La sphère S^3 et les quaternions

Boris Kolev

12 mars 2004

Si la sphère S^3 ressemble davantage au cercle S^1 qu'à la sphère S^2, c'est parce que tous les deux correspondent au *groupe des unités* d'un *corps de nombres* : le corps des nombres complexe pour S^1 et le corps des quaternions pour S^3. Mais ceci ne marche pas avec S^2 : $\mathbb{R}^3$ n'est pas un corps de nombres.

Pour comprendre ces structures, je vais rappeler comment on fait de $\mathbb{R}^2$ un corps de nombres en le plongeant dans l'algèbre des matrices carrés 2×2 à *coefficients réels*. On verra ensuite qu'une construction similaire permet de munir également $\mathbb{R}^4$ d'une structure de corps (le corps des quaternions) en le plongeant dans l'algèbre des matrices carrés 2×2 à *coefficients complexes*.

1 Le corps des nombres complexes

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients réels. C'est l'espace des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des réels. On sait :

1. additionner deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$,
2. multiplier une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ par un nombre réel,
3. multiplier deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ entre elles.

On dit pour résumer ces trois propriétés que $M_2(\mathbb{R})$ est une *algèbre*. Elle est de dimension 4 car il faut 4 paramètres pour la décrire.

A tout vecteur (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$, on peut associer la matrice carré à coefficients réels

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

On remarque alors que

1. la somme de 2 telles matrices est encore de la même forme

$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

2. le produit par un réel λ d'une telle matrice z est encore de ce type

$$\lambda z = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ -\lambda y & \lambda x \end{pmatrix},$$

3. le produit matriciel de 2 telles matrices aussi

$$z_1\, z_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & y_1 x_2 + x_1 y_2 \\ -(y_1 x_2 + x_1 y_2) & x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc construit un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$, qu'on notera $\mathbb{C}$, stable par addition, multiplication par un scalaire et multiplication matricielle. On dit que $\mathbb{C}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{R})$. Elle est de dimension 2. On peut remarquer un propriété importante de cette algèbre : elle est *commutative*

$$z_1\, z_2 = z_2\, z_1.$$

Le déterminant d'une matrice $z \in \mathbb{C}$ s'écrit

$$\det(z) = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2,$$

par conséquent, tout matrice z dans $\mathbb{C}$ non nulle est inversible et son inverse

$$z^{-1} = \frac{1}{\det(z)} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

appartient également à $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est un corps. On vient seulement de redécouvrir le corps de nombres complexes.

La matrice correspondant au vecteur $(1, 0)$, c'est la matrice *unité*

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice correspondant au vecteur $(0, 1)$, on la note $\mathbf{i}$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle possède la propriété remarquable

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$$

Avec ces notations, on voit que tout nombre complexe s'écrit de manière unique

$$z = x\,\mathbf{1} + y\,\mathbf{i}$$

où x et y sont des nombres réels.

Le *conjugué* d'un élément z dans $\mathbb{C}$, on le définit comme la transposée de la matrice z

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Dans le corps des nombres complexes il y a deux sous espaces remarquables. D'une part il y a les multiples de la matrice unité 1, c'est à dire l'ensemble des matrice de la forme

$$x\,\mathbf{1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

qui est stable par addition et multiplication. C'est l'*espace réel*, identique au corps des réels et qui apparaît comme un sous-corps de $\mathbb{C}$. Il est également définit par l'équation

$$z = \bar{z}$$

Il y a également le sous-espace des matrices z de trace nulle

$$z = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$$

On l'appelle l'*espace imaginaire*. Il est stable par addition mais *pas par multiplication*. On remarque que c'est également l'espace des matrices 2×2 qui sont antisymétriques.

Avec ces définitions, le produit scalaire ordinaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ se calcul facilement. Si z_1 est la matrice correspondant à (x_1, y_1) et z_2 est la matrice correspondant à (x_2, y_2), alors

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(z_1 \bar{z}_2)$$

La norme d'un vecteur (x, y) correspondant à z s'écrit

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 = \det(z) = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(z\bar{z})$$

On l'appelle également le module ou la norme du complexe z et on le note $|z|$. On a bien entendu $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Le *sous-groupe des unités* du corps $\mathbb{C}$, que l'on note $\mathbb{U}(1)$, c'est l'ensemble des éléments z de $\mathbb{C}$ qui vérifient

$$|z|^2 = z\,\bar{z} = x^2 + y^2 = 1.$$

Cet ensemble est stable par multiplication. L'élément $\mathbf{1}$ appartient à $\mathbb{U}(1)$. Tout élément de $\mathbb{U}(1)$ est inversible et son inverse est encore dans $\mathbb{U}(1)$. On dit que $\mathbb{U}(1)$ est un groupe. Attention la somme de deux éléments de $\mathbb{U}(1)$ n'est pas dans $\mathbb{U}(1)$ en général. La construction précédente a donc fait apparaître le cercle S^1 comme un groupe, le groupe des éléments unités de $\mathbb{C}$. La tangente au cercle S^1 au point $\mathbf{1}$, ce qu'on appelle l'algèbre de Lie du groupe $\mathbb{U}(1)$, est la droite imaginaire définie par

$$\mathrm{tr}(z) = 0.$$

2 Le corps des quaternions

Reprenons la construction précédente pour munir $\mathbb{R}^4$ d'une structure de corps. Soit $M_2(\mathbb{C})$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients *complexes.* A tout couple de nombre complexes (a, b) on peut associer la matrice carré à coefficients complexes

$$q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

On remarque alors que :

1. la somme de 2 telles matrices est encore de la même forme

$$q_1 + q_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -\overline{(b_1 + b_2)} & \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \end{pmatrix},$$

2. le produit par un réel λ d'une telle matrice q est encore de ce type

$$\lambda q = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda\bar{b} & \lambda\bar{a} \end{pmatrix},$$

3. le produit matriciel de 2 telles matrices aussi

$$q_1\,q_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1\bar{b}_2 & a_1 b_2 + b_1\bar{a}_2 \\ -a_1\bar{b}_2 - \bar{b}_2\bar{a}_1 & \bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{b}_1\bar{b}_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc construit une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ qu'on notera $\mathbb{K}$. Mais contrairement à $\mathbb{C}$, cette algèbre n'est pas commutative. En effet, on a par exemple

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice $q \in \mathbb{K}$ s'écrit

$$\det(q) = \begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \,,$$

par conséquent, tout matrice q dans $\mathbb{K}$ non nulle est inversible et son inverse

$$q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$$

appartient également à $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$ est donc un corps : le corps des *quaternions.* C'est également un espace vectoriel réel de dimension 4. On peut écrire tout quaternion q sous la forme

$$q = t\,\mathbf{1} + x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K}$$

où

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie sans peine les relations suivantes :

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -\mathbf{1},$$
$$\mathbf{I}\,\mathbf{J} = -\mathbf{J}\,\mathbf{I} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{J}\,\mathbf{K} = -\mathbf{K}\,\mathbf{J} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}\,\mathbf{I} = -\mathbf{I}\,\mathbf{K} = \mathbf{J}.$$

Le *conjugué* d'un élément q dans $\mathbb{K}$, on le définit comme la transposé de la matrice conjuguée de q

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$$

Un quaternion q est dit réel s'il est de la forme

$$q = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

où t est un nombre réel. Ceci permet d'identifier $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{K}$. Le sous-espace des quaternion réels est défini par l'équation

$$q = \bar{q}$$

On définit également l'espace des *quaternions imaginaires* $\mathbb{H}$ par l'équation

$$\operatorname{tr}(q) = 0.$$

C'est un espace de dimension 3, engendré par $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. Il est également défini comme l'espace des matrices M de $M_2(\mathbb{C})$, *antihermitiennes*

$$^t\overline{M} = -M$$

de trace nulle

$$\operatorname{tr}(M) = 0$$

Remarque 1. *Dans le cas du corps $\mathbb{C}$, on avait constaté que l'espace imaginaire était constitué par les matrices réelles 2×2 antisymétriques. Mais la trace d'une matrice* antisymétrique *($^tM = -M$) est nécessairement nulle, ce qui n'est pas le cas d'une matrice* antihermitienne *($^t\bar{M} = -M$).*

Le produit scalaire ordinaire de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ représenté par les quaternions

$$q_1 = t_1\,\mathbf{1} + x_1\,\mathbf{I} + y_1\,\mathbf{J} + z_1\,\mathbf{K}$$

et

$$q_2 = t_2\,\mathbf{1} + x_2\,\mathbf{I} + y_2\,\mathbf{J} + z_2\,\mathbf{K}$$

s'écrit

$$(t_1, x_1, y_1, z_1) \cdot (t_2, x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{2}\ \operatorname{tr}(q_1\bar{q}_2)$$

La norme d'un vecteur (t, x, y, z) représenté par q s'écrit

$$\|(t, x, y, z)\|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \det(q) = \frac{1}{2}\ \operatorname{tr}(q\bar{q})$$

On l'appelle également le module ou la norme du quaternion q et on le note $|q|$. On a bien entendu $|q_1q_2| = |q_1|\,|q_2|$.

Le *sous-groupe des unités* du corps $\mathbb{K}$, que l'on note $S\mathbb{U}(2)$, c'est l'ensemble des éléments q de $\mathbb{K}$ qui vérifient

$$|q|^2 = z\,\bar{z} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$S\mathbb{U}(2)$ correspond à la sphère S^3 qui apparaît donc munie d'une structure de groupe.

L'espace tangent (de dimension 3) à la sphère S^3, c'est à dire l'*algèbre de Lie* du groupe $S\mathbb{U}(2)$, est l'espace imaginaire défini par

$$\mathrm{tr}(q) = 0.$$

On pourra vérifier que le *crochet de Lie*, de deux éléments de $\mathbb{H}$, X et Y

$$[X, Y] = XY - YX$$

appartient encore à $\mathbb{H}$.

L'espace tangent à la sphère S^3 en un point quelconque q s'obtient en multipliant à gauche par q les éléments de l'espace imaginaire $\mathbb{H}$

$$T_q S^3 = q\,\mathbb{H}.$$

Chaque géodésique de la sphère S^3 issue du point $\mathbf{1}$ dans la direction X (où X appartient à $\mathbb{H}$ et $|X| = 1$) est définie par

$$q(s) = \exp(sX) = \cos(s)\mathbf{1} + \sin(s)X$$