Champ gravitationnel d'un point de masse

dans la théorie d'Einstein

Par Karl SCHWARZSHILD

Document Version 0.0 du 25/05/2017

Traduit des documents originaux en Allemand

Par H.TRACCARD

§1. Mr. Einstein, dans son travail sur le périhélie du mouvement de Mercure (voir Sect. 18 Novembre 1915) pose le problème d'un point qui se déplace selon l'équation suivante :

$$\begin{cases} \delta \int ds = 0\,, \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \tag{1}$$

Où les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des variables x qui doivent varier du début à la fin du chemin d'intégration

Le point se déplace donc en résumé, sur une ligne géodésique dans la direction indiquée par l'élément linéaire ds.

La mise en œuvre de la variation donne les équations de mouvement du point.

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu,\nu} \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\,, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

où

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) \tag{3}$$

Et $g^{\alpha\beta}$ est le sous-déterminant normalisé des coordonnées $g_{\alpha\beta}$ dans le déterminant $|g_{\mu\nu}|$.

C'est d'après la théorie d'Einstein, le mouvement d'un point sans masse dans le champ gravitationnel d'une masse située au point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, quand les composantes du champ gravitationnel sont partout définies, à l'exception du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ de l'équation de champ.

On devra satisfaire les conditions

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\, \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \quad = 0 \tag{4}$$

et en même temps l'équation du déterminant .

$$|g_{\mu\nu}| = -1 \tag{5}$$

Les équations de champ associées à l'équation du déterminant ont la propriété fondamentale qu'elles conservent leur forme par la substitution de toute autre variable à la place de x_1, x_2, x_3 , x_4 seulement si le déterminant de substitution est égal à 1.

Les coordonnées x_1, x_2, x_3 doivent être orthogonales et x_4 désigner le temps, la masse au point zéro doit être temporellement invariable et le mouvement à l'infini être rectiligne uniforme, et selon M. Einstein (a. a. O. S. 833) satisfaire aussi aux conditions suivantes:

1. Toutes les composantes sont indépendantes du temps x_4.

2. Les équations $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ s'appliquent exactement avec $\rho = 1, 2, 3$.

3. La solution est spatialement symétrique par rapport l'origine du système de coordonnées dans le sens où on retrouve la même solution quand on soumet x_1, x_2, x_3 à une transformation orthogonale (Rotation).

4. Les $g_{\mu\nu}$ disparaissent à l'infini, à l'exception de quatre $g_{\mu\nu}$:

$$g_{44} = 1\,, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

Le problème est de trouver un élément linéaire avec des coefficients tels que les équations de champ, l'équation du déterminant et ces quatre conditions soient satisfaites..

§ 2. Mr. Einstein a montré que ce problème conduit, dans une première approximation, à la loi newtonienne, et que en deuxième approximation elle restitue correctement l'anomalie du périhélie Mercure

Le calcul qui va suivre fournira la solution exacte du problème. Il est toujours plus agréable d'avoir des solutions exactes.

Plus important encore, ce calcul en révélant la solution exacte montre que si on avait des doutes sur le travail de M. Einstein à cause des difficultés dues à la procédure d'approximation, alors les lignes suivantes contribueront au contraire à rendre le travail de M. Einstein encore plus lumineux.

§ 3. Si on appelle t le temps, x, y , z les coordonnées cartésiennes alors l'élément linéaire le plus commun, qui répond aux exigences 1-3 devrait être le suivant :

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

Où F,G,H sont des fonctions de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
La condition (4) entraine que pour $r = \infty$ on a F=G=1 et H=0
Quand on passe en coordonnées polaires

$$x = r\sin(\vartheta)\cos(\phi)\,, y = r\sin(\vartheta)\sin(\phi)\,, z = r\cos(\vartheta)$$

On obtient le même élément linéaire :

$$\begin{aligned} ds^2 &= Fdt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2(\vartheta)\, d\phi^2) - Hr^2dr^2 \\ ds^2 &= Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\phi^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Mais le volume élémentaire exprimé en coordonnées polaires est égal à $r^2\sin(\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\phi$ et le déterminant fonctionnel de l'ancien avec les nouvelles coordonnées $r^2\sin(\vartheta)$ est différent de 1; donc les équations de champ ne seraient pas inchangée si l'on calculait avec ces coordonnées polaires et une transformation lourde devrait être effectuée. Cependant, une astuce simple permet de surmonter cette difficulté. On pose :

$$x_1 = \frac{r^3}{3}\,,\ x_2 = -\cos(\vartheta)\ , x_3 = \phi \tag{7}$$

Ensuite, pour le volume élémentaire $r^2dr\sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\phi = dx_1\, dx_2\, dx_3$. Les nouvelles variables sont donc des coordonnées polaires du déterminant 1. Ils ont les avantages évidents des coordonnées polaires pour le traitement du problème et, en même temps restent inchangées pour les équations de champ et le déterminant quand on prend encore $t = x_4$.
Dans les nouvelles coordonnées polaires, l'élément linéaire est :

$$ds^2 = Fdx_4^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}\right)dx_1^2 - Gr^2\left(\frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} + dx_3^2(1 - x_2^2)\right), \tag{8}$$

Pour lequel nous écrirons :

$$ds^2 = f_4dx_4^2 - f_1dx_1^2 - f_2\frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} - f_3dx_3^2(1 - x_2^2)\,, \tag{9}$$

Ensuite, $f_1, f_2, = f_3\ , f_4$ sont trois fonctions devant remplir les conditions suivantes

1. Pour $x_1 = \infty$: $f_1 = \frac{1}{r^4} = (3x_1)^{-\frac{4}{3}}\ , f_2 = f_3 = r^2 = (3x_1)^{\frac{2}{3}}\ , x_4 = 1$
2. L'équation du déterminant: $f_1 * f_2 * f_3 * f_4 = 1$
3. Les équations de champ.
4. les fonctions f continues en dehors de $x_1 = 0$

§ 4. Pour établir les équations de champ, on doit d'abord calculer les composantes du champ gravitationnel correspondant à l'élément linéaire (9) .

Cela se fait facilement en écrivant les équations différentielles de la ligne géodésique. Le calcul de la variation aboutit directement à ces composantes. Les équations différentielles de la ligne géodésique pour l'élément linéaire (9) sont donc données par :

$$0 = f_1 \frac{d^2x_1}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{1}{1-x_2^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + (1-x_2^2)\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right)$$

$$0 = \frac{f_2}{1-x_2^2}\frac{d^2x_2}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\ \frac{1}{1-x_2^2}\ \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \frac{f_2 x_2}{(1-x_2^2)^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + f_2 x_2\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2$$

$$0 = f_2(1-x_2^2)\frac{d^2x_3}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1-x_2^2)\frac{dx_1}{ds}\ \frac{dx_3}{ds} - 2f_2x_2\frac{dx_2}{ds}\ \frac{dx_3}{ds}$$

$$0 = f_4\frac{d^2x_4}{ds^2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}\ \frac{dx_4}{ds}$$

La comparaison avec (2) donne les composantes du champ gravitationnel

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad , \quad \Gamma_{22}^1 = +\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{1}{1-x_2^2} \ ,$$

$$\Gamma_{33}^1 = +\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\ (1-x_2^2),$$

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} \quad ,$$

$$\Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{x_2}{1-x_2^2} \quad , \quad \Gamma_{33}^2 = -x_2(1-x_2^2),$$

$$\Gamma_{31}^3 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad , \quad \Gamma_{32}^3 = +\frac{x_2}{1-x_2^2} \quad ,$$

$$\Gamma_{41}^4 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} \quad ,$$

(les autres zéro).

Dans le cas de la symétrie de rotation autour du point zéro, il suffit de former les équations de champ uniquement pour l'équateur ($x_2 = 0$), ainsi , comme on différencie une seule fois l'expression précédente $1 - x_2^2$. Le calcul des équations de champ s'écrit alors

a) $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2$,

b) $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 2 + \frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2$,

c) $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2$, Outre ces trois équations, les fonctions f_1, f_2, f_4 doivent toujours satisfaire l'équation du déterminant

$$d) \quad f_1 f_2^2 f_4 = 1 \qquad soit: \quad \frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{2}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=0$$

Je laisse le premier (b) et m'occupe des trois fonctions (a), (c) et (d).
(c) peut être mis sous la forme :

$$C') \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{f_1 f_4}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}$$

Qui peut être directement intégré et donne :

$$C'') \qquad \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=\alpha f_1 \qquad (\alpha \text{ constante d'intégration})$$

L'addition de (a) et de (c') donne

$$\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2$$

Qui associé à (d) nous donne

$$-2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)=3\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2$$

En intégrant on a

$$\frac{1}{\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}=\frac{3}{2}x_1+\frac{\rho}{2} \qquad (\rho\ est\ une\ constante\ d'intégration)$$

Soit encore

$$\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=\frac{2}{3x_1+\rho}$$

Et en intégrant encore une fois

$$f_2=\lambda(3x_1+\rho)^{\frac{2}{3}} \qquad (\rho\ est\ une\ constante\ d'intégration)$$

La condition à l'infini entraine que $\lambda=1$ et ainsi on a

$$f_2=(3x_1+\rho)^{\frac{2}{3}} \tag{10}$$

Il découle de (c'') et (d)

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=\alpha f_1 f_4=\frac{\alpha}{f_2^2}=\frac{\alpha}{(3x_1+\rho)^{\frac{2}{3}}}$$

On intègre en tenant compte de la condition à l'infini

$$f_4=1-\alpha(3x_1+\rho)^{-\frac{1}{3}} \tag{11}$$

Et en plus d'après (d)

$$f_1=\frac{(3x_1+\rho)^{-\frac{4}{3}}}{1-\alpha(3x_1+\rho)^{-\frac{1}{3}}} \tag{12}$$

L'équation (b), qui peut être facilement recalculée, est complétée avec les expressions trouvées de f_1 *et* f_2.
Ainsi, toutes les conditions sont satisfaites sauf celle de la continuité.
f_1 devient discontinu quand.

$$\alpha(3x_1+\rho)^{-\frac{1}{3}}=1 \quad soit\ quand\ \ 3x_1=\alpha^3-\rho$$

Pour que cette discontinuité coïncide avec l'origine, il faut donc que

$$\rho=\alpha^3 \tag{13}$$

La condition de continuité lie ainsi les deux constantes d'intégration ρ et α. La solution complète de notre problème est maintenant est donnée par:

$$f_1=\frac{1}{R^4}\frac{1}{1-\frac{\alpha}{R}} \quad , \ \mathrm{f}_2=\mathrm{f}_3=\mathrm{R}^2 \quad , \qquad f_4=1-\frac{\alpha}{R}$$

dans lequel la variable auxiliaire

$$R=(3x_1+\rho)^{\frac{1}{3}}=\left(r^3+\alpha^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

est introduite.

Si nous remplaçons ces valeurs des fonctions f dans l'expression (9) et revenons en même temps aux coordonnées polaires ordinaires, on obtient alors l'expression de la solution exacte du problème d'Einstein.

$$ds^2=\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)dt^2-\frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}}-R^2(d\vartheta^2+\sin^2(\vartheta)\,d\phi^2) \ , \qquad R=(r^3+\alpha^3)^{\frac{1}{3}} \ , \tag{14}$$

la constante α dépend de la masse au point zéro

§ 5. L'unicité de la solution a été prouvée par le calcul ci-dessus . Cette unicité est apparue d'elle-même avant que la condition de continuité ne fut posée .Le fait qu'il soit difficile de reconnaître l'unicité d'une méthode d'approximation selon la méthode de M. Einstein se trouve dans ce qui suit.

$$f_1=\frac{(3x_1+\rho)^{-\frac{4}{3}}}{1-\alpha(3x_1+\rho)^{-\frac{1}{3}}}=\frac{(r^3+\rho)^{-\frac{4}{3}}}{1-\alpha(r^3+\rho)^{-\frac{1}{3}}}$$

Si α et ρ sont faibles, le développement en série donne jusqu'à deux ordres de grandeur:

$$f_1=\frac{1}{r^4}\left[1+\frac{\alpha}{r}-\frac{4}{3}\frac{\rho}{r^3}\right]$$

Cette expression, ainsi que celles de f_2, f_3, f_4 développées de manière similaire, satisfait avec la même précision à toutes les exigences du problème.

L'exigence de continuité n'ajoute rien de nouveau à cette approximation car les discontinuités ne se produisent qu'au point zéro. Si les deux constantes α et ρ étaient arbitraires, cela rendrait le problème physiquement indéterminé. La solution exacte montre que en continuant les approximations, la discontinuité ne se produit pas au point zéro, mais au point $r = (\alpha^3 - \rho)^{\frac{1}{3}}$ quand $\rho = \alpha^3$ et nous devons donc ajuster les coefficients α et ρ pour que la discontinuité se déplace au point zéro.

§ 6. Enfin, le calcul du mouvement d'un point dans le champ gravitationnel consiste à dériver la ligne géodésique appartenant à l'élément linéaire (14). D'après les trois conditions, l'élément linéaire est homogène dans les différentielles et ses coefficients sont indépendants de t et de ρ, la variation aboutit immédiatement à trois intégrales intermédiaires.
Si nous nous limitons au mouvement dans le plan de l'équateur ($\vartheta = 90°\,, d\vartheta = 0$), alors ces intégrales intermédiaires sont:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{R}}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = const = h\,, \tag{15}$$

$$R^2 \frac{d\phi}{ds}^2 = const = c\,, \tag{16}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)\frac{dt}{ds} = const = 1\;(Définition\ de\ l'unité\ de\ temps). \tag{17}$$

D'où il découle

$$\left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2 + R^2\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) = \frac{R^4}{c^2}\left[1 - h\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)\right]$$

Ou encore avec $\frac{1}{R} = x$

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3 \tag{18}$$

Si l'on introduit les termes: $\frac{c^2}{h} = B, \frac{1-h}{h} = 2A$ c'est identique avec l'équation (11)(1) de M. Einstein et donne l'anomalie observée du périhélie de Mercure. Malgré tout, l'approche de M. Einstein du calcul de la géodésique est compatible avec la solution exacte ,si nous entrons r au lieu de la valeur

$$^1R = (r^3 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}} = r\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(1) Je n'ai pas le texte de cette référence

Puisque $\frac{\alpha}{r}$ est proche de deux fois le carré de la vitesse planétaire (en prenant pour unité de vitesse celle de la lumière), pour Mercure l'ordre de grandeur est de 10^{-12} . Ainsi, pratiquement R est identique à r et l'approche de M. Einstein est suffisante au-delà des besoins de la pratique courante.
Enfin, pour les trajectoires circulaires l'expression exacte de la troisième loi Kepler doit pouvoir en être déduite.
Pour la vitesse angulaire $n = \frac{d\phi}{dt}$, selon (16) et (17), si on prend $x = \frac{1}{R}$

$$n = cx^2(1 - \alpha x)$$

Pour les trajectoires circulaires, $\frac{dx}{d\phi}$ et $\frac{d^2x}{d\phi^2}$ doivent être égaux à zéro. Selon (18)

$$0 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3 \quad , \quad 0 = \frac{h\alpha}{c^2} - 2x + 3\alpha x^2$$

L' élimination de h dans ces deux équations nous donne

$$\alpha = 2c^2 x(1 - \alpha x)^2$$

D'où il découle

$$n^2 = \frac{\alpha}{2}x^3 = \frac{\alpha}{2R^3} = \frac{\alpha}{2(r^3 + \alpha^3)}$$

Jusqu'à la surface du soleil, l'écart de cette formule à la troisième loi Kepler est totalement imperceptible. Mais pour un point de masse idéal la vitesse angulaire ne se prolonge pas continument comme dans la loi de Newton lorsque le rayon de l'orbite diminue, mais s'approche d'une limite égale à :

$$n_0 = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$$

(Pour un point de masse solaire, la limite de fréquence est d'environ 10^4 par seconde.) S'il existait des lois similaires pour les forces moléculaires, cette propriété pourrait être intéressante).

Etude du champ gravitationnel d'une Boule de fluide incompressible selon la théorie d'Einstein.

Par Karl Schwarzschild

(Déposée le 24 février 1916 [voir page 313].)

§ 1. Comme autre exemple de la théorie de la gravitation d'Einstein, j'ai le champ gravitationnel d'une sphère homogène de rayon fini consistant en un fluide incompressible. L'ajout de la condition d'incompressibilité est nécessaire parce que la gravitation dépend non seulement de la quantité de matière, mais aussi de son énergie, et, par exemple, un corps solide dans un certain état de stress donnerait une gravitation différente de celle d'un liquide.

Ce calcul est la suite de ma communication sur le champ gravitationnel d'un point de masse (référence 1916, p. 189), que je citerais brièvement dans "point de masse".

§ 2. Les équations du champ Einsteinien de gravitation (référence 1915, p. 845) ressemblent généralement à :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\, \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = G_{\mu\nu} \qquad (1)$$

Les grandeurs disparaissent là où rien n'est présent. À l'intérieur d'un fluide incompressible, ils sont déterminés de la manière suivante: Le «tenseur énergie mixte» d'un fluide incompressible au repos est, selon M. EINSTEIN (référence, 1914, p. 1062, le P disparait à cause de l'incompressibilité):

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p \;, \qquad T_4^4 = \rho_0 \;, \left(les\ autres\ T_{\mu}^{\nu}\ sont\ nuls\right) \qquad (2)$$

Où p est la pression, ρ_0 est la densité constante du liquide. Le tenseur d'énergie covariante est:

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\tau} T_{\mu}^{\tau}\, G_{\nu\tau} \qquad (3)$$

C’est encore :

$$T = \sum_{\tau} T_{\tau}^{\tau} = \rho_0 - 3p \tag{4}$$

Et :

$$\varkappa = 8\pi k^2$$

où k^2 est la constante gravitationnelle gaussienne. Selon Einstein (référence, 1915, p.845, équation 2a), parties droites des équations de champ sont:

$$G_{\mu\nu} = \left(\Gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tag{5}$$

Pour que le fluide soit en équilibre, les conditions (ibid., Équation 7a) doivent satisfaire à :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial T_{\tau}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\mu\nu} \Gamma_{\tau\nu}^{\mu} T_{\mu}^{\nu} = 0 \tag{6}$$

§ 3. De même qu'avec le point de masse, les équations générales pour la sphère doivent également satisfaire à la symétrie de rotation autour du point zéro. En l'état, il est conseillé d'introduire les coordonnées polaires à partir du déterminant 1.

$$x_1 = \frac{r^3}{2}, \qquad x_2 = -\cos(\vartheta), \qquad x_3 = \phi, \qquad x_4 = t \tag{7}$$

L'élément linéaire doit alors avoir la forme, comme dans l'autre cas,

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} - f_2 dx_3^2 (1 - x_2^2) \tag{8}$$

de sorte que l'on a:

$$g_{11} = -f_1, \quad g_{22} = -\frac{f_2}{1 - x_2^2}, \quad g_{33} = -f_2(1 - x_2^2), \quad g_{44} = f_4$$

(les autres $g_{\mu\nu}$ sont nuls)

Ainsi les fonctions ne dépendent que de x_1

Les solutions (10), (11), (12) s’appliquent également à l'espace extérieur de la sphère:

$$f_4 = 1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-\frac{1}{3}}, \quad f_2 = (3x_1 + \rho)^{\frac{2}{3}}, \quad f_1 f_2^2 f_4 = 1 \tag{9}$$

où α et ρ sont deux constantes initialement arbitraires, qui seront déterminées plus loin grâce à la masse et le rayon de notre sphère. Il reste à résoudre les équations de champ pour l'intérieur de la sphère au moyen de l'expression (8). Pour les parties droites on obtient dans l'ordre:

$$T_{11} = T_1^1 g_{11} = -pf_1\,, \qquad T_{22} = T_2^2 g_{22} = -\frac{pf_2}{1-x_2^2}$$
$$T_{33} = T_3^3 g_{33} = -pf_2(1-x_2^2),\ \ T_{44} = T_4^4 g_{44} = \rho_0 f_4$$
$$G_{11} = \frac{\varkappa f_1}{2}(p-\rho_0),\ \ G_{22} = \frac{\varkappa f_2}{2}\frac{1}{1-x_2^2}(p-\rho_0)$$
$$G_{33} = \frac{\varkappa f_2}{2}(1-x_2^2)(p-\rho_0),\ \ G_{44} = -\frac{\varkappa f_4}{2}\frac{1}{1-x_2^2}(\rho_0+3p)$$

Inchangées au point de masse (§ 4), les composantes $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ du champ gravitationnel peuvent être déterminées par la fonction f et les parties gauches des équations de champ. En général ces composantes dans toutes les équations suivantes seront obtenues en se limitant à l'équateur où $(x_2 = 0)$:

Tout d'abord, les trois équations de champ:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2 = -\frac{\varkappa}{2}f_1(\rho_o - p) \qquad (a)$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) - 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 = -\frac{\varkappa}{2}f_2(\rho_o - p) \qquad (b)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2 = -\frac{\varkappa}{2}f_4(\rho_o + 3p) \qquad (c)$$

Il en découle l'équation du déterminant :

$$f_1 f_2^2 f_4 = 1 \qquad (d)$$

Les conditions d'équilibre (6) fournissent l'équation suivante:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{p}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{2}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) + \frac{\rho_0}{2}\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} \qquad (e)$$

Il ressort des considérations générales de M. Einstein que les 5 équations précédentes avec les quatre inconnues f_1, f_2, f_4 , p sont compatibles les unes avec les autres.
Nous devons déterminer une solution de ces 5 équations, qui sera sans singularité dans la sphère. Sur la surface sphérique on devra avoir $p = 0$, et les dérivées premières des fonctions f des formules (9) devront rester continues même en dehors de la sphère
Par souci de simplicité, il faut rester loin de l'indice 1 de x_1.
§ 4. La condition d'équilibre (e) se calcule à l'aide du déterminant dans:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho_0 + p}{2}\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x}$$

Cela peut être intégré immédiatement et donne:

$$(\rho_0 + p)\sqrt{f_4} = Konst = \gamma \tag{10}$$

Les équations de champ (a) (b) (c) peuvent être résolue par multiplication par les facteurs suivants $-2, +2\,\frac{f_1}{f_2}, -2\,\frac{f_1}{f_4}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x}\right)^2 + \varkappa f_1(\rho_o - p) \qquad (a')$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = 2\,\frac{f_1}{f_2} + \frac{1}{f_1 f_2}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} - \varkappa f_1(\rho_o - p) \qquad (b')$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\varkappa}{2} f_4(\rho_o + 3p) \qquad (c')$$

Si on combine a '+ 2b' + c 'et a' + c, on obtient ce qui suit en utilisant le déterminant:

$$0 = 4\frac{f_1}{f_2} - \frac{1}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{f_2 f_4}\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_4}{\partial x} + 4\varkappa f_1 p \tag{11}$$

$$0 = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) + \frac{3}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + 2\varkappa f_1\left(\rho_o + p\right) \tag{12}$$

Nous allons ici introduire une nouvelle variable car les résultats au point de masse sont très simples en dehors de la sphère, de sorte qu'ils doivent l'être également pour les équations actuelles, sans ρ_o et p .
C'est:

$$f_2 = \eta^{\frac{2}{3}}\,,\ \ f_4 = \zeta\eta^{-\frac{1}{3}}\,,\ \ f_1 = \frac{1}{\zeta\eta} \tag{13}$$

Ensuite d'après (9) on a en dehors de la sphère:

$$\eta = 3x + \rho\,,\ \ \zeta = \eta^{\frac{1}{3}} - \alpha\,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = 3 \quad , \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \eta^{-\frac{2}{3}} \tag{15}$$

Si ces nouvelles variables sont introduites et qu'en même temps on remplace $\rho_o + p$ par $\gamma f_4^{-\frac{2}{3}}$ selon (10) alors les équations (11) et (12) deviennent :

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 3\eta^{-\frac{2}{3}} + 3\varkappa\gamma\zeta^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{6}} - 3\varkappa\rho_0 \tag{16}$$

$$2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -3\varkappa\gamma\zeta^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{6}} \tag{17}$$

L'addition de ces deux équations donne:

$$2\zeta\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=3\eta^{-\frac{2}{3}}-3\varkappa\rho_0$$

Le facteur d'intégration de cette équation est $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ et l'intégration donne:

$$\zeta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2=9\eta^{\frac{1}{3}}-3\varkappa\rho_0\eta+9\lambda\ \left(\lambda\ \begin{matrix}est\ une\ constante\\ d'intégration\end{matrix}\right) \qquad (18)$$

Ceci élevé à la puissance 3/2, donne:

$$\zeta^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^3=\left(9\eta^{\frac{1}{3}}-3\varkappa\rho_0\eta+9\lambda\right)^{\frac{3}{2}}$$

Si nous divisons (17) par cette équation, le ζ disparait, et l'équation devient une équation différentielle en η:

$$\frac{2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^3}=\frac{-3\varkappa\gamma\eta^{\frac{1}{6}}}{\left(9\eta^{\frac{1}{3}}-3\varkappa\rho_0\eta+9\lambda\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ici $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ est à nouveau le facteur d'intégration et l'intégration donne:

$$\frac{2}{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}=3\varkappa\gamma\int\frac{\eta^{\frac{1}{6}}d\eta}{\left(9\eta^{\frac{1}{3}}-3\varkappa\rho_0\eta+9\lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (19)$$

Et enfin :

$$\frac{2}{\left(\frac{\delta\eta}{\delta x}\right)}=2\frac{\delta x}{\delta\eta}$$

Ce qui donne après une intégration supplémentaire :

$$x=\frac{\varkappa\gamma}{18}\int d\eta\int\frac{\eta^{\frac{1}{6}}d\eta}{\left(9\eta^{\frac{1}{3}}-3\varkappa\rho_0\eta+9\lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (20)$$

x est donc fonction de η, et par inversion η est fonction de x. Il en sera de même pour ζ à partir de (18) et (19) et aussi des fonctions f à partir de (13). Notre problème de quadratures est donc résolu.

§ 5. Maintenant, les constantes d'intégration doivent être déterminées de sorte que l'intérieur de la sphère reste sans singularité et que les valeurs externes des fonctions f et de leurs dérivées soient continues y compris sur la surface sphérique.

Sur la surface sphérique, $r = r_a$, $x = x_a$, $\eta = \eta_a$ etc. La continuité de η et de ζ peut toujours être conservée par détermination appropriée des constantes α et ρ dans (14). Les dérivées restent aussi continues et deviennent d'après (15)
$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_a = 3$ et $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_a = \eta^{-\frac{2}{3}}$,d'après (16) et (18) on a :

$$\gamma = \rho_0 \zeta_a^{\frac{1}{2}} \eta_a^{-\frac{1}{6}} \ , \ \zeta_a = \eta_a^{\frac{1}{3}} - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta_a + \lambda \tag{21}$$

Il en découle ce qui suit

$$\zeta_a \eta_a^{-\frac{1}{3}} = (f_4)_a = 1 - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta_a^{\frac{2}{3}} + \lambda\eta_a^{-\frac{1}{3}}$$

Et aussi

$$\gamma = \rho_0\sqrt{(f_4)_a} \tag{22}$$

On peut voir à partir de la comparaison avec (10) que la condition $p = 0$ est satisfaite sur la surface. L'exigence $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_a = 3$ donne la détermination suivante pour les limites d'intégration dans (19):

$$\frac{3dx}{d\eta} = 1 - \frac{\varkappa\gamma}{6}\int_{\eta}^{\eta a} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left(9\eta^{\frac{1}{3}} - 3\varkappa\rho_0\eta + 9\lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{23}$$

et (23) et (20) fournissent la détermination suivante des limites d'intégration:

$$3(x - x_0) = \eta - \eta_a + \frac{\varkappa\gamma}{6}\int_{\eta}^{\eta a} d\eta \int_{\eta}^{\eta a} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left(\eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\varkappa\rho_0\eta}{3} + \lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{24}$$

Les conditions de surface toutes sont remplies. Les deux constantes η_a et λ sont toujours indéterminées, mais elles seront définies par les conditions de continuité à l'origine.
Nous devons d'abord exiger que pour $x = 0$,on ait aussi $\eta = 0$. Si ce n'était pas le cas alors f_2 serait une variable finie au point zéro, et un changement d'angle $d\phi = dx_3$ serait effectué au point zéro, ce qui signifie qu'en réalité aucun mouvement contribue à l'équation. Il découle de ceci et de la formule (24) cette condition pour la définition de η_a

$$3x_a = \eta_a - \frac{\varkappa\gamma}{6}\int_{\eta}^{\eta a} d\eta \int_{\eta}^{\eta a} \frac{\eta^{\frac{1}{6}} d\eta}{\left(\eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\varkappa\rho_0\eta}{3} + \lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{25}$$

λ est finalement déterminé par l'exigence que la pression au centre de la sphère doit rester finie et positive, d'où il découle d'après (10) que f_4 est finie et doit rester nulle. D'après les formules (13), (18) et (23) on obtient :

$$f_4 = \zeta\eta^{-\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta^{\frac{2}{3}} + \lambda\eta^{-\frac{1}{3}}\right)\left(1 - \frac{\varkappa\gamma}{6}\int_\eta^{\eta_0}\frac{\eta^{\frac{1}{6}}d\eta}{\left(\eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta + \lambda\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \qquad (26)$$

Supposons d'abord $\lambda \neq 0$,alors pour η très petit on a:

$$f_4 = \frac{\lambda}{\eta^{\frac{1}{3}}}\left(K + \frac{\varkappa\gamma}{7}\frac{\eta^{\frac{7}{6}}}{\gamma^{\frac{3}{2}}}\right)^2$$

Où

$$K = 1 - \frac{\varkappa\gamma}{6}\int_\eta^{\eta_0}\frac{\eta^{\frac{1}{6}}d\eta}{\left(\eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta + \lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (27)$$

Au centre ($\eta = 0$), f_4 devient infini sauf lorsque $K = 0$. Cependant, si $K = 0$, f_4 disparaît pour $\eta = 0$. Dans aucun cas on a une valeur finie et non nulle de f_4 pour $\eta = 0$. Il s'ensuit que la condition $\lambda \neq 0$ ne conduit pas à des solutions physiquement viables, donc $\lambda = 0$.

§ 6. Avec la condition lambda = 0, toutes les constantes d'intégrales sont définies. Et en même temps, les intégrations à effectuer sont très simples. A la place de η,plaçons une nouvelle variable χ dont la définition est:

$$\sin(\chi) = \sqrt{\frac{\varkappa\rho_0}{3}} * \eta^{\frac{1}{3}} \quad ,\left(\sin(\chi_a) = \sqrt{\frac{\varkappa\rho_0}{3}} * \eta_a^{\frac{1}{3}}\right) \qquad (28)$$

les équations (13), (26), (10), (24), (25) sont transformées par calcul simple en les suivantes:

$$f_2 = \frac{3}{\varkappa\rho_0}\sin^2(\chi) \quad , f_4 = \left(\frac{\cos(\chi_a) - \cos(\chi)}{2}\right)^2 \; , f_1, f_2^2, f_4 = 1 \qquad (29)$$

$$\rho_0 + p = \rho_0\left(\frac{2\cos(\chi_a)}{3\cos(\chi_a) - \cos(\chi)}\right)^2 \qquad (30)$$

$$3x = r^3 = \left(\frac{\varkappa\rho_0}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{9}{4}\cos(\chi_a)\left(\chi - \frac{1}{2}\sin(2\chi)\right) - \frac{1}{2}\sin^3(\chi)\right] \qquad (31)$$

La constante χ_a est déterminé par la densité ρ_0 et le rayon r_a de la sphère selon la relation:

$$r_a^3\left(\frac{\varkappa\rho_0}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4}\cos(\chi_a)\left(\chi_a - \frac{1}{2}\sin(2\chi_a)\right) - \frac{1}{2}\sin^3(\chi_a) \qquad (32)$$

Les constantes α et ρ de la solution pour l'extérieur découlent de (14) :

$$\rho = \eta_a - 3x\ ,\ \ \alpha = \eta^{\frac{1}{3}} - \zeta a,$$

et on obtient les valeurs:

$$\rho = \left(\frac{\chi\rho_0}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{2}\sin^3(\chi_a) - \frac{9}{4}\cos(\chi_a)\left(\chi_a - \frac{1}{2}\sin(2\chi_a)\right)\right] \tag{33}$$

$$\alpha = \left(\frac{\chi\rho_0}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} * \sin^3(\chi_a) \tag{34}$$

L'équation à l'intérieur de la sphère se simplifie en utilisant les variables χ , ϑ , ϕ au lieu de x_1, x_2 , x_3 (ix) :

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{3\cos(\chi_a) - \cos(\chi)}{2}\right)^2 dt^2 \\ &- \frac{3}{\chi\rho_0}\left(d\chi^2 + \sin^2(\chi)\, d\vartheta^2 + \sin^2(\chi)\sin^2(\vartheta)\, d\phi^2\right) \end{aligned}\right. \tag{35}$$

En dehors de la sphère, la forme de l'équation reste identique à celle du point de masse:

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)\, d\phi^2\right) \\ &\text{où} \\ R^3 &= r^3 + \rho \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Seul ρ est déterminé selon (33), tandis que pour au point de masse $\rho = \alpha^3$.

§ 7. Les remarques suivantes sont liées à la solution complète de notre problème au paragraphe précédent.

1. L'élément linéaire$(dt = 0)$ dans la sphère est:

$$-ds^2 = \frac{3}{\chi\rho_0}\left(d\chi^2 + \sin^2(\chi)\, d\vartheta^2 + \sin^2(\chi)\sin^2(\vartheta)\, d\phi^2\right)$$

C'est l'équation linéaire connue de la géométrie spatiale non-euclidienne soi-disant sphérique. À l'intérieur de notre sphère, la géométrie de l'espace sphérique prévaut. Le rayon de courbure de l'espace sphérique devient $\sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}$. Notre sphère ne forme pas l'ensemble, mais seulement une partie de l'espace sphérique, puisque χ ne peut pas croître à $\frac{\pi}{2}$, mais seulement à la limite χ_a . Pour le Soleil, le rayon de courbure de l'espace sphérique, qui domine la géométrie dans son intérieur, serait environ 500 fois celui du rayon du soleil (voir les formules (39) et (42)).

C'est un apport intéressant de la théorie d'Einstein qui alors que la géométrie de l'espace sphérique qui était vue jusqu' à présent comme une simple possibilité, montre la réalité de l'influence de la gravitation des sphères .

Dans la sphère, on mesure bien sûr les grandeurs suivantes:

$$\sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}d\chi, \qquad \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}\sin(\chi)d\vartheta, \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}\sin(\chi)\sin(\vartheta)d\phi \tag{37}$$

Le rayon "mesuré en interne" du centre de la sphère à sa surface devient:

$$P_i = \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}\chi_a \tag{38}$$

La circonférence de la sphère, mesurée le long d'un méridien (ou de tout autre cercle plus grand), et divisée par $2\boldsymbol{\pi}$, s'appelle le rayon «extérieur» P_a . Il s'ensuit :

$$P_a = \sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}\sin(\chi_a) \tag{39}$$

Après l'expression (36) de l'élément linéaire en dehors de la sphère, ce P_a est évidemment identique à la valeur $R_a = (r_a^3+\rho)^{\frac{1}{3}}$ que la variable R suppose sur la surface sphérique.

Avec le rayon P_a on obtient par (34) les relations simples pour α

$$\frac{\alpha}{P_a} = \sin^2(\chi_a) \quad , \alpha = \frac{\chi\rho_0}{3}P_a^3 \tag{40}$$

Le volume de notre sphère est:

$$V = \left(\sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}\right)^3 \int_0^{\chi_a} \sin(\chi)\,d\chi \quad \int_0^{\pi} \sin(\vartheta)\,d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}\right)^3 \left(\chi_a - \frac{1}{2}\sin(2\chi_a)\right)$$

La masse M de notre sphère est donc ($\chi = 8\pi k^2$)

$$M = \rho_0 V = \frac{3}{4k^2}\left(\sqrt{\frac{3}{\chi\rho_0}}\right)\left(\chi_a - \frac{1}{2}\sin(2\chi_a)\right) \tag{41}$$

2. A partir des équations de mouvement d'un point de masse infiniment petite en dehors de notre sphère, et qui conserve la même forme que dans le point de masse (équations (15) - (17)) on fait les observations suivantes:

À grande distance, le mouvement du point suit la loi de Newton, où $\frac{\alpha}{2k^2}$ joue le rôle de la masse attirante. Par conséquent, $\frac{\alpha}{2k^2}$ peut s'appeler la «masse gravitationnelle» de notre sphère.
Si un point est abandonné à l'infini au repos et chute vers la surface de la sphère, la vitesse de chute "naturellement mesurée" est donnée par la valeur:

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{R}}}\frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{\alpha}{R_a}}$$

Ainsi, selon (40):

$$v_a = \sin(\chi_a) \tag{42}$$

Pour le soleil, la vitesse de chute est d'environ 1/500 de vitesse de lumière. Il est facile de conclure que, avec la faible valeur de χ_a et $\chi(< \chi_a)$ résultant de celle-ci, toutes nos équations, à l'exception des effets du second ordre d'Einstein, peuvent être ignorés dans la théorie de Newton.

3. Pour le rapport de la masse gravitationnelle $\frac{\alpha}{2k^2}$ à la masse substantielle M

$$\frac{\alpha}{2k^2 M} = \frac{2}{3}\frac{\sin^3(\chi_a)}{\chi_a - \frac{1}{2}\sin(2\chi_a)} \tag{43}$$

Comme la vitesse de chute v_a $(= \sin(\chi_a))$, la concentration de masse augmente, le rapport de la masse gravitationnelle à la masse substantielle diminue. Cela s'explique par le fait que, Par exemple, avec une masse constante et une densité croissante, la transition vers un rayon plus petit se produit avec des émissions d'énergie (réduction de la température par rayonnement).

4. La vitesse de la lumière dans notre sphère est:

$$v = \frac{2}{3\cos(\chi_a) - \cos(\chi)} \tag{44}$$

de sorte qu'elle varie à partir de la valeur sur la surface

$$\frac{1}{\cos(\chi_a)}$$

jusqu'à la valeur au centre

$$\frac{2}{3\cos(\chi_a) - 1}$$

La variable de pression $\rho_0 + p$ augmente selon (10) et (30) proportionnellement à la vitesse de la lumière.
Au centre de la sphère $(\chi = 0)$, la vitesse de la lumière et la pression deviennent infinies dès que $\cos(\chi_a) = \frac{1}{3}$, la vitesse de chute est devenue égale à $\sqrt{\frac{8}{9}}$ de la vitesse de la lumière (mesurée naturellement).

il y a donc une limite de densité au-delà de laquelle une boule de fluide incompressible ne peut exister. Si nous voulions appliquer nos équations aux valeurs $\cos(\chi_a) < \frac{1}{3}$, des discontinuités seraient obtenues en dehors du centre de la sphère.

Cependant, pour χ_a plus grand, les solutions continues peuvent être trouvées au moins en dehors du centre de la sphère si on est dans le cas $\lambda \neq 0$ et en satisfaisant la condition $K = 0$ (équation (27)).

Sur le chemin de ces solutions, qui sont évidemment **physiquement sans signification**, car elles donnent une pression infinie au centre, nous pouvons passer à la limite d'une masse concentrée à un point, puis trouver aussi la relation $\rho = \alpha^3$ qui, selon les résultats précédents sont valables au point de masse .

Il convient de noter ici que **l'on ne peut parler d'un point de masse, quand on utilise la variable $\boldsymbol{r}$** , laquelle ne joue aucun rôle dans la géométrie et le mouvement de notre champ gravitationnel.

Pour un observateur externe qui ferait des mesures, selon (40), il s'ensuit qu'une sphère de masse gravitationnelle donnée $\frac{\alpha}{2k^2}$ ne peut avoir rayon un mesuré depuis l'extérieur plus petit que:

$$P_a = \alpha$$

Pour une boule de fluide incompressible, la limite est de $\frac{9}{8\alpha}$.
Pour le soleil α est égal à 3 km,
pour une masse de 1 g α est égal à $1.5 \,.\, 10^{-28}\ cm$.

Envoyé le 6 Avril 1916