Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie.

Von K. Schwarzschild.

(Vorgelegt am 24. Februar 1916 [s. oben S. 313].)

§ 1. Als ein weiteres Beispiel zur Einsteinschen Gravitationstheorie habe ich das Gravitationsfeld einer homogenen Kugel von endlichem Radius, die aus inkompressibler Flüssigkeit besteht, berechnet. Der Zusatz »aus inkompressibler Flüssigkeit« ist erforderlich, weil in der Relativitätstheorie die Gravitation nicht nur von der Menge der Materie, sondern auch von deren Energie abhängt und z. B. ein fester Körper von bestimmtem Spannungszustand eine andere Gravitation geben würde als eine Flüssigkeit.

Die Rechnung bildet eine unmittelbare Fortsetzung meiner Mitteilung über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes (diese Sitzungsberichte 1916, S. 189), welche ich kurz mit »Massenpunkt« zitieren werde.

§ 2. Die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation (diese Sitzungsber. 1915, S. 845) lauten allgemein:

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = G_{\mu\nu} . \tag{1}$$

Die Größen $G_{\mu\nu}$ verschwinden, wo keine Materie vorhanden ist. Im Innern einer inkompressiblen Flüssigkeit bestimmen sie sich auf folgende Weise: Der »gemischte Energietensor« einer ruhenden inkompressiblen Flüssigkeit ist nach Hrn. Einstein (diese Sitzungsber. 1914, S. 1062, das dortige P verschwindet wegen der Inkompressibilität):

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad T_4^4 = \rho_0, \quad (\text{die übrigen } T_\mu^\nu = 0). \tag{2}$$

Dabei bedeutet p den Druck, ρ_0 die konstante Dichte der Flüssigkeit.

Der »kovariante Energietensor« wird:

$$T_{\mu\nu} = \sum_\sigma T_\mu^\sigma g_{\nu\sigma} . \tag{3}$$

Es sei noch:

$$T = \sum_\sigma T_\sigma^\sigma = \rho_0 - 3p \tag{4}$$

und:

$$\varkappa = 8\pi k^2,$$

wo k^2 die Gausssche Gravitationskonstante ist. Dann lauten nach Hrn. Einstein (diese Berichte 1915, S. 845, Gl. 2a) die rechten Seiten der Feldgleichungen:

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{5}$$

Damit die Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, müssen die Bedingungen (ebenda Gl. 7a)

$$\sum_\alpha \frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \sum_{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\nu}^\mu T_\mu^\nu = 0 \tag{6}$$

erfüllt sein.

§ 3. Genau wie beim Massenpunkt sind auch für die Kugel die allgemeinen Gleichungen auf den Fall der Rotationssymmetrie um den Nullpunkt zu spezialisieren. Wie dort, empfiehlt es sich, die Polarkoordinaten von der Determinante 1:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos\vartheta, \quad x_3 = \phi, \quad x_4 = t \tag{7}$$

einzuführen. Das Linienelement muß dann, wie dort, die Form haben:

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} - f_2 dx_3^2 (1 - x_2^2), \tag{8}$$

so daß man hat:

$$g_{11} = -f_1, \quad g_{22} = -\frac{f_2}{1 - x_2^2}, \quad g_{33} = -f_2(1 - x_2^2), \quad g_{44} = f_4$$

$$(\text{die übrigen } g_{\mu\nu} = 0).$$

Dabei sind die f Funktionen nur von x_1.

Auch ergeben sich für den Raum außerhalb der Kugel die dortigen Lösungen (10), (11), (12):

$$f_4 = 1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-1/3}, \quad f_2 = (3x_1 + \rho)^{2/3}, \quad f_1 f_2^2 f_4 = 1, \tag{9}$$

wobei α und ρ zwei zunächst willkürliche Konstanten sind, die sich weiterhin aus Masse und Radius unsrer Kugel bestimmen müssen.

Es bleibt die Aufgabe, die Feldgleichungen für das Innere der Kugel mittels des Ausdrucks (8) des Linienelements anzusetzen und zu lösen. Für die rechten Seiten erhält man der Reihe nach:

$$T_{11} = T_1^1 g_{11} = -pf_1\,, \quad T_{22} = T_2^2 g_{22} = -\frac{pf_2}{1-x_2^2}\,,$$
$$T_{33} = T_3^3 g_{33} = -pf_2(1-x_2^2)\,, \quad T_{44} = T_4^4 g_{44} = \rho_0 f_4\,.$$

$$G_{11} = \frac{\varkappa f_1}{2}(p-\rho_0)\,, \quad G_{22} = \frac{\varkappa f_2}{2}\,\frac{1}{1-x_2^2}(p-\rho_0)\,,$$
$$G_{33} = \frac{\varkappa f_2}{2}(1-x_2^2)(p-\rho_0)\,, \quad G_{44} = -\frac{\varkappa f_4}{2}(\rho_0+3p)\,.$$

Unverändert vom Massenpunkt (§ 4) übernehmen lassen sich die Ausdrücke der Komponenten $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes durch die Funktion f und die linken Seiten der Feldgleichungen. Man erhält im ganzen folgendes System von Gleichungen, wenn man sich wiederum auf den Äquator ($x_2 = 0$) beschränkt:

Erstens die drei Feldgleichungen:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{4}\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{1}{f_4^2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2 = -\frac{\varkappa}{2}f_1(\rho_0-p) \tag{a}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)-1 \qquad -\frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 = -\frac{\varkappa}{2}f_2(\rho_0-p) \tag{b}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) \qquad +\frac{1}{2}\frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2 = -\frac{\varkappa}{2}f_4(\rho_0+3p)\,. \tag{c}$$

Dazu kommt die Determinantengleichung:

$$f_1 f_2^2 f_4 = 1\,. \tag{d}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (6) liefern die eine Gleichung:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{p}{2}\left[\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{2}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right]+\frac{\rho_0}{2}\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} \tag{e}$$

Aus Hrn. Einsteins allgemeinen Betrachtungen geht hervor, daß vorstehende 5 Gleichungen mit den 4 Unbekannten f_1, f_2, f_4, p miteinander verträglich sind.

Wir haben eine Lösung dieser 5 Gleichungen zu bestimmen, welche im Innern der Kugel singularitätenfrei ist. An der Kugeloberfläche muß $p = 0$ sein, und die Funktionen f nebst ihren ersten Derivierten müssen dort stetig in die außerhalb der Kugel geltenden Werte (9) übergehen.

Es soll zur Vereinfachung von jetzt an der Index 1 von x_1 wegbleiben.

§ 4. Die Gleichgewichtsbedingung (e) geht mit Hilfe der Determinantengleichung über in:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho_0+p}{2}\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x}\,.$$

Das läßt sich sofort integrieren und gibt:

$$(\rho_0 + p)\sqrt{f_4} = \text{konst.} = \gamma\,. \tag{10}$$

Die Feldgleichungen (a) (b) (c) lassen sich durch Multiplikation mit den Faktoren -2, $+2\frac{f_1}{f_2}$, $-2\frac{f_1}{f_4}$ umsetzen in:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = \frac{1}{2f_1^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2f_4^2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x}\right)^2 + \varkappa f_1(\rho_0 - p) \tag{a'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = 2\frac{f_1}{f_2} + \frac{1}{f_1 f_2}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} - \varkappa f_1(\rho_0 - p) \tag{b'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_4}{\partial x} + \varkappa f_1(\rho_0 + 3p) \tag{c'}$$

Bildet man die Kombinationen $a' + 2b' + c'$ und $a' + c'$, so erhält man unter Benutzung der Determinantengleichung:

$$0 = 4\frac{f_1}{f_2} - \frac{1}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{f_2 f_4}\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_4}{\partial x} + 4\varkappa f_1 p \tag{11}$$

$$0 = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) + \frac{3}{f_2^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + 2\varkappa f_1(\rho_0 + p)\,. \tag{12}$$

Wir wollen hier neue Variable einführen, welche dadurch nahegelegt werden, daß sie sich nach den Ergebnissen beim Massenpunkt außerhalb der Kugel sehr einfach verhalten, so daß sie auch die von ρ_0 und p freien Teile der jetzigen Gleichungen auf eine einfache Form bringen müssen.

Es sei: $$f_2 = \eta^{2/3}, \quad f_4 = \zeta\eta^{-1/3}, \quad f_1 = \frac{1}{\zeta\eta}\,. \tag{13}$$

Dann ist nach (9) außerhalb der Kugel:

$$\eta = 3x + \rho\,, \qquad \zeta = \eta^{1/3} - \alpha\,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = 3 \quad , \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \eta^{-2/3}\,. \tag{15}$$

Führt man diese neuen Variablen ein und ersetzt zugleich $\rho_0 + p$ durch $\gamma f_4^{-1/2}$ gemäß (10), so gehen die Gleichungen (11) und (12) über in:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 3\eta^{-2/3} + 3\varkappa\gamma\zeta^{-1/2}\eta^{1/6} - 3\varkappa\rho_0 \tag{16}$$

$$2\zeta\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -3\varkappa\gamma\zeta^{-1/2}\eta^{1/6}\,. \tag{17}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$2\zeta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 3\eta^{-2/3} - 3\varkappa\rho_0 .$$

Integrierender Faktor dieser Gleichung ist $\frac{\partial \eta}{\partial x}$. Die Integration liefert:

$$\zeta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = 9\eta^{1/3} - 3\varkappa\rho_0\eta + 9\lambda \quad \text{(}\lambda\text{ Integrationskonstante).} \qquad (18)$$

Dies zur $^3/_2$ten Potenz erhoben, gibt:

$$\zeta^{3/2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^3 = (9\eta^{1/3} - 3\varkappa\rho_0\eta + 9\lambda)^{3/2} .$$

Dividiert man (17) durch diese Gleichung, so fällt ζ heraus, und es bleibt folgende Differentialgleichung für η:

$$\frac{2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^3} = -\frac{3\varkappa\gamma\eta^{1/6}}{(9\eta^{1/3} - 3\varkappa\rho_0\eta + \lambda)^{3/2}} .$$

Hier ist wieder $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ integrierender Faktor. Die Integration gibt:

$$\frac{2}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} = 3\varkappa\gamma\int\frac{\eta^{1/6}\,d\eta}{(9\eta^{1/3} - 3\varkappa\rho_0\eta + \lambda)^{3/2}} \qquad (19)$$

und da:

$$\frac{2}{\frac{\delta\eta}{\delta x}} = \frac{2\delta x}{\delta\eta}$$

ist, so folge durch nochmalige Integration:

$$x = \frac{\varkappa\gamma}{18}\int d\eta\int\frac{\eta^{1/6}\,d\eta}{\left(\eta^{1/3} - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta + \lambda\right)^{3/2}} . \qquad (20)$$

Hieraus folgt x als Funktion von η und durch Umkehrung η als Funktion von x. Ferner folgt ζ aus (18) und (19) und damit nach (13) die Funktionen f. Somit ist unser Problem auf Quadraturen zurückgeführt.

§ 5. Es sind nun die Integrationskonstanten so zu bestimmen, daß das Innere der Kugel singularitätenfrei bleibt und an der Kugeloberfläche der stetige Anschluß an die Außenwerte der Funktionen f und ihrer Derivierten bewirkt wird.

An der Kugeloberfläche sei $r = r_a$, $x = x_a$, $\eta = \eta_a$ usw. Die Stetigkeit von η und ζ kann stets durch nachträgliche geeignete Bestimmung der Konstanten α und ρ in (14) gewahrt werden. Damit auch die Derivierten stetig bleiben und gemäß (15) $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_a = 3$ und $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_a = \eta_a^{-2/3}$ wird, muß nach (16) und (18) sein:

$$\gamma = \rho_0 \zeta_a^{1/2} \eta_a^{-1/6}, \quad \zeta_a = \eta_a^{1/3} - \frac{\varkappa \rho_0}{3} \eta_a + \lambda. \tag{21}$$

Daraus folgt

$$\zeta_a \eta_a^{-1/3} = (f_4)_a = 1 - \frac{\varkappa \rho_0}{3} \eta_a^{2/3} + \lambda \eta_a^{-1/3}.$$

Also

$$\gamma = \rho_0 \sqrt{(f_4)_a}. \tag{22}$$

Man sieht aus dem Vergleich mit (10), daß hiermit auch die Bedingung $p = 0$ an der Oberfläche befriedigt ist. Die Forderung $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_a = 3$ liefert folgende Bestimmung für die Integrationsgrenzen in (19):

$$\frac{3dx}{d\eta} = 1 - \frac{\varkappa \gamma}{6} \int_{\eta}^{\eta_a} \frac{\eta^{1/6} d\eta}{\left(\eta^{1/3} - \frac{\varkappa \rho_0}{3} \eta + \lambda\right)^{3/2}} \tag{23}$$

und damit erfährt (20) die folgende Bestimmung der Integrationsgrenzen:

$$3(x - x_a) = \eta - \eta_a + \frac{\varkappa \gamma}{6} \int_{\eta}^{\eta_a} d\eta \int_{\eta}^{\eta_a} \frac{\eta^{1/6} d\eta}{\left(\eta^{1/3} - \frac{\varkappa \rho_0}{3} \eta + \lambda\right)^{3/2}}. \tag{24}$$

Die Oberflächenbedingungen sind hiermit sämtlich erfüllt. Unbestimmt sind noch die beiden Konstanten η_a und λ, welche durch die Stetigkeitsbedingungen im Nullpunkt festgelegt werden.

Wir müssen zunächst fordern, daß für $x = 0$ auch $\eta = 0$ wird. Wäre das nicht der Fall, so wäre f_2 im Nullpunkt eine endliche Größe, und eine Winkeländerung $d\phi = dx_3$ im Nullpunkt, welche in Wirklichkeit gar keine Bewegung bedeutet, würde einen Beitrag zum Linienelement geben. Damit folgt aus (24) die Bedingung zur Festlegung von η_a:

$$3x_a = \eta_a - \frac{\varkappa \gamma}{6} \int_0^{\eta_a} d\eta \int_{\eta}^{\eta_a} \frac{\eta^{1/6} d\eta}{\left(\eta^{1/3} - \frac{\varkappa \rho_0}{3} \eta + \lambda\right)^{3/2}}. \tag{25}$$

λ wird schließlich festgelegt durch die Forderung, daß der Druck im Zentrum der Kugel endlich und positiv bleiben soll, woraus nach (10) folgt, daß dort f_4 endlich und von Null verschieden bleiben muß. Man hat nach (13), (18) und (23):

$$f_4 = \zeta\eta^{-1/3} = \left(1 - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta^{2/3} + \lambda\eta^{-1/3}\right)\left[1 - \frac{\varkappa\gamma}{6}\int\limits_{\eta}^{r_0} \frac{\eta^{1/6}d\eta}{(\eta^{1/3} - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta + \lambda)^{3/2}}\right]^2. \quad (26)$$

Es werde zunächst $\lambda \gtrless 0$ vorausgesetzt. Dann folgt für sehr kleines η:

$$f_4 = \frac{\lambda}{\eta^{1/3}}\left[K + \frac{\varkappa\gamma}{7}\frac{\eta^{7/6}}{\lambda^{3/2}}\right]^2,$$

wobei:

$$K = 1 - \frac{\varkappa\gamma}{6}\int\limits_0^{r_0}\frac{\eta^{1/6}d\eta}{\left(\eta^{1/3} - \frac{\varkappa\rho_0}{3}\eta + \lambda\right)^{3/2}} \quad (27)$$

gesetzt ist. Im Mittelpunkt ($\eta = 0$) wird also f_4 unendlich, außer wenn $K = 0$ ist. Ist aber $K = 0$, so verschwindet f_4 für $\eta = 0$. In keinem Falle ergibt sich für $\eta = 0$ ein endliches und von Null verschiedenes f_4. Man sieht daher, daß die Voraussetzung $\lambda \gtrless 0$ nicht zu physikalisch brauchbaren Lösungen führt, und es folgt, daß $\lambda = 0$ sein muß.

§ 6. Mit der Bedingung $\lambda = 0$ sind nunmehr alle Integrationskonstanten festgelegt. Zugleich werden die auszuführenden Integrationen sehr einfach. Führt man statt η eine neue Variable χ ein durch die Definition:

$$\sin\chi = \sqrt{\frac{\varkappa\rho_0}{3}}\cdot\eta^{1/3} \qquad \left(\sin\chi_a = \sqrt{\frac{\varkappa\rho_0}{3}}\cdot\eta_a^{1/3}\right), \quad (28)$$

so verwandeln sich die Gleichungen (13), (26), (10), (24), (25) durch elementare Rechnung in die folgenden:

$$f_2 = \frac{3}{\varkappa\rho_0}\sin^2\chi, \quad f_4 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)^2, \quad f_1 f_2^2 f_4 = 1. \quad (29)$$

$$\rho_0 + p = \rho_0\frac{2\cos\chi_a}{3\cos\chi_a - \cos\chi} \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left(\frac{\varkappa\rho_0}{3}\right)^{-3/2}\left[\frac{9}{4}\cos\chi_a\left(\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi\right) - \frac{1}{2}\sin^3\chi\right]. \quad (31)$$

Die Konstante χ_a bestimmt sich aus Dichte ρ_0 und Radius r_a der Kugel nach der Relation:

$$\left(\frac{\varkappa\rho_0}{3}\right)^{3/2} r_a^3 = \frac{9}{4}\cos\chi_a\left(\chi_a - \frac{1}{2}\sin 2\chi_a\right) - \frac{1}{2}\sin^3\chi_a. \quad (32)$$

Die Konstanten α und ρ der Lösung für das äußere Gebiet folgen aus (14) zu:

$$\rho = \eta_a - 3x_a \qquad \alpha = \eta_a^{1/3} - \zeta_a$$

und erhalten die Werte:

$$\rho = \left(\frac{\varkappa \rho_0}{3}\right)^{-3/2} \left[\frac{3}{2} \sin^3 \chi_a - \frac{9}{4} \cos \chi_a \left(\chi_a - \frac{1}{2} \sin 2\chi_a\right)\right] \tag{33}$$

$$\alpha = \left(\frac{\varkappa \rho_0}{3}\right)^{-1/2} \cdot \sin^3 \chi_a \,. \tag{34}$$

Das Linienelement im Innern der Kugel nimmt, wenn man statt x_1, x_2, x_3 (ix) die Variabeln χ, ϑ, ϕ benutzt, die einfache Gestalt an:

$$ds^2 = \left(\frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2}\right)^2 dt^2 - \frac{3}{\varkappa \rho_0} [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\vartheta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta d\phi^2]. \tag{35}$$

Außerhalb der Kugel bleibt die Form des Linienelements dieselbe, wie beim Massenpunkt:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \\ \text{wobei:} \quad R^3 &= r^3 + \rho \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

ist. Nur wird ρ nach (33) bestimmt, während für den Massenpunkt $\rho = \alpha^3$ war.

§ 7. An die im vorigen Paragraphen enthaltene vollständige Lösung unseres Problems knüpfen sich folgende Bemerkungen.

1. Das räumliche Linienelement $(dt = 0)$ im Innern der Kugel lautet:

$$-ds^2 = \frac{3}{\varkappa \rho_0} [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\vartheta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta d\phi^2] \,.$$

Dies ist das bekannte Linienelement der nichteuklidischen sogenannten Geometrie des sphärischen Raumes. Im Innern unsrer Kugel herrscht also die Geometrie des sphärischen Raumes. Der Krümmungsradius des sphärischen Raumes wird $\sqrt{\frac{3}{\varkappa \rho_0}}$. Unsere Kugel bildet nicht etwa den ganzen, sondern nur einen Teil des sphärischen Raumes, da χ nicht bis $\frac{\pi}{2}$, sondern nur bis zur Grenze χ_a wachsen kann. Für die Sonne würde der Krümmungsradius des sphärischen Raumes, der die Geometrie in ihrem Innern beherrscht, rund das 500fache des Sonnenradius (vgl. Formel (39) und (42)).

Es ist ein interessantes Ergebnis der EINSTEINschen Theorie, daß sie für die Geometrie des sphärischen Raumes, welche bisher als eine bloße Möglichkeit zu gelten hatte, Realität innerhalb gravitierender Kugeln fordert.

Innerhalb der Kugel sind »natürlich gemessene« Längen die Größen:

$$\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\,d\chi\,,\quad \sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\sin\chi\,d\vartheta\,,\quad \sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\sin\chi\,\sin\vartheta\,d\phi\,. \tag{37}$$

Der vom Kugelmittelpunkt bis zu ihrer Oberfläche »innen gemessene« Radius wird:

$$P_i = \sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\,\chi_a\,. \tag{38}$$

Der Umfang der Kugel, längs eines Meridians (oder jedes anderen größten Kreises) gemessen und durch 2π dividiert, heiße der »außen gemessene« Radius P_a. Es folgt:

$$P_a = \sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\sin\chi_a\,. \tag{39}$$

Nach dem Ausdruck (36) des Linienelements außerhalb der Kugel ist dies P_a offenbar identisch mit dem Wert $R_a = (r_a^3+\rho)^{1/3}$, den die Variable R auf der Kugeloberfläche annimmt.

Mit dem Radius P_a erhält man für α aus (34) die einfachen Beziehungen:

$$\frac{\alpha}{P_a} = \sin^2\chi_a\,,\quad \alpha = \frac{\varkappa\rho_0}{3}P_a^3\,. \tag{40}$$

Das Volumen unserer Kugel wird:

$$V = \left(\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\right)^3 \int_0^{\chi_a} d\chi\,\sin^2\chi \int_0^{\pi} d\vartheta\,\sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\right)^3\left(\chi_a - \frac{1}{2}\sin 2\chi_a\right).$$

Die Masse M unserer Kugel wird daher ($\varkappa = 8\pi k^2$)

$$M = \rho_0 V = \frac{3}{4k^2}\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho_0}}\left(\chi_a - \frac{1}{2}\sin 2\chi_a\right). \tag{41}$$

2. Man entnimmt den Bewegungsgleichungen eines Punktes von unendlich kleiner Masse außerhalb unserer Kugel, welche dieselbe Form wie beim Massenpunkt (dortige Gleichungen (15)—(17)) behalten, folgende Bemerkungen:

In großer Entfernung erfolgt die Bewegung des Punktes nach dem NEWTONschen Gesetz, wobei $\alpha/2k^2$ die Rolle der anziehenden Masse spielt. Es kann daher $\alpha/2k^2$ als »Gravitationsmasse« unserer Kugel bezeichnet werden.

Läßt man ferner einen Punkt aus der Ruhe im Unendlichen bis zur Kugeloberfläche herabfallen, so erhält die »natürlich gemessene« Fallgeschwindigkeit den Betrag:

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha/R}} \frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{\alpha}{R_a}}.$$

Es ist also nach (40):

$$v_a = \sin \chi_a. \tag{42}$$

Für die Sonne ist die Fallgeschwindigkeit rund $^1/_{500}$ Lichtgeschwindigkeit. Man überzeugt sich leicht, daß bei dem kleinen hieraus sich ergebenden Wert von χ_a und χ ($<\chi_a$) alle unsre Gleichungen bis auf die bekannten EINSTEINschen Effekte zweiter Ordnung in die der NEWTONschen Theorie übergehen.

3. Für das Verhältnis der Gravitationsmasse $\alpha/2k^2$ zur substantiellen Masse M findet man

$$\frac{\alpha}{2k^2 M} = \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \chi_a}{\chi_a - \frac{1}{2}\sin 2\chi_a}. \tag{43}$$

Mit wachsender Fallgeschwindigkeit $v_a (= \sin \chi_a)$, wachsender Massenkonzentration nimmt hiernach das Verhältnis der Gravitationsmasse zur substantiellen Masse ab. Es erklärt sich dies daraus, daß z. B. bei konstanter Masse und zunehmender Dichte der Übergang zu kleinerem Radius unter Energieabgabe (Verminderung der Temperatur durch Ausstrahlung) erfolgt.

4. Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3\cos\chi_a - \cos\chi}, \tag{44}$$

sie wächst also vom Betrag $\frac{1}{\cos\chi_a}$ an der Oberfläche bis zum Betrag $\frac{2}{3\cos\chi_a - 1}$ im Mittelpunkt. Die Druckgröße $\rho_0 + p$ wächst nach (10) und (30) proportional der Lichtgeschwindigkeit.

Im Kugelmittelpunkt ($\chi = 0$) werden Lichtgeschwindigkeit und Druck unendlich, sobald $\cos\chi_a = 1/3$, die Fallgeschwindigkeit gleich $\sqrt{8/9}$ der (natürlich gemessenen) Lichtgeschwindigkeit geworden ist. Es ist damit eine Grenze der Konzentration gegeben, über die hinaus eine Kugel inkompressibler Flüssigkeit nicht existieren kann. Wollte man unsere Gleichungen auf Werte $\cos \chi_a < 1/3$ anwenden, so erhielte man bereits außerhalb des Kugelmittelpunktes Unstetigkeiten. Man kann jedoch für größeres χ_a Lösungen des Problems finden, welche wenigstens außerhalb des Kugelmittelpunktes stetig sind, wenn man zu dem Fall $\lambda \gtrless 0$ übergeht und die Bedingung $K = 0$ (Gl. 27) erfüllt. Auf dem Wege über diese Lösungen, welche freilich physikalisch bedeutungslos sind, da sie unendlichen Druck im Mittelpunkt ergeben, kann man zu dem Grenzfall einer auf einen Punkt konzentrierten Masse übergehen und findet dann auch die Relation $\rho = \alpha^3$ wieder, welche nach der früheren Untersuchung für den Massenpunkt gilt. Es sei hier noch bemerkt, daß man von einem Massenpunkt nur reden kann, insofern man die Variable r benutzt, welche sonst auffälligerweise für die Geometrie und Bewegung innerhalb unsres Gravitationsfeldes keine Rolle spielt. Für einen außen messenden Beobachter folgt gemäß (40), daß eine Kugel von gegebener Gravitationsmasse $\alpha/2k^2$ keinen kleineren außen gemessenen Radius haben kann, als:

$$P_a = \alpha .$$

Für eine Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit wird die Grenze $9/8\,\alpha$. (Für die Sonne wird α gleich 3 km, für eine Masse von 1 g gleich $1.5 \cdot 10^{-28}$ cm.)

Ausgegeben am 6. April.