Sur le "modèle Janus" de J. P. Petit.

Thibault Damour, IHES
4 Janvier 2019

Une lettre du 7 décembre 2018 que M. Jean-Pierre Petit m'a adressée m'a poussé à regarder de plus près la structure et les conséquences des équations de champ de ce qu'il appelle "modèle Janus". J'ai en particulier poursuivi plus en détail les raisonnements et arguments que je lui avais indiqués dans une lettre du 12 mars 2014; lettre écrite après réception des prépublications de ses articles récents, et notamment:

J. P. Petit. et G. d'Agostini, "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy", Astrophys. Space Sci DOI 10.1007/s10509-014-2106-5);

J. P. Petit, et G. dAgostini, "Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe". Mod. Phys. Lett. A Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

Avant d'entrer dans les détails indiquons que la conclusion des arguments exposés ci-dessous sera la suivante:

le "modèle Janus" est physiquement (et mathématiquement) incohérent.

Les équations de base qui définissent "le modèle Janus" (d'après les références citées ci-dessus, complétées par, notamment, la page 39 du document "Le Modèle Cosmologique Janus, 22 novembre 2016" [1]) concernent deux métriques (de signatures Lorentziennes $-+++$), $g^+_{\mu\nu}$ et $g^-_{\mu\nu}$, sur une même variété quadri-dimensionnelle, et sont:

$$\begin{aligned} w_+ E^+_{\mu\nu} &= \chi(w_+ T^+_{\mu\nu} + w_- T^-_{\mu\nu})\,, \\ w_- E^-_{\mu\nu} &= -\chi(w_+ T^+_{\mu\nu} + w_- T^-_{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{1}$$

Ici $E^{\pm}_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}(g_\pm) = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$ dénote le tenseur d'Einstein (de g_+ ou g_-), $w_\pm \equiv \sqrt{-\det g_\pm}$, $\chi = +8\pi G/c^4$ (avec mes conventions), et, les deux tenseurs sources $T^+_{\mu\nu}$ et $T^-_{\mu\nu}$ sont censés représenter, respectivement, l'énergie-impulsion de la matière ordinaire (dite à "masse positive"), et d'une nouvelle matière, dite à "masse négative". La définition habituelle de $T^+_{\mu\nu}$ (assurant sa conservation tensorielle par rapport à $g^+_{\mu\nu}$) est $w_+ T^+_{\mu\nu} \equiv -2\delta S_{\text{matiere}+}/\delta g_+^{\mu\nu}$, où $S_{\text{matiere}+}$ dénote l'action de la matière ordinaire. On n'aura pas besoin de la définition correspondante (non précisée dans les références ci-dessus) de $T^-_{\mu\nu}$. J'utilise ci-dessous des résultats (et notations) standard en Relativité Générale. Indiquons aussi que, partant des Eqs. (1) (écrites avec des indices covariants), on pourra en déduire d'autres équations en bougeant les indices des quantités $+$ (respectivement $-$) par la métrique correspondante g_+ (resp. g_-).

[1] texte disponible sur `https://www.jp-petit.org/science/Le_Modele_Cosmologique_Janus.pdf`; page consultée le 3 janvier 2019

Je présente maintenant en détail plusieurs raisonnements démontrant les graves problèmes de cohérence des équations de champ (1) (problèmes que j'avais déjà brièvement évoqués dans ma lettre de 2014). L'origine de ces problèmes est l'existence de deux identités de Bianchi séparées. [Comme je l'écrivais en 2014: "Il y a a priori une incompatibilité entre les deux identités de Bianchi qui impliquent" les deux lois de conservation, Eqs.(7), (8) ci-dessous, et "il faudrait prouver qu'il est possible de rendre compatibles les deux lois de conservation", Eqs. (7), (8).]

En effet, les deux tenseurs d'Einstein E_+, E_- satisfont des identités de Bianchi (contractées) séparées (contenant les deux connections de Levi-Civita ∇_+ et ∇_-, définies respectivement par g_+ et g_-), disons

$$\nabla_+^\nu E_{\mu\nu}^+ \equiv 0, \tag{2}$$
$$\nabla_-^\nu E_{\mu\nu}^- \equiv 0. \tag{3}$$

Comme il est bien connu en Relativité Générale, chaque identité de Bianchi implique une loi de conservation correspondante pour la source tensorielle au membre de droite de l'équation du type Einstein correspondante. Comme les équations (1) sont constituées de deux équations du type Einstein, ces équations impliquent deux lois de conservation séparées pour leurs deux membres de droite, qui contiennent les deux tenseurs d'impulsion-énergie $T_\pm^{\mu\nu}$.

Nous allons montrer que l'existence de ces deux lois de conservation implique des incohérences physico-mathématiques. Pour exhiber ces incohérences il suffit de considérer le cas où il n'y a que de la matière habituelle, "à masse positive". Dans ce cas les équations (1) se réduisent au système réduit suivant (obtenu en prenant $T_{\mu\nu}^- = 0$)

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu}^+ &= \chi T_{\mu\nu}^+ , \\ E_{\mu\nu}^- &= -\chi \frac{w_+}{w_-} T_{\mu\nu}^+ . \end{aligned} \tag{4}$$

Pour clarifier les choses (et mieux voir la correspondance entre les équations "plus" et les équations "moins"), il est utile d'introduire à partir de maintenant une nouvelle notation où les signes + sont omis (par exemple $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^+$, et $T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^+$) et où les quantités afférentes à la métrique − sont notées avec des barres (en particulier $\bar{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^-$). Il est aussi commode de définir (avec $w \equiv w_+$ et $\bar{w} \equiv w_-$)

$$\bar{T}_{\mu\nu} \equiv -\frac{w}{\bar{w}} T_{\mu\nu} . \tag{5}$$

Avec ces notations le système de Janus réduit, Eqs. (4), prend la forme formellement symétrique suivante

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= +\chi T_{\mu\nu} , \\ \bar{E}_{\mu\nu} &= +\chi \bar{T}_{\mu\nu} . \end{aligned} \tag{6}$$

Il est à noter que *la même distribution de matière ordinaire est supposée être la source de deux métriques différentes*: une métrique Einsteinienne habituelle

($g = g_+$; sourcée par une masse positive), et une autre métrique ($\bar{g} = g_-$; sourcée essentiellement par *l'opposée de la masse positive*; modulo le facteur $w/\bar{w}$, qui ne jouera d'ailleurs qu'un rôle mineur ci-dessous). [Ces facteurs ont été introduits, semble-t-il, pour éviter une certaine incohérence dans des modèles cosmologiques simplifiés, mais on verra ci-dessous que ces facteurs n'aident pas à éviter une grave incohérence dans le cas des équations d'équilibre hydrostatique d'une étoile auto-gravitante, et ce dans la limite newtonienne, $c \to \infty$.]

Le point crucial que je désire mettre en lumière est que les deux identités de Bianchi de g et $\bar{g}$ impliquent alors *deux types séparés de contraintes pour le mouvement de la même matière (positive)*, c.a.d. les deux lois de conservation suivantes

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0\,, \tag{7}$$

et aussi

$$\bar{\nabla}^\nu \bar{T}_{\mu\nu} = 0\,, \tag{8}$$

où je rappelle que $\bar{T}_{\mu\nu} \equiv -\frac{w}{\bar{w}} T_{\mu\nu}$, et que $\bar{\nabla}$ dénote la connection définie par $\bar{g}$.

Pour mieux voir les contradictions qu'impliquent l'existence de ces deux lois de conservation, il est utile de considérer, comme exemple simple, le cas où la matière ("positive") est constituée à la fois d'une source de fonds $T^0_{\mu\nu}$ (par exemple une étoile, ou le système solaire), et aussi d'une source test décrite (pour simplifier) comme une répartition continue de "poussière",[2] c.a.d. $T^1_{\mu\nu} = \rho_1 u_\mu u_\nu$. on a alors

$$T_{\mu\nu} = T^0_{\mu\nu} + \rho_1 u_\mu u_\nu\,, \tag{9}$$

et corrélativement

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{T}^0_{\mu\nu} + \bar{\rho}_1 \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu\,, \tag{10}$$

où l'on a défini

$$\bar{u}_\mu \equiv \frac{u_\mu}{N} \text{ avec } N^2 \equiv -\bar{g}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu\,, \tag{11}$$

$$\bar{\rho}_1 \equiv -N^2 \frac{w_+}{w_-} \rho_1\,, \tag{12}$$

$$\bar{T}^0_{\mu\nu} \equiv -\frac{w}{\bar{w}} T^0_{\mu\nu}\,. \tag{13}$$

Ici, le champ de quadrivitesse (covariant) u_μ est, selon sa définition standard, défini (et unitaire) par rapport à la métrique $g_{\mu\nu} \equiv g^+_{\mu\nu}$ (et donc $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1$). Considéré par rapport à la seconde métrique $\bar{g}_{\mu\nu} \equiv g^-_{\mu\nu}$ le champ covectoriel u_μ définit (de façon unique) le champ de quadrivitesse (équivalent) $\bar{g}$-unitaire $\bar{u}_\mu$ (avec $\bar{g}^{\mu\nu} \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu = -1$) défini ci-dessus.

Considérons maintenant les conséquences des deux lois de conservation (7), (8), devant être satisfaites par la seule matière ordinaire. Ces conséquences concernent (séparément) la matière test, et la matière de fonds (car on suppose qu'elles sont localisées dans des régions différentes de l'espace).

Si on se concentre d'abord sur le mouvement de la matière (poussièreuse) test, les lois de conservation (7), (8) donnent explicitement [avec les notations

[2] On appelle "poussière" un fluide à pression nulle.

introduites ci-dessus, et la convention évidente que la métrique g (resp. $\bar{g}$) est utilisée pour bouger les indices non barrés (resp. barrés)] les contraintes[3]

$$\begin{aligned} \nabla_u u^\mu &= 0; & (14)\\ \nabla_\mu(\rho_1 u^\mu) &= 0; & (15)\\ \bar{\nabla}_{\bar{u}}\bar{u}^\mu &= 0; & (16)\\ \bar{\nabla}_\mu(\bar{\rho}_1 \bar{u}^\mu) &= 0. & (17)\end{aligned}$$

En particulier la première équation dit que les lignes d'univers de la matière positive (définies par $u^\mu = g^{\mu\nu}u_\nu$) sont des géodésiques de $g_{\mu\nu} \equiv g^+_{\mu\nu}$, alors que la troisième équation nous dit que la *même matière positive* est aussi contrainte (par les équations de type *moins*) à suivre d'autres équations du mouvement, $\bar{\nabla}_{\bar{u}}\bar{u}^\mu = 0$, qui disent que les lignes définies par $\bar{u}^\mu = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{u}_\nu$ doivent aussi être des géodésiques de $\bar{g}_{\mu\nu} \equiv g^-_{\mu\nu}$. Or, le champ de quadrivitesse $\bar{u}^\mu$ n'est pas un champ de quadrivitesses indépendant de u^μ. Considéré comme un champ covariant c'est essentiellement le même, à un facteur de renormalisation près: $\bar{u}_\mu \equiv u_\mu/N$, Eq. (11), de sorte que $\bar{u}^\mu = \bar{g}^{\mu\nu}u_\nu/N = \bar{g}^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu}u^\nu/N$. Etant donné que $\bar{g}_{\mu\nu} \equiv g^-_{\mu\nu}$ est une métrique a priori complètement différente de $g_{\mu\nu} \equiv g^+_{\mu\nu}$, je ne vois pas comment il est possible (quand on considère une solution compliquée générale, dépendant du temps, et définie par des données de Cauchy arbitraires pour $g_{\mu\nu}$ et $\bar{g}_{\mu\nu}$) que la *même matière positive* puisse être contrainte à suivre deux équations du mouvement différentes. Si on se donne, par exemple, des données initiales pour la distribution de vitesses de la poussière test, ces données initiales sont supposées devoir évoluer de deux façons différentes à la fois. C'est mathématiquement absurde pour une théorie classique!

On peut, en fait, obtenir une contradiction physico-mathématique encore plus frappante à partir des équations (6) en considérant l'application du système (6) au cas de la structure interne d'une étoile auto-gravitante, traitée à la limite newtonienne. Nous considérons donc cette fois une source de fonds ("à masse positive"), décrite par un fluide parfait:

$$T_{\mu\nu} = T^{0+}_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \tag{18}$$

Les références de J. P. Petit et al. citées ci-dessus n'ont considéré qu'une partie des équations afférentes à un tel cas, à savoir la seule composante 00 des deux équations d'Einstein (6). Comme ces références, je considérerai, pour simplifier, ces équations dans une première approximation quasi-newtonienne. Mais contrairement à elles je considérerai les conséquences nécessaires de toutes ces équations, et en particulier, les conséquences de leurs parties tensorielles ij $(i, j = 1, 2, 3)$. [La logique ici est ce qui s'appelait autrefois l'"analyse" du problème: on suppose d'abord qu'il existe une solution au problème pour en

[3]Ces résultats sont standards en Relativité Générale; voir par exemple Yvonne Choquet-Bruhat, "Introduction to General Relativity, Black Holes and Cosmology", Oxford University Press, 2015.

déduire les propriétés nécessaires. Cependant, comme on atteindra une contradiction, la “synthèse” du problème consistera à conclure que la théorie est auto-contradictoire et n'admet en fait aucune solution ayant une généralité adéquate pour la physique.]

Je rappelle d'abord que la solution linéarisée des équations d'Einstein habituelles (disons le premier système dans (6)) peut s'écrire comme

$$g_{00} = -\left(1 - 2\frac{U}{c^2}\right) \; ; \; g_{ij} = +\left(1 + 2\frac{U}{c^2}\right)\delta_{ij}, \tag{19}$$

où le potentiel quasi-newtonien U satisfait l'équation de Poisson

$$\Delta U = -4\pi G\frac{T_{00}}{c^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) = -4\pi G\rho\left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right). \tag{20}$$

A cause de la symétrie formelle entre les deux équations du système (6), une[4] solution linéarisée des équations du type Einstein pour la métrique $\bar{g} = g_-$ s'écrit comme

$$\bar{g}_{00} = -\left(1 - 2\frac{\bar{U}}{c^2}\right) \; ; \; \bar{g}_{ij} = +\left(1 + 2\frac{\bar{U}}{c^2}\right)\delta_{ij}, \tag{21}$$

où le potentiel quasi-newtonien $\bar{U}$ satisfait l'équation de Poisson modifiée

$$\Delta\bar{U} \equiv -4\pi G\bar{\rho} = -4\pi G\frac{\bar{T}_{00}}{c^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right). \tag{22}$$

D'après l'Eq. (5), la source de cette équation de Poisson modifiée (dénotée ici $\bar{\rho}$) est, à l'approximation la plus basse qui suffit ici (vu que le rapport $w/\bar{w} = 1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$), simplement *l'opposée* de la source habituelle:

$$\bar{\rho} \equiv \frac{\bar{T}_{00}}{c^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) = -\frac{T_{00}}{c^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) = -\rho\left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right). \tag{23}$$

Du coup, le potentiel quasi-newtonien entrant dans la seconde métrique est aussi l'opposé du potentiel habituel:

$$\bar{U} = -U\left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right). \tag{24}$$

La seule chose nouvelle dans les équations précédentes par rapport aux résultats de J. P. Petit. et G. d'Agostini, Astrophys. Space Sci DOI 10.1007/s10509-014-2106-5, concerne les parties spatiales des deux métriques.

[4]Pour simplifier, je ne discute pas ici la possibilité de changer les coordonnées de g_- par rapport à celles de g_+. On verra ci-dessous que l'incohérence des Eqs. (6) est manifeste dans la limite newtonienne ($c \to \infty$), et ne peut donc pas dépendre d'un changement post-newtonien, $O(1/c^2)$, de coordonnées. Notre conclusion dépend en fait seulement des expressions quasi-newtoniennes de g_{00} et $\bar{g}_{00}$, et du fait que $g_{ij} = \delta_{ij} + O(1/c^2)$, et $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij} + O(1/c^2)$.

Je passe maintenant à la partie nouvelle montrant l'incohérence du "modèle Janus". D'abord, je note que d'après l'Eq. (5) et les résultats précédents la partie spatiale du tenseur source pour la deuxième équation d'Einstein est

$$\bar{T}_{ij} = -\frac{w}{\bar{w}} T_{ij} = -\left(1 + 4\frac{U}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right) T_{ij}. \tag{25}$$

Le point crucial maintenant est de considérer les conséquences explicites des deux équations séparées de conservation de l'énergie-impulsion (7) et (8), qui contraignent toutes deux la même énergie-impulsion, à savoir celle de la matière ordinaire.

Je rappelle d'abord la formule explicite donnant $\nabla \cdot T$ (où je rappelle que $w \equiv \sqrt{-\det g}$):

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = \frac{1}{w} \partial_\nu (w T^\nu_\mu) - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \tag{26}$$

En appliquant cette formule au cas statique d'une étoile, et pour un indice spatial $\mu = i$, on a

$$\nabla_\nu T^\nu_i = \frac{1}{w} \partial_j (w T^j_i) - \frac{1}{2} \partial_i g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \tag{27}$$

Dans le dernier terme, la contribution venant de $\alpha = \beta = 0$ domine dans le cas quasi-newtonien [car $T^{00} = O(c^2)$ alors que $T^{0i} = O(c^1)$ et $T^{ij} = O(c^0)$] . On trouve alors

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\nu T^\nu_i &= \partial_j (T^j_i) - \frac{T^{00}}{c^2} \partial_i U + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \\ &= \partial_j (T^j_i) - \rho \partial_i U + O\left(\frac{1}{c^2}\right) . \end{aligned} \tag{28}$$

Je rappelle aussi que dans la limite quasi-newtonienne T_{ij} est "d'ordre unité", c.a.d. $O(1/c^0)$ quand $c \to \infty$. Par exemple, pour un fluide parfait en mouvement on a $T_{ij} = \rho v^i v^j + p\delta_{ij} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$. L'équation (28) n'est alors [quand on la complète par $\frac{1}{w}\partial_0(wT^0_i) = \partial_t(\rho v^i) + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$] rien d'autre (dans la limite $c \to \infty$) que l'équation hydrodynamique d'Euler avec une densité de force donnée par la force gravitationnelle habituelle. Ici j'ai considéré le cas statique (à vitesses nulles), où la loi de conservation de T donne l'équation d'équilibre hydrostatique d'une étoile auto-gravitante. Rien de nouveau donc jusqu'à présent.

Mais considérons maintenant la deuxième loi de conservation (8). A cause de la symétrie formelle entre $g_+ = g$ et $g_- = \bar{g}$, l'Eq. (8) implique des versions "barrées" des équations précédentes:

$$\bar{\nabla}_\nu \bar{T}^\nu_i = \frac{1}{\bar{w}} \partial_j (\bar{w} \bar{T}^j_i) - \frac{1}{2} \partial_i \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{T}^{\alpha\beta} , \tag{29}$$

et donc finalement

$$0 = \bar{\nabla}_\nu \bar{T}^\nu_i = \partial_j (\bar{T}^j_i) - \bar{\rho} \partial_i \bar{U} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) . \tag{30}$$

Dans cette seconde équation d'Euler on peut remplacer $\bar{T}_i^j, \bar{\rho}$ et $\bar{U}$ par leurs valeurs, c.a.d., à l'ordre le plus bas, par $-T_i^j, -\rho, -U$. Celà donne

$$0 = \bar{\nabla}_\nu \bar{T}_i^\nu = -\partial_j (T_i^j) - \rho \partial_i U + O\left(\frac{1}{c^2}\right) . \tag{31}$$

Mais cette dernière équation est en *contradiction flagrante* avec l'équation d'Euler habituelle, Eq. (28). Par exemple, si l'on considère une étoile statique décrite par un fluide parfait l'Eq. (28) donne l'équation d'équilibre hydrostatique habituelle

$$\partial_i p = +\rho \partial_i U, \tag{32}$$

disant, en particulier que la pression diminue du centre vers la surface (où elle doit s'annuller), alors que la deuxième équation d'Euler donne le *résultat contradictoire suivant*:

$$\partial_i p = -\rho \partial_i U, \tag{33}$$

disant que la pression doit *augmenter* du centre vers la surface. Je rappelle que ces deux équations contradictoires sont des conséquences nécessaires des équations de champ définissant le "modèle Janus".

CONCLUSION: Les équations de champ du "modèle Janus", Eqs. (1), sont mathématiquement et physiquement contradictoires. Elles n'admettent aucune solution suffisamment générique pour décrire la gravitation que l'on connaît, et constituent un système incohérent d'équations. En termes simples, et vu le rôle mineur des facteurs $w_\pm$ qui ont été ajoutés dans la dernière version du modèle Janus, la raison du caractère auto-contradictoire de ces équations est que le même tenseur d'énergie-impulsion $T^+_{\mu\nu}$ est couplé à la fois (mais séparément) à une gravitation ayant une constante de Newton $G > 0$ ($E^+_{\mu\nu} = +\chi T^+_{\mu\nu}$), et une gravitation ayant $G < 0$ ($E^-_{\mu\nu} = -\chi \frac{w_+}{w_-} T^+_{\mu\nu}$) . La matière ordinaire devrait donc à la fois s'attirer elle-même, (d'où un nécessaire gradient négatif de pression dans une étoile), et se repousser elle-même (d'où un tout aussi nécessaire gradient positif de pression dans une étoile).

Remerciements: Je remercie Nathalie Deruelle, ainsi que Luc Blanchet, pour leurs commentaires sur une première version (2 janvier 2019) de ce texte.