# How to derive the geodesics from the Schwarzschild's metric.

December 2 nd 2017

Jean-Pierre Petit

Cosmology appears as a hard field, reserved to very few people.

In effect, when Einstein published his theory the journalists presented that work as highly sophisticated, reserved to a very small number of men.

Today the so-called specialists of the field look like the keepers of the house. They present themselve as an intellectual and scientific elite.

In my video I will show that all that stuff is accessible to a large number of people.

Cosmology is like a puzzle with several parts. The concept of metric was one of them. I have discussed a lot in my precedent video. The concept of geodesic in another one. But how to link the two ?

This will be the goal of the present vidéo.

The Schwarzschild metric is a solution of Einstein's equation. To make the things simpler let's consider the line element of such metric expressed with the coordinates $\left\{ x^\circ , r , \theta , \varphi \right\}$, as written page 194, equation (6.53) in the book of

Adler, Schiffer and Bazin :

**Introduction to General Relativity**

Mc Graw Hill

You can download that book through :

http://www.jp-petit.org/books/asb.pdf

Let us now summarize the results of this section by exhibiting the *Schwarzschild line element*

$$(6.53) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

This result must be considered to be the main achievement of general relativity theory in the field of celestial mechanics; it is an exact solution, *m* is a simple integration constant.

x° is a chronological marker.

s is the length, measure of the 4D-hypersurface.

Asb writes :

$$x^{\circ} = ct$$

A geodesic of such hypersurface is a line correspondong to a minimum length. It corresponds ( asb page 201 ) to

(6.73) $$\delta \int ds = 0$$

It means that :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} - r^2 (\, d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \,) \right\}$$

has a minimum value along a certain path ab, corresponding to

$$t(s) \quad r(s) \quad \theta(s) \quad \varphi(s)$$

Write :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} \qquad \dot{r} = \frac{dr}{ds} \qquad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} \qquad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}$$

So that we have to search the paths which corresponds to a minimum of

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} - r^2 (\, \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \,) \right\} ds$$

This corresponds to a function :

$$L \equiv L(t \,, r \,, \theta \,, \varphi \,, \dot{t} \,, \dot{r} \,, \dot{\theta} \,, \dot{\varphi}) \qquad \text{or} \qquad L \equiv L(x^i \,, \dot{x}^i \,)$$

This problem has been solved by the French mathematician Lagrange and corresponds to well-known Lagrange equations.

The reader could say :

What such equation comes from ?

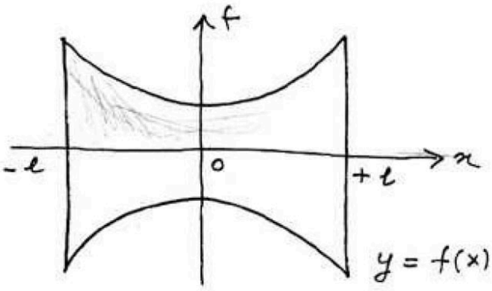
Years ago I have composed a file entitled


http://www.jp-petit.org/papers/bourbakof_en.pdf

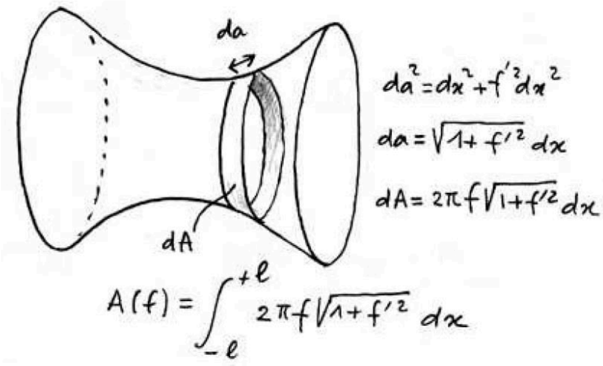
There, you will discover how such equations are derived, starting from a problem of soap film, this last being linked to two circles :

Bourbakof shows how to derive the equation of the meridian of the film surface, which minimizes its area.

Hereafter the meridian line of the soap film :



Calculation of the film's area :




This corresponds, with $\dot{f} = \dfrac{df}{dx}$ , to :

$$A(f) = \int_a^b L(f,\dot{f})\,dx \quad \text{and} \quad \delta\int_a^b L(f,\dot{f})\,dx = 0$$

The file shows that the solution is given by the Lagrange equation :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{\partial L}{\partial f}$$

Similarly the equations of geodesics are given by the Lagrange equations :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

with :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\,2\,r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2$$

The three Euler-Lagrange equations for $\theta$, $\varphi$, and $t$ associated with this variational problem are the following:

$$\text{(6.75)} \qquad \frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) = r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\varphi}^2$$

$$\text{(6.76)} \qquad \frac{d}{ds}(r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}) = 0$$

$$\text{(6.77)} \qquad \frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

We could write a fourth equation but, along the geodesic solution we have, above, the equation (6.53) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

If we divide by *ds* we get

$$\text{(6.78) :} \qquad 1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\,\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\,)$$

The solution is sperically symmetric. We see that it goes with the planes $\theta = Cst$ . We can study geodesics lying in the plane $\theta = \pi/2$ , then :

$$\text{(6.80)} \qquad r^2\dot{\varphi} = h = \text{const}$$

Equation (6.77) integrates to

$$\text{(6.81)} \qquad \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = l = \text{const}$$

Substituting the results (6.79), (6.80), and (6.81) into (6.78), we obtain the following differential equation for $r(s)$:

$$\text{(6.82)} \qquad 1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

As in the classical Kepler problem, one can simplify matters by considering $r$ as a function of $\varphi$ instead of $s$. Denoting differentiation with respect to $\varphi$ by a prime, we then have

(6.83) $$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$$

From (6.80) and (6.83) we obtain

(6.84) $$\dot{r} = \dot{\varphi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

The differential equation for $r(\varphi)$ is then obtainable from (6.82):

(6.85) $$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

Following once more the example of the classical Kepler problem, we substitute for the dependent variable

(6.86) $$r = \frac{1}{u}$$

which implies

(6.87) $$r' = -\frac{u'}{u^2}$$

Using these relations, we can convert (6.85) to a differential equation for $u(\varphi)$:

$$(1 - 2mu) = c^2l^2 - h^2u'^2 - h^2u^2(1 - 2mu) \tag{6.88}$$

This reduces to

$$u'^2 = \left(\frac{c^2l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2}u - u^2 + 2mu^3 \tag{6.89}$$

which is immediately integrable:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\left(\frac{c^2l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u - u^2 + 2mu^3\right)^{1/2}}} \tag{6.90}$$

This is the exact solution $\varphi \equiv \varphi(1/r)$ which gives the plane geodesics as derived from the Schwarzschild's solution of the Einstein's equation.

**Comment construire le système des géodésiques**
**issues de la métrique de Schwarzschild**

2017 december 2 nd.

Jean-Pierre Petit

Au sein du public la cosmologie fait figure de discipline extrêmement pointue, qui semble réservée à une élite de scientifiques et de mathématiciens.

En fait, en tout cas en France, d'où aucune contribution notable n'a jamais émergé au cours de l'histoire (pas plus qu'en astronomie et en astrophysique, du reste) les « stars » de la discipline, auto-proclamées, n'ont jamais fait que montrer qu'elles comprenaient la Relativité Générale. Et c'est encore le cas aujourd'hui.

En 2003 Jean-Pierre Luminet, Roland Lehoucq, Alain Riazuelo, J.P. Uzan publient un article dans la prestigieuse revue Nature, intitulé :

Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background

https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0310253.pdf

Le lecteur intéressé pourra avoir accès à une longue suite de papiers, auxquels s'est également associé un autre « expert » en cosmologie, Marc Lachièze-Rey :

https://scholar.google.fr/scholar?hl=fr&as_sdt=0%2C5&q=roland+lehoucq&oq=roland+

C'est ce que Luminet a tenté de populariser son le nom de « modèle d'univers chiffonné », qui constitue la seule contribution dont il continue de se réclamer (en dehors d'une imagerie de trous noirs, reprise par Alain Riazuelo).

En matière de cosmologie ou d'astrophysique tout repose sur une confirmation observationnelle. Dans un mail récent (2 décembre 2017 ) Roland Lehoucq m'a répondu sur ce point, je cite :

- Ces travaux, n'ayant bénéficié d'aucune confirmation observationnelle, appartiennent désormais au passé.

En dépit de cet insuccès c'est sur cette suite d'articles que s'est fondée la réputation de Roland Lehoucq de « spécialiste de topologie cosmique », ainsi que celle de Jean-Pierre Luminet.

Soyons clair : les apports de tous les « cosmic men » français se résument à strictement zéro. Tous ne doivent leur notoriété, auto-proclamée, que grâce à leurs talents de vulgarisateurs et au puissant relai que leur fournissent les revues de vulgarisation .

Dans ces vidéos et cette suite de pdf je fais en sorte de donner accès à ceux qui ont simplement un niveau math sup, aux points essentielle de cette cosmologie, pour désacraliser cette discipline.

Tout cela comporte plusieurs volets. J'ai déjà, au fil de ces vidéos, présenté au lecteur les concepts de métrique et de géodésiques.

Comment lier les deux ?

La métrique de Schwarzschild est une solution exacte de l'équation d'Einstein. Nous allons partir de son expression, avec des coordonnées $\{ x^\circ , r , \theta , \varphi \}$, telle qu'elle se trouve donnée page 194, équation (6.53) du livre d'Adler, Schiffer et Bazin intitulé :

**Introduction to General Relativity**

Mc Graw Hill

Vous pourrez télécharger l'intégralité de l'ouvrage à l'adresse :

http://www.jp-petit.org/asb.pdf

$$(6.53) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

où :

*m* est une simple constante d'intégration (une longueur)

x° est un marqueur chronologique (également une longueur)

s est la longueur mesurée sur l'hypoersurface 4D

Les auteurs écrivent :

$$x^\circ = ct$$

Une géodésique est un trajet, inscrit dans l'hypersurface, qui correspond à une longueur minimale :

$$(6.73) \qquad \delta \int ds = 0$$

Ce qui signifie que cette longueur :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 ( d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 ) \right\}$$

a une valeur minimale le long d'un trajet ainsi paramétré :

$$t(s) \quad r(s) \quad \theta(s) \quad \varphi(s)$$

Ecrivons :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} \qquad \dot{r} = \frac{dr}{ds} \qquad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} \qquad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Ainsi cela revient à chercher les trajets qui minimisent :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 ( \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 ) \right\} ds$$

La quantité entre crochets est :

$$L \equiv L(t, r, \theta, \varphi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \qquad \text{or} \qquad L \equiv L(x^i, \dot{x}^i)$$

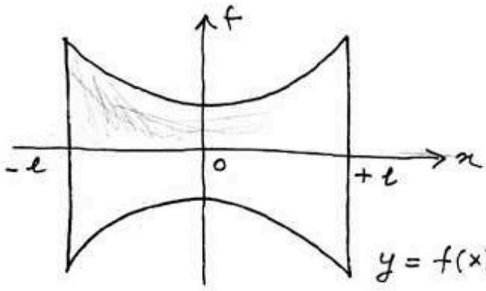
Ce problème a été résolu par le mathématicien français Lagrange et correspond à ce qu'on appelle « les équations de Lagrange ».

Le lecteur trouvera une présentation, imagée mais précise, de ces éléments dans le fichier suivant :

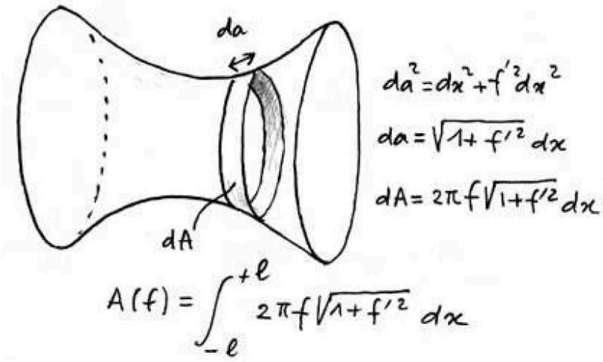

http://www.jp-petit.org/papers/bourbakof.fr.pdf

L'établissement des équations de Lagrange y est présenté à travers la recherche de l'équation de la méridienne d'un film de savon s'appuyant sur deux cercles.

Ce film de savon constitue une surface d'aire minimale. Ci-après, la méridienne :




Et le calcul de l'aire du film de savon :




Ce qui correspond, avec $\dot{f} = \dfrac{df}{dx}$ , à :

and $\delta \int_a^b L(f, \dot{f})\, dx = 0$

On montre que la solution est donnée par l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\right) = \frac{\partial L}{\partial f}$$

La recherche des géodésiques relève ainsi d'un problème « d'extremum lié ».

Lié, parce qu'on considère tous les trajets reliant deux points a et b , donc liés à ces points. Les géodésiques sont alors données par les équations :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Avec :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2\, r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\varphi}^2$$

Je reproduis les passages du livre, en traduisant :

Les trois premières équations de Lagrange, correspondant aux variables $\theta$ , $\varphi$ *et* $t$ , sont les suivantes :

(6.75) $$\frac{d}{ds}(r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\varphi}^2$$

(6.76) $$\frac{d}{ds}(r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}) = 0$$

(6.77) $$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

On pourrait écrire la quatrième, se référant à la variable *r*. Mais il est beaucoup plus simple de se servir de l'expression de la métrique.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Si on divise les deux membres par $ds^2$ on obtient :

(6.78) :
$$1=\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{2m}{r}}-r^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

Cette solution, par hypothèse, possède une symétrie sphérique. Or nous voyons que nous pouvons isoler des solution à $\theta = Cst$ qui correspondent à des plans. Ces géodésiques s'inscrivent donc dans des plans et nous les construirons en optant poutr le plan $\theta = \pi / 2$ , alors :

(6.80)
$$r^2\dot{\varphi} = h = \text{ constante}$$

L'équation (6.77), ci-dessus, s'intègre et donne

(6.81)
$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t} = l = \text{const}$$

Par substitution on obtient alors l'équation différentielle :

(6.82)
$$1 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

qui donne r en fonction du paramètre s. Mais en utilisant une équation présente plus haut on peut passer à une équation différentielle où figure la dérivée ;

(6.83)
$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$$

A partir de (6.80) et de (6.81) on obtient alors :

(6.84)
$$\dot{r} = \dot{\varphi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

On peut alors obtenir l'équation différentielle reliant r et :

(6.85)
$$\left(1-\frac{2m}{r}\right) = c^2l^2 - \frac{h^2}{r^4}r'^2 - \frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)$$

On peut alors passer de la variable *r* à une variable :

$$u = \frac{1}{r} \qquad\qquad r' = -\frac{u'}{u^2}$$

Ce qui nous conduit à :

$$(1 - 2mu) = c^2l^2 - h^2u'^2 - h^2u^2(1 - 2mu) \tag{6.88}$$

qui se réduit à :

$$u'^2 = \left(\frac{c^2l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2}u - u^2 + 2mu^3 \tag{6.89}$$

dont l'intégration immédiate donne :

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\left(\frac{c^2l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u - u^2 + 2mu^3\right)^{1/2}}} \tag{6.90}$$

Ceci constitue une solution exacte de l'équation d'Einstein qui donne des géodésiques « quasi elliptiques », fonction des deux constantes d'intégration $l$ et $h$ .