left(A \otimes B\right) \coloneqq \left(\nabla_X A\right) \otimes B + A \otimes \left(\nabla_X B\right).$$

(iv) Supposons que A et B soit de même type. On note :
$$\nabla_X\left(A + B\right) \coloneqq \nabla_X A + \nabla_X B.$$

On a alors le résultat suivant qui nous donne une formule explicite de l'action de ∇ sur les champs tensoriels.

Proposition 1.2.2.4: Formule de la connexion sur les tenseurs

Soit un champ tensoriel A de type (k,l). Pour tous champs de covecteurs $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ et tous champs de vecteurs $X_1,\dots,X_l,Y$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla_Y A\right)\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\\
=&Y\left(A\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\right)\\
&- A\left(\nabla_Y\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right) - \dots - A\left(\alpha_1,\dots,\nabla_Y\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\\
&- A\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\nabla_Y X_1,\dots,X_l\right) - \dots - A\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,\nabla_Y X_l\right)
\end{aligned}$$

Démonstration. On fixe Y un champ de vecteurs. On démontre le résultat par récurrence double sur $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Notons $\mathscr{Q}(k,l)$ la proposition.

(i) **Cas $\mathscr{Q}(0,0)$ vraie**. Le résultat suit directement de la définition de ∇ sur les champs de vecteurs (voir le point (i) de la définition 1.2.2.3).

(ii) **Cas $\mathscr{Q}(0,l)$ vraie $\Rightarrow \mathscr{Q}(0,l+1)$ vraie**. Soit $l \in \mathbb{N}$ et A un champ tensoriel de type $(0,l+1)$. Supposons que $\mathscr{Q}(k,l)$ soit vraie. Alors par linéarité de ∇ (voir le point (iv) de la définition 1.2.2.3), on peut supposer que A ne contient qu'un seul terme du type :
$$A \coloneqq \mathbf{A} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_{l+1}}.$$
Posons :
$$B \coloneqq \mathbf{A} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_l}.$$
Donc on a :
$$A = B \otimes e^{i_{l+1}}.$$

On a alors par le point (iii) de la définition 1.2.2.3 :

$$\begin{aligned}\nabla_Y A &= \nabla_Y \left(B \otimes e^{i_{l+1}}\right)\\ &= (\nabla_Y B) \otimes e^{i_{l+1}} + B \otimes \left(\nabla_Y e^{i_{l+1}}\right)\end{aligned}$$

On a par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}Y\left(A\left(X_1,\dots,X_{l+1}\right)\right) &= Y\left(B\left(X_1,\dots,X_l\right) e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right)\right)\\ &= Y\left(B\left(X_1,\dots,X_l\right)\right) e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right) + B\left(X_1,\dots,X_l\right) Y\left(e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi on a par $\mathscr{Q}(0,l)$ et par le point (iii) de la définition 1.2.2.3 :

$$\begin{aligned}&(\nabla_Y A)\left(X_1,\dots,X_{l+1}\right)\\ &= (\nabla_Y B) \otimes e^{i_{l+1}}\left(X_1,\dots,X_{l+1}\right) + B \otimes \left(\nabla_Y e^{i_{l+1}}\right)\left(X_1,\dots,X_{l+1}\right)\\ &= (\nabla_Y B)\left(X_1,\dots,X_l\right) e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right) + B\left(X_1,\dots,X_l\right)\left(\nabla_Y e^{i_{l+1}}\right)\left(X_{l+1}\right)\\ &= Y\left(B\left(X_1,\dots,X_l\right)\right) e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right) - B\left(\nabla_Y X_1,\dots,X_l\right) e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right) - \cdots - B\left(X_1,\dots,\nabla_Y X_l\right) e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right)\\ &\quad + B\left(X_1,\dots,X_l\right)\left(Y\left(e^{i_{l+1}}\left(X_{l+1}\right)\right) - e^{i_{l+1}}\left(\nabla_Y X_{l+1}\right)\right)\\ &= Y\left(A\left(X_1,\dots,X_{l+1}\right)\right) - A\left(\nabla_Y X_1,\dots,X_{l+1}\right) - \cdots - A\left(X_1,\dots,\nabla_Y X_{l+1}\right)\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{Q}(0,l+1)$ est vraie.

(iii) **Cas** $\mathscr{Q}(k,l)$ **vraie** $\Rightarrow$ $\mathscr{Q}(k+1,l)$ **vraie**. Soit $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ et un champ tensoriel A de type (k,l). Supposons que $\mathscr{Q}(k,l)$ soit vraie. Alors par linéarité de ∇ (voir le point (iv) de la définition 1.2.2.3), on peut supposer que A ne contient qu'un seul terme du type :

$$A := \mathbf{A} e_{j_0} \otimes \cdots \otimes e^{j_k} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_l}.$$

Posons :

$$B := \mathbf{A} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_l}.$$

Donc on a :

$$A = e_{j_0} \otimes B.$$

On a alors par le point (iii) de la définition 1.2.2.3 :

$$\begin{aligned}\nabla_Y A &= \nabla_Y \left(e_{j_0} \otimes B\right)\\ &= \left(\nabla_Y e_{j_0}\right) \otimes B + e_{j_0} \otimes (\nabla_Y B)\end{aligned}$$

On a par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}&Y\left(A\left(\alpha_0,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\right)\\ &= Y\left(e_{j_0}\left(\alpha_0\right) B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\right)\\ &= Y\left(e_{j_0}\left(\alpha_0\right)\right) B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right) + Y\left(B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\right) e_{j_0}\left(\alpha_0\right).\end{aligned}$$

Ainsi on a par $\mathscr{Q}(k,l)$ et par le point (iii) de la définition 1.2.2.3 :

$$\begin{aligned}&(\nabla_Y A)\left(\alpha_0,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\\ &= \left(\nabla_Y e_{j_0}\right) \otimes B\left(\alpha_0,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right) + e_{j_0} \otimes (\nabla_Y B)\left(\alpha_0,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\\ &= \left(\nabla_Y e_{j_0}\right)\left(\alpha_0\right) B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right) + e_{j_0}\left(\alpha_0\right)(\nabla_Y B)\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\\ &= Y\left(e_{j_0}\left(\alpha_0\right)\right) B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right) + e_{j_0}\left(\alpha_0\right)\left[Y\left(B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\right)\right.\\ &\quad - B\left(\nabla_Y \alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right) - \cdots - B\left(\alpha_1,\dots,\nabla_Y \alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\\ &\quad \left. - B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\nabla_Y X_1,\dots,X_l\right) - \cdots - B\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,\nabla_Y X_l\right)\right]\\ &= Y\left(A\left(\alpha_0,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\right)\\ &\quad - A\left(\nabla_Y \alpha_0,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,X_l\right) - \cdots - A\left(\alpha_0,\dots,\nabla_Y \alpha_k,X_1,\dots,X_l\right)\\ &\quad - A\left(\alpha_0,\dots,\alpha_k,\nabla_Y X_1,\dots,X_l\right) - \cdots - A\left(\alpha_0,\dots,\alpha_k,X_1,\dots,\nabla_Y X_l\right)\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{Q}(k+1,l)$ est vraie.

(iv) Par le principe de récurrence double, $\mathscr{Q}(k,l)$ est vraie pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

□

Notation 1.2.2.5: Notations avec les composantes

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l). On utilisera une notation en composante pour l'action de ∇ sur $\mathscr{A}$.

(1) Supposons que la description locale de $\mathscr{A}$ soit :

$$\mathscr{A} = \mathbf{A}^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_l}\ e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_l}.$$

On note alors :

$$\nabla_m \mathbf{A}^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_l} := \nabla_{e_m} \mathscr{A}\left(e^{j_1}, \ldots, e^{j_k}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_l}\right).$$

(2) Supposons que la description locale de $\mathscr{A}$ soit :

$$\mathscr{A} = \mathrm{A}^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_l}\ \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_k} \otimes \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_l}.$$

On note alors :

$$\nabla_m \mathrm{A}^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_l} := \nabla_{\partial_m} \mathscr{A}\left(\mathrm{d}x^{j_1}, \ldots, \mathrm{d}x^{j_k}, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_l}\right).$$

(3) Supposons que la description locale de $\mathscr{A}$ soit :

$$\mathscr{A} = \mathbb{A}^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_l}\ \theta_{j_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{j_k} \otimes \theta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{i_l}.$$

On note alors :

$$\nabla_m \mathbb{A}^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_l} := \nabla_{\theta_m} \mathscr{A}\left(\theta^{j_1}, \ldots, \theta^{j_k}, \theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_l}\right).$$

C'est donc le style d'écriture de la composante de $\mathscr{A}$ qui dénote si m désigne e_m, ∂_m ou θ_m.

1.2.3 Trace et divergence

On fixe pour toute cette sous-section un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l). On utilise les notations vues dans la contraction de champs tensoriels (voir la définition 1.1.2.5). On commence par une notation usuelle sur l'action de nabla sur les champs tensoriels.

Notation 1.2.3.1: Le champ tensoriel $\nabla\mathscr{A}$

On note $\nabla\mathscr{A}$ le champ tensoriel de type $(k, l+1)$ défini par :

$$\nabla\mathscr{A}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, X_1, \ldots, X_{l+1}\right) := \left(\nabla_{X_{l+1}}\mathscr{A}\right)\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, X_1, \ldots, X_l\right)$$

Définition 1.2.3.2: Trace d'un champ tensoriel

(i) Supposons que $k, l \geq 1$. Soit $m \in \{1, \ldots, k\}$ et $n \in \{1, \ldots, l\}$. La **trace de $\mathscr{A}$ suivant** (n,m) est :

$$\mathrm{tr}_{(m,n)}\mathscr{A} := [\mathscr{A}]^m_n.$$

(a) Si $k := 1$ (donc $m := 1$), on la note simplement :

$$\mathrm{tr}_{(n)}\mathscr{A} := [\mathscr{A}]^1_n.$$

(b) Si $l := 1$ (donc $n := 1$), on la note simplement :

$$\mathrm{tr}_{(m)}\mathscr{A} := [\mathscr{A}]^m_1.$$

(ii) Supposons que $l \geq 2$ et $k := 0$. Soit $m \in \{1, \dots, l-1\}$ et $n \in \{1, \dots, l\}$. La **g-trace de $\mathscr{A}$ suivant** (m,n) est :
$$\mathrm{tr}_{g,(m,n)}\mathscr{A} := [[\mathscr{A}]^n]^1_m .$$

Regardons le type des champs tensoriels apparaissant dans les définitions.

(i) On a :
- $\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type (k,l)
- $\mathrm{tr}_{(m,n)}\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type $(k-1, l-1)$.

(ii) On a :
- $\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type $(0,l)$
- $[\mathscr{A}]^n$ est un champ tensoriel de type $(1, l-1)$
- $\mathrm{tr}_{g,(m,n)}\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type $(0, l-2)$.

Exemple 1.2.3.3: Exemple de la trace d'un champ tensoriel de type $(1,1)$

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type $(0,2)$. Supposons que $\mathscr{A}$ soit **symétrique** *i.e.* pour tous champs de vecteurs X et Y, on a $\mathscr{A}(X,Y) = \mathscr{A}(Y,X)$. Alors on a :
$$[\mathscr{A}]^1 = [\mathscr{A}]^2.$$

Donc on a :
$$\mathrm{tr}_{g,(1,1)}\mathscr{A} = \mathrm{tr}_{g,(2,1)}\mathscr{A}$$

On notera alors dans ce cas simplement :
$$\mathrm{tr}_g\mathscr{A} := \mathrm{tr}_{g,(i,1)}\mathscr{A} .$$

Définition 1.2.3.4: Divergence d'un champ tensoriel

(i) Supposons que $k \geq 1$. Soit $n \in \{1, \dots, k\}$. La **divergence de $\mathscr{A}$ suivant** n est :
$$\mathrm{div}_{(n)}\mathscr{A} := [\nabla\mathscr{A}]^n_{l+1} .$$

Si $k := 1$ (donc $n := 1$), on la note simplement :
$$\mathrm{div}\mathscr{A} := \mathrm{div}_{(1)}\mathscr{A} := [\nabla\mathscr{A}]^1_{l+1} .$$

(ii) Supposons que $l \geq 1$. Soit $n \in \{1, \dots, l\}$. La **g-divergence de $\mathscr{A}$ suivant** n est :
$$\mathrm{div}_{g,(n)}\mathscr{A} := [\nabla [\mathscr{A}]^n]^1_{l+1} .$$

Si $l := 1$ (donc $n := 1$), on la note simplement :
$$\mathrm{div}_g\mathscr{A} := \mathrm{div}_{g,(1)}\mathscr{A} := [\nabla\mathscr{A}]^1_{l+1} .$$

Regardons le type des champs tensoriels apparaissant dans les définitions.

(i) On a :
- $\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type (k,l)
- $\nabla\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type $(k, l+1)$
- $\mathrm{div}_{(n)}\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type $(k-1, l)$.

(ii) On a :

- $\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type (k, l)
- $[\mathscr{A}]^n$ est un champ tensoriel de type $(k+1, l-1)$
- $\nabla[\mathscr{A}]^n$ est un champ tensoriel de type $(k+1, l)$
- $\mathrm{div}_{g,(n)}\mathscr{A}$ est un champ tensoriel de type $(k, l-1)$.

Exemple 1.2.3.5: Divergences d'un champ de vecteurs et de covecteurs dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$

(1) Soit un champ de vecteurs $X := X^j\partial_j$. On a par la définition d'une connexion :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(X) &= [\nabla X]_1^1\\ &= \mathrm{d}x^i\left(\nabla_{\partial_i}X\right)\\ &= \mathrm{d}x^i\left(\nabla_{\partial_i}\left(X^j\partial_j\right)\right)\\ &= \mathrm{d}x^i\left(\mathrm{d}X^j\left(\partial_i\right)\partial_j + X^j\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)\\ &= \mathrm{d}x^i\left(\partial_iX^j\partial_j + X^j\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)\\ &= \partial_iX^j\delta_j^i + X^j\Gamma_{ij}^i\\ &= \partial_iX^i + X^j\Gamma_{ij}^i\end{aligned}$$

(2) Soit un champ de covecteurs $\alpha := \alpha_j\mathrm{d}x^j$. La **divergence de** α est définie par :

$$\mathrm{div}_g\alpha := \mathrm{div}\alpha^\sharp := \mathrm{div}[\alpha]^1.$$

(3) Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type $(0,2)$. Supposons que $\mathscr{A}$ soit **symétrique** *i.e.* pour tous champs de vecteurs X et Y, on a $\mathscr{A}(X,Y) = \mathscr{A}(Y,X)$. Alors on a :

$$[\mathscr{A}]^1 = [\mathscr{A}]^2$$

Donc on a :

$$\mathrm{div}_{g,(1)}\mathscr{A} = \mathrm{div}_{g,(2)}\mathscr{A}$$

On notera alors dans ce cas simplement :

$$\mathrm{div}_g\mathscr{A} := \mathrm{div}_{g,(i)}\mathscr{A}.$$

1.2.4 Définition de la connexion dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$

Les éléments $\nabla_{e_k}e_j$ sont des champs de vecteurs et donc ils se décomposent dans la base $\mathscr{E}$. D'où les définitions suivantes.

Définition 1.2.4.1: Symboles de Christoffel

Soit $i, j, k \in \{0,1,2,3\}$.

(i) Les **coefficients de rotation de Ricci** $\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{kj}$ sont définis par :

$$\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{kj} := e^i\left(\nabla_{e_k}e_j\right).$$

(ii) La **matrice des 1-formes de rotation de Ricci**

$$\boldsymbol{\omega} := \left(\boldsymbol{\omega}^i{}_j\right)_{ij} \in \mathscr{M}_4\left(\Lambda^1(U)\right)$$

est définie par :

$$\boldsymbol{\omega}^i{}_j := \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{kj}e^k.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^i{}_j\left(e_k\right) &= \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{kj} \\ \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{kj} e_i &= \nabla_{e_k} e_j = \boldsymbol{\omega}^i{}_j\left(e_k\right) e_i \end{aligned}$$

Exemple 1.2.4.2: Symboles de Christoffel et coefficients tétradiques

Soit $i, j, k \in \{0,1,2,3\}$.

(1) Les éléments $\nabla_{\partial_k}\partial_j$ sont des champs de vecteurs et donc ils se décomposent dans la base $\mathscr{C}$.

(a) Les **symboles de Christoffel** $\Gamma^i{}_{kj}$ sont définis par :

$$\Gamma^i{}_{kj} := \mathrm{d}x^i\left(\nabla_{\partial_k}\partial_j\right).$$

(b) La **matrice des 1-formes de Christoffel**

$$\omega := \left(\omega^i{}_j\right)_{ij} \in \mathscr{M}_4\left(\Lambda^1(U)\right)$$

est définie par :

$$\omega^i{}_j := \Gamma^i{}_{kj}\mathrm{d}x^k.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \omega^i{}_j\left(\partial_k\right) &= \Gamma^i{}_{kj} \\ \Gamma^i{}_{kj}\partial_i &= \nabla_{\partial_k}\partial_j = \omega^i{}_j\left(\partial_k\right)\theta_i \end{aligned}$$

(2) Les éléments $\nabla_{\theta_k}\theta_j$ sont des champs de vecteurs et donc ils se décomposent dans la base $\mathscr{C}_\perp$.

(a) Les **coefficients tétradiques** $\mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}$ sont définis par :

$$\mathbb{\Gamma}^i{}_{kj} := \theta^i\left(\nabla_{\theta_k}\theta_j\right).$$

(b) La **matrice des 1-formes tétradiques**

$$\varpi := \left(\varpi^i{}_j\right)_{ij} \in \mathscr{M}_4\left(\Lambda^1(U)\right)$$

est définie par :

$$\varpi^i{}_j := \mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}\theta^k.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \varpi^i{}_j\left(\theta_k\right) &= \mathbb{\Gamma}^i{}_{kj} \\ \mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}\theta_i &= \nabla_{\theta_k}\theta_j = \varpi^i{}_j\left(\theta_k\right)\theta_i \end{aligned}$$

Le lemme suivant établit le lien entre les $\Gamma^j{}_{ki}$ et les $\mathbb{\Gamma}^j{}_{ki}$.

Lemme 1.2.4.3: Liens entre les $\Gamma^j{}_{ki}$ et les $\mathbb{\Gamma}^j{}_{ki}$

Soit $i, j, k \in \{0,1,2,3\}$ tels que $i \neq j$.

(i) (a) On a :

$$\mathbb{\Gamma}^j{}_{kj} = e^{-u_k}\left(-u_{j,k} + \Gamma^j{}_{kj}\right) \qquad \Gamma^j{}_{kj} = u_{j,k} + e^{u_k}\mathbb{\Gamma}^j{}_{kj}$$

(b) On a :

$$\mathbb{\Gamma}^i{}_{kj} = e^{u_i - u_j - u_k}\Gamma^i{}_{kj} \qquad \Gamma^i{}_{kj} = e^{-u_i + u_j + u_k}\mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}$$

(ii) (a) On a :

$$\varpi^j{}_j = \omega^j{}_j - u_{j,k} e^{-u_k} \theta^k \qquad\qquad \omega^j{}_j = \varpi^j{}_j + u_{j,k} \mathrm{d}x^k$$

(b) On a :

$$\varpi^i{}_j = e^{u_i - u_j} \omega^i{}_j \qquad\qquad \omega^i{}_j = e^{-u_i + u_j} \varpi^i{}_j$$

Démonstration. (i) On a pour tous champs scalaires f et g et tous champs de vecteurs X et Y :

$$\nabla_{gX}(fY) = g\nabla_X(fY) = g\mathrm{d}f(X)Y + fg\nabla_X Y.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta_k}\theta_j &= \nabla_{e^{-u_k}\partial_k}\left(e^{-u_j}\partial_j\right) \\
&= e^{-u_k}\mathrm{d}\left(e^{-u_j}\right)(\partial_k)\partial_j + e^{-u_j-u_k}\nabla_{\partial_k}\partial_j \\
&= -u_{j,k}e^{-u_j-u_k}\partial_j + e^{-u_j-u_k}\Gamma^i{}_{kj}\partial_i \\
&= e^{-u_j-u_k}\left[\left(-u_{j,k} + \Gamma^j{}_{kj}\right)\partial_j + \sum_{i\neq j}\Gamma^i{}_{kj}\partial_i\right]
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta_k}\theta_j &= \mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}\theta_i \\
&= \mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}e^{-u_i}\partial_i
\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition, on a pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{\Gamma}^j{}_{kj}e^{-u_j} &= e^{-u_j-u_k}\left(-u_{j,k} + \Gamma^j{}_{kj}\right) \\
\mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}e^{-u_i} &= e^{-u_j-u_k}\Gamma^i{}_{kj}
\end{aligned}$$

et donc aussi :

$$\begin{aligned}
\Gamma^j{}_{kj} &= u_{j,k} + e^{u_k}\mathbb{\Gamma}^j{}_{kj} \\
\Gamma^i{}_{kj} &= e^{-u_i+u_j+u_k}\mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}
\end{aligned}$$

D'où les points (a) et (b).

(ii) (a) On a par (i.a) :

$$\begin{aligned}
\omega^j{}_j &= \Gamma^j{}_{kj}\mathrm{d}x^k \\
&= \left(u_{j,k} + e^{u_k}\mathbb{\Gamma}^j{}_{kj}\right)\mathrm{d}x^k \\
&= u_{j,k}\mathrm{d}x^k + \mathbb{\Gamma}^j{}_{kj}e^{u_k}\mathrm{d}x^k \\
&= u_{j,k}\mathrm{d}x^k + \mathbb{\Gamma}^j{}_{kj}\theta^k \\
&= \varpi^j{}_j + u_{j,k}\mathrm{d}x^k
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\varpi^j{}_j = \omega^j{}_j - u_{j,k} e^{-u_k} \theta^k \qquad\qquad \omega^j{}_j = \varpi^j{}_j + u_{j,k} \mathrm{d}x^k$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\omega^i{}_j &= \Gamma^i{}_{kj}\mathrm{d}x^k \\
&= e^{-u_i+u_j+u_k}\mathbb{\Gamma}^i{}_{kj}e^{-u_k}\theta^k \\
&= e^{-u_i+u_j}\varpi^i{}_j
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\varpi^i{}_j = e^{u_i - u_j}\omega^i{}_j \qquad\qquad \omega^i{}_j = e^{-u_i + u_j}\varpi^i{}_j$$

□

1.2.5 Calculs pratiques de la connexion dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$

Dans cette sous-section, on calcule les symboles de Christoffel de manière classique en utilisant une relation entre les $\Gamma^i{}_{jk}$ et les champs tensoriels g et g^*. On commence par une proposition qui donne une formule explicite pour le calcul de ∇ sur un champ tensoriel en utilisant les symboles de Christoffel.

On commence par un exemple.

Exemple 1.2.5.1: Exemple de calculs

(1) On a :

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\partial_k}\mathrm{d}x^i\right)(\partial_j) &= \partial_k\left(\mathrm{d}x^i(\partial_j)\right) - \mathrm{d}x^i\left(\nabla_{\partial_k}\partial_j\right)\\ &= \partial_k\left(\delta^i_j\right) - \Gamma^i{}_{kj}\\ &= -\Gamma^i{}_{kj}\end{aligned}$$

(2) Soit un champ de covecteurs $\alpha := \alpha_i\mathrm{d}x^i$. On a alors par (1) :

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\partial_k}\alpha\right)(\partial_j) &= \left(\nabla_{\partial_k}\left(\alpha_i\mathrm{d}x^i\right)\right)(\partial_j)\\ &= \partial_k\left(\alpha_i\mathrm{d}x^i(\partial_j)\right) - \alpha_i\mathrm{d}x^i\left(\nabla_{\partial_k}\partial_j\right)\\ &= \partial_k\alpha_j - \alpha_i\Gamma^i{}_{kj}\end{aligned}$$

(3) Soit un champ tensoriel $A := A_{il}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^l$. On a alors par (1) et (2) :

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\partial_k}A\right)(\partial_j,\partial_p) &= \nabla_{\partial_k}\left(A_{il}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^l\right)(\partial_j,\partial_p)\\ &= \left(\nabla_{\partial_k}\left(A_{il}\mathrm{d}x^i\right)\otimes\mathrm{d}x^l\right)(\partial_j,\partial_p) + \left(A_{il}\mathrm{d}x^i\otimes\nabla_{\partial_k}\left(\mathrm{d}x^l\right)\right)(\partial_j,\partial_p)\\ &= \nabla_{\partial_k}\left(A_{il}\mathrm{d}x^i\right)(\partial_j)\mathrm{d}x^l(\partial_p) + A_{il}\mathrm{d}x^i(\partial_j)\nabla_{\partial_k}\left(\mathrm{d}x^l\right)(\partial_p)\\ &= \left(\partial_kA_{jl} - A_{il}\Gamma^i{}_{kj}\right)\delta^l_p - A_{il}\delta^i_j\Gamma^l_{kp}\\ &= \partial_kA_{jp} - A_{ip}\Gamma^i{}_{kj} - A_{jl}\Gamma^l_{kp}\end{aligned}$$

Proposition 1.2.5.2: Formule de la connexion sur les tenseurs

Soit un champ tensoriel $\mathscr{A}$ de type (k,l) dont la décomposition en coordonnées locales est :

$$\mathscr{A} = \mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\,\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_k}\otimes\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_l}.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}\nabla_m\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} =&\partial_m\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\\ &+\Gamma^{j_1}{}_{nm}\mathrm{A}^{nj_2\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} + \cdots + \Gamma^{j_k}{}_{nm}\mathrm{A}^{j_1\cdots j_{k-1}n}_{i_1\cdots i_l}\\ &-\Gamma^n{}_{i_1m}\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{ni_2\cdots i_l} - \cdots - \Gamma^n{}_{i_lm}\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{l-1}n}\end{aligned}$$

Démonstration. On a par les notations 1.2.2.5 :

$$\nabla_m\mathrm{A}^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} = \nabla_{\partial_m}\mathscr{A}\left(\mathrm{d}x^{j_1},\ldots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\ldots,\partial_{i_l}\right).$$

On a trois relations :

- pour tout champ scalaire f, on a :
$$\nabla_{\partial_m} f = \partial_m f$$
- on a par définition des ${\Gamma^n}_{im}$:
$$\nabla_{\partial_m} \partial_i = {\Gamma^n}_{im} \partial_n$$
- par le point (1) de l'exemple 1.2.5.1, on a :
$$\nabla_{\partial_m} \mathrm{d}x^j = -{\Gamma^j}_{nm} \mathrm{d}x^n.$$

Ainsi on a par la proposition 1.2.2.4 :

$$\begin{aligned}
&\nabla_m A^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\\
&= (\nabla_{\partial_m} A)\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right)\\
&=\nabla_{\partial_m}\left(A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right)\right)\\
&\quad - A\left(\nabla_{\partial_m}\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right) - \cdots - A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\nabla_{\partial_m}\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right)\\
&\quad - A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\nabla_{\partial_m}\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right) - \cdots - A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\nabla_{\partial_m}\partial_{i_l}\right)\\
&=\nabla_{\partial_m} A^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\\
&\quad - A\left(-{\Gamma^{j_1}}_{nm}\mathrm{d}x^n,\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right) - \cdots - A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,-{\Gamma^{j_k}}_{nm}\mathrm{d}x^n,\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right)\\
&\quad - A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},{\Gamma^n}_{i_1 m}\partial_n,\dots,\partial_{i_l}\right) - \cdots - A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,{\Gamma^n}_{i_l m}\partial_n\right)\\
&=\nabla_{\partial_m} A^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\\
&\quad + {\Gamma^{j_1}}_{nm} A\left(\mathrm{d}x^n,\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right) + \cdots + {\Gamma^{j_k}}_{nm} A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^n,\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_l}\right)\\
&\quad - {\Gamma^n}_{i_1 m} A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_n,\dots,\partial_{i_l}\right) - \cdots - {\Gamma^n}_{i_l m} A\left(\mathrm{d}x^{j_1},\dots,\mathrm{d}x^{j_k},\partial_{i_1},\dots,\partial_n\right)\\
&=\partial_m A^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l}\\
&\quad + {\Gamma^{j_1}}_{nm} A^{n j_2\cdots j_k}_{i_1\cdots i_l} + \cdots + {\Gamma^{j_k}}_{nm} A^{j_1\cdots j_{k-1} n}_{i_1\cdots i_l}\\
&\quad - {\Gamma^n}_{i_1 m} A^{j_1\cdots j_k}_{n i_2\cdots i_l} - \cdots - {\Gamma^n}_{i_l m} A^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_{l-1} n}
\end{aligned}$$

□

On pourrait généraliser ce résultat dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$ mais le résultat n'est pas pratique.

La connexion ∇ est g-parallèle *i.e.*
$$\nabla_{\partial_j} g = 0$$
On en déduit le résultat usuel suivant.

Lemme 1.2.5.3: Expression des symboles de Christoffel en fonction de la métrique

On a :
$${\Gamma^i}_{kl} = \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}(\mathrm{g}_{mk,l} + \mathrm{g}_{ml,k} - \mathrm{g}_{kl,m}).$$

Démonstration. Par le point (3) de l'exemple 1.2.5.1, on a :
$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\partial_i} g\left(\partial_m,\partial_n\right)\\
&= \mathrm{g}_{mn,i} - \mathrm{g}_{jn}\Gamma^j_{im} - \mathrm{g}_{ml}\Gamma^l_{in}\\
&= \mathrm{g}_{mn,i} - \mathrm{g}_{pn}\Gamma^p_{im} - \mathrm{g}_{mp}\Gamma^p_{in}
\end{aligned}$$
i.e. on a :
$$\mathrm{g}_{mn,i} = \mathrm{g}_{pn}\Gamma^p_{im} + \mathrm{g}_{mp}\Gamma^p_{in}$$

En permutant les indices et exposants, on a :

$$\begin{aligned}(1) &: \mathrm{g}_{mk,l} = \mathrm{g}_{pk}\Gamma^p_{lm} + \mathrm{g}_{mp}\Gamma^p_{lk}\\ (2) &: \mathrm{g}_{ml,k} = \mathrm{g}_{pl}\Gamma^p_{km} + \mathrm{g}_{mp}\Gamma^p_{kl}\\ (3) &: \mathrm{g}_{kl,m} = \mathrm{g}_{pl}\Gamma^p_{mk} + \mathrm{g}_{kp}\Gamma^p_{ml}\end{aligned}$$

Ainsi en faisant $(1)+(2)-(3)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}\left(\mathrm{g}_{mk,l}+\mathrm{g}_{ml,k}-\mathrm{g}_{kl,m}\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}\left(\mathrm{g}_{pk}\Gamma^p_{lm}+\mathrm{g}_{mp}\Gamma^p_{lk}+\mathrm{g}_{pl}\Gamma^p_{km}+\mathrm{g}_{mp}\Gamma^p_{kl}-\mathrm{g}_{pl}\Gamma^p_{mk}-\mathrm{g}_{kp}\Gamma^p_{ml}\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}2\Gamma^p_{lk}\mathrm{g}_{mp}\\ &= \Gamma^p_{lk}\mathrm{g}^{im}\mathrm{g}_{mp}\\ &= \Gamma^p_{lk}\delta^i_p\\ &= {\Gamma^i}_{kl}\end{aligned}$$

□

On en déduit les valeurs exactes des ${\Gamma^j}_{ki}$.

Théorème 1.2.5.4: Valeurs exactes des ${\Gamma^j}_{ki}$

Soit $i, j, k \in \{0,1,2,3\}$ **distincts** et l quelconque.

(i) On a :

$${\Gamma^i}_{li} = {\Gamma^i}_{il} = u_{i,l}.$$

(ii) On a :

$${\Gamma^j}_{ii} = -\eta_i\eta_j u_{i,j}e^{2u_i-2u_j}.$$

(iii) On a :

$${\Gamma^j}_{ki} = 0.$$

Démonstration. (i) Comme g est symétrique, on a :

$$\begin{aligned}{\Gamma^i}_{li} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}(\mathrm{g}_{ml,i}+\mathrm{g}_{mi,j}-\mathrm{g}_{li,m})\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}(\mathrm{g}_{mi,l}+\mathrm{g}_{ml,i}-\mathrm{g}_{il,m})\\ &= {\Gamma^i}_{il}\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}{\Gamma^i}_{li} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}(\mathrm{g}_{ml,i}+\mathrm{g}_{mi,l}-\mathrm{g}_{li,m})\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{ii}(\mathrm{g}_{il,i}+\mathrm{g}_{ii,l}-\mathrm{g}_{li,i})\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{ii}\mathrm{g}_{ii,l}\\ &= u_{i,l}\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
{\Gamma^j}_{ii} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{jm}(\mathrm{g}_{mi,i} + \mathrm{g}_{mi,i} - \mathrm{g}_{ii,m}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{jj}(\mathrm{g}_{ji,i} + \mathrm{g}_{ji,i} - \mathrm{g}_{ii,j}) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{g}^{jj}\mathrm{g}_{ii,j} \\
&= -\eta_i\eta_j u_{i,j}e^{2u_i-2u_j}
\end{aligned}$$

(iii) Comme g est diagonale, on a directement :

$$\begin{aligned}
{\Gamma^j}_{ki} &= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{jm}(\mathrm{g}_{mk,i} + \mathrm{g}_{mi,k} - \mathrm{g}_{ki,m}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{jj}(\mathrm{g}_{jk,i} + \mathrm{g}_{ji,k} - 0) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{g}^{jj}(0 + 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

On note :

$$\Gamma^i := \begin{pmatrix} {\Gamma^i}_{00} & {\Gamma^i}_{01} & {\Gamma^i}_{02} & {\Gamma^i}_{03} \\ {\Gamma^i}_{10} & {\Gamma^i}_{11} & {\Gamma^i}_{12} & {\Gamma^i}_{13} \\ {\Gamma^i}_{20} & {\Gamma^i}_{21} & {\Gamma^i}_{22} & {\Gamma^i}_{23} \\ {\Gamma^i}_{30} & {\Gamma^i}_{31} & {\Gamma^i}_{32} & {\Gamma^i}_{33} \end{pmatrix}.$$

- Cas $i := 0$. On a :

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} \\ u_{0,1} & u_{1,0}e^{-2u_0+2u_1} & 0 & 0 \\ u_{0,2} & 0 & u_{2,0}e^{-2u_0+2u_2} & 0 \\ u_{0,3} & 0 & 0 & u_{3,0}e^{-2u_0+2u_3} \end{pmatrix}.$$

- Cas $i := 1$. On a :

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} u_{0,1}e^{-2u_1+2u_0} & u_{1,0} & 0 & 0 \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{1,2} & -u_{2,1}e^{-2u_1+2u_2} & 0 \\ 0 & u_{1,3} & 0 & -u_{3,1}e^{-2u_1+2u_3} \end{pmatrix}.$$

- Cas $i := 2$. On a :

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} u_{0,2}e^{-2u_2+2u_0} & 0 & u_{2,0} & 0 \\ 0 & -u_{1,2}e^{-2u_2+2u_1} & u_{2,1} & 0 \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{2,3} & -u_{3,2}e^{-2u_2+2u_3} \end{pmatrix}.$$

- Cas $i := 3$. On a :

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} u_{0,3}e^{-2u_3+2u_0} & 0 & 0 & u_{3,0} \\ 0 & -u_{1,3}e^{-2u_3+2u_1} & 0 & u_{3,1} \\ 0 & 0 & -u_{2,3}e^{-2u_3+2u_2} & u_{3,2} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2.5.5: Suite 2 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1 et 1.1.5.1) avec :

$$u_0(t,r) := u(t,r) \qquad u_1(t,r) := v(t,r)$$
$$u_2(t,r) := b(t) + \ln(r) \qquad u_3(t,r,\vartheta) := b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta)$$

On a donc :

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} \dot{u} & u' & 0 & 0 \\ u' & \dot{v}e^{-2u+2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\dot{b}e^{2b-2u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\dot{b}\sin^2\vartheta e^{2b-2u} \end{pmatrix}$$
$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} u'e^{2u-2v} & \dot{v} & 0 & 0 \\ \dot{v} & v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -re^{2b-2v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\sin^2\vartheta e^{2b-2v} \end{pmatrix}$$
$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ \dot{b} & r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}$$
$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{b} \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\vartheta \\ \dot{b} & r^{-1} & \cot\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

Et ainsi, on a :

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{u}\mathrm{d}x^0 + u'\mathrm{d}x^1 & u'\mathrm{d}x^0 + \dot{v}e^{-2u+2v}\mathrm{d}x^1 & r^2\dot{b}e^{2b-2u}\mathrm{d}x^2 & r^2\dot{b}\sin^2\vartheta e^{-2b-2u}\mathrm{d}x^3 \\ u'e^{2u-2v}\mathrm{d}x^0 + \dot{v}\mathrm{d}x^1 & \dot{v}\mathrm{d}x^0 + v'\mathrm{d}x^1 & -re^{2b-2v}\mathrm{d}x^2 & -r\sin^2\vartheta e^{2b-2v}\mathrm{d}x^3 \\ \dot{b}\mathrm{d}x^2 & r^{-1}\mathrm{d}x^2 & \dot{b}\mathrm{d}x^0 + r^{-1}\mathrm{d}x^1 & -\cos\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}x^3 \\ \dot{b}\mathrm{d}x^3 & r^{-1}\mathrm{d}x^3 & \cot\vartheta\mathrm{d}x^3 & \dot{b}\mathrm{d}x^0 + r^{-1}\mathrm{d}x^1 + \cot\vartheta\mathrm{d}x^2 \end{pmatrix}.$$

On finit cette sous-section par une autre formule pour calculer la somme $\sum_{i=0}^{3}\Gamma^i_{ij}$.

Proposition 1.2.5.6: Autre formules pour Γ^i_{ij}

Soit $j \in \{0,1,2,3\}$. On a :

$$\sum_{i=0}^{3}\Gamma^i_{ij} = \partial_j\left(\ln\sqrt{|\det g|}\right).$$

Démonstration. Montrons le résultat en deux étapes :

(1) pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$d_A\det : H \longmapsto \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}H).$$

(2) On a :

$$\sum_{i=0}^{3}\Gamma^i_{ij} = \partial_j\left(\ln\sqrt{|\det g|}\right).$$

(1) On commence par un résultat d'algèbre linéaire. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la **norme de Frobenius** :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|M\| := \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}.$$

Cette norme est une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *i.e.* on a :

$$\forall A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leq \|A\|.\|B\|.$$

Montrons que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$d_A\det : H \longmapsto \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}H).$$

Pour cela, commençons par calculer la différentielle de det en I_n. Comme det est de la classe $\mathscr{C}^\infty$, il suffit de calculer la dérivée de det en I_n dans une direction quelconque $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit une matrice réelle $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. On a pour tout réel t au voisinage de 0 :

$$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_n) = 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + O(t^2) = 1 + t\ \mathrm{tr}(H) + O(t^2).$$

Comme l'application $H \longmapsto \mathrm{tr}(H)$ est linéaire, on a donc :

$$d_{I_n} \det : H \longmapsto \mathrm{tr}(H).$$

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\det(A + H) &= \det(A(I_n + A^{-1}H)\\ &= \det(A)\det(I_n + A^{-1}H)\\ &= \det(A)(\det(I_n) + d_{I_n}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|))\\ &= \det(A) + \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|)\det(A)\end{aligned}$$

Or $\|.\|$ est une norme sous-matricielle, donc on a $\|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\|.\|H\|$. Et ainsi :

$$o(\|A^{-1}H\|)\det(A) = o(\|H\|).$$

Comme l'application $H \longmapsto \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}H)$ est linéaire, on a donc :

$$d_A \det : H \longmapsto \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}H).$$

(2) Comme :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{g}^{kl}\left(\mathrm{g}_{lj,i} + \mathrm{g}_{li,j} - \mathrm{g}_{ij,l}\right)$$

on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3}\Gamma^i_{ij} &= \sum_{i,l=0}^{3}\frac{1}{2}\left(\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{lj,i} + \mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{il,j} - \mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{ij,l}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i,l=0}^{3}\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{lj,i} + \sum_{i,l=0}^{3}\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{il,j} - \sum_{i,l=0}^{3}\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{ij,l}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i,l=0}^{3}\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{lj,i} + \sum_{i,l=0}^{3}\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{il,j} - \sum_{i,l=0}^{3}\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{lj,i}\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,l=0}^{3}\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{il,j}\end{aligned}$$

Par (1), on a :

$$\begin{aligned}\partial_j(\det g)\,\mathrm{d}x^j &= \mathrm{d}(\det g)\\ &= (\det g)\,\mathrm{g}^{il}\mathrm{d}\mathrm{g}_{il}\\ &= (\det g)\,\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{il,j}\mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$\mathrm{g}^{il}\mathrm{g}_{il,j} = \frac{1}{\det g}\partial_j(\det g)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3}\Gamma^i_{ij} &= \frac{1}{2\det g}\partial_j(\det g)\\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\partial_j\sqrt{|\det g|}\\ &= \partial_j\left(\ln\sqrt{|\det g|}\right).\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2.5.7: Autre formules pour Γ^i_{ij}

Soit $j \in \{0,1,2,3\}$. On a :

$$\sum_{i=0}^{3} \Gamma^i_{ij} = \sum_{i=0}^{3} u_{i,j}.$$

Démonstration. Comme g est diagonale, on a :

$$\begin{aligned} \det g &= \prod_{i=0}^{3} \mathrm{g}_{ii} \\ &= -e^{2u_0+2u_1+2u_2+2u_3} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\ln\sqrt{|\det g|} = u_0 + u_1 + u_2 + u_3.$$

Et donc on a :

$$\sum_{i=0}^{3} \Gamma^i_{ij} = \sum_{i=0}^{3} u_{i,j}.$$

□

1.2.6 Calculs pratiques de la connexion dans les bases $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$

Dans cette sous-section, on calcule les coefficients tétradiques ${\mathbb{\Gamma}^j}_{ki}$ en utilisant la méthode des tétrades. On commence par quelques propriétés simples des symboles ${\mathbb{\Gamma}^j}_{ki}$ et des 1-formes ${\varpi^i}_j$.

Lemme 1.2.6.1: Symétries des symboles ${\mathbb{\Gamma}^j}_{ki}$ et ${\varpi^i}_j$

Soit $i, j, k, l \in \{0,1,2,3\}$.

(i) On a :

$${\varpi^l}_k = -\eta_l\eta_k {\varpi^k}_l.$$

(ii) On a :

$${\mathbb{\Gamma}^j}_{ki} = -\eta_j\eta_i {\mathbb{\Gamma}^i}_{kj}.$$

(iii) On a :

$${\varpi^j}_j = 0.$$

(iv) On a :

$${\mathbb{\Gamma}^j}_{kj} = 0.$$

Démonstration. (i) Comme η_{kl} est constant, on a pour tout champ de vecteurs X :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X \eta_{kl} \\ &= \nabla_X g(\theta_k, \theta_l) \\ &= g(\nabla_X\theta_k, \theta_l) + g(\theta_k, \nabla_X\theta_l) \\ &= g\left({\varpi^i}_k(X)\theta_i, \theta_l\right) + g\left(\theta_k, {\varpi^i}_l(X)\theta_i\right) \\ &= {\varpi^i}_k(X) g(\theta_i, \theta_l) + {\varpi^i}_l(X) g(\theta_k, \theta_i) \\ &= {\varpi^i}_k(X)\eta_{il} + {\varpi^i}_l(X)\eta_{ki} \\ &= {\varpi^l}_k(X)\eta_l + {\varpi^k}_l(X)\eta_k \\ &= \left(\eta_l{\varpi^l}_k + \eta_k{\varpi^k}_l\right)(X) \end{aligned}$$

Comme cela est vrai pour tout champ de vecteurs X, on a donc :

$$\eta_l \varpi^l{}_k + \eta_k \varpi^k{}_l = 0$$

i.e. on a :

$$\varpi^l{}_k = -\eta_l \eta_k \varpi^k{}_l.$$

(ii) On a par (i) :

$$\Gamma^i{}_{kj} = \varpi^i{}_j(\theta_k) = -\eta_i \eta_j \varpi^j{}_i(\theta_k) = -\eta_i \eta_j \Gamma^j{}_{ki}.$$

(iii) On a par (i) :

$$\varpi^j{}_j = -\eta_j \eta_j \varpi^j{}_j = -\varpi^j{}_j.$$

Donc on a $\varpi^j{}_j = 0$.

(iv) On a par (iii) :

$$\Gamma^j{}_{kj} = \varpi^j{}_j(\theta_k) = 0.$$

□

Le résultat fondamental suivant fait le lien entre les 1-formes $\varpi^i{}_j$ et les fonctions u_i apparaissant dans la métrique, cela nous permettra de calculer les symboles $\Gamma^j{}_{ki}$ en fonction de ces fonctions. Pour cela on va calculer de deux façons différentes les 2-formes :

$$\mathrm{d}\theta^i \in \Lambda^2(U)$$

On note :

$$\theta^{j,i} := \theta^j \wedge \theta^i$$

On a donc :

$$\theta^{j,i} = -\theta^{i,j}$$

et :

$$\theta^{i,j}(\theta_k, \theta_l) = \theta^i \wedge \theta^j(\theta_k, \theta_l) = \theta^i \otimes \theta^j(\theta_k, \theta_l) - \theta^j \otimes \theta^i(\theta_k, \theta_l) = \delta^i_k \delta^j_l - \delta^j_k \delta^i_l \tag{1.2.6.1}$$

Proposition 1.2.6.2: Calculs des $\mathrm{d}\theta^i$

Soit $i \in \{0,1,2,3\}$.

(i) On a :

$$\mathrm{d}\theta^i = u_{i,j} e^{-u_j} \theta^{j,i}.$$

(ii) On a :

$$\mathrm{d}\theta^i = -\varpi^i{}_j \wedge \theta^j.$$

Démonstration. (i) Comme :

$$\mathrm{d}x^i = f^i \theta^i = e^{-u_i} \theta^i \quad , \quad \theta^i = f_i \mathrm{d}x^i = e^{u_i} \mathrm{d}x^i$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^i &= \mathrm{d}(f_i \mathrm{d}x^i) \\
&= \partial_j (f_i) \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \\
&= \partial_j (f_i) f^j \theta^j \wedge f^i \theta^i \\
&= \partial_j (e^{u_i}) f^i f^j \theta^j \wedge \theta^i \\
&= u_{i,j} e^{u_i} e^{-u_j - u_i} \theta^j \wedge \theta^i \\
&= u_{i,j} e^{-u_j} \theta^j \wedge \theta^i \\
&= u_{i,j} e^{-u_j} \theta^{j,i}
\end{aligned}$$

(ii) On a $f_k f^k = 1$, ce qui donne en différenciant :

$$f_k \mathrm{d} f^k + f^k \mathrm{d} f_k = 0$$

i.e. on a $f^k \mathrm{d} f_k = -f_k \mathrm{d} f^k$. Et ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^i &= \mathrm{d}\left(f_i \mathrm{d}x^i\right) = \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x^i \\
&= \mathrm{d}f_i \wedge f^i \theta^i \\
&= f^i \mathrm{d}f_i \wedge \theta^i \\
&= -f_i \mathrm{d}f^i \wedge \theta^i \\
&= -f_i \partial_j \left(f^i\right) \mathrm{d}x^j \wedge \theta^i \\
&= -f_i \partial_j \left(f^i\right) f^j \theta^j \wedge \theta^i
\end{aligned}$$

Donc on a par l'équation (**??**) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^i \left(\theta_k, \theta_l\right) \theta_i &= f_i f^j \partial_j \left(f^i\right) \theta^j \wedge \theta^i \left(\theta_k, \theta_l\right) \theta_i \\
&= f_i f^j \partial_j \left(f^i\right) \left(\delta^j_k \delta^i_l + \delta^j_l \delta^i_k\right) \theta_i \\
&= f_l f^k \partial_k \left(f^l\right) \theta_l - f_k f^l \partial_l \left(f^k\right) \theta_k
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta_k} \theta_l &= \nabla_{f^k \partial_k} \left(f^l \partial_l\right) \\
&= f^k \nabla_{\partial_k} \left(f^l \partial_l\right) \\
&= f^k \mathrm{d}\left(f^l\right) \left(\partial_k\right) \partial_l + f^k f^l \nabla_{\partial_k} \left(\partial_l\right)
\end{aligned}$$

et comme $[\partial_k, \partial_l] = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\varpi^i{}_j \wedge \theta^j \left(\theta_k, \theta_l\right) \theta_i &= \varpi^i{}_j \otimes \theta^j \left(\theta_k, \theta_l\right) \theta_i - \theta^j \otimes \varpi^i{}_j \left(\theta_k, \theta_l\right) \theta_i \\
&= \theta^j \left(\theta_l\right) \varpi^i{}_j \left(\theta_k\right) \theta_i - \theta^j \left(\theta_k\right) \varpi^i{}_j \left(\theta_l\right) \theta_i \\
&= \delta^j_l \nabla_{\theta_k} \theta_j - \delta^j_k \nabla_{\theta_l} \theta_j \\
&= \nabla_{\theta_k} \theta_l - \nabla_{\theta_l} \theta_k \\
&= f^k \mathrm{d}\left(f^l\right) \left(\partial_k\right) \partial_l + f^k f^l \nabla_{\partial_k} \left(\partial_l\right) - f^l \mathrm{d}\left(f^k\right) \left(\partial_l\right) \partial_k - f^k f^l \nabla_{\partial_l} \left(\partial_k\right) \\
&= f^k \partial_k \left(f^l\right) \partial_l - f^l \partial_l \left(f^k\right) \partial_k + f^k f^l \left[\partial_k, \partial_l\right] \\
&= f^k \partial_k \left(f^l\right) \partial_l - f^l \partial_l \left(f^k\right) \partial_k \\
&= -\mathrm{d}\theta^i \left(\theta_k, \theta_l\right) \theta_i
\end{aligned}$$

D'où le résultat car cela est vrai pour tous champs de vecteurs $\theta_k, \theta_l, \theta_i$.

$\square$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^0 &= u_{0,j} e^{-u_j} \theta^{j,0} = u_{0,1} e^{-u_1} \theta^{1,0} + u_{0,2} e^{-u_2} \theta^{2,0} + u_{0,3} e^{-u_3} \theta^{3,0} \\
\mathrm{d}\theta^1 &= u_{1,j} e^{-u_j} \theta^{j,1} = u_{1,0} e^{-u_0} \theta^{0,1} + u_{1,2} e^{-u_2} \theta^{2,1} + u_{1,3} e^{-u_3} \theta^{3,1} \\
\mathrm{d}\theta^2 &= u_{2,j} e^{-u_j} \theta^{j,2} = u_{2,0} e^{-u_0} \theta^{0,2} + u_{2,1} e^{-u_1} \theta^{1,2} + u_{2,3} e^{-u_3} \theta^{3,2} \\
\mathrm{d}\theta^3 &= u_{3,j} e^{-u_j} \theta^{j,3} = u_{3,0} e^{-u_0} \theta^{0,3} + u_{3,1} e^{-u_1} \theta^{1,3} + u_{3,2} e^{-u_2} \theta^{2,3}
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.6.3: Suite 3 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1, 1.1.5.1 et 1.2.5.5) avec :

$$u_0(t,r) := u(t,r) \qquad u_1(t,r) := v(t,r)$$
$$u_2(t,r) := b(t) + \ln(r) \qquad u_3(t,r,\vartheta) := b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^t &= u_{0,1}e^{-u_1}\theta^{1,0} \\
&= u' e^{v}\theta^{r,t} \\
\mathrm{d}\theta^r &= u_{1,0}e^{-u_0}\theta^{0,1} \\
&= \dot{v}e^{-u}\theta^{t,r} \\
\mathrm{d}\theta^\vartheta &= u_{2,0}e^{-u_0}\theta^{0,2} + u_{2,1}e^{-u_1}\theta^{1,2} \\
&= \dot{b}e^{-u}\theta^{t,\vartheta} + r^{-1}e^{-v}\theta^{r,\vartheta} \\
\mathrm{d}\theta^\phi &= u_{3,0}e^{-u_0}\theta^{0,3} + u_{3,1}e^{-u_1}\theta^{1,3} + u_{3,2}e^{-u_2}\theta^{2,3} \\
&= \dot{b}e^{-u}\theta^{t,\phi} + r^{-1}e^{-v}\theta^{r,\phi} + r^{-1}\cot\vartheta e^{-b}\theta^{\vartheta,\phi}
\end{aligned}$$

On en déduit alors les valeurs exactes des symboles ${\Gamma^j}_{ki}$ et des ${\varpi^i}_j$ en fonction des éléments des fonctions u_i apparaissant dans la métrique.

Théorème 1.2.6.4: Valeurs exactes des ${\Gamma^j}_{ki}$ et ${\varpi^i}_j$

Soit $i,j,k \in \{0,1,2,3\}$ **distincts**.

(i) On a :

$$\begin{aligned}
{\Gamma^i}_{ij} &= u_{i,j}e^{-u_j} \\
{\Gamma^j}_{ii} &= -\eta_i\eta_j u_{i,j}e^{-u_j} \\
{\Gamma^j}_{ki} &= 0
\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
{\varpi^j}_j &= 0 \\
{\varpi^i}_j &= u_{i,j}e^{-u_j}\theta^i - \eta_i\eta_j u_{j,i}e^{-u_i}\theta^j
\end{aligned}$$

Démonstration. Posons pour la preuve :

$${a^i}_{kj} := {\Gamma^i}_{kj} - {\Gamma^i}_{jk} \quad , \quad b_{ji} := u_{i,j}e^{-u_j}.$$

On a donc avec les notations et la proposition précédente 1.2.6.2 :

$$\begin{aligned}
b_{ji}\theta^{ji} &= u_{i,j}e^{-u_j}\theta^{j,i} \\
&= \mathrm{d}\theta^i \\
&= -{\varpi^i}_j \wedge \theta^j \\
&= -{\Gamma^i}_{kj}\theta^k \wedge \theta^j \\
&= \sum_{0\le j<k\le 3} \left({\Gamma^i}_{kj} - {\Gamma^i}_{jk}\right)\theta^j \wedge \theta^k \\
&= \sum_{0\le j<k\le 3} {a^i}_{kj}\theta^{j,k}.
\end{aligned}$$

On a donc :

(I) pour tous i, j, k distincts :

$$0 = {a^i}_{kj} = {\Gamma^i}_{kj} - {\Gamma^i}_{jk} = 0 \quad i.e. \quad {\Gamma^i}_{kj} = {\Gamma^i}_{jk}.$$

(II) pour tous i, j distincts :

$$b_{ji} = -{a^i}_{ji} = {a^i}_{ij}.$$

Montrons le théorème.

(i) On a les symétries :

$${\Gamma^j}_{ki} = {\Gamma^j}_{ik} \;,\; {\Gamma^i}_{kj} = {\Gamma^i}_{jk} \;,\; {\Gamma^k}_{ij} = {\Gamma^j}_{ji}$$

On va montrer que ${\Gamma^j}_{ki} = 0$ en montrant que ${\Gamma^j}_{ki} = -{\Gamma^j}_{ki}$. On a par (I) et par le point (ii) du lemme 1.2.6.1 :

$$\begin{aligned}
{\Gamma^j}_{ki} &= -\eta_i\eta_j{\Gamma^i}_{kj} \\
&= -\eta_i\eta_j{\Gamma^i}_{jk} \\
&= \eta_i\eta_j\eta_k\eta_i{\Gamma^k}_{ji} \\
&= \eta_j\eta_k{\Gamma^k}_{ij} \\
&= -{\Gamma^j}_{ik} = -{\Gamma^j}_{ki}
\end{aligned}$$

D'où le résultat par symétrie.

(ii) Comme ${\Gamma^i}_{ji} = 0$, on a :

$$u_{i,j}e^{-u_j} = b_{ji} = -{a^i}_{ji} = -{\Gamma^i}_{ji} + {\Gamma^i}_{ij} = {\Gamma^i}_{ij}$$

$i.e.$ on a :

$${\Gamma^i}_{ij} = u_{i,j}e^{-u_j}.$$

(iii) On a par (ii) :

$$\begin{aligned}
{\Gamma^j}_{ii} &= -\eta_j\eta_i{\Gamma^i}_{ij} \\
&= -\eta_i\eta_j u_{i,j}e^{-u_j}.
\end{aligned}$$

(iv) On a :

$$\begin{aligned}
{\varpi^i}_j &= {\Gamma^i}_{kj}\theta^k \\
&= {\Gamma^i}_{ij}\theta^i + {\Gamma^i}_{jj}\theta^j \\
&= u_{i,j}e^{-u_j}\theta^i - \eta_i\eta_j u_{j,i}e^{-u_i}\theta^j
\end{aligned}$$

□

On note :

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} {\Gamma^i}_{00} & {\Gamma^i}_{01} & {\Gamma^i}_{02} & {\Gamma^i}_{03} \\ {\Gamma^i}_{10} & {\Gamma^i}_{11} & {\Gamma^i}_{12} & {\Gamma^i}_{13} \\ {\Gamma^i}_{20} & {\Gamma^i}_{21} & {\Gamma^i}_{22} & {\Gamma^i}_{23} \\ {\Gamma^i}_{30} & {\Gamma^i}_{31} & {\Gamma^i}_{32} & {\Gamma^i}_{33} \end{pmatrix}$$

- Cas $i := 0$. On a :

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & u_{0,1}e^{-u_1} & u_{0,2}e^{-u_2} & u_{0,3}e^{-u_3} \\ 0 & u_{1,0}e^{-u_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{2,0}e^{-u_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{3,0}e^{-u_0} \end{pmatrix}.$$

- Cas $i := 1$. On a :

$$\mathbb{F}^1 = \begin{pmatrix} u_{0,1}e^{-u_1} & 0 & 0 & 0 \\ u_{1,0}e^{-u_0} & 0 & u_{1,2}e^{-u_2} & u_{1,3}e^{-u_3} \\ 0 & 0 & -u_{2,1}e^{-u_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_{3,1}e^{-u_1} \end{pmatrix}.$$

- Cas $i := 2$. On a :

$$\mathbb{F}^2 = \begin{pmatrix} u_{0,2}e^{-u_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_{1,2}e^{-u_2} & 0 & 0 \\ u_{2,0}e^{-u_0} & u_{2,1}e^{-u_1} & 0 & u_{2,3}e^{-u_3} \\ 0 & 0 & 0 & -u_{3,2}e^{-u_2} \end{pmatrix}.$$

- Cas $i := 3$. On a :

$$\mathbb{F}^3 = \begin{pmatrix} u_{0,3}e^{-u_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_{1,3}e^{-u_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_{2,3}e^{-u_3} & 0 \\ u_{3,0}e^{-u_0} & u_{3,1}e^{-u_1} & u_{3,2}e^{-u_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 1.2.4.3, on retrouve les valeurs ${\Gamma^i}_{jk}$ trouvées dans la sous-section précédente.

Exemple 1.2.6.5: Suite 4 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1, 1.1.5.1, 1.2.5.5 et 1.2.6.3) avec :

$$u_0(t,r) := u(t,r) \qquad u_1(t,r) := v(t,r)$$
$$u_2(t,r) := b(t) + \ln(r) \qquad u_3(t,r,\vartheta) := b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta)$$

On a donc :

$$\mathbb{F}^0 = \begin{pmatrix} 0 & u'e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{v}e^{-u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{b}e^{-u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{b}e^{-u} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}^1 = \begin{pmatrix} u'e^{-v} & 0 & 0 & 0 \\ \dot{v}e^{-u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-1}e^{-v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-1}e^{-v} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{b}e^{-u} & r^{-1}e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-1}\cot\vartheta e^{-b} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{b}e^{-u} & r^{-1}e^{-v} & r^{-1}\cot\vartheta e^{-b} & 0 \end{pmatrix}$$

Et ainsi, on a :

$$\varpi = \begin{pmatrix} 0 & u'e^{-v}\theta^0 + \dot{v}e^{-u}\theta^1 & \dot{b}e^{-u}\theta^2 & \dot{b}e^{-u}\theta^3 \\ u'e^{-v}\theta^0 + \dot{v}e^{-u}\theta^1 & 0 & -r^{-1}e^{-v}\theta^2 & -r^{-1}e^{-v}\theta^3 \\ \dot{b}e^{-u}\theta^2 & r^{-1}e^{-v}\theta^2 & 0 & -r^{-1}\cot\vartheta e^{-b}\theta^3 \\ \dot{b}e^{-u}\theta^3 & r^{-1}e^{-v}\theta^3 & r^{-1}\cot\vartheta e^{-b}\theta^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Tenseur de courbure et tenseur de Riemann

1.3.1 Généralités

Définition 1.3.1.1: Les applications de courbures

(i) Soit deux champs de vecteurs X et Y. L'**application de courbure associée à** X **et** Y est l'application $\mathscr{R}(X,Y)$ définie par :

$$\mathscr{R}(X,Y) \coloneqq [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

i.e. à tout champ de vecteurs Z, on associe le champ de vecteurs :

$$\mathscr{R}(X,Y)Z \coloneqq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

(ii) L'**application de Riemann** est l'application qui à tous champs de vecteurs X, Y, Z et W associe le champ scalaire :

$$\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y) \coloneqq g\left(W, \mathscr{R}(X,Y)Z\right).$$

L'application $\mathscr{R}$ est un champ tensoriel de type $(1,3)$ et l'application $\mathscr{R}\mathrm{m}$ est un champ tensoriel de type $(0,4)$.

Proposition 1.3.1.2: Propriétés usuelles

Soit des champs de vecteurs X, Y, Z, W et T.

(i) (**Première identité de Bianchi**) On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(X,Y)Z + \mathscr{R}(Y,Z)X + \mathscr{R}(Z,X)Y &= 0 \\ \mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y) + \mathscr{R}\mathrm{m}(W,X,Y,Z) + \mathscr{R}\mathrm{m}(W,Y,Z,X) &= 0 \end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(X,Y)Z &= -\mathscr{R}(Y,X)Z \\ \mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y) &= -\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,Y,X) \end{aligned}$$

(iii) On a :

$$\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y) = -\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,W,X,Y).$$

(iv) On a :

$$\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y) = \mathscr{R}\mathrm{m}(X,Y,W,Z).$$

(v) (**Deuxième identité de Bianchi**) On a :

$$\begin{aligned} \left(\nabla_X \mathscr{R}\right)(Y,Z) + \left(\nabla_Y \mathscr{R}\right)(Z,X) + \left(\nabla_Z \mathscr{R}\right)(X,Y) &= 0 \\ \nabla_X \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Z,Y) + \nabla_Y \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,X,Z) + \nabla_Z \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Y,X) &= 0 \\ \nabla \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Z,Y,X) + \nabla \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,X,Z,Y) + \nabla \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Y,X,Z) &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. (i) On a par l'identité de Jacobi (voir la proposition 1.2.1.6) :

$$\begin{aligned} &\mathscr{R}(X,Y)Z + \mathscr{R}(Y,Z)X + \mathscr{R}(Z,X)Y \\ =&\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_{[Z,X]}Y\\
=&\nabla_X\left(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y\right)+\nabla_Y\left(\nabla_Z X-\nabla_X Z\right)+\nabla_Z\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X\right)\\
&-\left(\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_{[Z,X]}Y\right)\\
=&\left(\nabla_X[Y,Z]-\nabla_{[Y,Z]}X\right)+\left(\nabla_Y[Z,X]-\nabla_{[Z,X]}Y\right)+\left(\nabla_Z[X,Y]-\nabla_{[X,Y]}Z\right)\\
=&[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\\
=&0
\end{aligned}
$$

Ainsi on a par linéarité de g :

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y)+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,X,Y,Z)+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Y,Z,X)\\
=&g\left(W,\mathscr{R}(X,Y)Z\right)+g\left(W,\mathscr{R}(Y,Z)X\right)+g\left(W,\mathscr{R}(Z,X)Y\right)\\
=&g\left(W,\mathscr{R}(X,Y)Z+\mathscr{R}(Y,Z)X+\mathscr{R}(Z,X)Y\right)\\
=&g\left(W,0\right)\\
=&0
\end{aligned}
$$

(ii) Comme :

$$
\begin{aligned}
-\nabla_{[X,Y]}Z&=\nabla_{-[X,Y]}Z\\
&=\nabla_{[Y,X]}Z
\end{aligned}
$$

on a :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}(X,Y)Z&=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\\
&=-\left(\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_{[Y,X]}Z\right)\\
&=-\mathscr{R}(Y,X)Z
\end{aligned}
$$

Et ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y)&=g\left(W,\mathscr{R}(X,Y)Z\right)\\
&=g\left(W,-\mathscr{R}(Y,X)Z\right)\\
&=-g\left(W,\mathscr{R}(Y,X)Z\right)\\
&=-\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,Y,X)
\end{aligned}
$$

(iii) On a :

$$
X\left(g(Y,Z)\right)=g\left(\nabla_X Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_X Z\right)
$$

i.e. on a :

$$
g\left(\nabla_X Y,Z\right)=X\left(g(Y,Z)\right)-g\left(Y,\nabla_X Z\right).
$$

Ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,X,Y)=&g\left(W,\mathscr{R}(X,Y)Z\right)\\
=&g\left(W,\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\right)\\
=&g\left(W,\nabla_X\nabla_Y Z\right)-g\left(W,\nabla_Y\nabla_X Z\right)-g\left(W,\nabla_{[X,Y]}Z\right)\\
=&\left[X\left(g(W,\nabla_Y Z)\right)-g\left(\nabla_X W,\nabla_Y Z\right)\right]-\left[Y\left(g(W,\nabla_X Z)\right)-g\left(\nabla_Y W,\nabla_X Z\right)\right]\\
&-\left[[X,Y]\left(g(W,Z)\right)-g\left(\nabla_{[X,Y]}W,Z\right)\right]\\
=&\left[X\left(Y\left(g(W,Z)\right)\right)-X\left(g\left(\nabla_Y W,Z\right)\right)-g\left(\nabla_X W,\nabla_Y Z\right)\right]\\
&-\left[Y\left(X\left(g(W,Z)\right)\right)-Y\left(g\left(\nabla_X W,Z\right)\right)-g\left(\nabla_Y W,\nabla_X Z\right)\right]\\
&-\left[[X,Y]\left(g(W,Z)\right)-g\left(\nabla_{[X,Y]}W,Z\right)\right]\\
=&\left(XY-YX\right)\left(g(W,Z)\right)-X\left(g\left(\nabla_Y W,Z\right)\right)-g\left(\nabla_X W,\nabla_Y Z\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&+Y\left(g\left(\nabla_X W,Z\right)\right)+g\left(\nabla_Y W,\nabla_X Z\right)-[X,Y]\left(g(W,Z)\right)+g\left(\nabla_{[X,Y]}W,Z\right)\\
=&[X,Y]\left(g(W,Z)\right)-g\left(\nabla_X\nabla_Y W,Z\right)-g\left(\nabla_X W,\nabla_Y Z\right)\\
&+g\left(\nabla_Y\nabla_X W,Z\right)+g\left(\nabla_Y W,\nabla_X Z\right)-[X,Y]\left(g(W,Z)\right)+g\left(\nabla_{[X,Y]}W,Z\right)\\
=&-g\left(\nabla_X\nabla_Y W,Z\right)-g\left(\nabla_X W,\nabla_Y Z\right)+g\left(\nabla_Y\nabla_X W,Z\right)\\
&+g\left(\nabla_Y W,\nabla_X Z\right)+g\left(\nabla_{[X,Y]}W,Z\right)\\
=&-\left[g\left(\nabla_X\nabla_Y W,Z\right)-g\left(\nabla_Y\nabla_X W,Z\right)-g\left(\nabla_{[X,Y]}W,Z\right)\right]\\
=&-g\left(\nabla_X\nabla_Y W-\nabla_Y\nabla_X W-\nabla_{[X,Y]}W,Z\right)\\
=&-g\left(Z,\mathscr{R}(X,Y)W\right)\\
=&-\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,W,X,Y)
\end{aligned}$$

(iv) On a par (i, ii, iii) :

$$\begin{aligned}
&2\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,W,X,Y)-2\mathscr{R}\mathrm{m}(X,Y,Z,W)\\
=&\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,W,X,Y)+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,Y,X)+\mathscr{R}\mathrm{m}(X,Y,W,Z)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,X,Z,W)\\
=&\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,W,X,Y)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,X,Y,W)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,Y,W,X)\\
&+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Z,Y,X)+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Y,X,Z)+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,X,Z,Y)\\
&+\mathscr{R}\mathrm{m}(X,Y,W,Z)+\mathscr{R}\mathrm{m}(X,W,Z,Y)+\mathscr{R}\mathrm{m}(X,Z,Y,W)\\
&+\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,X,Z,W)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,Z,W,X)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,W,X,Z)\\
&-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,X,Y,W)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,Y,W,X)\right)-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Y,X,Z)+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,X,Z,Y)\right)\\
&-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(X,W,Z,Y)+\mathscr{R}\mathrm{m}(X,Z,Y,W)\right)-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,Z,W,X)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,W,X,Z)\right)\\
=&0+0+0+0\\
&-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,X,Y,W)+\mathscr{R}\mathrm{m}(X,Z,Y,W)\right)-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(W,Y,X,Z)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,W,X,Z)\right)\\
&-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(X,W,Z,Y)+\mathscr{R}\mathrm{m}(W,X,Z,Y)\right)-\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(Y,Z,W,X)+\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,Y,W,X)\right)\\
=&-0-0-0-0\\
=&0
\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$\mathscr{R}\mathrm{m}(Z,W,X,Y)=\mathscr{R}\mathrm{m}(X,Y,Z,W).$$

(v) On a par l'action de ∇ sur les champs tensoriels (voir la proposition 1.2.2.4) :

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\mathscr{R}(Y,Z)W+\nabla_Y\mathscr{R}(Z,X)W+\nabla_Z\mathscr{R}(X,Y)W\\
=&\nabla_X\left(\mathscr{R}(Y,Z)W\right)+\nabla_Y\left(\mathscr{R}(Z,X)W\right)+\nabla_Z\left(\mathscr{R}(X,Y)W\right)\\
&-\mathscr{R}\left(\nabla_X Y,Z\right)W-\mathscr{R}\left(Y,\nabla_X Z\right)W-\mathscr{R}\left(\nabla_Y Z,X\right)W-\mathscr{R}\left(Z,\nabla_Y X\right)W-\mathscr{R}\left(\nabla_Z X,Y\right)W-\mathscr{R}\left(X,\nabla_Z Y\right)W\\
&-\mathscr{R}(Y,Z)\nabla_X W-\mathscr{R}(Z,X)\nabla_Y W-\mathscr{R}(X,Y)\nabla_Z W\\
=:&(\mathrm{I})\\
&-(\mathrm{II})\\
&-(\mathrm{III})
\end{aligned}$$

Calculons les éléments (II) et (I) séparément. On a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II})=&\mathscr{R}\left(\nabla_X Y,Z\right)+\mathscr{R}\left(Y,\nabla_X Z\right)+\mathscr{R}\left(\nabla_Y Z,X\right)+\mathscr{R}\left(Z,\nabla_Y X\right)+\mathscr{R}\left(\nabla_Z X,Y\right)+\mathscr{R}\left(X,\nabla_Z Y\right)\\
=&\mathscr{R}\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X,Z\right)+\mathscr{R}\left(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y,X\right)+\mathscr{R}\left(\nabla_Z X-\nabla_X Z,Y\right)\\
=&\mathscr{R}\left([X,Y],Z\right)+\mathscr{R}\left([Y,Z],X\right)+\mathscr{R}\left([Z,X],Y\right)\\
=:&(\mathrm{IV})
\end{aligned}$$

Par l'identité de Jacobi, on a :

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,[Y,Z]]}W + \nabla_{[Y,[Z,X]]}W + \nabla_{[Z,[X,Y]]}W &= \nabla_{[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]}W \\ &= \nabla_0 W \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\text{(I)} =&\nabla_X\left(\mathscr{R}\left(Y,Z\right)W\right) + \nabla_Y\left(\mathscr{R}\left(Z,X\right)W\right) + \nabla_Z\left(\mathscr{R}\left(X,Y\right)W\right) \\ =&\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W - \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W + \nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W - \nabla_Y\nabla_X\nabla_Z W + \nabla_Z\nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W \\ &- \nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W \\ =&\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W - \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W + \nabla_Z\nabla_X\nabla_Y W - \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W + \nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W - \nabla_Y\nabla_X\nabla_Z W \\ &- \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W - \mathscr{R}\left(X,[Y,Z]\right) - \nabla_{[X,[Y,Z]]}W \\ &- \nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W - \mathscr{R}\left(Y,[Z,X]\right) - \nabla_{[Y,[Z,X]]}W \\ &- \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W - \mathscr{R}\left(Z,[X,Y]\right) - \nabla_{[Z,[X,Y]]}W \\ =&\mathscr{R}\left(Y,Z\right)\nabla_X W + \mathscr{R}\left(Z,X\right)\nabla_Y W + \mathscr{R}\left(X,Y\right)\nabla_Z W \\ &- \mathscr{R}\left(X,[Y,Z]\right)W - \mathscr{R}\left(Y,[Z,X]\right)W - \mathscr{R}\left(Z,[X,Y]\right)W \\ =&\text{(III)} + \mathscr{R}\left([Y,Z],X\right)W + \mathscr{R}\left([Z,X],Y\right)W + \mathscr{R}\left([X,Y],Z\right)W \\ =&\text{(III)} + \text{(IV)}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\nabla_X\mathscr{R}\left(Y,Z\right) + \nabla_Y\mathscr{R}\left(Z,X\right) + \nabla_Z\mathscr{R}\left(X,Y\right) &= \text{(I)} - \text{(II)} - \text{(III)} \\ &= \text{(III)} + \text{(IV)} - \text{(IV)} - \text{(III)} \\ &= 0\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\nabla_X\mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Z,Y) =&X\left(\mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Z,Y)\right) - \mathscr{R}\mathrm{m}(\nabla_X T,W,Z,Y) - \mathscr{R}\mathrm{m}(T,\nabla_X W,Z,Y) \\ &- \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,\nabla_X Z,Y) - \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Z,\nabla_X Y) \\ =&X\left(g\left(T,\mathscr{R}(Z,Y)W\right)\right) - \mathscr{R}\mathrm{m}(\nabla_X T,W,Z,Y) - \mathscr{R}\mathrm{m}(T,\nabla_X W,Z,Y) \\ &- \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,\nabla_X Z,Y) - \mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Z,\nabla_X Y) \\ =&g\left(\nabla_X T,\mathscr{R}(Z,Y)W\right) + g\left(T,\nabla_X\left(\mathscr{R}(Z,Y)W\right)\right) - g\left(\nabla_X T,\mathscr{R}(Z,Y)W\right) \\ &- g\left(T,\mathscr{R}(Z,Y)\nabla_X W\right) - g\left(T,\mathscr{R}(\nabla_X Z,Y)W\right) - g\left(T,\mathscr{R}(Z,\nabla_X Y)W\right) \\ =&g\left(T,\nabla_X\left(\mathscr{R}(Z,Y)W\right) - \mathscr{R}(Z,Y)\nabla_X W - \mathscr{R}(\nabla_X Z,Y)W - \mathscr{R}(Z,\nabla_X Y)W\right) \\ =&g\left(T,\nabla_X\mathscr{R}(Z,Y)W\right)\end{aligned}$$

Donc on a en permutant X, Z et Y :

$$\begin{aligned}&\nabla_X\mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Z,Y) + \nabla_Y\mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,X,Z) + \nabla_Z\mathscr{R}\mathrm{m}(T,W,Y,X) \\ =&g\left(T,\nabla_X\mathscr{R}(Z,Y)W\right) + g\left(T,\nabla_Y\mathscr{R}(X,Z)W\right) + g\left(T,\nabla_Z\mathscr{R}(Y,X)W\right) \\ =&g\left(T,\nabla_X\mathscr{R}(Z,Y)W + \nabla_Y\mathscr{R}\left(Z,X\right)W + \nabla_Z\mathscr{R}\left(Y,X\right)W\right) \\ =&g\left(T,0\right) \\ =&0\end{aligned}$$

□

1.3.2 Calcul des composantes dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$

Définition 1.3.2.1: Les tenseurs de courbure et de Riemann

(i) Les **composantes du tenseur de courbure dans** $\mathscr{E}$ **et** $\mathscr{E}^*$ sont :

$$\mathbf{R}^i{}_{jkl} \coloneqq e^i\left(\mathscr{R}\left(e_k, e_l\right) e_j\right).$$

(ii) Les **composantes du tenseur de Riemann dans** $\mathscr{E}$ **et** $\mathscr{E}^*$ sont :

$$\mathbf{R}_{ijkl} \coloneqq \mathscr{R}\mathrm{m}\left(e_i, e_j, e_k, e_l\right).$$

On a donc les décompositions :

$$\begin{aligned} \mathscr{R} &= \mathbf{R}^i{}_{jkl}\ e_i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l \\ \mathscr{R}\mathrm{m} &= \mathbf{R}_{ijkl}\ e^i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l \end{aligned}$$

On a une relation simple entre ces deux composantes.

Lemme 1.3.2.2: Relation entre les deux composantes

On a :

$$\mathbf{R}_{ijkl} = \mathbf{g}_{in}\mathbf{R}^n{}_{jkl}.$$

Démonstration. Cela se déduit directement de la proposition 1.1.8.6. On refait la preuve dans ce cas. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ijkl} &= \mathscr{R}\mathrm{m}\left(e_i, e_j, e_k, e_l\right) \\ &= g\left(e_i, \mathscr{R}\left(e_j, e_k\right) e_l\right) \\ &= g\left(e_i, \mathbf{R}^n{}_{jkl}\ e_n\right) \\ &= \mathbf{R}^n{}_{jkl} g\left(e_i, e_n\right) \\ &= \mathbf{g}_{in}\mathbf{R}^n{}_{jkl} \end{aligned}$$

□

On en déduit de la proposition 1.3.2.3, la proposition suivante.

Proposition 1.3.2.3: Propriétés usuelles

Soit $i, j, k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(i) (**Première identité de Bianchi**) On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^i{}_{jkl} + \mathbf{R}^i{}_{klj} + \mathbf{R}^i{}_{ljk} &= 0 \\ \mathbf{R}_{ijkl} + \mathbf{R}_{iklj} + \mathbf{R}_{iljk} &= 0 \end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^i{}_{jkl} &= -\mathbf{R}^i{}_{jlk} \\ \mathbf{R}_{ijkl} &= -\mathbf{R}_{ijlk} \end{aligned}$$

(iii) On a :

$$\mathbf{R}_{ijkl} = -\mathbf{R}_{jikl}.$$

(iv) On a :

$$\mathbf{R}_{ijkl} = \mathbf{R}_{klij}.$$

(v) (**Deuxième identité de Bianchi**) On a :

$$\nabla_n \mathbf{R}_{ijkl} + \nabla_k \mathbf{R}_{ijln} + \nabla_l \mathbf{R}_{ijnk} = 0.$$

Démonstration. On utilise la proposition 1.3.2.3.

(i) Comme :

$$\mathscr{R}(e_k, e_l)e_j + \mathscr{R}(e_l, e_j)e_k + \mathscr{R}(e_j, e_k)e_l$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^i{}_{jkl} + \mathbf{R}^i{}_{klj} + \mathbf{R}^i{}_{ljk} &= e^i\left(\mathscr{R}(e_k, e_l)e_j\right) + e^i\left(\mathscr{R}(e_l, e_j)e_k\right) + e^i\left(\mathscr{R}(e_j, e_k)e_l\right) \\
&= e^i\left(\mathscr{R}(e_k, e_l)e_j + \mathscr{R}(e_l, e_j)e_k + \mathscr{R}(e_j, e_k)e_l\right) \\
&= e^i(0) \\
&= 0 \\
\mathbf{R}_{ijkl} + \mathbf{R}_{iklj} + \mathbf{R}_{iljk} &= \mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_k, e_l) + \mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_k, e_l, e_j) + \mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_l, e_j, e_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^i{}_{jkl} &= e^i\left(\mathscr{R}(e_k, e_l)e_j\right) \\
&= e^i\left(-\mathscr{R}(e_l, e_k)e_j\right) \\
&= -e^i\left(\mathscr{R}(e_l, e_k)e_j\right) \\
&= -\mathbf{R}^i{}_{kjl} \\
\mathbf{R}_{ijkl} &= \mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_k, e_l) \\
&= -\mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_l, e_k) \\
&= -\mathbf{R}_{ijlk}
\end{aligned}$$

(iii) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{ijkl} &= \mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_k, e_l) \\
&= -\mathscr{R}\mathrm{m}(e_j, e_i, e_k, e_l) \\
&= -\mathbf{R}_{jikl}
\end{aligned}$$

(iv) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{ijkl} &= \mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_k, e_l) \\
&= \mathscr{R}\mathrm{m}(e_k, e_l, e_i, e_j) \\
&= \mathbf{R}_{klij}
\end{aligned}$$

(v) On a :

$$\begin{aligned}
\nabla_n \mathbf{R}_{ijkl} + \nabla_k \mathbf{R}_{ijln} + \nabla_l \mathbf{R}_{ijnk} &= \nabla_{e_n}\mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_k, e_l) + \nabla_{e_k}\mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_l, e_n) + \nabla_{e_l}\mathscr{R}\mathrm{m}(e_i, e_j, e_n, e_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

On en déduit la nullité d'une classe de composantes.

Corollaire 1.3.2.4: Nullités et symétries de certaines composantes

Soit $i, j, k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(i) On a :

$$\mathbf{R}_{jkii} = \mathbf{R}_{iijk} = 0.$$

(ii) On a :

$$\mathbf{R}_{ijki} = \mathbf{R}_{kiij} = -\mathbf{R}_{kiji} = -\mathbf{R}_{ikij} = -\mathbf{R}_{ijik} = -\mathbf{R}_{jiki} = \mathbf{R}_{jiik} = \mathbf{R}_{ikji}.$$

Démonstration. (i) On a par le point (ii) de la proposition 1.3.2.3 :

$$\mathbf{R}_{ijll} = -\mathbf{R}_{ijll}$$

i.e. on a :

$$\mathbf{R}_{ijll} = 0.$$

On a par le point (iii) de la proposition 1.3.2.3 :

$$\mathbf{R}_{iikl} = -\mathbf{R}_{iikl}$$

i.e. on a :

$$\mathbf{R}_{iikl} = 0.$$

(ii) Par (i) et par le point (i) de la proposition 1.3.2.3, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}_{ijll} + \mathbf{R}_{illj} + \mathbf{R}_{iljl} \\ &= 0 + \mathbf{R}_{illj} + \mathbf{R}_{iljl} \end{aligned}$$

i.e. on a :

$$\mathbf{R}_{illj} = -\mathbf{R}_{iljl}.$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}_{iikl} + \mathbf{R}_{ikli} + \mathbf{R}_{ilik} \\ &= 0 + \mathbf{R}_{ikli} + \mathbf{R}_{ilik} \end{aligned}$$

i.e. on a :

$$\mathbf{R}_{ikli} = -\mathbf{R}_{ilik}.$$

Par le point (iv) de la proposition 1.3.2.3, on a directement :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ijil} &= \mathbf{R}_{ilij} \\ \mathbf{R}_{ijki} &= \mathbf{R}_{kiij} \end{aligned}$$

□

Exemple 1.3.2.5: Exemples de composantes

(1) (a) Les **composantes du tenseur de courbure dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$** sont :

$$\mathrm{R}^i{}_{jkl} := \mathrm{d}x^i\left(\mathscr{R}\left(\partial_k, \partial_l\right)\partial_j\right).$$

(b) Les **composantes du tenseur de Riemann dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$** sont :

$$\mathrm{R}_{ijkl} := \mathscr{R}\mathrm{m}\left(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l\right).$$

On a donc les décompositions :

$$\begin{aligned} \mathscr{R} &= \mathrm{R}^i{}_{jkl}\ \partial_i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l \\ \mathscr{R}\mathrm{m} &= \mathrm{R}_{ijkl}\ \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l \end{aligned}$$

par le lemme 1.3.2.2, on a les relations :

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{ijkl} &= \mathrm{g}_{in}\mathrm{R}^{n}{}_{jkl}\\ &= \mathrm{g}_{ii}\mathrm{R}^{i}{}_{jkl}\\ &= \eta_i e^{u_i}\mathrm{R}^{i}{}_{jkl}\end{aligned}$$

(2) (a) Les **composantes du tenseur de courbure dans les bases** $\mathscr{C}_\perp$ **et** $\mathscr{C}_\perp^*$ sont :

$$\mathbb{R}^{i}{}_{jkl} := \theta^i\left(\mathscr{R}\left(\theta_k,\theta_l\right)\theta_j\right).$$

(b) Les **composantes du tenseur de Riemann dans les bases** $\mathscr{C}_\perp$ **et** $\mathscr{C}_\perp^*$ sont :

$$\mathbb{R}_{ijkl} := \mathscr{R}\mathrm{m}\left(\theta_i,\theta_j,\theta_k,\theta_l\right).$$

On a donc les décompositions :

$$\begin{aligned}\mathscr{R} &= \mathbb{R}^{i}{}_{jkl}\ \theta_i\otimes\theta^j\otimes\theta^k\otimes\theta^l\\ \mathscr{R}\mathrm{m} &= \mathbb{R}_{ijkl}\ \theta^i\otimes\theta^j\otimes\theta^k\otimes\theta^l\end{aligned}$$

par le lemme 1.3.2.2, on a les relations :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{ijkl} &= \eta_{ii}\mathbb{R}^{i}{}_{jkl}\\ &= \eta_i\mathbb{R}^{i}{}_{jkl}\end{aligned}$$

1.3.3 Calculs pratiques dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$

On commence par une proposition qui donne un lien entre les composantes du tenseur de courbure et les symboles de Christoffel.

Proposition 1.3.3.1: Propriétés usuelles

Soit $i,j,k,l \in \{0,1,2,3\}$. On a :

$$\mathrm{R}^{i}{}_{jkl} = \partial_k\Gamma^i_{jl} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}.$$

Démonstration. On a par définition de $\mathscr{R}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{R}\left(\partial_k,\partial_l\right)\partial_j &= \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\partial_j - \nabla_{\partial_l}\nabla_{\partial_k}\partial_j - \nabla_{[\partial_k,\partial_l]}\partial_j\\ &= \nabla_{\partial_k}\left(\Gamma^m_{jl}\partial_m\right) - \nabla_{\partial_l}\left(\Gamma^m_{kj}\partial_m\right)\\ &= \mathrm{d}\Gamma^m_{jl}\left(\partial_k\right)\partial_m + \Gamma^m_{jl}\nabla_{\partial_k}\partial_m - \mathrm{d}\Gamma^m_{kj}\left(\partial_l\right)\partial_m + \Gamma^m_{kj}\nabla_{\partial_l}\partial_m\\ &= \partial_k\Gamma^m_{jl}\partial_m + \Gamma^m_{jl}\Gamma^n_{km}\partial_n - \partial_l\Gamma^m_{kj}\partial_m - \Gamma^m_{kj}\Gamma^n_{lm}\partial_n\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^{i}{}_{jkl} &= \mathrm{d}x^i\left(\mathscr{R}\left(\partial_k,\partial_l\right)\partial_j\right)\\ &= \mathrm{d}x^i\left(\partial_k\Gamma^m_{jl}\partial_m + \Gamma^m_{jl}\Gamma^n_{km}\partial_n - \partial_l\Gamma^m_{kj}\partial_m - \Gamma^m_{kj}\Gamma^n_{lm}\partial_n\right)\\ &= \partial_k\Gamma^m_{jl}\delta^i_m + \Gamma^m_{jl}\Gamma^n_{km}\delta^i_n - \partial_l\Gamma^m_{kj}\delta^i_m - \Gamma^m_{kj}\Gamma^n_{lm}\delta^i_n\\ &= \partial_k\Gamma^i_{jl} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}\end{aligned}$$

□

Par le corollaire 1.3.2.4, il n'y a que deux types de composantes à calculer, les autres se déduisant par symétrie :

$$\mathrm{R}^i{}_{jil} \quad , \quad \mathrm{R}^i{}_{jij}.$$

Théorème 1.3.3.2: Valeurs des tenseurs de courbure et de Riemann

Soit $i, j, k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$ **distincts** *i.e.* on a $\{0, 1, 2, 3\} = \{i, j, k, l\}$.

(i) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^i{}_{jil} &= -u_{i,jl} + u_{i,j}\left(u_{j,l} - u_{i,l}\right) + u_{l,j}u_{i,l} \\
\mathrm{R}^j{}_{iil} &= -\eta_i\eta_j e^{2u_i - 2u_j}\mathrm{R}^i{}_{jil} \\
\mathrm{R}^j{}_{ili} &= -\mathrm{R}^j{}_{iil} \\
\mathrm{R}^i{}_{jli} &= -\mathrm{R}^i{}_{jil}
\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^i{}_{jij} =& -\left(u_{i,jj} + u_{i,j}\left(u_{i,j} - u_{j,j}\right)\right) - \eta_i\eta_j\left(u_{j,ii} + u_{j,i}\left(u_{j,i} - u_{i,i}\right)\right)e^{2u_j - 2u_i} \\
& - \eta_k\eta_j u_{i,k}u_{j,k}e^{2u_j - 2u_k} - \eta_l\eta_j u_{i,l}u_{j,l}e^{2u_j - 2u_l}
\end{aligned}$$

et :

$$\mathrm{R}^j{}_{iij} = -\eta_i\eta_j\mathrm{R}^i{}_{jij}.$$

(iii) Toutes les autres valeurs du tenseur de Riemann sont nulles.

Démonstration. (i) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^i{}_{jil} =& \partial_i\Gamma^i_{jl} - \partial_l\Gamma^i_{ij} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{im} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^i_{lm} \\
=& -\partial_l\Gamma^i_{ij} + \Gamma^j_{jl}\Gamma^i_{ij} + \Gamma^l_{jl}\Gamma^i_{il} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^i_{li} \\
=& -\partial_l\left(u_{i,j}\right) + u_{j,l}u_{i,j} + u_{l,j}u_{i,l} - u_{i,j}u_{i,l} \\
=& -u_{i,jl} + u_{i,j}\left(u_{j,l} - u_{i,l}\right) + u_{l,j}u_{i,l} \\
=& = -u_{i,jl} + u_{i,j}\left(u_{j,l} - u_{i,l}\right) + u_{l,j}u_{i,l}
\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^i{}_{jij} =& \partial_i\Gamma^i_{jj} - \partial_j\Gamma^i_{ij} + \Gamma^m_{jj}\Gamma^i_{im} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^i_{jm} \\
=& \partial_i\Gamma^i_{jj} - \partial_j\Gamma^i_{ij} + \Gamma^m_{jj}\Gamma^i_{im} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^i_{ji} - \Gamma^j_{ij}\Gamma^i_{jj} \\
=& \partial_i\left(-\eta_i\eta_j u_{j,i}e^{2u_j - 2u_i}\right) - \partial_j\left(u_{i,j}\right) + \left(-\eta_m\eta_j u_{j,m}e^{2u_j - 2u_m}\right)u_{i,m} - u_{i,j}^2 - u_{j,i}\left(-\eta_i\eta_j u_{j,i}e^{2u_j - 2u_i}\right) \\
=& -\left(u_{i,jj} + u_{i,j}\left(u_{i,j} - u_{j,j}\right)\right) - \eta_i\eta_j\left(u_{j,ii} + u_{j,i}\left(u_{j,i} - u_{i,i}\right)\right)e^{2u_j - 2u_i} \\
& - \eta_k\eta_j u_{i,k}u_{j,k}e^{2u_j - 2u_k} - \eta_l\eta_j u_{i,l}u_{j,l}e^{2u_j - 2u_l}
\end{aligned}$$

□

1.3.4 Calculs pratiques de la 2-forme de courbure dans $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$

Soit deux champs de vecteurs X et Y. Pour tout champ de vecteur ∂_j, l'élément $\mathscr{R}(X, Y)\partial_j$ est un champ de vecteurs, donc il se décompose dans la base $\mathscr{C}_\perp$. On en déduit la définition des 2-formes de courbures.

Définition 1.3.4.1: Les applications de courbures

Soit deux champs de vecteurs X et Y et $i,j \in \{0,1,2,3\}$. On définit le champ scalaire $\Omega^i_j(X,Y)$ par :

$$\Omega^i_j(X,Y) := \theta^i\left(\mathscr{R}(X,Y)\theta_j\right).$$

On a donc une 2-forme $\Omega^i_j \in \Lambda^2(U)$ qui à tous champs de vecteurs X et Y associe le champ scalaire $\Omega^i_j(X,Y)$. On a la décomposition :

$$\mathscr{R}(X,Y)\theta_j = \Omega^i_j(X,Y)\theta_i.$$

Lemme 1.3.4.2: Propriétés usuelles

Soit $i,j,k \in \{0,1,2,3\}$.

(i) On a :

$$\Omega^i_j = \mathrm{d}\varpi^i{}_j + \varpi^i{}_k \wedge \varpi^k{}_j$$

(ii) On a :

$$\Omega^k{}_j = -\eta_k\eta_j\Omega^j{}_k.$$

(iii) On a :

$$\Omega^k{}_k = 0.$$

Démonstration. (i) On a pour tous champs de vecteurs X et Y :

$$\begin{aligned}
\Omega^i_j(X,Y)\theta_i =& R(X,Y)\theta_j = \nabla_X\nabla_Y\theta_j - \nabla_Y\nabla_X\theta_j - \nabla_{[X,Y]}\theta_j \\
=& \nabla_X\left(\varpi^i{}_j(Y)\theta_i\right) - \nabla_Y\left(\varpi^i{}_j(X)\theta_i\right) - \varpi^i{}_j([X,Y])\theta_i \\
=& X\left(\varpi^k{}_j(Y)\right)\theta_k + \varpi^k{}_j(Y)\nabla_X\theta_k - Y\left(\varpi^k{}_j(X)\right)\theta_k - \varpi^k{}_j(X)\nabla_X\theta_k - \varpi^i{}_j([X,Y])\theta_i \\
=& X\left(\varpi^k{}_j(Y)\right)\theta_k + \varpi^k{}_j(Y)\varpi^i{}_k(X)\theta_i - Y\left(\varpi^k{}_j(X)\right)\theta_k - \varpi^k{}_j(X)\varpi^i{}_k(Y)\theta_i - \varpi^i{}_j([X,Y])\theta_i \\
=& X\left(\varpi^i{}_j(Y)\right)\theta_i + \varpi^k{}_j(Y)\varpi^i{}_k(X)\theta_i - Y\left(\varpi^i{}_j(X)\right)\theta_i - \varpi^k{}_j(X)\varpi^i{}_k(Y)\theta_i - \varpi^i{}_j([X,Y])\theta_i \\
=& \left(X\left(\varpi^i{}_j(Y)\right) + \varpi^k{}_j(Y)\varpi^i{}_k(X) - Y\left(\varpi^i{}_j(X)\right) - \varpi^k{}_j(X)\varpi^i{}_k(Y) - \varpi^i{}_j([X,Y])\right)\theta_i \\
=& \left(X\left(\varpi^i{}_j(Y)\right) - Y\left(\varpi^i{}_j(X)\right) - \varpi^i{}_j([X,Y]) + \varpi^k{}_j(Y)\varpi^i{}_k(X) - \varpi^k{}_j(X)\varpi^i{}_k(Y)\right)\theta_i \\
=& \left(\mathrm{d}\varpi^i{}_j(X,Y) + \left(\varpi^i{}_k \otimes \varpi^k{}_j - \varpi^k{}_j \otimes \varpi^i{}_k\right)(X,Y)\right)\theta_i \\
=& \left(\mathrm{d}\varpi^i{}_j + \varpi^i{}_k \wedge \varpi^k{}_j\right)(X,Y)\theta_i
\end{aligned}$$

Comme cela est vrai pour tous champs de vecteurs X, Y et θ_i, on a le résultat.

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
-\eta_k\eta_j\Omega^j{}_k &= -\eta_k\eta_j\left(\mathrm{d}\varpi^j{}_k + \varpi^j{}_i \wedge \varpi^i{}_k\right) \\
&= -\eta_k\eta_j\mathrm{d}\varpi^j{}_k - \eta_k\eta_j\varpi^j{}_i \wedge \varpi^i{}_k \\
&= \mathrm{d}\left(-\eta_k\eta_j\varpi^j{}_k\right) - \left(-\eta_i\eta_j\varpi^j{}_i\right) \wedge \left(-\eta_k\eta_i\varpi^i{}_k\right) \\
&= \mathrm{d}\varpi^k{}_j - \varpi^i{}_j \wedge \varpi^k{}_i \\
&= \mathrm{d}\varpi^k{}_j + \varpi^k{}_i \wedge \varpi^i{}_j \\
&= \Omega^k{}_j
\end{aligned}$$

(iii) On a par (ii) :

$$\Omega^k{}_k = -\eta_k\eta_k\Omega^k{}_k = -\Omega^k{}_k$$

i.e. on a $\Omega^k{}_k = 0$.

□

Lemme 1.3.4.3: Lemme préparatoire au calcul des deux formes Ω^i_j

Soit $i,j,k,l \in \{0,1,2,3\}$ **distincts** *i.e.* on a $\{0,1,2,3\} = \{i,j,k,l\}$, et $p,q \neq i,j$.

(i) On a :

$$\varpi^i{}_p \wedge \varpi^p{}_j = u_{i,p}u_{p,j}e^{-u_p-u_j}\theta^{i,p} - \eta_p\eta_j u_{i,p}u_{j,p}e^{-2u_p}\theta^{i,j} + \eta_i\eta_j u_{p,i}u_{j,p}e^{-u_i-u_p}\theta^{p,j}.$$

(ii) On a :

$$\mathrm{d}\varpi^i{}_j = \left(u_{i,jq} + u_{i,j}\left(u_{i,q} - u_{j,q}\right)\right)e^{-u_j-u_q}\theta^{q,i} - \eta_i\eta_j\left(u_{j,iq} + u_{j,i}\left(u_{j,q} - u_{i,q}\right)\right)e^{-u_i-u_q}\theta^{q,j}.$$

Démonstration. (i) On a :

$$\begin{aligned}\varpi^i{}_p \wedge \varpi^p{}_j &= \left(u_{i,p}e^{-u_p}\theta^i - \eta_i\eta_p u_{p,i}e^{-u_i}\theta^p\right)\wedge\left(u_{p,j}e^{-u_j}\theta^p - \eta_p\eta_j u_{j,p}e^{-u_p}\theta^j\right)\\ &= u_{i,p}u_{p,j}e^{-u_p-u_j}\theta^{i,p} - \eta_p\eta_j u_{i,p}u_{j,p}e^{-2u_p}\theta^{i,j} + \eta_i\eta_j u_{p,i}u_{j,p}e^{-u_i-u_p}\theta^{p,j}\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varpi^i{}_j =&\mathrm{d}\left(u_{i,j}e^{-u_j}\theta^i - \eta_i\eta_j u_{j,i}e^{-u_i}\theta^j\right)\\ =&\mathrm{d}\left(u_{i,j}e^{-u_j}\theta^i\right) - \eta_i\eta_j\mathrm{d}\left(u_{j,i}e^{-u_i}\theta^j\right)\\ =&\mathrm{d}\left(u_{i,j}e^{-u_j}\right)\wedge\theta^i + u_{i,j}e^{-u_j}\mathrm{d}\left(\theta^i\right) - \eta_i\eta_j\mathrm{d}\left(u_{j,i}e^{-u_i}\right)\wedge\theta^j - \eta_i\eta_j u_{j,i}e^{-u_i}\mathrm{d}\left(\theta^j\right)\\ =&\left(u_{i,jq} - u_{i,j}u_{j,q}\right)e^{-u_j}\mathrm{d}x^q\wedge\theta^i + u_{i,j}e^{-u_j}u_{i,q}e^{-u_q}\theta^{q,i}\\ &-\eta_i\eta_j\left(u_{j,iq} - u_{j,i}u_{i,q}\right)e^{-u_i}\mathrm{d}x^q\wedge\theta^j - \eta_i\eta_j u_{j,i}e^{-u_i}u_{j,q}e^{-u_q}\theta^{q,j}\\ =&\left(u_{i,jq} + u_{i,j}\left(u_{i,q} - u_{j,q}\right)\right)e^{-u_j-u_q}\theta^{q,i} - \eta_i\eta_j\left(u_{j,iq} + u_{j,i}\left(u_{j,q} - u_{i,q}\right)\right)e^{-u_i-u_q}\theta^{q,j}\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.4.4: Valeurs exactes des deux formes Ω^i_j

On a :

$$\begin{aligned}\Omega^i_j =& \sum_{p\neq i,j}\left[\left(u_{i,jp} + u_{i,j}\left(u_{i,p} - u_{j,p}\right) - u_{i,p}u_{p,j}\right)e^{-u_p-u_j}\theta^{p,i} + \eta_i\eta_j\left(u_{p,i}u_{j,p} - u_{j,ip} + u_{j,i}\left(u_{i,p} - u_{j,p}\right)\right)e^{-u_i-u_p}\theta^{p,j}\right]\\ &+\left[\left(u_{i,jj} + u_{i,j}\left(u_{i,j} - u_{j,j}\right)\right)e^{-2u_j} + \eta_i\eta_j\left(u_{j,ii} + u_{j,i}\left(u_{j,i} - u_{i,i}\right)\right)e^{-2u_i} + \eta_j\sum_{p\neq i,j}\eta_p u_{i,p}u_{j,p}e^{-2u_p}\right]\theta^{j,i}\end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\Omega^i_j =&\mathrm{d}\varpi^i{}_j + \sum_{p\neq i,j}\varpi^i{}_p\wedge\varpi^p{}_j\\ =&\left(u_{i,jq} + u_{i,j}\left(u_{i,q} - u_{j,q}\right)\right)e^{-u_j-u_q}\theta^{q,i} - \eta_i\eta_j\left(u_{j,iq} + u_{j,i}\left(u_{j,q} - u_{i,q}\right)\right)e^{-u_i-u_q}\theta^{q,j}\\ &+\sum_{p\neq i,j}u_{i,p}u_{p,j}e^{-u_p-u_j}\theta^{i,p} - \eta_p\eta_j u_{i,p}u_{j,p}e^{-2u_p}\theta^{i,j} + \eta_i\eta_j u_{p,i}u_{j,p}e^{-u_i-u_p}\theta^{p,j}\\ =&\left(u_{i,jj} + u_{i,j}\left(u_{i,j} - u_{j,j}\right)\right)e^{-u_j-u_j}\theta^{j,i} + \left(u_{i,jk} + u_{i,j}\left(u_{i,k} - u_{j,k}\right)\right)e^{-u_j-u_k}\theta^{k,i}\\ &+\left(u_{i,jl} + u_{i,j}\left(u_{i,l} - u_{j,l}\right)\right)e^{-u_j-u_l}\theta^{l,i} - \eta_i\eta_j\left(u_{j,ii} + u_{j,i}\left(u_{j,i} - u_{i,i}\right)\right)e^{-u_i-u_i}\theta^{i,j}\\ &-\eta_i\eta_j\left(u_{j,ik} + u_{j,i}\left(u_{j,k} - u_{i,k}\right)\right)e^{-u_i-u_k}\theta^{k,j} - \eta_i\eta_j\left(u_{j,il} + u_{j,i}\left(u_{j,l} - u_{i,l}\right)\right)e^{-u_i-u_l}\theta^{l,j}\\ &+u_{i,k}u_{k,j}e^{-u_k-u_j}\theta^{i,k} - \eta_k\eta_j u_{i,k}u_{j,k}e^{-2u_k}\theta^{i,j} + \eta_i\eta_j u_{k,i}u_{j,k}e^{-u_i-u_k}\theta^{k,j}\\ &+u_{i,l}u_{l,j}e^{-u_l-u_j}\theta^{i,l} - \eta_l\eta_j u_{i,l}u_{j,l}e^{-2u_l}\theta^{i,j} + \eta_i\eta_j u_{l,i}u_{j,l}e^{-u_i-u_l}\theta^{l,j}\end{aligned}$$

$$= \sum_{p\neq i,j}\left[\left(u_{i,jp}+u_{i,j}\left(u_{i,p}-u_{j,p}\right)-u_{i,p}u_{p,j}\right)e^{-u_j-u_p}\theta^{p,i}-\eta_i\eta_j\left(u_{j,ip}+u_{j,i}\left(u_{j,p}-u_{i,p}\right)-u_{p,i}u_{j,p}\right)e^{-u_i-u_p}\theta^{p,j}\right]$$
$$+\left[\left(u_{i,jj}+u_{i,j}\left(u_{i,j}-u_{j,j}\right)\right)e^{-2u_j}+\eta_i\eta_j\left(u_{j,ii}+u_{j,i}\left(u_{j,i}-u_{i,i}\right)\right)e^{-2u_i}+\eta_j\sum_{p\neq i,j}\eta_p u_{i,p}u_{j,p}e^{-2u_p}\right]\theta^{j,i}$$

□

Exemple 1.3.4.5: Suite 5 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1, 1.1.5.1, 1.2.5.5, 1.2.6.3 et 1.2.6.5) avec :

$$u_0(t,r) := u(t,r) \qquad u_1(t,r) := v(t,r)$$
$$u_2(t,r) := b(t)+\ln(r) \qquad u_3(t,r,\vartheta) := b(t)+\ln(r)+\ln\sin(\vartheta)$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\Omega_0^1 &= \left(u_{1,02}+u_{1,0}\left(u_{1,2}-u_{0,2}\right)-u_{1,2}u_{2,0}\right)e^{-u_2-u_0}\theta^{2,1}\\
&\quad+\eta_1\eta_0\left(u_{2,1}u_{0,2}-u_{0,12}+u_{0,1}\left(u_{1,2}-u_{0,2}\right)\right)e^{-u_1-u_2}\theta^{2,0}\\
&\quad+\left(u_{1,03}+u_{1,0}\left(u_{1,3}-u_{0,3}\right)-u_{1,3}u_{3,0}\right)e^{-u_3-u_0}\theta^{3,1}\\
&\quad+\eta_1\eta_0\left(u_{3,1}u_{0,3}-u_{0,13}+u_{0,1}\left(u_{1,3}-u_{0,3}\right)\right)e^{-u_1-u_3}\theta^{3,0}\\
&\quad+\left[\left(u_{1,00}+u_{1,0}\left(u_{1,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}+\eta_1\eta_0\left(u_{0,11}+u_{0,1}\left(u_{0,1}-u_{1,1}\right)\right)e^{-2u_1}\right]\theta^{0,1}\\
&\quad+\left[\eta_0\eta_2u_{1,2}u_{0,2}e^{-2u_2}+\eta_0\eta_3u_{1,3}u_{0,3}e^{-2u_3}\right]\theta^{0,1}\\
&=\left[\left(u_{1,00}+u_{1,0}\left(u_{1,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}+\eta_1\eta_0\left(u_{0,11}+u_{0,1}\left(u_{0,1}-u_{1,1}\right)\right)e^{-2u_1}\right]\theta^{0,1}\\
&=\left[\left(\ddot v+\dot v\left(\dot v-\dot u\right)\right)e^{-2u}-\left(u''+u'\left(u'-v'\right)\right)e^{-2v}\right]\theta^{0,1}
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\Omega_0^2 &= \left(u_{2,01}+u_{2,0}\left(u_{2,1}-u_{0,1}\right)-u_{2,1}u_{1,0}\right)e^{-u_1-u_0}\theta^{1,2}\\
&\quad+\eta_2\eta_0\left(u_{1,2}u_{0,1}-u_{0,21}+u_{0,2}\left(u_{2,1}-u_{0,1}\right)\right)e^{-u_2-u_1}\theta^{1,0}\\
&\quad+\left(u_{2,03}+u_{2,0}\left(u_{2,3}-u_{0,3}\right)-u_{2,3}u_{3,0}\right)e^{-u_3-u_0}\theta^{3,2}\\
&\quad+\eta_2\eta_0\left(u_{3,2}u_{0,3}-u_{0,23}+u_{0,2}\left(u_{2,3}-u_{0,3}\right)\right)e^{-u_2-u_3}\theta^{3,0}\\
&\quad+\left[\left(u_{2,00}+u_{2,0}\left(u_{2,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}+\eta_2\eta_0\left(u_{0,22}+u_{0,2}\left(u_{0,2}-u_{2,2}\right)\right)e^{-2u_2}\right]\theta^{0,2}\\
&\quad+\left[\eta_0\eta_1u_{2,1}u_{0,1}e^{-2u_1}+\eta_0\eta_3u_{2,3}u_{0,3}e^{-2u_3}\right]\theta^{0,2}\\
&=\left(u_{2,0}\left(u_{2,1}-u_{0,1}\right)-u_{2,1}u_{1,0}\right)e^{-u_1-u_0}\theta^{1,2}+\left[\left(u_{2,00}+u_{2,0}\left(u_{2,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}\right]\theta^{0,2}\\
&\quad+\eta_0\eta_1u_{2,1}u_{0,1}e^{-2u_1}\theta^{0,2}\\
&=\left(\dot b\left(r^{-1}-u'\right)-r^{-1}\dot v\right)e^{-u-v}\theta^{1,2}+\left[\left(\ddot b+\dot b\left(\dot b-\dot u\right)\right)e^{-2u}-r^{-1}u'e^{-2v}\right]\theta^{0,2}
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\Omega_0^3 &= \left(u_{3,01}+u_{3,0}\left(u_{3,1}-u_{0,1}\right)-u_{3,1}u_{1,0}\right)e^{-u_1-u_0}\theta^{1,3}\\
&\quad+\eta_3\eta_0\left(u_{1,3}u_{0,1}-u_{0,31}+u_{0,3}\left(u_{3,1}-u_{0,1}\right)\right)e^{-u_3-u_1}\theta^{1,0}\\
&\quad+\left(u_{3,02}+u_{3,0}\left(u_{3,2}-u_{0,2}\right)-u_{3,2}u_{2,0}\right)e^{-u_2-u_0}\theta^{2,3}\\
&\quad+\eta_3\eta_0\left(u_{2,3}u_{0,2}-u_{0,32}+u_{0,3}\left(u_{3,2}-u_{0,2}\right)\right)e^{-u_3-u_2}\theta^{2,0}\\
&\quad+\left[\left(u_{3,00}+u_{3,0}\left(u_{3,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}+\eta_3\eta_0\left(u_{0,33}+u_{0,3}\left(u_{0,3}-u_{3,3}\right)\right)e^{-2u_3}\right]\theta^{0,3}\\
&\quad+\left[\eta_0\eta_1u_{3,1}u_{0,1}e^{-2u_1}+\eta_0\eta_2u_{3,2}u_{0,2}e^{-2u_2}\right]\theta^{0,3}\\
&=\left(u_{3,0}\left(u_{3,1}-u_{0,1}\right)-u_{3,1}u_{1,0}\right)e^{-u_1-u_0}\theta^{1,3}+\left(u_{3,0}u_{3,2}-u_{3,2}u_{2,0}\right)e^{-u_2-u_0}\theta^{2,3}\\
&\quad+\left[\left(u_{3,00}+u_{3,0}\left(u_{3,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}+\eta_0\eta_1u_{3,1}u_{0,1}e^{-2u_1}\right]\theta^{0,3}\\
&=\left(\dot b\left(r^{-1}-u'\right)-r^{-1}\dot v\right)e^{-u-v}\theta^{1,3}+\left[\left(\ddot b+\dot b\left(\dot b-\dot u\right)\right)e^{-2u}-r^{-1}u'e^{-2v}\right]\theta^{0,3}
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\Omega^2_1 =& \left(u_{2,10} + u_{2,1}\left(u_{2,0} - u_{1,0}\right) - u_{2,0}u_{0,1}\right) e^{-u_0-u_1}\theta^{0,2} \\
&+ \eta_2\eta_1\left(u_{0,2}u_{1,0} - u_{1,20} + u_{1,2}\left(u_{2,0} - u_{1,0}\right)\right) e^{-u_2-u_0}\theta^{0,1} \\
&+ \left(u_{2,13} + u_{2,1}\left(u_{2,3} - u_{1,3}\right) - u_{2,3}u_{3,1}\right) e^{-u_3-u_1}\theta^{3,2} \\
&+ \eta_2\eta_1\left(u_{3,2}u_{1,3} - u_{1,23} + u_{1,2}\left(u_{2,3} - u_{1,3}\right)\right) e^{-u_2-u_3}\theta^{3,1} \\
&+ \left[\left(u_{2,11} + u_{2,1}\left(u_{2,1} - u_{1,1}\right)\right) e^{-2u_1} + \eta_2\eta_1\left(u_{1,22} + u_{1,2}\left(u_{1,2} - u_{2,2}\right)\right) e^{-2u_2}\right]\theta^{1,2} \\
&+ \left[\eta_1\eta_0 u_{2,0}u_{1,0}e^{-2u_0} + \eta_1\eta_3 u_{2,3}u_{1,3}e^{-2u_3}\right]\theta^{1,2} \\
=& \left(u_{2,1}\left(u_{2,0} - u_{1,0}\right) - u_{2,0}u_{0,1}\right) e^{-u_0-u_1}\theta^{0,2} \\
&+ \left[\left(u_{2,11} + u_{2,1}\left(u_{2,1} - u_{1,1}\right)\right) e^{-2u_1} + \eta_1\eta_0 u_{2,0}u_{1,0}e^{-2u_0}\right]\theta^{1,2} \\
=& \left(r^{-1}\left(\dot{b} - \dot{v}\right) - \dot{b}u'\right) e^{-u-v}\theta^{0,2} + \left[-r^{-1}v'e^{-2v} - \dot{v}\dot{b}e^{-2u}\right]\theta^{1,2}
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\Omega^3_1 =& \left(u_{3,10} + u_{3,1}\left(u_{3,0} - u_{1,0}\right) - u_{3,0}u_{0,1}\right) e^{-u_0-u_1}\theta^{0,3} \\
&+ \eta_3\eta_1\left(u_{0,3}u_{1,0} - u_{1,30} + u_{1,3}\left(u_{3,0} - u_{1,0}\right)\right) e^{-u_3-u_0}\theta^{0,1} \\
&+ \left(u_{3,12} + u_{3,1}\left(u_{3,2} - u_{1,2}\right) - u_{3,2}u_{2,1}\right) e^{-u_2-u_1}\theta^{2,3} \\
&+ \eta_3\eta_1\left(u_{2,3}u_{1,2} - u_{1,32} + u_{1,3}\left(u_{3,2} - u_{1,2}\right)\right) e^{-u_3-u_2}\theta^{2,1} \\
&+ \left[\left(u_{3,11} + u_{3,1}\left(u_{3,1} - u_{1,1}\right)\right) e^{-2u_1} + \eta_3\eta_1\left(u_{1,33} + u_{1,3}\left(u_{1,3} - u_{3,3}\right)\right) e^{-2u_3}\right]\theta^{1,3} \\
&+ \left[\eta_1\eta_0 u_{3,0}u_{1,0}e^{-2u_0} + \eta_1\eta_2 u_{3,2}u_{1,2}e^{-2u_2}\right]\theta^{1,3} \\
=& \left(u_{3,1}\left(u_{3,0} - u_{1,0}\right) - u_{3,0}u_{0,1}\right) e^{-u_0-u_1}\theta^{0,3} + \left(u_{3,1}u_{3,2} - u_{3,2}u_{2,1}\right) e^{-u_2-u_1}\theta^{2,3} \\
&+ \left[\left(u_{3,11} + u_{3,1}\left(u_{3,1} - u_{1,1}\right)\right) e^{-2u_1} + \eta_1\eta_0 u_{3,0}u_{1,0}e^{-2u_0}\right]\theta^{1,3} \\
=& \left(r^{-1}\left(\dot{b} - \dot{v}\right) - \dot{b}u'\right) e^{-u-v}\theta^{0,3} + \left[-r^{-1}v'e^{-2v} - \dot{v}\dot{b}e^{-2u}\right]\theta^{1,3}
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\Omega^3_2 =& \left(u_{3,20} + u_{3,2}\left(u_{3,0} - u_{2,0}\right) - u_{3,0}u_{0,2}\right) e^{-u_0-u_2}\theta^{0,3} \\
&+ \eta_3\eta_2\left(u_{0,3}u_{2,0} - u_{2,30} + u_{2,3}\left(u_{3,0} - u_{2,0}\right)\right) e^{-u_3-u_0}\theta^{0,2} \\
&+ \left(u_{3,21} + u_{3,2}\left(u_{3,1} - u_{2,1}\right) - u_{3,1}u_{1,2}\right) e^{-u_1-u_2}\theta^{1,3} \\
&+ \eta_3\eta_2\left(u_{1,3}u_{2,1} - u_{2,31} + u_{2,3}\left(u_{3,1} - u_{2,1}\right)\right) e^{-u_3-u_1}\theta^{1,2} \\
&+ \left[\left(u_{3,22} + u_{3,2}\left(u_{3,2} - u_{2,2}\right)\right) e^{-2u_2} + \eta_3\eta_2\left(u_{2,33} + u_{2,3}\left(u_{2,3} - u_{3,3}\right)\right) e^{-2u_3}\right]\theta^{2,3} \\
&+ \left[\eta_2\eta_0 u_{3,0}u_{2,0}e^{-2u_0} + \eta_2\eta_1 u_{3,1}u_{2,1}e^{-2u_1}\right]\theta^{2,3} \\
=& u_{3,2}\left(u_{3,0} - u_{2,0}\right) e^{-u_0-u_2}\theta^{0,3} + u_{3,2}\left(u_{3,1} - u_{2,1}\right) e^{-u_1-u_2}\theta^{1,3} \\
&+ \left[\left(u_{3,22} + \left(u_{3,2}\right)^2\right) e^{-2u_2} + \eta_2\eta_0 u_{3,0}u_{2,0}e^{-2u_0} + \eta_2\eta_1 u_{3,1}u_{2,1}e^{-2u_1}\right]\theta^{2,3} \\
=& \left[-r^{-2}e^{-2b} - \left(\dot{b}\right)^2 e^{-2u} + r^{-2}e^{-2v}\right]\theta^{2,3}
\end{aligned}$$

1.3.5 Calculs pratiques dans $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$

On commence par un lien entre les $\mathbb{R}^i{}_{jkl}$ et les Ω^i_j.

Lemme 1.3.5.1: Lien avec les 2-formes Ω^i_j

On a :

$$\mathbb{R}^i{}_{jkl} = \Omega^i_j\left(\theta_k, \theta_l\right).$$

Démonstration. On a par définition des $\mathbb{R}^i{}_{jkl}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^i{}_{jkl} &= \theta^i\left(R\left(\theta_k, \theta_l\right)\theta_j\right)\\ &= \theta^i\left(\Omega^l_j\left(\theta_k, \theta_l\right)\theta_l\right)\\ &= \Omega^l_j\left(\theta_k, \theta_l\right)\delta^i_l\\ &= \Omega^i_j\left(\theta_k, \theta_l\right)\end{aligned}$$

□

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^i{}_{jil} &= \Omega^i_j\left(\theta_i, \theta_l\right)\\ &= \mathrm{d}\varpi^i{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right) + \varpi^i{}_p \wedge \varpi^p{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right)\end{aligned}$$

Le lemme suivant donne la valeur de chaque terme de droite.

Lemme 1.3.5.2: Lemme préparatoire au calcul des tenseurs de Riemann

Soit i, j, k, l tels que $\{0, 1, 2, 3\} = \{i, j, k, l\}$ et $p \neq i, j$.

(i) (a) On a :

$$\varpi^i{}_p \wedge \varpi^p{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right) = \delta^p_l u_{i,l} u_{l,j} e^{-u_l - u_j}.$$

(b) On a :

$$\varpi^i{}_p \wedge \varpi^p{}_j\left(\theta_i, \theta_j\right) = -\eta_p \eta_j u_{i,p} u_{j,p} e^{-2u_p}.$$

(ii) (a) On a :

$$\mathrm{d}\varpi^i{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right) = -\left(u_{i,jl} + u_{i,j}\left(u_{i,l} - u_{j,l}\right)\right) e^{-u_j - u_l}.$$

(b) On a :

$$\mathrm{d}\varpi^i{}_j\left(\theta_i, \theta_j\right) = -\left(u_{i,jj} + u_{i,j}\left(u_{i,j} - u_{j,j}\right)\right) e^{-2u_j} - \eta_i \eta_j\left(u_{j,ii} + u_{j,i}\left(u_{j,i} - u_{i,i}\right)\right) e^{-2u_i}.$$

Démonstration. (i) (a) On a :

$$\begin{aligned}\varpi^i{}_p \wedge \varpi^p{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right) =& u_{i,p} u_{p,j} e^{-u_p - u_j}\theta^{i,p}\left(\theta_i, \theta_l\right) - \eta_p \eta_j u_{i,p} u_{j,p} e^{-2u_p}\theta^{i,j}\left(\theta_i, \theta_l\right)\\ &+ \eta_i \eta_j u_{p,i} u_{j,p} e^{-u_i - u_p}\theta^{p,j}\left(\theta_i, \theta_l\right)\\ =& u_{i,p} u_{p,j} e^{-u_p - u_j}\theta^{i,p}\left(\theta_i, \theta_l\right)\\ =& \delta^p_l u_{i,l} u_{l,j} e^{-u_l - u_j}\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\varpi^i{}_p \wedge \varpi^p{}_j\left(\theta_i, \theta_j\right) =& u_{i,p} u_{p,j} e^{-u_p - u_j}\theta^{i,p}\left(\theta_i, \theta_j\right) - \eta_p \eta_j u_{i,p} u_{j,p} e^{-2u_p}\theta^{i,j}\left(\theta_i, \theta_j\right)\\ &+ \eta_i \eta_j u_{p,i} u_{j,p} e^{-u_i - u_p}\theta^{p,j}\left(\theta_i, \theta_j\right)\\ =& -\eta_p \eta_j u_{i,p} u_{j,p} e^{-2u_p}\theta^{i,j}\left(\theta_i, \theta_j\right)\\ =& -\eta_p \eta_j u_{i,p} u_{j,p} e^{-2u_p}\end{aligned}$$

(ii) (a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varpi^i{}_j(\theta_i,\theta_l) &= (u_{i,jq}+u_{i,j}(u_{i,q}-u_{j,q}))\,e^{-u_j-u_q}\theta^{q,i}(\theta_i,\theta_l)\\
&\quad -\eta_i\eta_j(u_{j,iq}+u_{j,i}(u_{j,q}-u_{i,q}))\,e^{-u_i-u_q}\theta^{q,j}(\theta_i,\theta_l)\\
&= (u_{i,jq}+u_{i,j}(u_{i,q}-u_{j,q}))\,e^{-u_j-u_q}\theta^{q,i}(\theta_i,\theta_l)\\
&= -\left(u_{i,jl}+u_{i,j}\left(u_{i,l}-u_{j,l}\right)\right)e^{-u_j-u_l}
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varpi^i{}_j(\theta_i,\theta_j) &= (u_{i,jq}+u_{i,j}(u_{i,q}-u_{j,q}))\,e^{-u_j-u_q}\theta^{q,i}(\theta_i,\theta_j)\\
&\quad -\eta_i\eta_j(u_{j,iq}+u_{j,i}(u_{j,q}-u_{i,q}))\,e^{-u_i-u_q}\theta^{q,j}(\theta_i,\theta_j)\\
&= -\delta_j^q(u_{i,jq}+u_{i,j}(u_{i,q}-u_{j,q}))\,e^{-u_j-u_q}-\delta_i^q\eta_i\eta_j(u_{j,iq}+u_{j,i}(u_{j,q}-u_{i,q}))\,e^{-u_i-u_q}\\
&= -(u_{i,jj}+u_{i,j}(u_{i,j}-u_{j,j}))\,e^{-2u_j}-\eta_i\eta_j(u_{j,ii}+u_{j,i}(u_{j,i}-u_{i,i}))\,e^{-2u_i}
\end{aligned}$$

□

On en déduit les valeurs exactes des composantes du tenseur de Riemann $\mathbb{R}^i{}_{jkl}$.

Théorème 1.3.5.3: Valeurs des tenseurs de Riemann

Soit i,j,k,l tels que $\{0,1,2,3\}=\{i,j,k,l\}$.

(i) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^i{}_{jil} &= -\left(u_{i,jl}+u_{i,j}\left(u_{i,l}-u_{j,l}\right)-u_{i,l}u_{l,j}\right)e^{-u_j-u_l}\\
\mathbb{R}^j{}_{iil} &= -\eta_i\eta_j\mathbb{R}^i{}_{jil}\\
\mathbb{R}^j{}_{ili} &= -\mathbb{R}^j{}_{iil}\\
\mathbb{R}^i{}_{jli} &= -\mathbb{R}^i{}_{jil}
\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^i{}_{jij} &= -(u_{i,jj}+u_{i,j}(u_{i,j}-u_{j,j}))\,e^{-2u_j}-\eta_i\eta_j(u_{j,ii}+u_{j,i}(u_{j,i}-u_{i,i}))\,e^{-2u_i}\\
&\quad -\eta_k\eta_j u_{i,k}u_{j,k}e^{-2u_k}-\eta_l\eta_j u_{i,l}u_{j,l}e^{-2u_l}
\end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{R}^j{}_{iij}=-\eta_i\eta_j\mathbb{R}^i{}_{jij}.$$

(iii) Toutes les autres valeurs du tenseur de Riemann sont nulles.

Démonstration. (i) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^i{}_{jil} &= \Omega^i_j(\theta_i,\theta_l)\\
&= \mathrm{d}\varpi^i{}_j(\theta_i,\theta_l)+\varpi^i{}_p\wedge\varpi^p{}_j(\theta_i,\theta_l)\\
&= \mathrm{d}\varpi^i{}_j(\theta_i,\theta_l)+\varpi^i{}_k\wedge\varpi^k{}_j(\theta_i,\theta_l)+\varpi^i{}_l\wedge\varpi^l{}_j(\theta_i,\theta_l)\\
&= -\left(u_{i,jl}+u_{i,j}\left(u_{i,l}-u_{j,l}\right)\right)e^{-u_j-u_l}+u_{i,l}u_{l,j}e^{-u_l-u_j}\\
&= -\left(u_{i,jl}+u_{i,j}\left(u_{i,l}-u_{j,l}\right)-u_{i,l}u_{l,j}\right)e^{-u_j-u_l}
\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
{\mathbb{R}^i}_{jij} =&\Omega^i_j\left(\theta_i,\theta_j\right)\\
=&\mathrm{d}{\varpi^i}_j\left(\theta_i,\theta_j\right)+{\varpi^i}_p\wedge{\varpi^p}_j\left(\theta_i,\theta_j\right)\\
=&\mathrm{d}{\varpi^i}_j\left(\theta_i,\theta_j\right)+{\varpi^i}_k\wedge{\varpi^k}_j\left(\theta_i,\theta_j\right)+{\varpi^i}_l\wedge{\varpi^l}_j\left(\theta_i,\theta_j\right)\\
=&-\left(u_{i,jj}+u_{i,j}\left(u_{i,j}-u_{j,j}\right)\right)e^{-2u_j}-\eta_i\eta_j\left(u_{j,ii}+u_{j,i}\left(u_{j,i}-u_{i,i}\right)\right)e^{-2u_i}\\
&-\eta_k\eta_j u_{i,k}u_{j,k}e^{-2u_k}-\eta_l\eta_j u_{i,l}u_{j,l}e^{-2u_l}
\end{aligned}$$

(iii) Comme $\Omega^i_i=0$, on a pour tous p,q :

$${\mathbb{R}^i}_{ipq}=0.$$

Comme Ω^i_j est une forme alternée, on a :

$${\mathbb{R}^p}_{qii}=0.$$

Par l'expression générale trouvée des Ω^i_j dans la proposition 1.3.4.4, ${\mathbb{R}^i}_{jkl}=0$.

□

On en déduit les valeurs dans le cas de la métrique h.

Exemple 1.3.5.4: Suite 6 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1, 1.1.5.1, 1.2.5.5, 1.2.6.3, 1.2.6.5 et 1.3.4.5) avec :

$$u_0(t,r):=u(t,r)\qquad u_1(t,r):=v(t,r)$$
$$u_2(t,r):=b(t)+\ln(r)\qquad u_3(t,r,\vartheta):=b(t)+\ln(r)+\ln\sin(\vartheta)$$

On étudie deux cas :

$$(1)\quad {\mathbb{R}^i}_{jij}\quad,\quad(2)\quad{\mathbb{R}^i}_{jil}.$$

(1) **Calculs des ${\mathbb{R}^i}_{jij}$.**

- Cas où $i:=0$. On a :

$$\begin{aligned}
{\mathbb{R}^0}_{101}=&-\left(u_{0,11}+u_{0,1}\left(u_{0,1}-u_{1,1}\right)\right)e^{-2u_1}\\
&-\eta_0\eta_1\left(u_{1,00}+u_{1,0}\left(u_{1,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}\\
&-\eta_2\eta_1u_{0,2}u_{1,2}e^{-2u_2}-\eta_3\eta_1u_{0,3}u_{1,3}e^{-2u_3}\\
=&-\left(u_{0,11}+u_{0,1}\left(u_{0,1}-u_{1,1}\right)\right)e^{-2u_1}-\eta_0\eta_1\left(u_{1,00}+u_{1,0}\left(u_{1,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}\\
=&-\left(u''+u'\left(u'-v'\right)\right)e^{-2v-2b}+\left(\ddot{v}+\dot{v}\left(\dot{v}-\dot{u}\right)\right)e^{-2b-2u}
\end{aligned}$$

- Cas où $j:=2,3$ ($k:=3,2$). On a :

$$\begin{aligned}
{\mathbb{R}^0}_{j0j}=&-\left(u_{0,jj}+u_{0,j}\left(u_{0,j}-u_{j,j}\right)\right)e^{-2u_j}\\
&-\eta_0\eta_j\left(u_{j,00}+u_{j,0}\left(u_{j,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}\\
&-\eta_1\eta_ju_{0,1}u_{j,1}e^{-2u_1}-\eta_k\eta_ju_{0,k}u_{j,k}e^{-2u_k}\\
=&-\eta_0\eta_j\left(u_{j,00}+u_{j,0}\left(u_{j,0}-u_{0,0}\right)\right)e^{-2u_0}-\eta_1\eta_ju_{0,1}u_{j,1}e^{-2u_1}\\
=&\left(\ddot{b}+\dot{b}\left(\dot{b}-\dot{u}\right)\right)e^{-2u}-r^{-1}u'e^{-2v}\\
{\mathbb{R}^1}_{j1j}=&-\left(u_{1,jj}+u_{1,j}\left(u_{1,j}-u_{j,j}\right)\right)e^{-2u_j}\\
&-\eta_1\eta_j\left(u_{j,11}+u_{j,1}\left(u_{j,1}-u_{1,1}\right)\right)e^{-2u_1}\\
&-\eta_0\eta_ju_{1,0}u_{j,0}e^{-2u_0}-\eta_k\eta_ju_{1,k}u_{j,k}e^{-2u_k}\\
=&-\eta_1\eta_j\left(u_{j,11}+u_{j,1}\left(u_{j,1}-u_{1,1}\right)\right)e^{-2u_1}-\eta_0\eta_ju_{1,0}u_{j,0}e^{-2u_0}\\
=&-r^{-1}v'e^{-2v}+\dot{v}\dot{b}e^{-2u}
\end{aligned}$$

- Cas où $i \coloneqq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2{}_{323} =& -\left(u_{2,33} + u_{2,3}\left(u_{2,3} - u_{3,3}\right)\right) e^{-2u_3} \\
& - \eta_2\eta_3\left(u_{3,22} + u_{3,2}\left(u_{3,2} - u_{2,2}\right)\right) e^{-2u_2} \\
& - \eta_0\eta_3 u_{2,0}u_{3,0}e^{-2u_0} - \eta_1\eta_3 u_{2,1}u_{3,1}e^{-2u_1} \\
=& - \eta_2\eta_3\left(u_{3,22} + \left(u_{3,2}\right)^2\right) e^{-2u_2} \\
& - \eta_0\eta_3 u_{2,0}u_{3,0}e^{-2u_0} - \eta_1\eta_3 u_{2,1}u_{3,1}e^{-2u_1} \\
=& r^{-2}e^{-2b} + \left(\dot{b}\right)^2 e^{-2u} - r^{-2}e^{-2v}
\end{aligned}$$

Les autres termes se calculent par symétrie.

(2) **Calculs des $\mathbb{R}^i{}_{jil}$.** On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^i{}_{jil} &= -\left(u_{i,jl} + u_{i,j}\left(u_{i,l} - u_{j,l}\right) + u_{i,l}u_{l,j}\right) e^{-u_j-u_l} \\
&= -\left(u_{i,j}\left(u_{i,l} - u_{j,l}\right) + u_{i,l}u_{l,j}\right) e^{-u_j-u_l}
\end{aligned}$$

- Cas où $j, l = 3$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^i{}_{3il} &= -\left(u_{i,3}\left(u_{i,l} - u_{3,l}\right) + u_{i,l}u_{l,3}\right) e^{-u_3-u_l} = 0 \\
\mathbb{R}^i{}_{ji3} &= -\left(u_{i,j}\left(u_{i,3} - u_{j,3}\right) + u_{i,3}u_{l,j}\right) e^{-u_j-u_3} = 0
\end{aligned}$$

- Cas où $i \coloneqq 0, 1$ (donc $j, l = 1, 0 = 1 - i$). On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^i{}_{2il} &= -\left(u_{i,2}\left(u_{i,l} - u_{2,l}\right) + u_{i,l}u_{l,2}\right) e^{-u_2-u_l} = 0 \\
\mathbb{R}^i{}_{ji2} &= -\left(u_{i,j}\left(u_{i,2} - u_{j,2}\right) + u_{i,2}u_{2,j}\right) e^{-u_j-u_2} = 0
\end{aligned}$$

- Cas où $i \coloneqq 3$. On a pour $j, l = 0, 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3{}_{230} &= -\left(u_{3,2}\left(u_{3,l} - u_{2,l}\right) - u_{3,l}u_{l,2}\right) e^{-u_2-u_l} \\
&= -\left(u_{3,2}\left(u_{2,l} - u_{2,l}\right)\right) e^{-u_2-u_l} \\
&= 0 \\
\mathbb{R}^3{}_{j32} &= -\left(u_{3,j}\left(u_{3,2} - u_{j,2}\right) - u_{3,2}u_{2,j}\right) e^{-u_j-u_2} \\
&= -\left(u_{3,j}u_{3,2} - u_{3,2}u_{2,j}\right) e^{-u_j-u_2} \\
&= -\left(u_{2,j}u_{3,2} - u_{3,2}u_{2,j}\right) e^{-u_j-u_2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Cas où $i \coloneqq 2, 3$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^i{}_{0i1} &= -\left(u_{i,0}\left(u_{i,1} - u_{0,1}\right) - u_{i,1}u_{1,0}\right) e^{-u_0-u_1} \\
&= -\left(\dot{b}\left(r^{-1} - u'\right) - r^{-1}\dot{v}\right) e^{-u-v} \\
\mathbb{R}^i{}_{1i0} &= -\left(u_{i,1}\left(u_{i,0} - u_{1,0}\right) - u_{i,0}u_{0,1}\right) e^{-u_1-u_0} \\
&= -\left(r^{-1}\left(\dot{b} - \dot{v}\right) - u'\dot{b}\right) e^{-u-v}
\end{aligned}$$

Ce sont les seuls termes non nuls du type $\mathbb{R}^i{}_{jil}$.

1.4 Tenseur de Ricci

1.4.1 Généralités

Le tenseur de courbure $\mathscr{R}$ est de type $(1,3)$, on peut donc contracter l'exposant avec le deuxième indice.

Définition 1.4.1.1: Le tenseur de Riemann

Le **tenseur de Ricci** est défini par :

$$\mathscr{R}\text{ic} = [\mathscr{R}]_2^1$$

i.e. on a pour tous champs de vecteurs Y et Z :

$$\mathscr{R}\text{ic}(Y,Z) = [\mathscr{R}]_2^1(Y,Z).$$

1.4.2 Calcul des composantes dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$

Définition 1.4.2.1: Le tenseur de Riemann

Les **composantes du tenseur de Ricci dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$** sont :

$$\mathbf{R}_{jl} := \mathscr{R}\text{ic}(e_j, e_l).$$

On a donc la décomposition :

$$\mathscr{R}\text{ic} = \mathbf{R}_{jl}\ e_j \otimes e_l.$$

On montre ensuite les propriétés usuelles du tenseur de Ricci. Pour le point (ii), on remarque que pour tous champs de vecteurs Y et Z, on a une application linéaire de TM (en chaque point p de M, on a une application linéaire de T_pM) :

$$X \longmapsto \mathscr{R}(X,Y)Z.$$

On peut donc regarder la trace de cette application linéaire.

Proposition 1.4.2.2: Propriétés usuelles

Soit $j,k,l,n \in \{0,1,2,3\}$ et deux champs de vecteurs Y et Z.

(i) (**Symétrie**) On a :

$$\mathbf{R}_{jl} = \mathbf{R}_{lj}.$$

(ii) (a) On a :

$$\mathscr{R}\text{ic}(Y,Z) = \operatorname{tr}\left(X \longmapsto \mathscr{R}(X,Y)Z\right).$$

(b) On a :

$$\mathbf{R}_{jl} = \mathbf{R}^i{}_{jil}.$$

(iii) (**Identité de Bianchi contractée**) On a :

$$\nabla_n \mathbf{R}_{jl} - \nabla_l \mathbf{R}_{jn} = -\nabla_k \mathbf{R}^k{}_{jln}.$$

Démonstration. (i) On utilise les trois premiers points de la proposition 1.3.2.3.

- Par le point (i), on a :

$$\mathbf{R}_{ijkl} + \mathbf{R}_{iklj} + \mathbf{R}_{iljk} = 0$$

- Par le point (iii), on a :

$$\begin{aligned} g^{ki}\mathbf{R}_{iklj} &= g^{ik}\mathbf{R}_{iklj} \\ &= -g^{ik}\mathbf{R}_{kilj} \\ &= -g^{ki}\mathbf{R}_{ikjl} \end{aligned}$$

i.e. on a :

$$g^{ki}\mathbf{R}_{iklj} = 0.$$

- Par le point (ii), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= g^{ki}\left(\mathbf{R}_{ijkl} + \mathbf{R}_{iklj} + \mathbf{R}_{iljk}\right) \\ &= \mathbf{R}^k{}_{jkl} + 0 + \mathbf{R}^k{}_{ljk} \\ &= \mathbf{R}_{jl} - \mathbf{R}^k{}_{lkj} \\ &= \mathbf{R}_{jl} - \mathbf{R}_{lj} \end{aligned}$$

i.e. on a :

$$\mathbf{R}_{jl} = \mathbf{R}_{lj}.$$

(ii) On montre les deux points en même temps. On rappelle que pour tout endomorphisme ϕ de TM, la **trace de** ϕ est définie par :

$$\mathrm{tr}(\phi) := e^i\left(\phi(e_i)\right).$$

La trace est indépendante de la base choisie.

Comme :

$$\mathscr{R} = \mathbf{R}^i{}_{mkn}\ e_i \otimes e^m \otimes e^k \otimes e^n$$

on a :

$$\begin{aligned} [\mathscr{R}]_2^1 &= \mathbf{R}^i{}_{mkn}\ e^k(e_i)e^m \otimes e^n \\ &= \mathbf{R}^i{}_{mkn}\ \delta_i^k e^m \otimes e^n \\ &= \mathbf{R}^i{}_{min}\ e^m \otimes e^n \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{R}\mathrm{ic}(e_j, e_l) &= [\mathscr{R}]_2^1(e_j, e_l) \\ &= \left(\mathbf{R}^i{}_{min}\ e^m \otimes e^n\right)(e_j, e_l) \\ &= \mathbf{R}^i{}_{mkn}\ e^m(e_j)e^n(e_l) \\ &= \mathbf{R}^i{}_{min}\ \delta_j^m \delta_l^n \\ &= \mathbf{R}^i{}_{jil} \end{aligned}$$

et d'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(X \longmapsto \mathscr{R}(X, e_j)e_l\right) &= e^p\left(\mathscr{R}(e_p, e_p)e_l\right) \\ &= e^p\left(\mathbf{R}^i{}_{mkn}\ e^m(e_l)e^k(e_p)e^n(e_j)e_i\right) \\ &= \mathbf{R}^i{}_{mkn}\ \delta_l^m \delta_p^k \delta_j^n e^p(e_i) \\ &= \mathbf{R}^i{}_{lpj}\ \delta_i^p \\ &= \mathbf{R}^i{}_{lij} \\ &= \mathbf{R}^i{}_{jil} \end{aligned}$$

D'où le résultat par bilinéarité de $\mathscr{R}$ic et de $(Y, Z) \longmapsto \mathrm{tr}\left(X \longmapsto \mathscr{R}(X, Y)Z\right)$.

(iii) On utilise les point (ii) et (iv) de la proposition 1.3.2.3.

- Par le point (iv), on a :

$$\nabla_n \mathbf{R}_{ijkl} + \nabla_k \mathbf{R}_{ijln} + \nabla_l \mathbf{R}_{ijnk} = 0.$$

$$\nabla_n \mathbf{R}_{ijkl} + \nabla_j \mathbf{R}_{iknl} + \nabla_k \mathbf{R}_{injl} = 0.$$

- Ainsi avec le point (ii), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= g^{ki} \left(\nabla_n \mathbf{R}_{ijkl} + \nabla_k \mathbf{R}_{ijln} + \nabla_l \mathbf{R}_{ijnk} \right) \\ &= \nabla_n {\mathbf{R}^k}_{jkl} + \nabla_k {\mathbf{R}^k}_{jln} + \nabla_l {\mathbf{R}^k}_{jnk} \\ &= \nabla_n \mathbf{R}_{jl} + \nabla_k {\mathbf{R}^k}_{jln} - \nabla_l {\mathbf{R}^k}_{jkn} \end{aligned}$$

i.e. on a :

$$\nabla_n \mathbf{R}_{jl} - \nabla_l \mathbf{R}_{jn} = -\nabla_k {\mathbf{R}^k}_{jln}.$$

□

Exemple 1.4.2.3: Composantes du tenseur de Ricci dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\perp$

(i) Les **composantes du tenseur de Ricci dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$** sont :

$$\mathrm{R}_{ij} := {\mathrm{R}^k}_{ikj}.$$

On a donc la décomposition :

$$\mathscr{R}\mathrm{ic} = \mathrm{R}_{jl}\ \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^l.$$

(ii) Les **composantes du tenseur de Ricci dans $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$** sont :

$$\mathbb{R}_{ij} := {\mathbb{R}^k}_{ikj}.$$

On a donc la décomposition :

$$\mathscr{R}\mathrm{ic} = \mathbb{R}_{jl}\ \theta^j \otimes \theta^l.$$

On a :

$$\mathbb{R}_{ij} = e^{-u_i - u_j} \mathrm{R}_{ij}.$$

1.4.3 Calcul des composantes dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$

Lemme 1.4.3.1: Propriétés usuelles

On a :

$$\mathrm{R}_{jl} = \partial_i \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{ij} + \Gamma^p_{jl} \Gamma^i_{ip} - \Gamma^p_{ij} \Gamma^i_{lp}.$$

Démonstration. On a par la proposition 1.3.3.1 :

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{jl} &= {\mathrm{R}^i}_{jil} \\ &= \partial_i \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{ij} + \Gamma^p_{jl} \Gamma^i_{ip} - \Gamma^p_{ij} \Gamma^i_{lp} \end{aligned}$$

□

Notation 1.4.3.2: La notation chapeau

On note

$$\hat{u}_{i,i} := \sum_{k \neq i} u_{k,i} \qquad \hat{u}_{i,jj} := \sum_{k \neq i} u_{k,jj} \qquad \hat{u}^2_{i,i} := \sum_{k \neq i} u^2_{k,i} \qquad \hat{u}_{ij,j} := \sum_{k \neq i,j} u_{k,j} \qquad \hat{u}_{ij,jj} := \sum_{k \neq i,j} u_{k,jj}$$

Théorème 1.4.3.3: Valeurs exactes des R_{jl}

Soit $j, l \in \{0,1,2,3\}$ distincts. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{jl} &= -\left[\sum_{p \neq j,l} u_{p,jl} - u_{j,l}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,l} + u_{p,j}u_{p,l}\right] \\
\mathrm{R}_{jj} &= -\left(\hat{u}_{j,jj} + \hat{u}^2_{j,j} - u_{j,j}\hat{u}_{j,j}\right) - \eta_j \sum_{p \neq j} \eta_p \left[u_{j,pp} + u_{j,p}\left(\hat{u}_{p,p} - u_{p,p}\right)\right] e^{2u_j - 2u_p}
\end{aligned}$$

Démonstration. On a deux cas.

- On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{jl} =& \partial_i \Gamma^i_{jl} - \partial_j \Gamma^i_{li} + \Gamma^i_{ip}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{jp}\Gamma^p_{il} \\
=& \partial_j \Gamma^j_{jl} + \partial_l \Gamma^l_{jl} - \partial_j \Gamma^i_{li} + \Gamma^i_{ij}\Gamma^j_{jl} + \Gamma^i_{il}\Gamma^l_{jl} - \Gamma^i_{jp}\Gamma^p_{il} \\
=& -\left[\sum_{p \neq j,l} u_{p,jl} - u_{j,l}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,l} + u_{p,j}u_{p,l}\right]
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{jj} =& \partial_i \Gamma^i_{jj} - \partial_j \Gamma^i_{ji} + \Gamma^i_{ip}\Gamma^p_{jj} - \Gamma^i_{ji}\Gamma^i_{ij} - \Gamma^i_{jj}\Gamma^j_{ij} \\
=& \partial_i \left(-\eta_j\eta_i u_{j,i} e^{2u_j - 2u_i}\right) - \partial_j u_{i,j} + u_{i,p}\left(-\eta_j\eta_p u_{j,p} e^{2u_j - 2u_p}\right) - u^2_{i,j} - \left(-\eta_j\eta_i u_{j,i} e^{2u_j - 2u_i}\right) u_{j,i} \\
=& -\eta_j\eta_i \left(u_{j,ii} + 2u_{j,i}\left(u_{j,i} - u_{i,i}\right)\right) e^{2u_j - 2u_i} - u_{i,jj} - \eta_j\eta_p u_{i,p}u_{j,p} e^{2u_j - 2u_p} - u^2_{i,j} + \eta_j\eta_i u^2_{j,i} e^{2u_j - 2u_i} \\
=& -\left(\hat{u}_{j,jj} + \hat{u}^2_{j,j} - u_{j,j}\hat{u}_{j,j}\right) - \eta_j \sum_{p \neq j} \eta_p \left[u_{j,pp} + u_{j,p}\left(\hat{u}_{p,p} - u_{p,p}\right)\right] e^{-2u_p + 2u_j}
\end{aligned}$$

□

On calculera dans la sous-section suivantes les valeurs des composantes du tenseur de Ricci.

1.4.4 Calcul des composantes dans $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}^*_\perp$

Lemme 1.4.4.1: Propriétés usuelles

On a :

$$\mathbb{R}_{jl} = \mathrm{d}\omega^i{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right) + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right).$$

Démonstration. On a directement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{jl} &= \Omega^i_j\left(\theta_i, \theta_l\right) \\
&= \mathrm{d}\omega^i{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right) + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j\left(\theta_i, \theta_l\right)
\end{aligned}$$

□

On en redéduit les valeurs des composantes du tenseur de Ricci.

Théorème 1.4.4.2: Valeurs exactes des $\mathbb{R}_{jl}$

Soit i, j, k, l tels que $\{0, 1, 2, 3\} = \{i, j, k, l\}$ et $p \neq j, l$. On a :

$$\mathbb{R}_{jl} = -\left[\sum_{p\neq j,l} u_{p,jl} - u_{j,l}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,l} + u_{p,j}u_{p,l}\right] e^{-u_j - u_l}$$
$$\mathbb{R}_{jj} = -\left(\hat{u}_{j,jj} + \hat{u}_{j,j}^2 - u_{j,j}\hat{u}_{j,j}\right) e^{-2u_j} - \eta_j \sum_{p\neq j} \eta_p \left[u_{j,pp} + u_{j,p}\left(\hat{u}_{p,p} - u_{p,p}\right)\right] e^{-2u_p}$$

Démonstration. On a deux cas.

- Comme :

$$\mathbb{R}^j{}_{jjl} = 0 \quad , \quad \mathbb{R}^l{}_{jll}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{jl} &= \mathbb{R}^p{}_{jpl} \\
&= \sum_{p\neq j,l} \mathbb{R}^p{}_{jpl} \\
&= -\left[\sum_{p\neq j,l} u_{p,jl} - u_{j,l}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,l} + u_{p,j}u_{p,l}\right] e^{-u_j - u_l}
\end{aligned}$$

- Comme :

$$\mathbb{R}^j{}_{jjj} = 0$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{jj} &= \mathbb{R}^p{}_{jpj} \\
&= \mathbb{R}^i{}_{jij} + \mathbb{R}^k{}_{jkj} + \mathbb{R}^l{}_{jlj} \\
&= -\left(u_{i,jj} + u_{i,j}\left(u_{i,j} - u_{j,j}\right)\right) e^{-2u_j} - \eta_i\eta_j\left(u_{j,ii} + u_{j,i}\left(u_{j,i} - u_{i,i}\right)\right) e^{-2u_i} \\
&- \eta_k\eta_j u_{i,k}u_{j,k} e^{-2u_k} - \eta_l\eta_j u_{i,l}u_{j,l} e^{-2u_l} \\
&- \left(u_{k,jj} + u_{k,j}\left(u_{k,j} - u_{j,j}\right)\right) e^{-2u_j} - \eta_k\eta_j\left(u_{j,kk} + u_{j,k}\left(u_{j,k} - u_{k,k}\right)\right) e^{-2u_k} \\
&- \eta_i\eta_j u_{k,i}u_{j,i} e^{-2u_i} - \eta_l\eta_j u_{k,l}u_{j,l} e^{-2u_l} \\
&- \left(u_{l,jj} + u_{l,j}\left(u_{l,j} - u_{j,j}\right)\right) e^{-2u_j} - \eta_l\eta_j\left(u_{j,ll} + u_{j,l}\left(u_{j,l} - u_{l,l}\right)\right) e^{-2u_l} \\
&- \eta_k\eta_j u_{l,k}u_{j,k} e^{-2u_k} - \eta_i\eta_j u_{l,i}u_{j,i} e^{-2u_i} \\
&= -\sum_{p\neq j}\left(u_{p,jj} + u_{p,j}\left(u_{p,j} - u_{j,j}\right)\right) e^{-2u_j} \\
&- \eta_l\eta_j\left[\left(u_{j,ll} + u_{j,l}\left(u_{j,l} + u_{k,l} + u_{i,l} - u_{l,l}\right)\right)\right] e^{-2u_l} \\
&= -\left(\hat{u}_{j,jj} + \hat{u}_{j,j}^2 - u_{j,j}\hat{u}_{j,j}\right) e^{-2u_j} - \eta_j \sum_{p\neq j} \eta_p\left[u_{j,pp} + u_{j,p}\left(\hat{u}_{p,p} - u_{p,p}\right)\right] e^{-2u_p}
\end{aligned}$$

□

On en déduit les valeurs des composantes pour la métriques h.

Exemple 1.4.4.3: Suite 7 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1, 1.1.5.1, 1.2.5.5, 1.2.6.3, 1.2.6.5, 1.3.4.5, et 1.3.5.4) avec :

$$u_0(t,r) := u(t,r) \qquad u_1(t,r) := v(t,r)$$
$$u_2(t,r) := b(t) + \ln(r) \qquad u_3(t,r,\vartheta) := b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta)$$

(1) **Première méthode**. On utilise le théorème 1.4.3.3. On traite les éléments non diagonaux puis les éléments diagonaux.

- **Termes nuls non diagonaux**. On a :

$$\mathbb{R}_{3l} = -\left[\sum_{p\neq 3,l} -u_{3,l}u_{p,3} - u_{l,3}u_{p,l} + u_{p,3}u_{p,l}\right]e^{-u_3-u_l} = 0$$

$$\mathbb{R}_{j3} = -\left[\sum_{p\neq j,3} -u_{j,3}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,3} + u_{p,j}u_{p,3}\right]e^{-u_j-u_3} = 0.$$

$$\mathbb{R}_{12} = -\left[\sum_{p\neq 1,2} -u_{1,2}u_{p,1} - u_{2,1}u_{p,2} + u_{p,1}u_{p,2}\right]e^{-u_1-u_2} = -\left[-u_{2,1}u_{3,2} + u_{3,1}u_{3,2}\right]e^{-u_1-u_2} = 0$$

$$\mathbb{R}_{2l} = -\left[\sum_{p\neq 2,l} -u_{2,l}u_{p,2} - u_{l,2}u_{p,l} + u_{p,2}u_{p,l}\right]e^{-u_2-u_l} = -\left[-u_{2,l}u_{3,2} + u_{3,2}u_{3,l}\right]e^{-u_2-u_l} = 0$$

- **Termes non nuls**. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{10} &= -\left[\sum_{p\neq 1,0} u_{p,10} - u_{1,0}u_{p,1} - u_{0,1}u_{p,0} + u_{p,1}u_{p,0}\right]e^{-u_1-u_0}\\
&= -\left[-u_{1,0}u_{2,1} - u_{0,1}u_{2,0} + u_{2,1}u_{2,0} - u_{1,0}u_{3,1} - u_{0,1}u_{3,0} + u_{3,1}u_{3,0}\right]e^{-u_1-u_0}\\
&= -2\left[-u_{1,0}u_{2,1} - u_{0,1}u_{2,0} + u_{2,1}u_{2,0}\right]e^{-u_1-u_0}\\
&= -2\left[-\dot{v}r^{-1} - \dot{b}u' + \dot{b}r^{-1}\right]e^{-u-v}\\
&=2\left[\dot{v}r^{-1} + \dot{b}\left(u' - r^{-1}\right)\right]e^{-u-v}\\
\mathbb{R}_{00} &= -\left[\hat{u}_{0,00} + \hat{u}_{0,0}^2 - u_{0,0}\hat{u}_{0,0}\right]e^{-2u_0} - \eta_0\eta_1\left[u_{0,11} + u_{0,1}\left(\hat{u}_{1,1} - u_{1,1}\right)\right]e^{-2u_1}\\
&\quad - \eta_0\eta_2\left[u_{0,22} + u_{0,2}\left(\hat{u}_{2,2} - u_{2,2}\right)\right]e^{-2u_2} - \eta_0\eta_3\left[u_{0,33} + u_{0,3}\left(\hat{u}_{3,3} - u_{3,3}\right)\right]e^{-2u_3}\\
&= -\left[\hat{u}_{0,00} + \hat{u}_{0,0}^2 - u_{0,0}\hat{u}_{0,0}\right]e^{-2u_0} - \eta_0\eta_1\left[u_{0,11} + u_{0,1}\left(\hat{u}_{1,1} - u_{1,1}\right)\right]e^{-2u_1}\\
&= -\left[\ddot{v} + 2\ddot{b} + (\dot{v})^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2 - \dot{u}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)\right]e^{-2u} + \left[u'' + u'\left(u' + 2r^{-1} - v'\right)\right]e^{-2v}\\
\mathbb{R}_{11} &= -\left[\hat{u}_{1,11} + \hat{u}_{1,1}^2 - u_{1,1}\hat{u}_{1,1}\right]e^{-2u_1} - \eta_1\eta_0\left[u_{1,00} + u_{1,0}\left(\hat{u}_{0,0} - u_{0,0}\right)\right]e^{-2u_0}\\
&\quad - \eta_1\eta_2\left[u_{1,22} + u_{1,2}\left(\hat{u}_{2,2} - u_{2,2}\right)\right]e^{-2u_2} - \eta_1\eta_3\left[u_{1,33} + u_{1,3}\left(\hat{u}_{3,3} - u_{3,3}\right)\right]e^{-2u_3}\\
&= -\left[\hat{u}_{1,11} + \hat{u}_{1,1}^2 - u_{1,1}\hat{u}_{1,1}\right]e^{-2u_1} - \eta_1\eta_0\left[u_{1,00} + u_{1,0}\left(\hat{u}_{0,0} - u_{0,0}\right)\right]e^{-2u_0}\\
&= -\left[u'' + \left(u'\right)^2 - v'\left(u' + 2r^{-1}\right)\right]e^{-2v} + \left[\ddot{v} + \dot{v}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right]e^{-2u}\\
\mathbb{R}_{22} &= -\left(\hat{u}_{2,22} + \hat{u}_{2,2}^2 - u_{2,2}\hat{u}_{2,2}\right)e^{-2u_2} - \eta_2\eta_0\left[u_{2,00} + u_{2,0}\left(\hat{u}_{0,0} - u_{0,0}\right)\right]e^{-2u_0}\\
&\quad - \eta_2\eta_1\left[u_{2,11} + u_{2,1}\left(\hat{u}_{1,1} - u_{1,1}\right)\right]e^{-2u_1} - \eta_2\eta_3\left[u_{2,33} + u_{2,3}\left(\hat{u}_{3,3} - u_{3,3}\right)\right]e^{-2u_3}\\
&= -\left(\hat{u}_{2,22} + \hat{u}_{2,2}^2\right)e^{-2u_2} - \eta_2\eta_0\left[u_{2,00} + u_{2,0}\left(\hat{u}_{0,0} - u_{0,0}\right)\right]e^{-2u_0}\\
&\quad - \eta_2\eta_1\left[u_{2,11} + u_{2,1}\left(\hat{u}_{1,1} - u_{1,1}\right)\right]e^{-2u_1}\\
&=r^{-2}e^{-2b} + \left[\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right]e^{-2u} - r^{-1}\left(u' - v' + r^{-1}\right)e^{-2v}\\
\mathbb{R}_{33} &= -\left(\hat{u}_{3,33} + \hat{u}_{3,3}^2 - u_{3,3}\hat{u}_{3,3}\right)e^{-2u_3} - \eta_3\eta_0\left[u_{3,00} + u_{3,0}\left(\hat{u}_{0,0} - u_{0,0}\right)\right]e^{-2u_0}\\
&\quad - \eta_3\eta_1\left[u_{3,11} + u_{3,1}\left(\hat{u}_{1,1} - u_{1,1}\right)\right]e^{-2u_1} - \eta_3\eta_2\left[u_{3,22} + u_{3,2}\left(\hat{u}_{2,2} - u_{2,2}\right)\right]e^{-2u_2}\\
&= -\eta_3\eta_0\left[u_{3,00} + u_{3,0}\left(\hat{u}_{0,0} - u_{0,0}\right)\right]e^{-2u_0} - \eta_3\eta_1\left[u_{3,11} + u_{3,1}\left(\hat{u}_{1,1} - u_{1,1}\right)\right]e^{-2u_1}\\
&\quad - \eta_3\eta_2\left[u_{3,22} + u_{3,2}\left(\hat{u}_{2,2} - u_{2,2}\right)\right]e^{-2u_2}\\
&=r^{-2}e^{-2b} + \left[\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right]e^{-2u} - r^{-1}\left(u' - v' + r^{-1}\right)e^{-2v}
\end{aligned}$$

(2) **Deuxième méthode**. On utilise la définition 1.4.1.1.

- Cas $j \coloneqq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{00} =& \mathbb{R}^0{}_{000} + \mathbb{R}^1{}_{010} + \mathbb{R}^2{}_{020} + \mathbb{R}^3{}_{030} \\
=& \mathbb{R}^1{}_{010} + 2\mathbb{R}^2{}_{020} \\
=& \left(u'' + u'\left(u' - v'\right)\right) e^{-2v} - \left(\ddot{v} + \dot{v}\left(\dot{v} - \dot{u}\right)\right) e^{-2u} - 2\left(\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{b} - \dot{u}\right)\right) e^{-2u} + 2r^{-1}u'e^{-2v} \\
=& -\left[\ddot{v} + 2\ddot{b} + \left(\dot{v}\right)^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2 - \dot{u}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)\right] e^{-2u} + \left[u'' + u'\left(u' + 2r^{-1} - v'\right)\right] e^{-2v} \\
\mathbb{R}_{01} =& \mathbb{R}^0{}_{001} + \mathbb{R}^1{}_{011} + \mathbb{R}^2{}_{021} + \mathbb{R}^3{}_{031} \\
=& 2\mathbb{R}^2{}_{021} \\
=& 2\left(\dot{b}\left(u' - r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right) e^{-u-v} \\
\mathbb{R}_{02} =& \mathbb{R}^0{}_{002} + \mathbb{R}^1{}_{012} + \mathbb{R}^2{}_{022} + \mathbb{R}^3{}_{032} = 0 \\
\mathbb{R}_{03} =& \mathbb{R}^0{}_{003} + \mathbb{R}^1{}_{013} + \mathbb{R}^2{}_{023} + \mathbb{R}^3{}_{033} = 0
\end{aligned}$$

- Cas $j \coloneqq 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{10} =& \mathbb{R}^0{}_{100} + \mathbb{R}^1{}_{110} + \mathbb{R}^2{}_{120} + \mathbb{R}^3{}_{130} \\
=& 2\mathbb{R}^2{}_{120} \\
=& 2\mathbb{R}^2{}_{021} \\
=& \mathbb{R}_{01} \\
\mathbb{R}_{11} =& \mathbb{R}^0{}_{101} + \mathbb{R}^1{}_{111} + \mathbb{R}^2{}_{121} + \mathbb{R}^3{}_{131} \\
=& \mathbb{R}^0{}_{101} + 2\mathbb{R}^2{}_{121} \\
=& -\left(u'' + u'\left(u' - v'\right)\right) e^{-2v} + \left(\ddot{v} + \dot{v}\left(\dot{v} - \dot{u}\right)\right) e^{-2u} \\
& + 2r^{-1}v'e^{-2v} + 2\dot{v}\dot{b}e^{-2u} \\
=& -\left[u'' + \left(u'\right)^2 - v'\left(u' + 2r^{-1}\right)\right] e^{-2v} + \left[\ddot{v} + \dot{v}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right] e^{-2u} \\
\mathbb{R}_{12} =& \mathbb{R}^0{}_{102} + \mathbb{R}^1{}_{112} + \mathbb{R}^2{}_{122} + \mathbb{R}^3{}_{132} = 0 \\
\mathbb{R}_{13} =& \mathbb{R}^0{}_{103} + \mathbb{R}^1{}_{113} + \mathbb{R}^2{}_{123} + \mathbb{R}^3{}_{133} = 0
\end{aligned}$$

- Cas $j \coloneqq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{20} =& \mathbb{R}^0{}_{200} + \mathbb{R}^1{}_{210} + \mathbb{R}^2{}_{220} + \mathbb{R}^3{}_{230} = 0 \\
\mathbb{R}_{21} =& \mathbb{R}^0{}_{201} + \mathbb{R}^1{}_{211} + \mathbb{R}^2{}_{221} + \mathbb{R}^3{}_{231} = 0 \\
\mathbb{R}_{22} =& \mathbb{R}^0{}_{202} + \mathbb{R}^1{}_{212} + \mathbb{R}^2{}_{222} + \mathbb{R}^3{}_{232} \\
=& \mathbb{R}^0{}_{202} + \mathbb{R}^1{}_{212} + \mathbb{R}^3{}_{232} \\
=& \left(\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{b} - \dot{u}\right)\right) e^{-2u} - u'r^{-1}e^{-2v} \\
& + r^{-1}v'e^{-2v} + \dot{v}\dot{b}e^{-2u} \\
& + r^{-2} + \left(\dot{b}\right)^2 e^{-2u} - r^{-2}e^{-2v} \\
=& r^{-2} + \left[\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right] e^{-2u} - r^{-1}\left(u' - v' + r^{-1}\right) e^{-2v} \\
\mathbb{R}_{23} =& \mathbb{R}^0{}_{203} + \mathbb{R}^1{}_{213} + \mathbb{R}^2{}_{223} + \mathbb{R}^3{}_{233} = 0
\end{aligned}$$

- Cas $j := 3$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{30} &= \mathbb{R}^0{}_{300} + \mathbb{R}^1{}_{310} + \mathbb{R}^2{}_{320} + \mathbb{R}^3{}_{330} = 0\\
\mathbb{R}_{31} &= \mathbb{R}^0{}_{301} + \mathbb{R}^1{}_{311} + \mathbb{R}^2{}_{321} + \mathbb{R}^3{}_{331} = 0\\
\mathbb{R}_{32} &= \mathbb{R}^0{}_{302} + \mathbb{R}^1{}_{312} + \mathbb{R}^2{}_{322} + \mathbb{R}^3{}_{332} = 0\\
\mathbb{R}_{33} &= \mathbb{R}^0{}_{303} + \mathbb{R}^1{}_{313} + \mathbb{R}^2{}_{323} + \mathbb{R}^3{}_{333}\\
&= \mathbb{R}^0{}_{303} + \mathbb{R}^1{}_{313} + \mathbb{R}^2{}_{323}\\
&= \mathbb{R}^0{}_{202} + \mathbb{R}^1{}_{212} + \mathbb{R}^3{}_{232}\\
&= \mathbb{R}_{22}
\end{aligned}$$

Donc les matrices $\mathbb{R}_{jl}$ et R_{jl} sont de la forme :

$$\mathbb{R}_{jl} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{00} & \mathbb{R}_{01} & 0 & 0\\ \mathbb{R}_{10} & \mathbb{R}_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbb{R}_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{R}_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{R}_{jl} = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_{00} & \mathrm{R}_{01} & 0 & 0\\ \mathrm{R}_{10} & \mathrm{R}_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{R}_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{R}_{33} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{00} &= -\left[\ddot{v} + 2\ddot{b} + (\dot{v})^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2 - \dot{u}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)\right]e^{-2u} + \left[u'' + u'\left(u' + 2r^{-1} - v'\right)\right]e^{-2v}\\
\mathrm{R}_{00} &= -\left[\ddot{v} + 2\ddot{b} + (\dot{v})^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2 - \dot{u}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)\right] + \left[u'' + u'\left(u' + 2r^{-1} - v'\right)\right]e^{2u-2v}\\
\mathbb{R}_{01} &= 2\left(\dot{b}\left(u' - r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right)e^{-u-v}\\
\mathrm{R}_{01} &= 2\left(\dot{b}\left(u' - r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right)\\
\mathbb{R}_{11} &= -\left[u'' + \left(u'\right)^2 - v'\left(u' + 2r^{-1}\right)\right]e^{-2v} + \left[\ddot{v} + \dot{v}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right]e^{-2u}\\
\mathrm{R}_{11} &= -\left[u'' + \left(u'\right)^2 - v'\left(u' + 2r^{-1}\right)\right] + \left[\ddot{v} + \dot{v}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right]e^{-2u+2v}\\
\mathbb{R}_{22} &= \mathbb{R}_{33} = r^{-2} + \left[\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right]e^{-2u} - r^{-1}\left(u' - v' + r^{-1}\right)e^{-2v}\\
\mathrm{R}_{22} &= 1 + r^2\left[\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right]e^{-2u} - r^1\left(u' - v' + r^{-1}\right)e^{-2v}\\
\mathrm{R}_{33} &= \sin^2\vartheta\,\mathrm{R}_{22}
\end{aligned}$$

1.5 Courbure scalaire

Définition 1.5.0.1: La courbure scalaire

La **courbure scalaire** est définie par :

$$\mathscr{S} := \left[[\mathscr{R}\mathrm{ic}]^1\right]^1_1 .$$

Comme les opérations $[\bullet]^1_1$ et $[\bullet]^1$ sont indépendantes de la base choisie, $\mathscr{S}$ est aussi indépendante de la base choisie.

Proposition 1.5.0.2: Propriétés usuelles

(i) (a) On a :

$$\mathscr{S} = \mathrm{tr}_g\mathscr{R}\mathrm{ic}.$$

(b) On a :

$$\mathscr{S} = \mathbf{g}^{ik}\mathbf{R}_{ik}.$$

(ii) (**Identité de Bianchi deux fois contractées**)

(a) On a :

$$\begin{aligned}\nabla^l\mathbf{R}_{lj} &= \frac{1}{2}\nabla_j\mathscr{S}\\ \nabla_k\mathbf{R}^k{}_j &= \frac{1}{2}\nabla_j\mathscr{S}\\ \mathbf{g}^{kl}\nabla_k\mathbf{R}_{lj} &= \frac{1}{2}\nabla_j\mathscr{S}\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\left[[\mathscr{R}\mathrm{ic}]^1\right]^1_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathscr{S}\\ \mathrm{div}[\mathscr{R}\mathrm{ic}]^1 &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathscr{S}\\ \mathrm{div}_g\mathscr{R}\mathrm{ic} &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathscr{S}\end{aligned}$$

Démonstration. (i) Comme :

$$\begin{aligned}&[\mathscr{R}\mathrm{ic}]^1 : (\alpha, X) \longmapsto g^*\left(\alpha, \mathscr{R}\mathrm{ic}(\bullet, X)\right)\\ &\mathscr{R}\mathrm{ic} = \mathbf{R}_{kl}\ e^k \otimes e^l\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}[\mathscr{R}\mathrm{ic}]^1(e^i, e_j) &= g^*\left(e^i, \mathscr{R}\mathrm{ic}(\bullet, e_j)\right)\\ &= g^*\left(e^i, \mathbf{R}_{kl}\ e^l(e_j)e^k\right)\\ &= g^*\left(e^i, \mathbf{R}_{kl}\ \delta^l_j e^k\right)\\ &= g^*\left(e^i, \mathbf{R}_{kj}\ e^k\right)\\ &= \mathbf{R}_{kj}g^*\left(e^i, e^k\right)\\ &= \mathbf{R}_{kj}\mathbf{g}^{ik}\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \mathrm{tr}\left([\mathscr{R}\mathrm{ic}]^1\right)\\ &= e^i\left([\mathscr{R}\mathrm{ic}]^1(\bullet, e_i)\right)\\ &= e^i\left(\mathbf{R}^j{}_l\ e^l(e_i)e_j\right)\\ &= \mathbf{R}^j{}_l\ \delta^l_i e^i\left(e_j\right)\\ &= \mathbf{R}^j{}_i\ \delta^i_j\\ &= \mathbf{R}^i{}_i\\ &= \mathbf{g}^{ik}\mathbf{R}_{ki}\end{aligned}$$

(ii) (a) Par l'identité de Bianchi contractée (voir la proposition 1.4.2.2), on a :

$$\nabla_n\mathbf{R}_{jl} - \nabla_l\mathbf{R}_{jn} + \nabla_k\mathbf{R}^k{}_{jln} = 0.$$

Comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^{nl}\nabla_k\mathbf{R}^k{}_{njl} &= \mathbf{g}^{nl}\mathbf{g}^{kp}\nabla_k\mathbf{R}_{pnjl}\\ &= \mathbf{g}^{nl}\nabla^p\mathbf{R}_{pnjl}\\ &= \mathbf{g}^{nl}\nabla^p\mathbf{R}_{nplj}\\ &= \nabla^p\mathbf{R}^l{}_{plj}\\ &= \nabla^p\mathbf{R}_{pj}\\ &= \nabla^p\mathbf{R}_{jp}\end{aligned}$$

on a alors en recontractant :

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{g}^{nl}\left(\nabla_n\mathbf{R}_{jl} - \nabla_j\mathbf{R}_{nl} + \nabla_k\mathbf{R}^k{}_{njl}\right)\\ &= \mathbf{g}^{nl}\nabla_n\mathbf{R}_{jl} - \mathbf{g}^{nl}\nabla_j\mathbf{R}_{nl} + \mathbf{g}^{nl}\nabla_k\mathbf{R}^k{}_{njl}\\ &= \nabla^l\mathbf{R}_{jl} - \nabla_j\mathscr{S} + \nabla^p\mathbf{R}_{jp}\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$\nabla^l\mathbf{R}_{jl} = \frac{1}{2}\nabla_j\mathscr{S}.$$

Pour les deux autres égalités, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\nabla^l\mathbf{R}_{jl} &= \mathbf{g}^{kl}\nabla_k\mathbf{R}_{jl}\\ &= \nabla_k\mathbf{R}^k{}_j\end{aligned}$$

(b) On se place dans la base $\mathscr{C}$. Comme :

$$\mathrm{div}_g\mathscr{R}\mathrm{ic} = \left[\nabla\left[\mathscr{R}\mathrm{ic}\right]^1\right]_2^1$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_g\mathscr{R}\mathrm{ic}(\partial_j) &= \left[\nabla\left[\mathscr{R}\mathrm{ic}\right]^1\right]_2^1(\partial_j)\\ &= \nabla_k\mathbf{R}^k{}_j\\ &= \frac{1}{2}\nabla_j\mathscr{S}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathscr{S}(\partial_j)\end{aligned}$$

Comme cela est vrai pour tout j, on a :

$$\mathrm{div}_g\mathscr{R}\mathrm{ic} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathscr{S}.$$

□

Exemple 1.5.0.3: Exemples de calculs dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\perp$

On a donc :

$$\mathscr{S} = \mathrm{g}^{jj}\mathrm{R}_{jj} = \eta^{jj}\mathbb{R}_{jj}.$$

On peut montrer la dernière égalité directement sans utiliser l'invariance par changement de base. Comme g_{jl} et η_{jl} sont diagonales, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \mathrm{g}^{jl}\mathrm{R}_{jl}\\ &= \mathrm{g}^{jj}\mathrm{R}_{jj}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{g}^{jj} e^{2u_j} \mathbb{R}_{jj} \\
&= \mathrm{g}^{jj} \eta^j \mathrm{g}_{jj} \mathbb{R}_{jj} \\
&= \eta^j \mathbb{R}_{jj}
\end{aligned}
$$

1.5.1 Calculs pratiques dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$

Proposition 1.5.1.1: Valeur en fonction des symboles de Christoffel

On a :

$$\mathscr{S} = \mathrm{g}^{kl} \left(\partial_i \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{li} + \Gamma^i_{ip} \Gamma^p_{kl} - \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{il} \right).$$

Démonstration. On a par le lemme 1.5.0.2 :

$$\mathscr{S} = \mathrm{g}^{kl} \mathrm{R}_{kl}.$$

Comme :

$$\mathrm{R}_{kl} = \partial_i \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{li} + \Gamma^i_{ip} \Gamma^p_{kl} - \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{il}$$

on a :

$$\mathscr{S} = \mathrm{g}^{kl} \left(\partial_i \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{li} + \Gamma^i_{ip} \Gamma^p_{kl} - \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{il} \right).$$

□

Corollaire 1.5.1.2: Valeur exacte

On a :

$$\mathscr{S} = - \sum_k \eta_k \left(2\hat{u}_{k,kk} + \hat{u}^2_{k,k} - 2u_{k,k}\hat{u}_{k,k} + \left(\hat{u}_{k,k}\right)^2 \right) e^{-2u_k}.$$

Démonstration. On a :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S} =& \mathrm{g}^{kl} \left(\partial_i \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{li} + \Gamma^i_{ip} \Gamma^p_{kl} - \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{il} \right) \\
=& \mathrm{g}^{kk} \left(\partial_i \Gamma^i_{kk} - \partial_k \Gamma^i_{ki} + \Gamma^i_{ip} \Gamma^p_{kk} - \Gamma^i_{ki} \Gamma^i_{ik} - \Gamma^i_{kk} \Gamma^k_{ik} \right) \\
=& \eta_k \left(\partial_i \left(-\eta_k \eta_i u_{k,i} e^{2u_k - 2u_i} \right) - \partial_k u_{i,k} + u_{i,p} \left(-\eta_k \eta_p u_{k,p} e^{2u_k - 2u_p} \right) - u^2_{i,k} - \left(-\eta_k \eta_i u_{k,i} e^{2u_k - 2u_i} \right) u_{k,i} \right) e^{-2u_k} \\
=& \eta_k \left(-\eta_k \eta_i \left(u_{k,ii} + 2u_{k,i} \left(u_{k,i} - u_{i,i} \right) \right) e^{2u_k - 2u_i} - u_{i,kk} - \eta_k \eta_p u_{i,p} u_{k,p} e^{2u_k - 2u_p} - u^2_{i,k} + \eta_k \eta_i u^2_{k,i} e^{2u_k - 2u_i} \right) e^{-2u_k} \\
=& - \eta_i \left(u_{k,ii} + 2u_{k,i} \left(u_{k,i} - u_{i,i} \right) \right) e^{-2u_i} - \eta_k u_{i,kk} e^{-2u_k} - \eta_p u_{i,p} u_{k,p} e^{-2u_p} - \eta_k u^2_{i,k} e^{-2u_k} + \eta_i u^2_{k,i} e^{-2u_i} \\
=& - \eta_k \left(u_{i,kk} + 2u_{i,k} \left(u_{i,k} - u_{k,k} \right) \right) e^{-2u_k} - \eta_k u_{i,kk} e^{-2u_k} - \eta_k u_{i,k} u_{p,k} e^{-2u_k} - \eta_k u^2_{i,k} e^{-2u_k} + \eta_k u^2_{i,k} e^{-2u_k} \\
=& - \eta_k \left(u_{i,kk} + 2u_{i,k} \left(u_{i,k} - u_{k,k} \right) - u_{i,kk} - u_{i,k} u_{p,k} + u^2_{i,k} + u^2_{i,k} \right) e^{-2u_k} \\
=& - \eta_k \left(2u_{i,k} \left(u_{i,k} - u_{k,k} \right) - u_{i,k} u_{p,k} + u^2_{i,k} \right) e^{-2u_k} \\
=& - \eta_k \left(2(u^2_{i,k} - u_{i,k} u_{k,k}) - u_{i,k} u_{p,k} \right) e^{-2u_k} \\
=& - \sum_k \eta_k \left(2\hat{u}k, kk + \hat{u}^2 k, k - 2u_{k,k} \hat{u}k, k + (\hat{u}k, k)^2 \right) e^{-2u_k}
\end{aligned}
$$

□

On calcule avec la métrique h, la valeur de $\mathscr{S}$ en fin de sous-section suivante.

1.5.2 Calculs pratiques dans $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$

Par la formule :

$$\mathscr{S} = \eta_j \mathbb{R}_{jj}$$

on en déduit la valeur de la courbure scalaire.

Théorème 1.5.2.1: Valeur du tenseur scalaire

On a :

$$\mathscr{S} = -\sum_k \eta_k \left(2\hat{u}_{k,kk} + \hat{u}_{k,k}^2 - 2u_{k,k}\hat{u}_{k,k} + \left(\hat{u}_{k,k}\right)^2\right) e^{-2u_k}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} =& \eta_j \mathbb{R}_{jj} \\
=& -\sum_j \eta_j e^{-2u_j} \sum_{k\neq j} \left(u_{k,jj} + u_{k,j}\left(u_k - u_j\right)_{,j}\right) - \sum_j \sum_{k\neq j} \eta_k \left(u_{j,kk} + u_{j,k}\left(-u_k + \sum_{i\neq k} u_i\right)_{,k}\right) e^{-2u_k} \\
=& -\sum_k \sum_{j\neq k} \eta_k \left(u_{j,kk} + u_{j,k}\left(-u_k + \sum_{i\neq k} u_i\right)_{,k}\right) e^{-2u_k} - \sum_k \sum_{j\neq k} \eta_k e^{-2u_k} \left(u_{j,kk} + u_{j,k}\left(u_j - u_k\right)_{,k}\right) \\
=& -\sum_k \eta_k e^{-2u_k} \sum_{j\neq k} \left(2u_{j,kk} + u_{j,k}\left(2u_j - 2u_k + \sum_{i\neq j,k} u_i\right)_{,k}\right) \\
=& -\sum_k \eta_k \left(2\hat{u}_{k,kk} + \hat{u}_{k,k}^2 - 2u_{k,k}\hat{u}_{k,k} + \left(\hat{u}_{k,k}\right)^2\right) e^{-2u_k}
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.5.2.2: Suite 8 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1, 1.1.5.1, 1.2.5.5, 1.2.6.3 , 1.2.6.5, 1.3.4.5 , 1.3.5.4 et 1.4.4.3) avec :

$$\begin{aligned}
u_0(t,r) &:= u(t,r) & u_1(t,r) &:= v(t,r) \\
u_2(t,r) &:= b(t) + \ln(r) & u_3(t,r,\vartheta) &:= b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta)
\end{aligned}$$

On calcule Scal de deux façons différentes.

(1) Par le théorème 1.5.2.1, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} =& -\eta_0 \left(2\hat{u}_{0,00} + \hat{u}_{0,0}^2 - 2u_{0,0}\hat{u}_{0,0} + \left(\hat{u}_{0,0}\right)^2\right) e^{-2u_0} \\
& -\eta_1 \left(2\hat{u}_{1,11} + \hat{u}_{1,1}^2 - 2u_{1,1}\hat{u}_{1,1} + \left(\hat{u}_{1,1}\right)^2\right) e^{-2u_1} \\
& -\eta_2 \left(2\hat{u}_{2,22} + \hat{u}_{2,2}^2 - 2u_{2,2}\hat{u}_{2,2} + \left(\hat{u}_{2,2}\right)^2\right) e^{-2u_2} \\
=& -\left(2\left(\ddot{v} + 2\ddot{b}\right) + \left(\dot{v}\right)^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2 - 2\dot{u}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right) + \left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)^2\right) e^{-2u} \\
& + \left(2\left(u'' - 2r^{-2}\right) + \left(u'\right)^2 + 2r^{-2} - 2v'\left(u' + 2r^{-1}\right) + \left(u' + 2r^{-1}\right)^2\right) e^{-2v} \\
& - 2r^{-2}e^{-2b} \\
=& -2\left[\ddot{v} + 2\ddot{b} + \left(\dot{v}\right)^2 + 3\left(\dot{b}\right)^2 - \dot{u}\dot{v} - 2\dot{u}\dot{b} + 2\dot{v}\dot{b}\right] e^{-2u} \\
& + 2\left[u'' - 2r^{-2} + \left(u'\right)^2 + 3r^{-2} - u'v' + 2r^{-1}(u' - v')u'\right] e^{-2v} - 2r^{-2}e^{-2b}
\end{aligned}$$

(2) Par la définition 1.5.0.1, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} =& \eta_j \mathbb{R}_{jj} \\
=& \eta_0 \mathbb{R}_{00} + \eta_1 \mathbb{R}_{11} + \eta_2 \mathbb{R}_{22} + \eta_3 \mathbb{R}_{33} \\
=& \mathbb{R}_{00} - \mathbb{R}_{11} - 2\mathbb{R}_{22} \\
=& -\left[\ddot{v} + 2\ddot{b} + (\dot{v})^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2 - \dot{u}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)\right] e^{-2u} + \left[u'' + u'\left(u' + 2r^{-1} - v'\right)\right] e^{-2v} \\
& + \left[u'' + \left(u'\right)^2 - v'\left(u' + 2r^{-1}\right)\right] e^{-2v} - \left[\ddot{v} + \dot{v}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right] e^{-2u} \\
& - 2r^{-2} - 2\left[\ddot{b} + \dot{b}\left(\dot{v} + 2\dot{b} - \dot{u}\right)\right] e^{-2u} + 2r^{-1}\left(u' - v' + r^{-1}\right) e^{-2v} \\
=& -2\left[\ddot{v} + 2\ddot{b} + (\dot{v})^2 + 3\left(\dot{b}\right)^2 - \dot{u}\dot{v} - 2\dot{u}\dot{b} + 2\dot{v}\dot{b}\right] e^{-2u} \\
& + 2\left[u'' - 2r^{-2} + \left(u'\right)^2 + 3r^{-2} - u'v' + 2r^{-1}(u' - v')u'\right] e^{-2v} - 2r^{-2} e^{-2b}
\end{aligned}$$

On voit l'efficacité de la première méthode qui donne directement une très bonne factorisation.

1.6 Tenseur d'Einstein

Définition 1.6.0.1: Le tenseur d'Einstein

Le **tenseur d'Einstein** est défini par :

$$\mathscr{G} := \mathscr{R}\text{ic} - \frac{1}{2}\mathscr{S} g.$$

i.e. pour tous champs de vecteurs X et Y, on a :

$$\mathscr{G}(X, Y) = \mathscr{R}\text{ic}(X, Y) - \frac{1}{2}\mathscr{S} g(X, Y).$$

On définit ensuite les composantes de $\mathscr{G}$ dans la base $\mathscr{E}$.

Définition 1.6.0.2: Les composantes du tenseur d'Einstein dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$

Les **composantes du tenseur de Ricci dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$** sont :

$$\mathbf{G}_{jl} := \mathscr{G}(e_j, e_l).$$

Proposition 1.6.0.3: Propriétés simples du tenseur d'Einstein dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^*$

(i) (**Symétrie**)

(a) On a :

$$\mathscr{G}(X, Y) = \mathscr{G}(Y, X).$$

(b) On a :

$$\mathbf{G}_{jl} = \mathbf{G}_{lj}.$$

(ii) (**Identité de Bianchi deux fois contractées**)

(a) On a :

$$\begin{aligned}
\nabla^l \mathbf{G}_{lj} &= 0 \\
\nabla_k \mathbf{G}^k{}_j &= 0 \\
\mathbf{g}^{kl} \nabla_k \mathbf{G}_{lj} &= 0
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\left[[\mathscr{G}]^1\right]_2^1 = 0$$
$$\mathrm{div}[\mathscr{G}]^1 = 0$$
$$\mathrm{div}_g \mathscr{G} = 0$$

Démonstration. (i) (Symétrie)

(a) Comme $\mathscr{R}\mathrm{ic}$ et g sont symétriques, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(X,Y) &= \mathscr{R}\mathrm{ic}(X,Y) - \frac{1}{2}\mathscr{S} g(X,Y)\\ &= \mathscr{R}\mathrm{ic}(Y,X) - \frac{1}{2}\mathscr{S} g(Y,X)\\ &= \mathscr{G}(Y,X)\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{jl} &= \mathscr{G}(e_j, e_l)\\ &= \mathscr{G}(e_l, e_j)\\ &= \mathbf{G}_{lj}.\end{aligned}$$

(ii) On a par la proposition 1.5.0.2 :

$$\nabla^n \mathbf{R}_{nl} = \frac{1}{2}\nabla_l \mathscr{S}$$

i.e. on a :

$$\nabla^n \mathbf{R}_{nl} = \frac{1}{2}\mathbf{g}_{nl}\nabla^n \mathscr{S}.$$

Ainsi on a par linéarité de ∇ :

$$\begin{aligned}\nabla^n \mathbf{G}_{nl} &= \nabla^n \left(\mathbf{R}_{nl} - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{nl}\mathscr{S}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

□

Exemple 1.6.0.4: Composantes du tenseur d'Einstein dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\perp$

(i) Les **composantes du tenseur d'Einstein dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$** sont :

$$\mathrm{G}_{jl} := \mathrm{R}_{jl} - \frac{1}{2}\mathrm{g}_{jl}\mathscr{S}.$$

On a donc la décomposition :

$$\mathscr{G} = \mathrm{G}_{jl}\ \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^l.$$

(ii) Les **composantes du tenseur d'Einstein dans $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$** sont :

$$\mathbb{G}_{jl} := \mathbb{R}_{jl} - \frac{1}{2}\eta_{jl}\mathscr{S}.$$

On a donc la décomposition :

$$\mathscr{G} = \mathbb{G}_{jl}\ \theta^j \otimes \theta^l.$$

On a :

$$\mathbb{G}_{ij} = e^{-u_i - u_j}\mathrm{G}_{ij}.$$

Théorème 1.6.0.5: Valeur du tenseur d'Einstein

Soit $j, l \in \{0,1,2,3\}$ **distincts**.

(i) On a :

$$\mathbb{G}_{jl} = -\left[\sum_{p\neq j,l} u_{p,jl} - u_{j,l}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,l} + u_{p,j}u_{p,l}\right] e^{-u_j-u_l}$$

$$\mathrm{G}_{jl} = -\left[\sum_{p\neq j,l} u_{p,jl} - u_{j,l}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,l} + u_{p,j}u_{p,l}\right]$$

(ii) On a :

$$\mathbb{G}_{jj} = \frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{j,j})^2 - \hat{u}_{j,j}^2\right]e^{-2u_j} + \eta_j \sum_{k\neq j} \eta_k \left[\hat{u}_{jk,kk} + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}\left(\hat{u}_{jk,k} - 2u_{k,k} - u_{j,k}\right) + u_{j,k}u_{k,k}\right]e^{-2u_k}$$

$$\mathrm{G}_{jj} = \frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{j,j})^2 - \hat{u}_{j,j}^2\right] + \eta_j \sum_{k\neq j} \eta_k \left[\hat{u}_{jk,kk} + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}\left(\hat{u}_{jk,k} - 2u_{k,k} - u_{j,k}\right) + u_{j,k}u_{k,k}\right]e^{2u_j-2u_k}$$

Démonstration. (i) On a :

$$\mathbb{G}_{jl} = \mathbb{R}_{jl} = -\left[\sum_{p\neq j,l} u_{p,jl} - u_{j,l}u_{p,j} - u_{l,j}u_{p,l} + u_{p,j}u_{p,l}\right] e^{-u_j-u_l}.$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{jj} =& \mathbb{R}_{jj} - \frac{1}{2}\eta_j\mathbb{R} \\
=& -\left(\hat{u}_{j,jj} + \hat{u}_{j,j}^2 - \hat{u}_{j,j}u_{j,j}\right)e^{-2u_j} - \eta_j\sum_{k\neq j}\eta_k\left(u_{j,kk} + u_{j,k}\left(\hat{u}_{k,k} - u_{k,k}\right)\right)e^{-2u_k} \\
&+ \frac{1}{2}\eta_j\sum_k \eta_k\left(2\hat{u}_{k,kk} + \hat{u}_{k,k}^2 - 2u_{k,k}\hat{u}_{k,k} + \left(\hat{u}_{k,k}\right)^2\right)e^{-2u_k} \\
=& -\left(\hat{u}_{j,jj} + \hat{u}_{j,j}^2 - \hat{u}_{j,j}u_{j,j}\right)e^{-2u_j} - \eta_j\sum_{k\neq j}\eta_k\left(u_{j,kk} + u_{j,k}\left(\hat{u}_{k,k} - u_{k,k}\right)\right)e^{-2u_k} \\
&+ \frac{1}{2}\eta_j\sum_{k\neq j} \eta_k\left(2\hat{u}_{k,kk} + \hat{u}_{k,k}^2 - 2u_{k,k}\hat{u}_{k,k} + \left(\hat{u}_{k,k}\right)^2\right)e^{-2u_k} \\
&+ \frac{1}{2}\left(2\hat{u}_{j,jj} + \hat{u}_{j,j}^2 - 2u_{j,j}\hat{u}_{j,j} + (\hat{u}_{j,j})^2\right)e^{-2u_j} \\
=& \frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{j,j})^2 - \hat{u}_{j,j}^2\right]e^{-2u_j} + \frac{1}{2}\eta_j\sum_{k\neq j}\eta_k\left(2\hat{u}_{k,kk} + \hat{u}_{k,k}^2 - 2u_{k,k}\hat{u}_{k,k} + \left(\hat{u}_{k,k}\right)^2 - 2u_{j,kk} - 2u_{j,k}\left(\hat{u}_{k,k} - u_{k,k}\right)\right)e^{-2u_k} \\
=& \frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{j,j})^2 - \hat{u}_{j,j}^2\right]e^{-2u_j} + \eta_j\sum_{k\neq j}\eta_k\left[\hat{u}_{k,kk} - u_{j,kk} + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}\left(\hat{u}_{k,k} - 2u_{k,k} - 2u_{j,k}\right) + u_{j,k}u_{k,k}\right]e^{-2u_k} \\
=& \frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{j,j})^2 - \hat{u}_{j,j}^2\right]e^{-2u_j} + \eta_j\sum_{k\neq j}\eta_k\left[\hat{u}_{jk,kk} + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}\left(\hat{u}_{jk,k} - 2u_{k,k} - u_{j,k}\right) + u_{j,k}u_{k,k}\right]e^{-2u_k}
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.6.0.6: Suite 9 de la métrique h

On reprend l'exemple avec la métrique h (voir 1.1.4.1, 1.1.5.1, 1.2.5.5, 1.2.6.3 , 1.2.6.5, 1.3.4.5

, 1.3.5.4, 1.4.4.3 et 1.5.2.2) avec :

$$u_0(t,r) := u(t,r) \qquad u_1(t,r) := v(t,r)$$
$$u_2(t,r) := b(t) + \ln(r) \qquad u_3(t,r,\vartheta) := b(t) + \ln(r) + \ln\sin(\vartheta)$$

On a :

$$\mathbb{G}_{jj} = \frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{j,j})^2 - \hat{u}_{j,j}^2\right]e^{-2u_j} + \eta_j\sum_{k\neq j}\eta_k\left[\hat{u}_{jk,kk} + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{k,k}\left(\hat{u}_{jk,k} - 2u_{k,k} - u_{j,k}\right) + u_{j,k}u_{k,k}\right]e^{-2u_k}$$

- **Cas** $j := 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{00} =&\frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{0,0})^2 - \hat{u}_{0,0}^2\right]e^{-2u_0}\\
&+\eta_0\eta_1\left[\hat{u}_{01,11} + \frac{1}{2}\hat{u}_{1,1}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{1,1}\left(\hat{u}_{01,1} - 2u_{1,1} - u_{0,1}\right) + u_{0,1}u_{1,1}\right]e^{-2u_1}\\
&+\eta_0\eta_2\left[\hat{u}_{02,22} + \frac{1}{2}\hat{u}_{2,2}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{2,2}\left(\hat{u}_{02,2} - 2u_{2,2} - u_{0,2}\right) + u_{0,2}u_{2,2}\right]e^{-2u_2}\\
&+\eta_0\eta_3\left[\hat{u}_{03,33} + \frac{1}{2}\hat{u}_{3,3}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{3,3}\left(\hat{u}_{03,3} - 2u_{3,3} - u_{0,3}\right) + u_{0,3}u_{3,3}\right]e^{-2u_3}\\
=&\frac{1}{2}\left[\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)^2 - (\dot{v})^2 - 2\left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u}\\
&-\left[-2r^{-2} + \frac{1}{2}\left((u')^2 + 2r^{-2}\right) + \frac{1}{2}\left(u' + 2r^{-1}\right)\left(2r^{-1} - 2v' - u'\right) + u'v'\right]e^{-2v}\\
&+r^{-2}e^{-2b}\\
=&\dot{b}\left(2\dot{v} + \dot{b}\right)e^{-2u} - r^{-1}\left(r^{-1} - 2v'\right)e^{-2v} + r^{-2}e^{-2b}
\end{aligned}$$

- **Cas** $j := 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{11} =&\frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{1,1})^2 - \hat{u}_{1,1}^2\right]e^{-2u_1}\\
&+\eta_1\eta_0\left[\hat{u}_{10,00} + \frac{1}{2}\hat{u}_{0,0}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{0,0}\left(\hat{u}_{10,0} - 2u_{0,0} - u_{1,0}\right) + u_{1,0}u_{0,0}\right]e^{-2u_0}\\
&+\eta_1\eta_2\left[\hat{u}_{12,22} + \frac{1}{2}\hat{u}_{2,2}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{2,2}\left(\hat{u}_{12,2} - 2u_{2,2} - u_{1,2}\right) + u_{1,2}u_{2,2}\right]e^{-2u_2}\\
&+\eta_1\eta_3\left[\hat{u}_{13,33} + \frac{1}{2}\hat{u}_{3,3}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{3,3}\left(\hat{u}_{13,3} - 2u_{3,3} - u_{1,3}\right) + u_{1,3}u_{3,3}\right]e^{-2u_3}\\
=&\frac{1}{2}\left[\left(u' + 2r^{-1}\right)^2 - (u')^2 - 2\left(u'\right)^2\right]e^{-2v}\\
&-\left[2\ddot{b} + \frac{1}{2}\left((\dot{v})^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)\left(2\dot{b} - 2\dot{u} - \dot{v}\right) + \dot{u}\dot{v}\right]e^{-2u}\\
&-r^{-2}e^{-2b}\\
=&\left[\dot{b}\left(2\dot{u} - 3\dot{b}\right) - 2\ddot{b}\right]e^{-2u} + r^{-1}\left(2u' + r^{-1}\right)e^{-2v} - r^{-2}e^{-2b}
\end{aligned}$$

- **Cas** $j := 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{22} =&\frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{2,2})^2 - \hat{u}_{2,2}^2\right]e^{-2u_2}\\
&+\eta_2\eta_0\left[\hat{u}_{20,00} + \frac{1}{2}\hat{u}_{0,0}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{0,0}\left(\hat{u}_{20,0} - 2u_{0,0} - u_{2,0}\right) + u_{2,0}u_{0,0}\right]e^{-2u_0}\\
&+\eta_2\eta_1\left[\hat{u}_{21,11} + \frac{1}{2}\hat{u}_{1,1}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{1,1}\left(\hat{u}_{21,1} - 2u_{1,1} - u_{2,1}\right) + u_{2,1}u_{1,1}\right]e^{-2u_1}\\
&+\eta_2\eta_3\left[\hat{u}_{23,33} + \frac{1}{2}\hat{u}_{3,3}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{3,3}\left(\hat{u}_{23,3} - 2u_{3,3} - u_{2,3}\right) + u_{2,3}u_{3,3}\right]e^{-2u_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left[\ddot{v} + \ddot{b} + \frac{1}{2}\left((\dot{v})^2 + 2\left(\dot{b}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{v} + 2\dot{b}\right)\left(\dot{v} + \dot{b} - 2\dot{u} - \dot{b}\right) + \dot{u}\dot{b}\right]e^{-2u} \\
&\quad + \left[u'' - r^{-2} + \frac{1}{2}\left((u')^2 + 2r^{-2}\right) + \frac{1}{2}\left(u' + 2r^{-1}\right)\left(u' - 2v'\right) + r^{-1}v'\right]e^{-2v} \\
&= \left[-\ddot{v} - \ddot{b} + (\dot{u} - \dot{v})\left(\dot{v} + \dot{b}\right) - \left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u} + \left[u'' + u'\left(u' - v' + r^{-1}\right) - r^{-1}v'\right]e^{-2v}
\end{aligned}$$

- **Cas** $j := 3$. Comme $\mathbb{R}_{33} = \mathbb{R}_{22}$, on a donc :

$$\mathbb{G}_{33} = \mathbb{G}_{22}.$$

- On a :

$$\mathbb{G}_{01} = \mathbb{G}_{10} = \mathbb{R}_{01} = 2\left(\dot{b}\left(u' - r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right)e^{-u-v}.$$

Donc les matrices $\mathbb{G}_{jl}$ et G_{jl} sont de la forme :

$$\mathbb{G}_{jl} = \begin{pmatrix} \mathbb{G}_{00} & \mathbb{G}_{01} & 0 & 0 \\ \mathbb{G}_{10} & \mathbb{G}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{G}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{G}_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{G}_{jl} = \begin{pmatrix} \mathrm{G}_{00} & \mathrm{G}_{01} & 0 & 0 \\ \mathrm{G}_{10} & \mathrm{G}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{G}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{G}_{33} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{00} &= \dot{b}\left(2\dot{v} + \dot{b}\right)e^{-2u} - r^{-1}\left(r^{-1} - 2v'\right)e^{-2v} + r^{-2}e^{-2b} \\
\mathrm{G}_{00} &= \dot{b}\left(2\dot{v} + \dot{b}\right) - r^{-1}\left(r^{-1} - 2v'\right)e^{2u-2v} + r^{-2}e^{-2b+2u} \\
\mathbb{G}_{01} &= 2\left(\dot{b}\left(u' - r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right)e^{-u-v} \\
\mathrm{G}_{01} &= 2\left(\dot{b}\left(u' - r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right) \\
\mathbb{G}_{11} &= \left[\dot{b}\left(2\dot{u} - 3\dot{b}\right) - 2\ddot{b}\right]e^{-2u} + r^{-1}\left(2u' + r^{-1}\right)e^{-2v} - r^{-2}e^{-2b} \\
\mathrm{G}_{11} &= \left[\dot{b}\left(2\dot{u} - 3\dot{b}\right) - 2\ddot{b}\right]e^{-2u+2v} + r^{-1}\left(2u' + r^{-1}\right) - r^{-2}e^{-2b+2v} \\
\mathbb{G}_{22} &= \mathbb{G}_{33} = \left[-\ddot{v} - \ddot{b} + (\dot{u} - \dot{v})\left(\dot{v} + \dot{b}\right) - \left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u} + \left[u'' + u'\left(u' - v' + r^{-1}\right) - r^{-1}v'\right]e^{-2v} \\
\mathrm{G}_{22} &= r^2\left[-\ddot{v} - \ddot{b} + (\dot{u} - \dot{v})\left(\dot{v} + \dot{b}\right) - \left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u} + r^2\left[u'' + u'\left(u' - v' + r^{-1}\right) - r^{-1}v'\right]e^{-2v} \\
\mathrm{G}_{33} &= \sin^2\vartheta\,\mathrm{G}_{22}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Résolution pratique dans le cas des métriques à symétrie sphérique

On étudie la métrique h traitée dans les exemples du chapitre précédent voir :

1.1.4.1, 1.1.5.1, 1.2.5.5, 1.2.6.3 , 1.2.6.5, 1.3.4.5 , 1.3.5.4, 1.4.4.3, 1.5.2.2, 1.6.0.6

$$\begin{aligned} h &= e^{2u(t,r)}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - e^{2v(t,r)}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 e^{2b(t)} \left(\mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi\right) \\ &= e^{2u(t,r)}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - e^{2v(t,r)}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 e^{2b(t)} h_\Omega \end{aligned}$$

avec :

$$h_\Omega := \mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi$$

la **métrique sur la 2-sphère unité en coordonnées sphériques** (voir le point (2) de l'exemple 1.1.3.3).

On notera au choix :

$$(0,1,2,3) := (t,r,\vartheta,\phi)$$

Suite à l'article d'Einstein [3], plusieurs résolutions de l'équation de la relativité générale ont été données dans des cas particuliers, voici des références pour celles traitées dans ce chapitre :

- métrique de Schwarzshild : [1], [18], [19], [20]
- métrique de Reissner-Nordström : [7], [12], [13]
- métrique FLRW : [4], [5], [10], [14], [15], [16], [20], [21],

2.1 Résolution générale

2.1.1 Objets associés à la courbure

Pour les calculs, nous aurons besoin des symboles de Christoffel et des composantes du tenseur d'Einstein.

D'après l'exemple 1.2.5.5, les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} \dot{u} & u' & 0 & 0 \\ u' & \dot{v}e^{-2u+2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\dot{b}e^{2b-2u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\dot{b}\sin^2\vartheta e^{2b-2u} \end{pmatrix} \qquad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} u'e^{2u-2v} & \dot{v} & 0 & 0 \\ \dot{v} & v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -re^{2b-2v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\sin^2\vartheta e^{2b-2v} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ \dot{b} & r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{b} \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\vartheta \\ \dot{b} & r^{-1} & \cot\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

D'après l'exemple 1.6.0.6, les composantes non nulles du tenseur d'Einstein sont données par :

Dans les bases $\mathscr{C}_\perp$ **et** $\mathscr{C}_\perp^*$	$\begin{aligned} \mathbb{G}_{00} &= \dot{b}\left(2\dot{v}+\dot{b}\right)e^{-2u} - r^{-1}\left(r^{-1}-2v'\right)e^{-2v} + r^{-2}e^{-2b} \\ \mathbb{G}_{01} &= 2\left(\dot{b}\left(u'-r^{-1}\right)+r^{-1}\dot{v}\right)e^{-u-v} \\ \mathbb{G}_{11} &= \left[\dot{b}\left(2\dot{u}-3\dot{b}\right)-2\ddot{b}\right]e^{-2u} + r^{-1}\left(2u'+r^{-1}\right)e^{-2v} - r^{-2}e^{-2b} \\ \mathbb{G}_{22} &= \left[-\ddot{v}-\ddot{b}+\left(\dot{u}-\dot{v}\right)\left(\dot{v}+\dot{b}\right)-\left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u} + \left[u''+u'\left(u'-v'+r^{-1}\right)-r^{-1}v'\right]e^{-2v} \\ \mathbb{G}_{33} &= \mathbb{G}_{22} \end{aligned}$
Dans les bases $\mathscr{C}$ **et** $\mathscr{C}^*$	$\begin{aligned} \mathrm{G}_{00} &= e^{2u}\mathbb{G}_{00} \\ &= \dot{b}\left(2\dot{v}+\dot{b}\right) - r^{-1}\left(r^{-1}-2v'\right)e^{2u-2v} + r^{-2}e^{-2b+2u} \\ \mathrm{G}_{01} &= e^{u+v}\mathbb{G}_{01} \\ &= 2\left(\dot{b}\left(u'-r^{-1}\right)+r^{-1}\dot{v}\right) \\ \mathrm{G}_{11} &= e^{2v}\mathbb{G}_{11} \\ &= \left[\dot{b}\left(2\dot{u}-3\dot{b}\right)-2\ddot{b}\right]e^{-2u+2v} + r^{-1}\left(2u'+r^{-1}\right) - r^{-2}e^{-2b+2v} \\ \mathrm{G}_{22} &= r^2\mathbb{G}_{22} \\ &= r^2\left[-\ddot{v}-\ddot{b}+\left(\dot{u}-\dot{v}\right)\left(\dot{v}+\dot{b}\right)-\left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u} + r^2\left[u''+u'\left(u'-v'+r^{-1}\right)-r^{-1}v'\right]e^{-2v} \\ \mathrm{G}_{33} &= r^2\sin^2\vartheta\,\mathbb{G}_{33} \\ &= -r^2\sin^2\vartheta\left[2\ddot{b}+3\left(\dot{b}\right)^2\right]e^{2b-2u} + r^2\sin^2\vartheta\left[u''+\left(u'+r^{-1}\right)\left(u'-v'\right)\right]e^{-2v} \end{aligned}$

2.1.2 Forme du champ tensoriel S_{jl}

Suivant l'utilité que l'on fait des tenseurs, il est utile de monter ou descendre les indices (voir les sous-sections 1.1.8 et 1.1.9). Les tenseurs ainsi obtenus sont reliés par des formules simples. On commence par un exemple.

Exemple 2.1.2.1: Formes du tenseur énergie impulsion dans le cas d'un fluide parfait

Dans la littérature, on trouve comme exemple usuel de tenseur énergie impulsion, le tenseur énergie impulsion dans le cas d'un fluide parfait en équilibre thermodynamique. On le trouve sous six formes différentes équivalentes :

$$\mathbb{T}_{jl} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \qquad \mathrm{T}_{jl} = \begin{pmatrix} \rho c^2 e^{2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Pe^{2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta P \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{T}^j_{\ l} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \qquad \mathrm{T}^j_{\ l} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{T}^{jl} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \qquad \mathrm{T}^{jl} = \begin{pmatrix} \rho c^2 e^{-2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Pe^{-2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\vartheta P \end{pmatrix}$$

avec ρ la **masse volumique du fluide** et P la **pression hydrostatique**. Comme précisé avec la notation T ou $\mathbb{T}$ et les indices, ces six tenseurs représentent le cas d'un fluide parfait dans le cas avec ou sans tétrades et de type $(2,0)$ ou $(1,1)$ ou $(0,2)$.

Ces six tenseurs sont reliés par les formules standards (voir les résultats des sous-sections 1.1.8 et 1.1.9) :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{T}_j^j = \mathrm{h}^{jj}\mathrm{T}_{jj} & \mathrm{T}^{jj} = \mathrm{h}^{jj}\mathrm{T}_j^j & \\ \mathbb{T}_j^j = \eta^{jj}\mathbb{T}_{jj} & \mathbb{T}^{jj} = \eta^{jj}\mathbb{T}_j^j & \\ \mathrm{T}_{jj} = e^{2u_j}\mathbb{T}_{jj} & \mathrm{T}_j^j = \mathbb{T}_j^j & \mathrm{T}^{jj} = e^{-2u_j}\mathbb{T}^{jj} \end{array}$$

On remarque que dans le cas où le tenseur T_{jl} est diagonal, on a :

$$\mathbb{T}_j^j = \mathrm{T}_j^j.$$

cela ne sera plus vrai si T_{jl} n'est pas diagonale.
On préférera les tenseurs T_{jl} et $\mathbb{T}_{jl}$ quand on utilisera l'équation d'Einstein et les tenseurs T_l^j et $\mathbb{T}_l^j$ quand on utilisera l'identité de Bianchi.

L'équation d'Einstein s'écrit :

Dans les bases $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$	**Dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$**
$\mathbb{G}_{jl} = \mathbb{S}_{jl}$	$\mathrm{G}_{jl} = \mathrm{S}_{jl}$

.

avec un second membre valant dans le cas avec constante cosmologique :

Dans les bases $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$	**Dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$**
$\mathbb{S}_{jl} := -\Lambda\eta_{jl} + \kappa\mathbb{T}_{jl}$	$\mathrm{S}_{jl} := -\Lambda g_{jl} + \kappa\mathrm{S}_{jl}$

On a posé :

$$\kappa := \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Comme $\mathbb{G}_{jl}$ et G_{jl} ne contiennent que deux termes non diagonaux non nuls qui sont égaux en positions symétrique $(j,l) := (0,1)$ et $(j,l) := (1,0)$, on va regarder dans la suite de cette section, des tenseurs $\mathbb{S}_{jl}$ et S_{jl} du type :

$$\mathrm{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \mathrm{S}_{00} & \mathrm{S}_{01} & 0 & 0 \\ \mathrm{S}_{10} & \mathrm{S}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{S}_{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha e^{2u} & \xi e^{u+v} & 0 & 0 \\ \xi e^{u+v} & \beta e^{2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta\gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{S}_{jl} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{00} & \mathbb{S}_{01} & 0 & 0 \\ \mathbb{S}_{10} & \mathbb{S}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{S}_{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha & \xi & 0 & 0 \\ \xi & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

avec $\alpha(t,r),\beta(t,r),\gamma(t,r),\xi(t,r)$ des fonctions des variables t et r. On a donc :

$$\mathrm{S}_l^j = \mathrm{g}^{ll}\mathrm{S}_{jl} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}_0^0 & \mathrm{S}_1^0 & 0 & 0 \\ \mathrm{S}_0^1 & \mathrm{S}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{S}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{S}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \xi e^{-u+v} & 0 & 0 \\ -\xi e^{u-v} & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{S}_l^j = \eta^{ll}\mathbb{S}_{jl} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_0^0 & \mathbb{S}_1^0 & 0 & 0 \\ \mathbb{S}_0^1 & \mathbb{S}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{S}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{S}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \xi & 0 & 0 \\ -\xi & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

On a matriciellement :

Dans les bases $\mathscr{C}_\perp$ et $\mathscr{C}_\perp^*$	**Dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$**
$\begin{pmatrix} \mathbb{G}_{00} & \mathbb{G}_{01} & 0 & 0 \\ \mathbb{G}_{10} & \mathbb{G}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{G}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{G}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{00} & \mathbb{S}_{01} & 0 & 0 \\ \mathbb{S}_{10} & \mathbb{S}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{S}_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{G}_{00} & \mathrm{G}_{01} & 0 & 0 \\ \mathrm{G}_{10} & \mathrm{G}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{G}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{G}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}_{00} & \mathrm{S}_{01} & 0 & 0 \\ \mathrm{S}_{10} & \mathrm{S}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{S}_{33} \end{pmatrix}$.

Ce qui nous donne dans les deux cas, les quatre équations fondamentales suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (E_0 \ : \ \mathbb{G}_{00} = \mathbb{S}_{00}) & : & \dot{b}\left(2\dot{v}+\dot{b}\right)e^{-2u} - r^{-1}\left(r^{-1}-2v'\right)e^{-2v} + r^{-2}e^{-2b} = \alpha \\ (E_{01} \ : \ \mathbb{G}_{01} = \mathbb{S}_{01}) & : & \left(\dot{b}\left(u'-r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right)e^{-u-v} = \xi \\ (E_1 \ : \ \mathbb{G}_{11} = \mathbb{S}_{11}) & : & \left[\dot{b}\left(2\dot{u}-3\dot{b}\right) - 2\ddot{b}\right]e^{-2u} + r^{-1}\left(2u'+r^{-1}\right)e^{-2v} - r^{-2}e^{-2b} = \beta \\ (E_2 \ : \ \mathbb{G}_{22} = \mathbb{S}_{22}) & : & \left[-\ddot{v}-\ddot{b}+(\dot{u}-\dot{v})\left(\dot{v}+\dot{b}\right) - \left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u} + \left[u''+u'\left(u'-v'+r^{-1}\right) - r^{-1}v'\right]e^{-2v} = \gamma \end{array}$$

2.1.3 Utilisation de l'identité de Bianchi

D'après la proposition 1.6.0.3, l'identité de Bianchi deux fois contractées donne quatre équations pour $l \in \{0,1,2,3\}$:

$$\nabla_j \mathrm{G}_l^j = 0.$$

Or par la proposition 1.2.5.2, on a :

$$\nabla_j \mathrm{G}_l^j = \partial_j \mathrm{G}_l^j + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{G}_l^k - \Gamma^k{}_{lj}\mathrm{G}_k^j.$$

Donc on a :

$$\nabla_j \mathrm{G}_l^j = \partial_j \mathrm{G}_l^j + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{G}_l^k - \Gamma^k{}_{lj}\mathrm{G}_k^j = 0.$$

Par l'égalité :

$$\mathrm{G}_l^j = \mathrm{S}_l^j$$

et par linéarité de ∇_j, on en déduit les quatre égalités pour $l \in \{0,1,2,3\}$:

$$0 = \nabla_j \mathrm{S}_l^j = \partial_j \mathrm{S}_l^j + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{S}_l^k - \Gamma^k{}_{lj}\mathrm{S}_k^j$$

La proposition qui suit donne les deux égalités non triviales déduites de ces quatre égalités.

Proposition 2.1.3.1: Application de l'identité de Bianchi

L'identité :

$$\nabla_j \mathrm{G}^j_l = 0$$

est équivalente aux deux équations :

$$(B_0 \ : \ \nabla_j \mathrm{S}^j_0 = 0) \quad : \quad \dot{\alpha} - \left[\xi' + 2\left(u' + r^{-1}\right)\xi\right]e^{u-v} + 2\dot{b}\left(\alpha+\gamma\right) - \left(u'\alpha - v'\beta + 2r^{-1}\gamma\right) + \dot{v}\beta = 0$$
$$(B_1 \ : \ \nabla_j \mathrm{S}^j_1 = 0) \quad : \quad \left[\dot{\xi} + \left(\dot{v} - 2\dot{u} - 2\dot{b}\right)\xi\right]e^{-u+v} - \beta' - \left(\alpha+\beta\right)u' + 2r^{-1}\left(\gamma-\beta\right) = 0$$

Démonstration. On a :

$$0 = \nabla_j \mathrm{S}^j_l = \partial_j \mathrm{S}^j_l + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{S}^k_l - \Gamma^k{}_{lj}\mathrm{S}^j_k$$

On a quatre cas.

- Cas $l \coloneqq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_j \mathrm{S}^j_0 &= \partial_j \mathrm{S}^j_0 + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{S}^k_0 - \Gamma^k{}_{0j}\mathrm{S}^j_k \\
&= \partial_0 \mathrm{S}^0_0 + \partial_1 \mathrm{S}^1_0 + \Gamma^j{}_{j0}\mathrm{S}^0_0 + \Gamma^j{}_{j1}\mathrm{S}^1_0 - \Gamma^0{}_{01}\mathrm{S}^1_0 - \Gamma^j{}_{0j}\mathrm{S}^j_j \\
&= \dot{\alpha} - \left[\xi' + \left(u' - v'\right)\xi\right]e^{u-v} + \left(\dot{u} + \dot{v} + 2\dot{b}\right)\alpha - \left(u' + v' + 2r^{-1}\right)\xi e^{u-v} - \dot{v}\alpha - \left(\dot{u}\alpha - \dot{v}\beta - 2\dot{b}\gamma\right) \\
&= \dot{\alpha} - \left[\xi' + 2\left(u' + r^{-1}\right)\xi\right]e^{u-v} + 2\dot{b}\left(\alpha+\gamma\right) - \left(u'\alpha - v'\beta + 2r^{-1}\gamma\right) + \dot{v}\beta
\end{aligned}$$

- Cas $l \coloneqq 1$. On a :

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_j \mathrm{S}^j_1 &= \partial_j \mathrm{S}^j_1 + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{S}^k_1 - \Gamma^k{}_{1j}\mathrm{S}^j_k \\
&= \partial_0 \mathrm{S}^0_1 + \partial_1 \mathrm{S}^1_1 + \Gamma^j{}_{j0}\mathrm{S}^0_1 + \Gamma^j{}_{j1}\mathrm{S}^1_1 - \Gamma^1{}_{10}\mathrm{S}^0_1 - \Gamma^j{}_{1j}\mathrm{S}^j_j \\
&= \left[\dot{\xi} + \left(\dot{v} - \dot{u}\right)\xi\right]e^{-u+v} - \beta' - \left(\dot{u} + \dot{v} + 2\dot{b}\right)\xi e^{-u+v} - \left(u' + v' + 2r^{-1}\right)\beta - \dot{v}\xi e^{-u+v} - \left(u'\alpha - v'\beta - 2r^{-1}\gamma\right) \\
&= \left[\dot{\xi} + \left(\dot{v} - 2\dot{u} - 2\dot{b}\right)\xi\right]e^{-u+v} - \beta' - \left(\alpha+\beta\right)u' + 2r^{-1}\left(\gamma-\beta\right)
\end{aligned}$$

- Cas $l \coloneqq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_j \mathrm{S}^j_2 &= \partial_j \mathrm{S}^j_2 + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{S}^k_2 - \Gamma^k{}_{2j}\mathrm{S}^j_k \\
&= \Gamma^j{}_{j2}\mathrm{S}^2_2 - \Gamma^j{}_{2j}\mathrm{S}^j_j \\
&= \cot\vartheta \mathrm{S}^2_2 - \cot\vartheta \mathrm{S}^3_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Cas $l \coloneqq 3$. On a :

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_j \mathrm{S}^j_3 &= \partial_j \mathrm{S}^j_3 + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{S}^k_3 - \Gamma^k{}_{3j}\mathrm{S}^j_k \\
&= \Gamma^j{}_{j3}\mathrm{S}^3_3 - \Gamma^j{}_{3j}\mathrm{S}^j_j \\
&= \cot\vartheta \mathrm{S}^2_2 - \cot\vartheta \mathrm{S}^3_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les deux derniers cas sont donc triviaux.

□

2.1.4 Les six équations fondamentales

Les six équations fondamentales qui nous servirons tout au long de cette partie sont :

$$\begin{aligned}
(E_0 \ : \ \mathbb{G}_{00} = \mathbb{S}_{00}) \quad &: \quad \dot{b}\left(2\dot{v} + \dot{b}\right)e^{-2u} - r^{-1}\left(r^{-1} - 2v'\right)e^{-2v} + r^{-2}e^{-2b} = \alpha \\
(E_{01} \ : \ \mathbb{G}_{01} = \mathbb{S}_{01}) \quad &: \quad \left(\dot{b}\left(u' - r^{-1}\right) + r^{-1}\dot{v}\right)e^{-u-v} = \xi \\
(E_1 \ : \ \mathbb{G}_{11} = \mathbb{S}_{11}) \quad &: \quad \left[\dot{b}\left(2\dot{u} - 3\dot{b}\right) - 2\ddot{b}\right]e^{-2u} + r^{-1}\left(2u' + r^{-1}\right)e^{-2v} - r^{-2}e^{-2b} = \beta \\
(E_2 \ : \ \mathbb{G}_{22} = \mathbb{S}_{22}) \quad &: \quad \left[-\ddot{v} - \ddot{b} + (\dot{u} - \dot{v})\left(\dot{v} + \dot{b}\right) - \left(\dot{b}\right)^2\right]e^{-2u} + \left[u'' + u'\left(u' - v' + r^{-1}\right) - r^{-1}v'\right]e^{-2v} = \gamma \\
(B_0 \ : \ \nabla_j \mathrm{S}^j_0 = 0) \quad &: \quad \dot{\alpha} - \left[\xi' + 2\left(u' + r^{-1}\right)\xi\right]e^{u-v} + 2\dot{b}\left(\alpha + \gamma\right) - \left(u'\alpha - v'\beta + 2r^{-1}\gamma\right) + \dot{v}\beta = 0 \\
(B_1 \ : \ \nabla_j \mathrm{S}^j_1 = 0) \quad &: \quad \left[\dot{\xi} + \left(\dot{v} - 2\dot{u} - 2\dot{b}\right)\xi\right]e^{-u+v} - \beta' - (\alpha + \beta)\,u' + 2r^{-1}\left(\gamma - \beta\right) = 0
\end{aligned}$$

Les quatre premières sont déduites de l'équation de la relativité générale et les deux dernières sont dues aux identités de Bianchi.

Les deux identités de Bianchi sont déduites de l'équation de la relativité générale mais à cause de leurs importances dans les calculs on les considère comme deux équations fondamentales supplémentaires.

2.1.5 Cas où G et S sont diagonaux

Par l'équation (E_{01}), on a les équivalences :

(i) G_{jl} et S_{jl} sont diagonaux ;

(ii) $\xi = 0$;

(iii) $r\dot{b}u' + \dot{v} - \dot{b} = 0$.

La dernière équation est un critère difficilement exploitable en général. On a tout de même le résultat suivant simple.

Proposition 2.1.5.1: Cas où $\xi = 0$

On se place dans le cas :

$$\xi = 0.$$

(i) On a équivalence entre :

  (a) $u' = 0$ *i.e.* u est indépendante de r ;

  (b) $\dot{v} = \dot{b}$;

  (c) la fonction v se décompose en $v(t,r) = b(t) + v_r(r)$.

(ii) Supposons que :

$$\dot{b} = 0.$$

Alors $\dot{v} = 0$ *i.e.* v est indépendante de t.

Démonstration. (i) Par le point (iii) de l'équivalence citée avant la proposition et comme $\xi = 0$, on a :

$$r\dot{b}u' + \dot{v} - \dot{b} = 0.$$

On a donc les équivalences entre :

- $u' = 0$;
- $\dot{v} - \dot{b} = 0$;
- $\dot{v} = \dot{b}$.

Le dernier point est équivalent en intégrant à l'existence d'une fonction v_r dépendant de r seulement telle que :

$$v(t,r) = b(t) + v_r(r).$$

(ii) Supposons que :

$$\dot{b} = 0.$$

Alors on a par le point (iii) de l'équivalence citée avant la proposition :

$$\dot{v} = 0$$

i.e. v est indépendante de t.

□

Les deux cas étudiés dans cette proposition seront traités séparément, le premier dans la sous-section suivante et le deuxième, plus long, sera traité dans la section suivante.

2.1.6 Cas où les fonctions u' et ξ sont nulles.

On se place dans le cas où :

$$u' = \xi = 0.$$

Donc il existe une constante c telle que :

$$e^u = c.$$

Par le point (i) de la proposition 2.1.5.1, la fonction v est à variables séparées. On supposera que v s'écrit :

$$v(t,r) := b(t) + v(r).$$

Ainsi la métrique étudiée est du type :

$$h = c^2 \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - e^{2b(t)} \left(e^{2v(r)} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta + \sin^2 \vartheta \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi \right) \right)$$

Dans toute cette sous-section, on considère un tenseur énergie impulsion qui vérifie les six équations fondamentales du type :

$$\mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \alpha(t,r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta(t,r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(t,r) \end{pmatrix}$$

avec α, β des fonctions des variables t et r.

On a :

$$(B_1 \ : \ \nabla_j S^j_1 = 0) \quad : \quad -\beta' = 0$$

Ainsi β ne dépend pas de r, donc on a :

$$\beta(t,r) = \beta(t).$$

L'équation (E_{01}) est triviale, les cinq équations fondamentales deviennent :

$$\begin{aligned}
(E_0 \ : \ \mathbb{G}_{00} = \mathbb{S}_{00}) \quad &: \quad 3c^{-2} \left(\dot{b}\right)^2 + r^{-1} e^{-2b} \left[\left(2v' - r^{-1}\right) e^{-2v} + r^{-1} \right] = \alpha \\
(E_1 \ : \ \mathbb{G}_{11} = \mathbb{S}_{11}) \quad &: \quad -c^{-2} \left[2\ddot{b} + 3 \left(\dot{b}\right)^2 \right] + r^{-2} e^{-2b} \left(e^{-2v} - 1 \right) = \beta \\
(E_2 \ : \ \mathbb{G}_{22} = \mathbb{S}_{22}) \quad &: \quad -c^{-2} \left[2\ddot{b} + 3 \left(\dot{b}\right)^2 \right] - r^{-1} v' e^{-2b-2v} = \beta \\
(B_0 \ : \ \nabla_j S^j_0 = 0) \quad &: \quad \dot{\alpha} + \dot{b} \left(2\alpha + 3\beta \right) + \left(v' - 2r^{-1} \right) \beta = 0 \\
(B_1 \ : \ \nabla_j S^j_1 = 0) \quad &: \quad -\beta' = 0
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.6.1: Métrique généralisée

Il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que :

$$h = c^2 \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - e^{2b(t)} \left(\frac{1}{1 - kr^2} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 h_\Omega \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(\dot{b}\right)^2 + kc^2 e^{-2b} &= \frac{\alpha c^2}{3} \\ \ddot{b} + \left(\dot{b}\right)^2 &= -\frac{c^2}{6} (3\beta + \alpha) \end{aligned}$$

Démonstration. On montre le résultat en trois étapes :

$$\begin{aligned} &(1) \quad e^{-2v} = 1 - kr^2 \\ &(2) \quad \left(\dot{b}\right)^2 + kc^2 e^{-2b} = \frac{\alpha c^2}{3} \\ &(3) \quad \ddot{b} + \left(\dot{b}\right)^2 = -\frac{c^2}{6} (3\beta + \alpha) \end{aligned}$$

(1) On donne deux méthodes.

(a) On a

$$\begin{aligned} 0 &= \beta - \beta \\ &= \mathbb{G}_{11} - \mathbb{G}_{22} \\ &= -c^{-2} \left[2\ddot{b} + 3 \left(\dot{b}\right)^2 \right] + r^{-2} e^{-2b} \left(e^{-2v} - 1 \right) + c^{-2} \left[2\ddot{b} + 3 \left(\dot{b}\right)^2 \right] + r^{-1} v' e^{-2b-2v} \\ &= r^{-1} e^{-2b} \left(r^{-1} e^{-2v} + v' e^{-2v} - r^{-1} \right) \end{aligned}$$

Donc on a en posant $g := e^{-2v}$:

$$\begin{aligned} 0 &= r^{-1} e^{-2v} + v' e^{-2v} - r^{-1} \\ &= r^{-1} g - \frac{1}{2} g' - r^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi g est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ y' - 2r^{-1} y = -2r^{-1}.$$

Les solutions homogènes sont engendrées par la fonction :

$$r \longmapsto \exp\left(2 \int_1^r \mathfrak{r}^{-1} \mathrm{d}\mathfrak{r} \right) = e^{2\ln(r)} = r^2.$$

On a la solution particulière constante :

$$r \longmapsto 1.$$

Donc il existe une constante réelle k telle que :

$$g = 1 - kr^2.$$

Donc on a :

$$e^{2v} = \frac{1}{g} = \frac{1}{1 - kr^2}.$$

(b) Par (E_1), en séparant les variables r et t, on a :

$$e^{2b}\left(\beta + c^{-2}\left[2\ddot{b} + 3\left(\dot{b}\right)^2\right]\right) = r^{-2}\left(e^{-2v} - 1\right)$$

Ainsi il existe une constante k telle que :

$$r^{-2}\left(e^{-2v} - 1\right) = -k$$

i.e. on a :

$$e^{2v} = \frac{1}{1 - kr^2}.$$

On obtient aussi une autre équation que l'on retrouve dans le point (3) :

$$e^{2b}\left(\beta + c^{-2}\left[2\ddot{b} + 3\left(\dot{b}\right)^2\right]\right) = -k$$

i.e. on a :

$$2\ddot{b} + 3\left(\dot{b}\right)^2 + kc^2e^{-2b} = -\beta c^2.$$

L'avantage de la deuxième méthode est qu'elle n'utilise que l'équation (E_1).

(2) Comme :

$$g' = -2kr$$

on a :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{G}_{00}\\
&= 3c^{-2}\left(\dot{b}\right)^2 + r^{-1}\left(2v' - r^{-1}\right)e^{-2b-2v} + r^{-2}e^{-2b}\\
&= 3c^{-2}\left(\dot{b}\right)^2 + r^{-1}e^{-2b}\left(2v'e^{-2v} - r^{-1}e^{-2v} + r^{-1}\right)\\
&= 3c^{-2}\left(\dot{b}\right)^2 + r^{-1}e^{-2b}\left(-g' - r^{-1}g + r^{-1}\right)\\
&= 3c^{-2}\left(\dot{b}\right)^2 + r^{-1}e^{-2b}\left(2kr - r^{-1} + kr + r^{-1}\right)\\
&= 3c^{-2}\left(\dot{b}\right)^2 + 3ke^{-2b}
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\dot{b} + kc^2e^{-2b} = \frac{\alpha c^2}{3}.$$

(3) On a :

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{G}_{22}\\
&= -c^{-2}\left(2\ddot{b} + 3\left(\dot{b}\right)^2\right) - r^{-1}v'e^{-2b-2v}\\
&= -c^{-2}\left(2\ddot{b} + 3\left(\dot{b}\right)^2\right) - \frac{1}{2r}g'e^{-2b}\\
&= -c^{-2}\left(2\ddot{b} + 3\left(\dot{b}\right)^2\right) - ke^{-2b}
\end{aligned}$$

Donc on a les deux équations (la deuxième est le point (ii)) :

$$\begin{aligned}
2\ddot{b} + 3\left(\dot{b}\right)^2 + kc^2e^{-2b} &= -\beta c^2\\
\left(\dot{b}\right)^2 + kc^2e^{-2b} &= \frac{\alpha c^2}{3}
\end{aligned}$$

Par différence de ces deux équations, on a donc :

$$\ddot{b} + \left(\dot{b}\right)^2 = -\frac{c^2}{6}\left(3\beta + \alpha\right)$$

□

Dans le corollaire suivant, on donne les relations avec les notations usuelles utilisées dans le cas de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Corollaire 2.1.6.2: Autres versions

(i) Le **facteur d'échelle** est défini par :

$$a := e^b.$$

Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que :

$$h = c^2 \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - a(t)^2 \left(\frac{1}{1 - kr^2} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 h_\Omega \right)$$

avec :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{\alpha c^2}{3}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{c^2}{6}(3\beta + \alpha)$$

(ii) Le **paramètre d'Hubble** est défini par :

$$H := \dot{b} = \frac{\dot{a}}{a}.$$

La **courbure spatiale** est définie par :

$$K := ke^{-b} = \frac{k}{a}.$$

Alors on a :

$$\left(\dot{H}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a} = \frac{\alpha c^2}{3}$$
$$\dot{H} + H^2 = -\frac{c^2}{6}(3\beta + \alpha)$$

Exemple 2.1.6.3: Exemple usuel

On reprend les notations de l'exemple 2.1.2.1. On se place dans le cas où :

$$\alpha := \frac{8\pi G}{c^2}\rho - \Lambda \quad , \quad \beta := \frac{8\pi G}{c^4} P + \Lambda.$$

On a donc les équations de Friedmann-Lemaître :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\Lambda c^2}{3}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{c^2}\left(P + \rho c^2\right) - \frac{\Lambda}{3}$$

2.2 Cas où les fonctions $\dot{b}$ et ξ sont nulles.

On se place dans le cas où :

$$\dot{b} = 0 \quad \wedge \quad \xi = 0.$$

Par le point (ii) de la proposition 2.1.5.1, la fonction v est indépendante de la variable t *i.e.* v s'écrit :

$$v(t, r) := v(r).$$

Ainsi la métrique étudiée est du type :

$$\begin{aligned} h &= e^{2u(t,r)}\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t - e^{2v(r)}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r - r^2\left(\mathrm{d}\vartheta\otimes\mathrm{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi\right) \\ &= e^{2u(t,r)}\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t - e^{2v(r)}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r - r^2 h_\Omega \end{aligned}$$

On considère dans toute cette sous-section, un tenseur énergie impulsion du type général :

$$\mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \alpha(t,r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t,r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(t,r) \end{pmatrix}$$

avec α,β,γ des fonctions des variables t et r.

Par l'équation :

$$(E_0\ :\ \mathbb{G}_{00} = \mathbb{S}_{00})\quad :\quad r^{-1}\left[\left(2v' - r^{-1}\right)e^{-2v} + r^{-1}\right] = \alpha$$

et comme la partie gauche ne dépend que de r, on en déduit que α est indépendante de t *i.e.*

$$\alpha(t,r) := \alpha(r).$$

L'équation (E_{01}) est triviale, les cinq équations fondamentales deviennent :

$$\begin{aligned} (E_0\ :\ \mathbb{G}_{00} = \mathbb{S}_{00}) &\quad:\quad r^{-1}\left[\left(2v' - r^{-1}\right)e^{-2v} + r^{-1}\right] = \alpha \\ (E_1\ :\ \mathbb{G}_{11} = \mathbb{S}_{11}) &\quad:\quad r^{-1}\left[\left(2u' + r^{-1}\right)e^{-2v} - r^{-1}\right] = \beta \\ (E_2\ :\ \mathbb{G}_{22} = \mathbb{S}_{22}) &\quad:\quad \left[u'' + \left(u' + r^{-1}\right)\left(u' - v'\right)\right]e^{-2v} = \gamma \\ (B_0\ :\ \nabla_j\mathbb{S}^j_0 = 0) &\quad:\quad u'\alpha - v'\beta + 2r^{-1}\gamma = 0 \\ (B_1\ :\ \nabla_j\mathbb{S}^j_1 = 0) &\quad:\quad -\beta' - (\alpha+\beta)u' + 2r^{-1}(\gamma - \beta) = 0 \end{aligned}$$

On pose :

$$A(r) := \int_0^r \alpha(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2\mathrm{d}\mathfrak{r}.$$

Exemple 2.2.0.1: Trois exemples simples

Tout au long de cette section, on traitera comme exemples trois cas usuels (voir l'exemple 2.1.2.1 pour les notations). On supposera que les fonctions $\rho(r)$ et $P(r)$ sont indépendantes de t.

(1) **Cas du fluide parfait.** On est dans le cas où (voir aussi l'exemple 2.1.2.1) :

$$\mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \kappa\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa P \end{pmatrix} \qquad \mathrm{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \kappa\rho c^2 e^{2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa P e^{2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa r^2 P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa r^2\sin^2\vartheta P \end{pmatrix}$$

On est donc dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho c^2 \quad,\quad \beta := \kappa P.$$

(2) **Cas avec constante cosmologique.** On est dans le cas où :

$$\mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} \qquad \mathrm{S}_{jl} := \kappa\begin{pmatrix} -\Lambda e^{2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda e^{2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta\Lambda \end{pmatrix}$$

On est donc dans le cas où :

$$\alpha := -\Lambda \quad,\quad \beta := \Lambda.$$

(3) **Cas du fluide parfait avec constante cosmologique.** On est dans le cas où :

$$\mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \kappa\rho - \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa P + \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa P + \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa P + \Lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}_{jl} := \begin{pmatrix} (\kappa\rho - \Lambda)\, e^{2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\kappa P + \Lambda)\, e^{2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,(\kappa P + \Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta\,(\kappa P + \Lambda) \end{pmatrix}$$

On est donc dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho - \Lambda \quad , \quad \beta := \kappa P + \Lambda.$$

A la fin de la section, on traitera un exemple plus compliqué avec une charge électrique.

2.2.1 Plan de la section

On traitera différents cas dans la section. Voici un plan succinct :

- **Résolution générale**. On ne suppose dans cette sous-section aucune hypothèse supplémentaire.
- **Métrique extérieure**. On suppose qu'il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout $r > R$:

$$\alpha(r) = -\beta(r)$$

  et que la métrique est asymptotiquement plate *i.e.* on a :

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{g}_{ii} = \eta_i.$$

  On regarde donc ce qu'il se passe à l'extérieur d'une "boule" de rayon R.
- **Métrique intérieure**. On garde les hypothèses de la métrique extérieure. On suppose de plus que α est constante sur $[0, R]$, que $\gamma = \beta$, que β est indépendante de t et que β est continue en $r := R$.
  On regarde donc ce qu'il se passe à l'extérieur d'une "boule" de rayon R.
- **Cas où $\beta(r) = 0$ pour $r > R$**. On suppose les hypothèses du point d'avant en supposant que β (et donc α) est nulle pour $r > R$.
- **Exemple de la métrique Reissner–Nordström**. On traite d'un exemple plus long avec une charge électrique.

2.2.2 Résolution générale

On commence par des résultats généraux sur les fonctions apparaissant dans l'équation de la relativité générale.

Théorème 2.2.2.1: Propriétés usuelles

(i) On a :

$$e^{2v} = \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}.$$

(ii) On a :

$$u' = \frac{r^3\beta + A}{2r(r - A)}.$$

(iii) On a :

$$\beta' = -\frac{r^3\beta + A}{2r(r-A)}(\alpha+\beta) + 2\frac{\gamma-\beta}{r}.$$

Démonstration. (i) On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{00} &= r^{-1}e^{-2v}\left(2v' - r^{-1}\right) + r^{-2} \\ &= r^{-2}\left(rv'e^{-2v} + \left(1-e^{-2v}\right)\right) \\ &= r^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\left(1-e^{-2v}\right)\right)\end{aligned}$$

Par l'équation (E_0), on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\left(1-e^{-2v}\right)\right) = \alpha r^2$$

En intégrant, il existe une constante C telle que :

$$r\left(1-e^{-2v}\right) = \int_0^r \alpha(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2\mathrm{d}\mathfrak{r} + C = A + C$$

i.e. on a :

$$e^{-2v} = 1 - \frac{1}{r}(A+C)$$

on a donc :

$$e^{2v} = \left(1 - \frac{A+C}{r}\right)^{-1}.$$

Pour calculer la valeur de C, on se place au voisinage de $r \coloneqq 0_+$. On peut supposer que α est constante de valeur α_0 sur ce voisinage de 0_+. Donc on a dans ce voisinage de 0_+ :

$$A(r) \approx \int_0^r \alpha_0\mathfrak{r}^2\mathrm{d}\mathfrak{r} \approx \alpha_0\frac{r^3}{3}$$

donc on a :

$$e^{-2v} \approx 1 - \frac{\alpha_0 r^3/3 + C}{r} \approx 1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3} + \frac{C}{r}.$$

Ainsi pour éviter une singularité dans la métrique en 0_+, on prend :

$$C \coloneqq 0.$$

Ainsi on a :

$$e^{2v} = \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}.$$

(ii) Comme :

$$e^{2v} = \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}$$

on a par (E_1) :

$$\begin{aligned}\beta &= \mathbb{G}_{11} \\ &= r^{-1}e^{-2v}\left(2u' + r^{-1}\right) - r^{-2} \\ &= r^{-1}\left(1-\frac{A}{r}\right)\left(2u' + r^{-1}\right) - r^{-2}\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$u' = \frac{1}{2}\frac{r\beta + r^{-1}}{1-\frac{A}{r}} - \frac{1}{2}r^{-1} = \frac{r^3\beta + A}{2r(r-b)}.$$

(iii) On donne deux preuves.

(1) On a par (B_1) :

$$\begin{aligned}\beta' &= -(\alpha+\beta)\,u' + 2r^{-1}(\gamma-\beta)\\ &= -\frac{r^3\beta + A}{2r(r-A)}(\alpha+\beta) + 2\frac{\gamma-\beta}{r}\end{aligned}$$

(2) On donne une autre preuve sans utiliser l'identité de Bianchi. En dérivant l'équation

$$(E_1) \quad : \quad \mathbb{G}_{11} = \beta$$

on a :

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathbb{G}_{11}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(e^{-2v}\left(2r^{-1}u' + r^{-2}\right) - r^{-2}\right)\\ &= e^{-2v}\left(-4r^{-1}v'u' - 2r^{-2}v' - 2r^{-2}u' + 2r^{-1}u'' - 2r^{-3}\right) + 2r^{-3}\\ &= 2r^{-1}e^{-2v}\left(-2v'u' - r^{-1}v' - r^{-1}u' + u'' - r^{-2}\right) + 2r^{-3}\\ &= 2r^{-1}\left[-e^{-2v}\left(-u'' + u'v' - (u')^2 + r^{-1}(u'+v') + r^{-2}\right)\right.\\ &\quad\left.\left[-u'e^{-2v}\left(v'+u'\right)\right]\right] + 2r^{-3}\\ &= 2r^{-1}\left[e^{-2v}\left(u'' - u'v' + (u')^2 + r^{-1}(u'-v') - r^{-1}\left(2u' + r^{-1}\right) + r^{-2}e^{2v} - r^{-2}e^{2v}\right) - u'e^{-2v}\left(v'+u'\right)\right] + 2r^{-3}\\ &= 2r^{-1}\left[e^{-2v}\left(e^{2v}\mathbb{G}_{11} - e^{2v}\mathbb{G}_{22} - r^{-2}e^{2v}\right) - u'e^{-2v}\left(v'+u'\right)\right] + 2r^{-3}\\ &= 2r^{-1}\left[\beta - \gamma - r^{-2} - u'e^{-2v}\left(v'+u'\right)\right] + 2r^{-3}\\ &= -2r^{-1}u'\left(v'+u'\right)e^{-2v} + 2\frac{\gamma-\beta}{r}\\ &= -(\mathbb{G}_{00} + \mathbb{G}_{11})\,u'e^{-2v} + 2\frac{\gamma-\beta}{r}\\ &= -(\alpha+\beta)\,u' + 2\frac{\gamma-\beta}{r}\\ &= -\frac{r^3\beta + A}{2r(r-A)}(\alpha+\beta) + 2\frac{\gamma-\beta}{r}\end{aligned}$$

□

Donc la métrique est de la forme :

$$h = e^{2u}\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t - \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r - r^2 h_\Omega$$

avec :

$$u' = \frac{r^3\beta + A}{2r(r-A)}.$$

Le point (iii) est une généralisation de l'équation Tolman–Oppenheimer–Volkoff (appelée TOV).

Exemple 2.2.2.2: Suite 1 - deux exemples simples

On reprend les trois exemples de 2.2.0.1.

(1) **Cas du fluide parfait.** On est dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho c^2 \quad , \quad \beta := \kappa P.$$

Posons :

$$m(r) := 4\pi \int_0^r \rho(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^r \frac{8\pi G}{c^2}\rho(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} \\ &= \frac{2G}{c^2} m(r) \end{aligned}$$

Ainsi par le théorème 2.2.2.1, on a :

(i) On a :

$$e^{2v} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}.$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{r^3\kappa P + 2Gm(r)/c^2}{2r(r - 2Gm(r)/c^2)} \\ &= \frac{8\pi G r^3 P + 2Gc^2 m(r)}{2c^2 r(c^2 r - 2Gm(r))} \end{aligned}$$

(iii) On a :

$$P' = -\frac{8\pi G r^3 P + 2Gc^2 m(r)}{2c^2 r(c^2 r - 2Gm(r))}\left(\rho c^2 + P\right).$$

(iv) La métrique est de la forme :

$$h = e^{2u}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega$$

(2) **Cas avec constante cosmologique.** On est dans le cas où :

$$\alpha := -\Lambda \quad , \quad \beta := \Lambda.$$

On a donc :

$$A(r) = -\int_0^r \Lambda \mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} = -\frac{\Lambda r^3}{3}.$$

Ainsi par le théorème 2.2.2.1, on a :

(i) On a :

$$e^{2v} = \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}.$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{r^3\Lambda - \Lambda r^3/3}{2r(r - \Lambda r^3/3)} \\ &= \frac{\Lambda r}{3 - \Lambda r^2} \end{aligned}$$

Donc il existe une constante k telle que :

$$u = -\frac{1}{2}\ln|3 - \Lambda r^2| + k$$

Ainsi on a :

$$e^{2u} = \frac{e^{2k}}{3}\left|1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right|^{-1}.$$

(iii) La métrique est de la forme :

$$h = \frac{e^{2k}}{3}\left|1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right|^{-1} \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega$$

(3) **Cas du fluide parfait avec constante cosmologique.** On est dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho - \Lambda \quad , \quad \beta := \kappa P + \Lambda.$$

On a donc :

$$A(r) = \int_0^r \left(\kappa\rho c^2 - \Lambda\right) \mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} = \frac{2Gm(r)}{c^2} - \frac{\Lambda r^3}{3}.$$

Ainsi par le théorème 2.2.2.1, on a :

(i) On a :

$$e^{2v} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}.$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{r^3\left(\kappa P + \Lambda\right) + 2Gm(r)/c^2 - \Lambda r^3/3}{2r(r - 2Gm(r)/c^2 + \Lambda r^3/3)} \\ &= \frac{24\pi G r^3 P + 6Gc^2 m(r) - \Lambda c^4 r^3}{2c^2 r(3c^2 r - 6Gm(r) + \Lambda c^2 r^3)} \end{aligned}$$

(iii) On a :

$$P' = -\frac{24\pi G r^3 P + 6Gc^2 m(r) - \Lambda c^4 r^3}{2c^2 r(3c^2 r - 6Gm(r) + \Lambda c^2 r^3)}\left(\rho c^2 + P\right).$$

(iv) La métrique est de la forme :

$$h = e^{2u}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega$$

2.2.3 Métrique extérieure

On fait deux hypothèses :

- il existe un réel $R > 0$ tel que :

$$\forall r > R,\ \alpha(r) = -\beta(r).$$

- la métrique est asymptotiquement plate *i.e.* on a :

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{g}_{ii} = \eta_i.$$

Théorème 2.2.3.1: Forme de la métrique extérieure

On a pour $r > R$:

$$h = c^2\left(1 - \frac{A}{r}\right)\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(r) - \alpha(r) \\
&= \alpha(r) + \beta(r) \\
&= \mathbb{G}_{00} + \mathbb{G}_{11} \\
&= r^{-1}e^{-2v}\left(2v' - r^{-1}\right) + r^{-2} + r^{-1}e^{-2v}\left(2u' + r^{-1}\right) - r^{-2} \\
&= r^{-1}e^{-2v}\left(u' + v'\right)
\end{aligned}$$

Donc on a $u' + v' = 0$. Ainsi il existe une constante C telle que :

$$u + v = C$$

Comme l'espace temps est asymptotiquement plat, on a :

$$\lim_{r\to\infty} e^{2u} = \mathrm{g}_{00} = c^2\eta_{00} = c^2 \quad , \quad \lim_{r\to\infty} -e^{2v} = \mathrm{g}_{11} = \eta_{11} = -1$$

i.e. on a :

$$\lim_{r\to\infty} u = \ln c \quad , \quad \lim_{r\to\infty} v = 0.$$

Ainsi on a :

$$C = \lim_{r\to\infty}(u+v) = \ln c.$$

On a donc $u = \ln c - v$ et :

$$\begin{aligned}
e^{2u} &= e^{2\ln c - 2v} \\
&= c^2 e^{-2v} \\
&= c^2\left(1 - \frac{A}{r}\right)
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.2.3.2: Suite 2 - deux exemples simples

On reprend les exemples (1) et (3) de 2.2.2.2 du **fluide parfait** avec ou sans constante cosmologique (voir aussi 2.1.2.1 et 2.2.0.1). On suppose pour les deux exemples qu'il existe une constante $R > 0$ telle que :

$$\rho(r) := \begin{cases} \rho(r) & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R. \end{cases} \quad , \quad P(r) := \begin{cases} P(r) & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R. \end{cases}$$

(a) La **masse de l'objet central** est définie par :

$$M := m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r}.$$

Ainsi pour tout $r \geq R$, on a :

$$m(r) = m(R) = M.$$

(b) Le **rayon de Schwarzschild** est défini par :

$$R_s := A(R) = \frac{2G}{c^2}m(R) = \frac{2GM}{c^2}.$$

On a donc :

$$A(r) = \frac{2G}{c^2}m(r) = \frac{R_s}{M}m(r).$$

On traite les deux exemples.

(1) On se place dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho c^2 \quad , \quad \beta := \kappa P.$$

Grâce à l'exemple (1) de **??**, la métrique est de la forme :

$$h = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega.$$

(3) On se place dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho c^2 - \Lambda \quad , \quad \beta := \kappa P + \Lambda.$$

Grâce à l'exemple (3) de **??**, la métrique est de la forme :

$$h = \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega.$$

Corollaire 2.2.3.3: Métrique statique

Pour $r > R$, la métrique h est statique.

Démonstration. Comme v est indépendante du temps et que :

$$u = \ln(c) - v$$

Ainsi u est indépendante de t. Donc la métrique h est statique pour $r > R$. □

Par (E_1) et (E_2), on voit aussi que β et γ sont indépendantes de t pour $r > R$.

2.2.4 Métrique intérieure

On suppose que :

- α est constante sur $[0, R]$ *i.e.* il existe une constante α_0 telle que sur $[0, R]$, on ait $\alpha = \alpha_0$. On suppose que :

$$\alpha = \alpha_0 < \frac{3}{R^2}$$

  la condition sur α_0 est due à la racine carrée $\sqrt{3 - \alpha_0 r^2}$ apparaissant dans les résultats de cette sous-section.
- $\gamma := \beta$, β indépendante de t et β est continue en $r := R$, on pose :

$$\beta_R := \beta(R_-) = \beta(R_+).$$

- pour tout $r > R$, on a :

$$\alpha(r) = -\beta(r).$$

  cette condition nous permettra de raccorder la métrique intérieure avec la métrique extérieure.

Dans toute cette sous-section, on a donc :

$$r \leq R \quad : \quad \mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(r) \end{pmatrix}$$

$$r > R \quad : \quad \mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \alpha(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha(r) \end{pmatrix}$$

On a donc sur $[0, R]$:

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^r \alpha_0 \mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} \\ &= \frac{\alpha_0 r^3}{3} \end{aligned}$$

Théorème 2.2.4.1: Métrique intérieure

On a pour $r \leq R$:

$$h = \frac{c^2}{4\sqrt{3}\alpha_0^2}\left(3\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2} - \left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 r^2}\right)^2 \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \frac{3}{3 - \alpha_0 r^2}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega.$$

Démonstration. Par (B_1) et comme $\gamma = \beta$, on a :

$$u' = -\frac{\beta'}{\alpha_0 + \beta}.$$

Donc il existe une constante C_1 telle que :

$$u = -\ln\left|\alpha_0 + \beta\right| + C_1.$$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \beta &= \mathbb{G}_{00} + \mathbb{G}_{11} \\ &= 2r^{-1}e^{-2v}\left(v' + u'\right) \\ &= 2r^{-1}\left(1 - \frac{A}{r}\right)\left(v' + u'\right) \\ &= 2r^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3}\right)\left(v' + u'\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} re^{C_1} &= r\exp\left(u + \ln\left|\alpha_0 + \beta\right|\right) \\ &= re^u\left|\alpha_0 + \beta\right| \\ &= re^u\left(2r^{-1}e^{-2v}\left|v' + u'\right|\right) \\ &= 2e^u e^{-2v}\left|v' + u'\right| > 0 \end{aligned}$$

Donc par continuité de $v' + u'$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $|v' + u'| = \varepsilon(v' + u')$. Avec $U := e^u$, on a donc :

$$\begin{aligned} re^{C_1} &= 2e^u e^{-2v}\left|v' + u'\right| \\ &= 2\varepsilon e^u e^{-2v}\left(v' + u'\right) \\ &= 2\varepsilon u' e^u e^{-2v} - \varepsilon e^u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(e^{-2v}\right) \\ &= 2\varepsilon u' e^u\left(1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3}\right) + \frac{2\varepsilon\alpha_0 r}{3}e^u \\ &= 2\varepsilon\left(1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3}\right)U' + \frac{2\varepsilon\alpha_0 r}{3}U. \end{aligned}$$

Donc U est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 2\varepsilon\left(1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3}\right)y' + \frac{2\varepsilon\alpha_0 r}{3}y = re^{C_1}$$

On a :

$$\alpha_0 < \frac{3}{R^2} \leq \frac{3}{r^2}$$

i.e. on a $1 - \alpha_0/r^2 \geq 0$. Ainsi les solutions homogènes sont engendrées par la fonction :

$$r \longmapsto \exp\left(-\int_0^r \frac{2\varepsilon\alpha_0\mathfrak{r}/3}{2\varepsilon\left(1-\alpha_0\mathfrak{r}^2/3\right)}\mathrm{d}\mathfrak{r}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1-\alpha_0 r^2/3\right)\right) = \sqrt{1-\frac{\alpha_0 r^2}{3}}.$$

On a la solution particulière constante :

$$r \longmapsto \frac{3\varepsilon e^{C_1}}{2\alpha_0}.$$

Donc il existe une constante C_2 telle que :

$$U = \frac{3\varepsilon e^{C_1}}{2\alpha_0} + C_2\sqrt{1-\frac{\alpha_0 r^2}{3}}.$$

Calculons les deux constantes C_1 et C_2.

- **Utilisation de** $\beta(R_-) = \beta_R = \beta(R_+)$. On a :

  $$re^{C_1} = re^u\left|\alpha_0+\beta\right| = \varepsilon r\left(\alpha_0+\beta\right)U$$

  i.e. on a :

  $$e^{-C_1}\left(\alpha_0+\beta\right)U = \varepsilon$$

  et donc en R_-, on a :

  $$\begin{aligned}\varepsilon &= e^{-C_1}\left(\alpha_0+\beta(R_-)\right)U(R)\\ &= e^{-C_1}\left(\alpha_0+\beta_R\right)U(R)\\ &= e^{-C_1}\left(\alpha_0+\beta_R\right)\left(\frac{3\varepsilon e^{C_1}}{2\alpha_0}+C_2\sqrt{1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}}\right)\\ &= \frac{3\varepsilon\left(\alpha_0+\beta_R\right)}{2\alpha_0}+C_2\left(\alpha_0+\beta_R\right)e^{-C_1}\sqrt{1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}}\end{aligned}$$

  i.e. on a :

  $$\frac{\varepsilon e^{C_1}}{2\alpha_0} = -C_2\frac{\left(\alpha_0+\beta_R\right)}{\left(\alpha_0+3\beta_R\right)}\sqrt{1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}}.$$

- **Utilisation de le continuité de la métrique en** R. Comme :

  $$g_{00}(R_-) = g_{00}(R_+)$$

  on a :

  $$\begin{aligned}c^2\left(1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}\right) &= c^2\left(1-\frac{A(R)}{R}\right)\\ &= g_{00}(R_+)\\ &= g_{00}(R_-)\\ &= e^{2u(R_-)}\\ &= U(R_-)^2\\ &= \left(\frac{3\varepsilon e^{C_1}}{2\alpha_0}+C_2\sqrt{1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}}\right)^2\\ &= \left(-3C_2\frac{\left(\alpha_0+\beta_R\right)}{\left(\alpha_0+3\beta_R\right)}\sqrt{1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}}+C_2\sqrt{1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}}\right)^2\\ &= 4C_2^2\frac{\alpha_0^2}{\left(\alpha_0+3\beta_R\right)^2}\left(1-\frac{\alpha_0 R^2}{3}\right)\end{aligned}$$

i.e. on a :

$$C_2 = \pm \frac{c\left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)}{2\alpha_0}$$

et donc :

$$\frac{\varepsilon e^{C_1}}{2\alpha_0} = \mp \frac{c\left(\alpha_0 + \beta_R\right)}{2\alpha_0}\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 R^2}{3}}$$

Ainsi on a :

$$e^u = U = \mp \frac{3c\left(\alpha_0 + \beta_R\right)}{2\alpha_0}\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 R^2}{3}} \pm \frac{c\left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)}{2\alpha_0}\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3}}.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} e^{2u} &= \frac{c^2}{4\alpha_0^2}\left(3\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 R^2}{3}} - \left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3}}\right)^2 \\ &= \frac{c^2}{4\sqrt{3}\alpha_0^2}\left(3\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2} - \left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 r^2}\right)^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 2.2.4.2: Forme intégrale et valeur au centre de β

(i) On a :

$$\beta = \alpha_0 \frac{\left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 r^2} - \left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2}}{3\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2} - \left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 r^2}}.$$

(ii) On a :

$$\beta_c := \lim_{r \to 0_+} \beta = \alpha_0 \frac{\left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3} - \left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2}}{3\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2} - \left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3}}.$$

Démonstration. On a :

$$\alpha_0 + \beta = \varepsilon e^{C_1} e^{-u}$$

$$e^u = \mp \frac{3c\left(\alpha_0 + \beta_R\right)}{2\alpha_0}\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 R^2}{3}} \pm \frac{c\left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)}{2\alpha_0}\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 r^2}{3}}.$$

$$\varepsilon e^{C_1} = \mp c\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{1 - \frac{\alpha_0 R^2}{3}}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \beta &= \varepsilon e^{C_1} e^{-u} - \alpha_0 \\ &= \frac{\mp 2c\alpha_0\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{1 - \alpha_0 R^2/3}}{\mp 3c\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{1 - \alpha_0 R^2/3} \pm c\left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{1 - \alpha_0 r^2/3}} - \alpha_0 \\ &= \frac{2\alpha_0\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2}}{3\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2} - \left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 r^2}} - \alpha_0 \\ &= \alpha_0 \frac{\left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 r^2} - \left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2}}{3\left(\alpha_0 + \beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 R^2} - \left(\alpha_0 + 3\beta_R\right)\sqrt{3 - \alpha_0 r^2}} \end{aligned}$$

D'où le résultat pour β_c en passant à la limite $r \to 0$. □

Exemple 2.2.4.3: Suite 3 - deux exemples simples

On reprend les exemples (1) et (3) de 2.2.3.2 du **fluide parfait** avec ou sans constante cosmologique (voir aussi 2.1.2.1, 2.2.0.1 et 2.2.2.2). On suppose pour les deux exemples qu'il existe une constante $R > 0$ telle que :

$$\rho(r) := \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R. \end{cases} \quad , \quad P(r) := \begin{cases} P(r) & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R. \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$P_R = P(R_-) = P(R_+) = 0$$

On traite les deux exemples.

(1) On est dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho c^2 \quad , \quad \beta := \kappa P.$$

On remarque que :

$$\frac{\alpha_0 R^2}{3} = \frac{A(R)}{R} = \frac{R_s}{R}$$
$$\frac{\alpha_0 r^2}{3} = \frac{\alpha_0 R^2}{3}\frac{r^2}{R^2} = \frac{R_s r^2}{R^3}$$

(i) La métrique est de la forme :

$$h = \frac{c^2}{4}\left(3\sqrt{1-\frac{R_s}{R}} - \sqrt{1-\frac{r^2 R_s}{R^3}}\right)^2 \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1-\frac{r^2 R_s}{R^3}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega$$

(ii) On a :

$$P = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1-R_s r^2/R^3} - \sqrt{1-R_s/R}}{3\sqrt{1-R_s/R} - \sqrt{1-R_s r^2/R^3}}.$$

(iii) On a :

$$P_c := \lim_{r\to 0_+} P = \rho_0 c^2 \frac{1-\sqrt{1-R_s/R}}{3\sqrt{1-R_s/R}-1}.$$

(3) On est dans le cas où :

$$\alpha := \kappa\rho c^2 - \Lambda \quad , \quad \beta := \kappa P + \Lambda.$$

On remarque que :

$$\frac{\alpha_0 R^2}{3} = \frac{R_s}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}$$
$$\frac{\alpha_0 r^2}{3} = \frac{\alpha_0 R^2}{3}\frac{r^2}{R^2} = \frac{R_s r^2}{R^3} - \frac{\Lambda r^2}{3}$$

On a donc :

$$\beta_R = \beta(R_-) = \beta(R_+) = \Lambda.$$

(i) La métrique est de la forme :

$$h = \frac{c^2}{4}\left(3\sqrt{1-\frac{R_s}{R}+\frac{\Lambda R^2}{3}} - \sqrt{1-\frac{r^2 R_s}{R^3}+\frac{\Lambda r^2}{3}}\right)^2 \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1-\frac{r^2 R_s}{R^3}+\frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega$$

(ii) On a :

$$P = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1-R_s r^2/R^3+\Lambda r^2/3} - \sqrt{1-R_s/R+\Lambda R^2/3}}{3\sqrt{1-R_s/R+\Lambda R^2/3} - \sqrt{1-R_s r^2/R^3+\Lambda r^2/3}}.$$

(iii) On a :

$$P_c := \lim_{r\to 0_+} P = \rho_0 c^2 \frac{1-\sqrt{1-R_s/R+\Lambda R^2/3}}{3\sqrt{1-R_s/R+\Lambda R^2/3}-1}.$$

2.2.5 Cas où $\beta(r) = 0$ pour $r > R$

On se place dans les conditions de la sous-section précédente. On suppose de plus qu'on a deux tenseurs :

$$r \leq R \quad : \quad \mathbb{S}^{(1)}_{jl} := \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(r) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{S}^{(2)}_{jl} := \begin{pmatrix} \lambda\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\beta(r) + \delta(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\beta(r) + \delta(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu\beta(r) + \delta(r) \end{pmatrix}$$

$$r > R \quad : \quad \mathbb{S}^{(1)}_{jl} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{S}^{(2)}_{jl} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec α_0, λ et μ des constantes réelles et :

$$\delta(r) := \begin{cases} \delta(r) & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R. \end{cases}$$

On suppose que $\mathbb{S}^{(2)}_{jl}$ et $\mathbb{S}^{(2)}_{jl}$ sont solutions des cinq équations fondamentales du début de la section.

On va vouloir ensuite étudier les limites newtoniennes des formules trouvées. On rappelle dans le cas classique ce qu'est la limite newtonienne.

Exemple 2.2.5.1: Limite newtonienne

En limite newtonienne usuelle, on demande que :

(1) que la vitesse v du fluide soit très petite devant la vitesse de la lumière *i.e.*

$$v << c$$

donc on a :

$$P \equiv \frac{1}{2}\rho v^2 << \rho c^2.$$

(2) que le rayon de Schwarzschild soit très petit devant la position r et devant le rayon R *i.e.* on a :

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} << r, R.$$

Dans le cas où $G =: c = 1$, on a donc :

$$P << \rho$$
$$m(r), M, R_s << r, R$$

Définition 2.2.5.2: Définition de la limite newtonienne

Soit un tenseur :

$$\mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(r) \end{pmatrix}$$

On dit qu'un tenseur $\mathbb{S}_{jl}$ vérifie la **condition newtonienne** s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) on a :

$$\alpha_0 r^2, \alpha_0 R^2 << 1.$$

(ii) on a :

$$\beta << \alpha_0.$$

Proposition 2.2.5.3: Approximation newtonienne de β

Soit un tenseur :

$$\mathbb{S}_{jl} := \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(r) \end{pmatrix}$$

Supposons que $\mathbb{S}_{jl}$ vérifie les cinq équations fondamentales et qu'il vérifie la condition newtonienne.

(i) Alors on a :

$$\beta \approx \frac{\alpha_0^2}{12}\left(R^2 - r^2\right).$$

(ii) Alors on a :

$$\beta_c \approx \frac{\alpha_0^2}{12} R^2.$$

Démonstration. (i) Comme $\beta(r) = 0$ pour $r > R$ (et donc $\beta_R = 0$), on a :

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_0 \frac{\sqrt{3 - \alpha_0 r^2} - \sqrt{3 - \alpha_0 R^2}}{3\sqrt{3 - \alpha_0 R^2} - \sqrt{3 - \alpha_0 r^2}} \\ &= \alpha_0 \frac{\sqrt{1 - \alpha_0 r^2/3} - \sqrt{1 - \alpha_0 R^2/3}}{3\sqrt{1 - \alpha_0 R^2/3} - \sqrt{1 - \alpha_0 r^2/3}} \\ &= \alpha_0 \frac{\left(1 - \alpha_0 r^2/6\right) - \left(1 - \alpha_0 R^2/6\right)}{2} \\ &\approx \frac{\alpha_0^2}{12}\left(R^2 - r^2\right) \end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\beta_c = \lim_{r \to 0^+} \beta(r) \approx \frac{\alpha_0^2}{12} R^2.$$

□

Exemple 2.2.5.4: Suite 4 - deux exemples simples

On reprend l'exemple de 2.2.4.3 du **fluide parfait** sans constante cosmologique (voir aussi 2.1.2.1, 2.2.0.1, 2.2.2.2 et 2.2.3.2). On suppose que :

$$\alpha_0 := \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 \quad , \quad \beta := \frac{8\pi G}{c^4} P.$$

On retrouve en approximation newtonienne les approximations standards :

$$\begin{aligned} P &\approx \frac{2\pi G}{3}\rho_0^2\left(R^2 - r^2\right) \\ P_c &\approx \frac{2\pi G}{3}\rho_0^2 R^2 \end{aligned}$$

Proposition 2.2.5.5: Conditions pour avoir 2 TOV égaux

Supposons que $\mathbb{S}_{jl}^{(1)}$ et $\mathbb{S}_{jl}^{(2)}$ soient solutions des cinq équations fondamentales.

(i) On a :

$$\delta = \alpha_0 \frac{(3-\mu)F(R^2)F(\lambda r^2) + (1-3\mu)F(r^2)F(\lambda R^2) + 3(\mu-1)\left[F(R^2)F(\lambda R^2) + F(r^2)F(\lambda r^2)\right]}{(3F(\lambda R^2) - F(\lambda r^2))\,(3F(R^2) - F(r^2))}$$

avec :

$$F(x) := \sqrt{(3-\alpha_0 x)}.$$

(ii) En approximation newtonienne, on a :

$$\delta \approx \frac{\alpha_0^2}{24}\left[(3-\mu)\left(R^2+\lambda r^2\right) + (1-3\mu)\left(r^2+\lambda R^2\right) + 3(\mu-1)(1+\lambda)\left(r^2+R^2\right)\right].$$

Démonstration. (i) Par le corollaire 2.2.4.2, on a deux formes intégrales pour β et $\mu\beta+\delta$:

$$(F_1)\ :\ \beta = \alpha_0 \frac{\sqrt{3-\alpha_0 r^2} - \sqrt{3-\alpha_0 R^2}}{3\sqrt{3-\alpha_0 R^2} - \sqrt{3-\alpha_0 r^2}}$$

$$(F_2)\ :\ \mu\beta+\delta = \alpha_0 \frac{\sqrt{3-\lambda\alpha_0 r^2} - \sqrt{3-\lambda\alpha_0 R^2}}{3\sqrt{3-\lambda\alpha_0 R^2} - \sqrt{3-\lambda\alpha_0 r^2}}$$

On en déduit en faisant $(F_2) - \mu(F_1)$ que :

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha_0 \frac{\sqrt{3-\lambda\alpha_0 r^2} - \sqrt{3-\lambda\alpha_0 R^2}}{3\sqrt{3-\lambda\alpha_0 R^2} - \sqrt{3-\lambda\alpha_0 r^2}} - \mu\alpha_0 \frac{\sqrt{3-\alpha_0 r^2} - \sqrt{3-\alpha_0 R^2}}{3\sqrt{3-\alpha_0 R^2} - \sqrt{3-\alpha_0 r^2}} \\ &= \alpha_0 \frac{(3-\mu)F(R^2)F(\lambda r^2) + (1-3\mu)F(r^2)F(\lambda R^2) + 3(\mu-1)\left[F(R^2)F(\lambda R^2) + F(r^2)F(\lambda r^2)\right]}{(3F(\lambda R^2) - F(\lambda r^2))\,(3F(R^2) - F(r^2))}\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\alpha_0 r^2, \alpha_0 R^2 << 1.$$

Donc on a pour $x := r^2, R^2, \lambda r^2, \lambda R^2$:

$$F(x) \approx \sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha_0 x}{6}\right).$$

Ainsi on a :

$$\delta \approx \frac{\alpha_0^2}{24}\left[(3-\mu)\left(R^2+\lambda r^2\right) + (1-3\mu)\left(r^2+\lambda R^2\right) + 3(\mu-1)(1+\lambda)\left(r^2+R^2\right)\right].$$

□

Corollaire 2.2.5.6: Cas $\lambda := -1$ et $\mu := 1$

On se place dans le cas où $\lambda := -1$ et $\mu := 1$.

(i) On a :

$$\delta = 2\alpha_0 \frac{F(R^2)F(-r^2) - F(r^2)F(-R^2)}{(3F(-R^2) - F(-r^2))\,(3F(R^2) - F(r^2))}.$$

(ii) On se place en approximation newtonienne.

(a) On a :

$$\delta \approx \frac{\alpha_0^2}{6}\left(R^2 - r^2\right) \approx 2\beta.$$

(b) On a :

$$\mathbb{S}^{(1)}_{jl} \approx \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{S}^{(2)}_{jl} \approx \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2.5.7: Suite 5 - deux exemples simples

On reprend l'exemple de 2.2.5.4 du **fluide parfait** sans constante cosmologique (voir aussi 2.1.2.1, 2.2.0.1, 2.2.2.2, 2.2.3.2 et 2.2.4.3). On suppose que :

$$\alpha_0 := \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 \quad , \quad \beta := \frac{8\pi G}{c^4}P.$$

On se place dans le cas où $\lambda := -1$ et $\mu := 1$.

(i) On a :

$$\delta = 2\frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 \frac{F(R^2)F(-r^2) - F(r^2)F(-R^2)}{\left(3F(-R^2) - F(-r^2)\right)\left(3F(R^2) - F(r^2)\right)}$$

avec :

$$F(x) := \sqrt{3 - 8\pi G\rho x/c^2}.$$

(ii) On se place en approximation newtonienne.

(a) On a :

$$\delta \approx \frac{2\pi G}{3}\rho_0^2\left(R^2 - r^2\right) \approx 2P.$$

(b) On a :

$$\mathbb{S}^{(1)}_{jl} \approx \begin{pmatrix} \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{S}^{(2)}_{jl} \approx \begin{pmatrix} -\frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.6 Exemple de la métrique Reissner–Nordström

On étudie dans cette sous-section la métrique de Reissner-Nordström. Elle correspond au champ gravitationnel d'un corps chargé, non rotatif, à symétrie sphérique de masse M et charger q.

On commence par une proposition.

Proposition 2.2.6.1: Expression simple de α et β

Supposons que pour tout $r > R$:

$$\alpha(r) = -\beta(r) = \nu_0 + \frac{\nu_1}{r^4}.$$

Posons :

$$A_s := A(R) - \frac{\nu_0 R^3}{3} + \frac{\nu_1}{R}.$$

On a pour $r > R$:

$$h = c^2\left(1 - \frac{A_s}{r} - \frac{\nu_0 r^2}{3} + \frac{\nu_1}{r^2}\right)\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 - \frac{A_s}{r} - \frac{\nu_0 r^2}{3} + \frac{\nu_1}{r^2}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega.$$

Démonstration. On a pour $r > R$:

$$\begin{aligned}
A(r) &= \int_0^r \alpha(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} \\
&= \int_0^R \alpha(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} + \int_R^r \alpha(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} \\
&= A(R) + \int_R^r \nu_0 \mathfrak{r}^2 \mathrm{d}\mathfrak{r} + \int_R^r \frac{\nu_1}{\mathfrak{r}^2}\mathrm{d}\mathfrak{r} \\
&= A(R) - \frac{\nu_0 R^3}{3} + \frac{\nu_1}{R} + \frac{\nu_0 r^3}{3} - \frac{\nu_1}{r} \\
&= A_s + \frac{\nu_0 r^3}{3} - \frac{\nu_1}{r}
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$1 - \frac{A}{r} = 1 - \frac{A_s}{r} - \frac{\nu_0 r^2}{3} + \frac{\nu_1}{r^2}.$$

□

Le tenseur énergie-impulsion est déduit du tenseur électromagnétique. On suppose qu'il n'y a pas de champ magnétique et que le champ électrique n'a qu'une composante radiale. On donne la définition du tenseur énergie impulsion.

Définition 2.2.6.2: Définition du tenseur énergie impulsion

En coordonnées polaires sphériques, le tenseur énergie impulsion est définit par :

$$\mathbb{T}_{jl} := \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{4}\eta_{jl}F_{ik}F^{ik} - \eta_{lk}F_{ji}F^{ki}\right)$$

avec :

$$E_r := \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad F_{jl} := \begin{pmatrix} 0 & E_r/c & 0 & 0 \\ -E_r/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F^{jl} := \begin{pmatrix} 0 & -E_r/c & 0 & 0 \\ E_r/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur énergie-impulsion a alor une forme simple.

Lemme 2.2.6.3: Valeur des composantes du tenseur énergie impulsion

On a :

$$\mathbb{T}_{jl} = \frac{\Phi}{r^4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\Phi := -\frac{GQ^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4 r^4}.$$

Démonstration. Comme :

$$F_{01}F^{01} = F_{10}F^{10}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{jl} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{4}\eta_{jl}F_{ik}F^{ik} - \eta_{lk}F_{ji}F^{ki}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{4}\eta_{jl}\left(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}\right) - \eta_{lk}F_{j0}F^{k0} - \eta_{lk}F_{j1}F^{k1}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\eta_{jl}F_{01}F^{01} - \eta_{l1}\delta_{j,1}F_{01}F^{01} - \eta_{l0}\delta_{j,0}F_{01}F^{01}\right) \\
&= \frac{F_{01}F^{01}}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\eta_{jl} - \eta_{l1}\delta_{j,1} - \eta_{l0}\delta_{j,0}\right)
\end{aligned}$$

On a deux cas.

(1) **Cas** $j \neq l$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{jl} &= \frac{F_{01}F^{01}}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\eta_{jl} - \eta_{l1}\delta_{j,1} - \eta_{l0}\delta_{j,0}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) **Cas** $j = l$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{00} &= \frac{F_{01}F^{01}}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\eta_{00} - \eta_{01}\delta_{0,1} - \eta_{00}\delta_{j,0}\right) \\
&= -\frac{F_{01}F^{01}}{2\mu_0} \\
\mathbb{T}_{11} &= \frac{F_{01}F^{01}}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\eta_{11} - \eta_{11}\delta_{1,1} - \eta_{10}\delta_{1,0}\right) \\
&= \frac{F_{01}F^{01}}{2\mu_0} \\
\mathbb{T}_{22} &= \frac{F_{01}F^{01}}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\eta_{22} - \eta_{21}\delta_{2,1} - \eta_{20}\delta_{2,0}\right) \\
&= -\frac{F_{01}F^{01}}{2\mu_0} \\
\mathbb{T}_{33} &= \frac{F_{01}F^{01}}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\eta_{33} - \eta_{31}\delta_{3,1} - \eta_{30}\delta_{3,0}\right) \\
&= -\frac{F_{01}F^{01}}{2\mu_0}
\end{aligned}$$

Et comme $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{F_{01}F^{01}}{2\mu_0} &= -\frac{E_r}{2\mu_0 c^2} \\
&= -\frac{GQ^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4 r^4} \\
&= \frac{\Phi}{r^4}
\end{aligned}$$

□

On reprend les notations des exemples de ce chapitre (voir par exemple 2.1.2.1) avec :

$$\alpha(r) := \begin{cases} \kappa c^2\rho(r) - \Lambda + \Phi(r) & \text{si } r \leq R \\ -\Lambda + \frac{\Phi_0}{r^4} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

$$\beta(r) := \begin{cases} \kappa P(r) + \Lambda - \Phi(r) & \text{si } r \leq R \\ \Lambda - \frac{\Phi_0}{r^4} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

$$\gamma(r) := \delta(r) := \begin{cases} \kappa P(r) + \Lambda + \Phi(r) & \text{si } r \leq R \\ \Lambda + \frac{\Phi_0}{r^4} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

Posons :

$$R_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\varepsilon_0 c^4}.$$

Pour $r > R$, on a donc :

$$h = \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{R_Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{R_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_\Omega$$

Bibliographie

[1] R. Adler, M. Bazin, M Schiffer, *Introduction to General Relativity*, First ed., McGraw-Hill Book Company, (1965).

[2] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 3, Tome 40, pp. 325-412, (1923).

[3] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1915).

[4] A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*, Z. Phys., vol. 10, no 1, p. 377-386, (1922).

[5] A. Friedmann, *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*, Z. Phys., vol. 21, no 1, p. 326-332, (1924).

[6] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, (2004).

[7] G. B. Jeffery, *The field of an electron on Einstein's theory of gravitation*, Proc. R. Soc. Lond. A. 99 (697), (1921).

[8] S. Kobayashi, *Theory of Connections*, Ann. Mat. Pura Appl., 43 : 119–194, (1957).

[9] S. Kobayashi, K Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol.I, Wiley Interscience, (1963).

[10] G. Lemaitre, *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, p. 49-56, (1927).

[11] M. Ludvigsen, *General Relativity : A Geometrical Approach*, Cambridge University Press, (1999).

[12] G. Nordström, *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*, Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap, Afdel Natuurk, Amsterdam 26 : 1201–1208, (1918).

[13] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, Annalen der Physik, 50 (9) : 106–120, (1916).

[14] H. P. Robertson, *Kinematics and world-structure*, Astrophys. J., vol. 82, no 4,, p. 284-301, (1935).

[15] H. P. Robertson, *Kinematics and world-structure. II*, Astrophys. J., vol. 83, no 3, p. 187-201, (1936).

[16] H. P. Robertson, *Kinematics and world-structure. III*, Astrophys. J., vol. 83, no 4, p. 257-271, (1936).

[17] L. Schwartz, *Les tenseurs*, Hermann, (1975).

[18] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse fur Mathematik, Physik, und Technik, p. 189, (1916).

[19] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse fur Mathematik, Physik, und Technik, p. 424, (1916).

[20] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, (1984).

[21] A. G. Walker, *On Milne's theory of world-structure*, Proceedings of the London Mathematical Society, 2e série, vol. XLII, no 1, p. 90-127, (1937).

[22] H. Weyl, *Zur Gravitationstheorie*, Annalen der Physik, 54 (18), (1917).