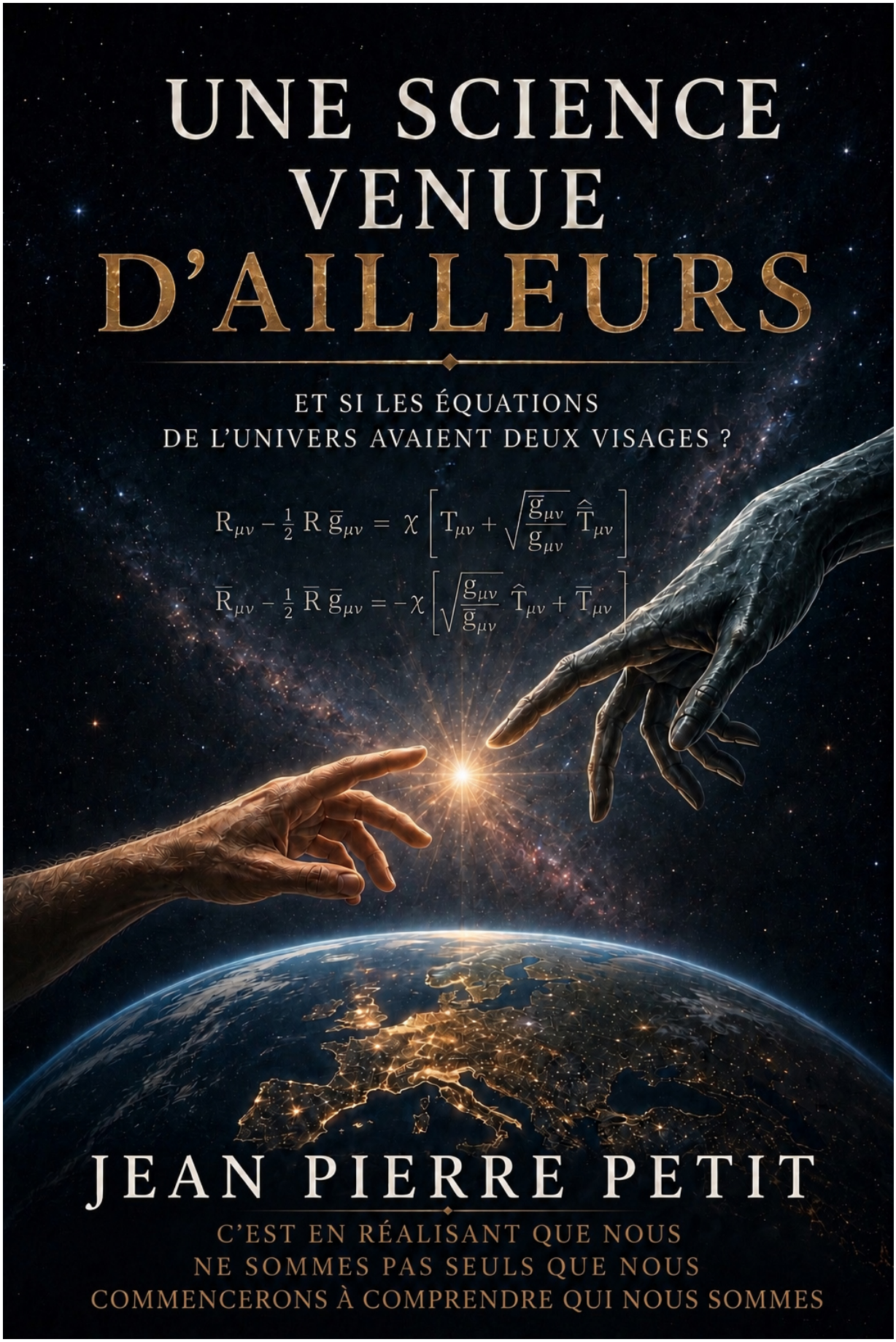

UNE SCIENCE VENUE D'AILLEURS
ET SI LES ÉQUATIONS DE L'UNIVERS AVAIENT DEUX VISAGES ?
$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, \bar{g}_{\mu\nu} = \chi \left[T_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{\bar{g}_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}}}\, \hat{\bar{T}}_{\mu\nu} \right]$
$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = -\chi \left[\sqrt{\frac{g_{\mu\nu}}{\bar{g}_{\mu\nu}}}\, \hat{T}_{\mu\nu} + \bar{T}_{\mu\nu} \right]$
JEAN PIERRE PETIT
C'EST EN RÉALISANT QUE NOUS NE SOMMES PAS SEULS QUE NOUS COMMENCERONS À COMPRENDRE QUI NOUS SOMMES

2026-11-11

Vous venez de télécharger la version gratuite du livre. Mais si vous souhaitez acquérir une version brochée (moins son annexe scientifique), ou soutenir financièrement l'auteur, vous la trouverez sur AMAZON.

Quel est le but de ce livre ?

Informer les gens, avant tout. D'où cet impératif de disposition sous forme gratuite, qui sera étendue dans toutes les langues, les pdf étant positionnés sur le site de :

SAVOIR SANS FRONTIERES.

Ces pdf pourront être installés sur n'importe quelle plateforme du web.

Si l'aspect science vous intéresse, ou est de votre ressort, il début à la page 206. Si cela n'est pas le cas, vous pourrez n'imprimer que les 205 premières pages.

Si vous décidez de transmettre ce pdf à vos contacts, ne l'amputez pas, dans la mesure du possible, de son annexe scientifique. Ainsi celle-ci aura des chances de toucher un scientifique, quelque part.

Avertissement (2026).

Nous vivons le temps de tous les dangers. En Ukraine une guerre, qui n'aurait jamais dû éclater, a déjà fait plus d'un million de mort et plus encore de blessés, d'infirmes. Tous les jours des jeunes meurent sur ce front absurde, qui emplit les poches des fabricants d'armes et des corrompus de tous bords.

Ailleurs on bombarde, on tue des civils, on massacre au nom de Dieu des hommes, des vieillards, des femmes, des enfants. Et en France une population anesthésiée, abrutie, saturée d'informations et de mensonges, suit les choses de ce monde comme on regarde un match de foot, tandis que des généraux de salon supputent les chances des uns et des autres.

Je me souviens, comme si c'était hier, de ce que me disait ma mère, sur l'état du monde en 1939. Le monde sortait de la première guerre mondiale, en 1918, avec ses 20 millions de morts, 21 ans plus tôt, celle que les médias appelaient « la der des der[1] ». Et, me disait-elle, personne ne croyait qu'à peine deux décennies plus tard le monde allait replonger dans une seconde guerre mondiale, qui ferait 50 millions de morts[2].

Sur quoi reposait ce scepticisme ?

Sur les progrès réalisés en matière d'armements.

- *Pendant la première guerre mondiale il suffisait de s'éloigner de 20 kilomètres du front pour ne plus avoir à subir l'horreur des tranchées. Là, avec les nouvelles armes et la portée des bombardiers, on ne tuerait plus que les soldats. On tuerait les civils, et ce serait terrible. Donc c'est impossible qu'on en vienne là.*

Beaucoup de gens pensaient cela. Et pourtant …

Aujourd'hui la technologie des drones a créé des guerres impossibles à gagner, à moins de recourir à des frappes massives, donc nucléaires.

Et voilà ce spectre qui se profile, agité par des politiques qui ne savent même pas ce que signifie ce mot.

L'idée que nous puissions plonger dans une III° guerre mondiale, automatiquement nucléaire, se profile sur un horizon qui s'assombrit de jour en jour.

On me dit « Tu n'y peux rien. La population française est abrutie, décérébrée de manière systématique. Celles-là, et toutes les populations de la planète, dans des registres différents ». Ailleurs, d'autres écrivent « que l'humanité a besoin d'une nouvelle épreuve, pour prendre conscience ».

Je vais avoir 90 ans dans quelques mois. Je n'ai plus d'enfant. Mon fils est mort en 1990.

---

[1] La « dernière des dernières ». Un mot qui, aujourd'hui, faut sourire.

[2] Le calcul montre que, depuis 1945 des guerres « de moindre intensité, ont fait exactement le même nombre de morts, majoritairement civiles.

Le thème de Cassandre me vient en tête.

Cette femme qui, à Troie, avait eu le pouvoir de prédire l'avenir, mais que personne ne croyait. Laocoon, un prêtre, avait à son tour perçu le danger et avait été jusqu'à jeter sa lance montre le flanc de ce cheval de bois que les Grecs avaient amené devant les portes de la ville.

Mais des serpents étaient sorti de la mer et avaient tué Laocoon, et ses fils.

Je me souviens qu'en 1995 j'avais écrit «Les Enfants du Diable ». Mais qui avait compris le sens de ce titre ?

Le diable, dans le jargon des scientifiques, c'est l'armée.

Un pouvoir militaire qui a pourri ma vie professionnelle pendant des décennies, jusqu'à ma retraite, parce que je refusais de construire de nouvelles armes, à travers cette discipline scientifique nouvelle, la MHD, qui permettait de faire évoluer des missiles à des vitesses hypersoniques, sans qu'apparaissent ces ondes de choc, derrière lesquelles l'air, comprimé, se trouve porté à des milliers de degrés.

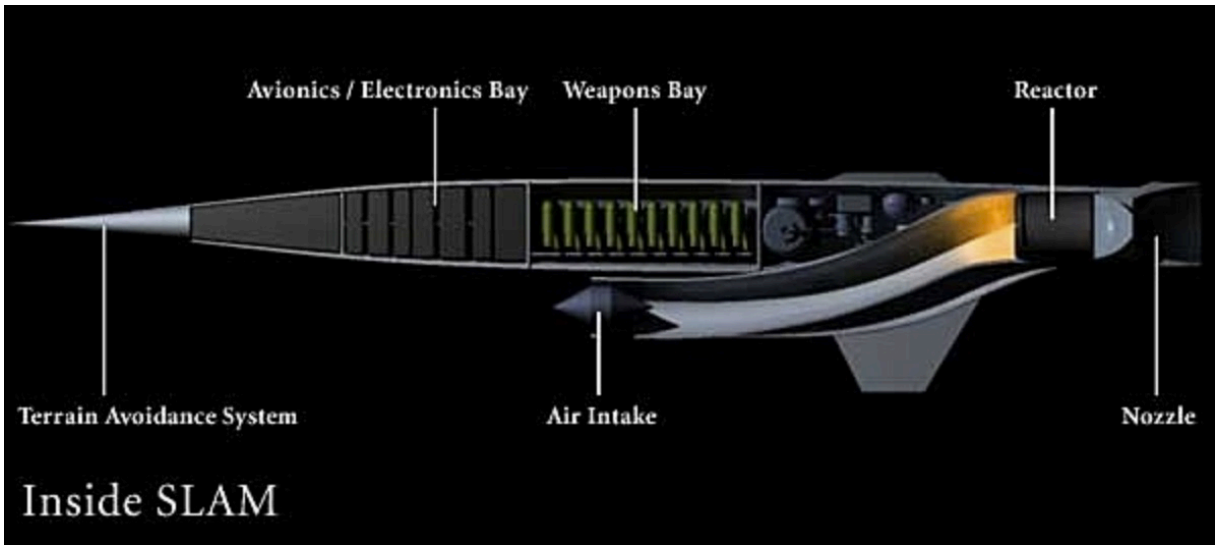
Quand Poutine, en mars 2018, a annoncé à la Douma, l'assemblée fédérale russe, que la Russie possédait des missiles capables d'évoluer à vitesse hypersonique en air dense, il a aussi mentionné que son pays détenait des missiles de croisière propulsés par l'énergie nucléaire.

D'aucuns ont douté de tout cela.

Si vous recherchez, sur Internet, des renseignements sur le missile « Pluto[3] », développé par les Américains dès le début de la guerre froide, vous en trouverez maintenant en abondance. L'idée est simple : Un missile de croisière construit en titane[4], volant à Mach 3, à 3.700 hm/ à 150 mètres du sol, pesant 90 tonnes, capable d'emmener une charge utile de 23 tonnes (c'est-à-dire plusieurs bombes de 10 Mégatonnes ou deux dizaines de bombes tactiques), possède une entrée d'air conduisant aux tubulures en uranium enrichi d'un réacteur nucléaire, qui échauffe cet air à 1300°, puis le détend et l'accélère dans une tuyère. Ce qu'on appelle un système thermopropulsif.

[3] https://fr.wikipedia.org/wiki/Projet_Pluto plus précis dans sa version en langue anglaise : https://en.wikipedia.org/wiki/Project_Pluto

[4] Pour résister à l'échauffement.



SLAM : Supersonic Low Altitude Missile. Missile de croisière supersonique[5].

On peut trouver aujourd'hui un kit permettant de construire la maquette du Pluto, diffusé par la société ukrainienne MikriMir.

Comment ça marche ? Des propulseurs à poudre mettent l'engin en lignes de vol, à bonne vitesse. Autour du réacteur des plaques réfléchissant les neutrons tournent pour renvoyer ceux-ci vers la source. Et le réacteur démarre instantanément. Et l'engin peut voler des jours entiers, voire plus.

L'idée vit le jour en 1957. Des essais du moteur nucléaire se situèrent au Nevada entre 1961 et 1964. Finalement, les américains, confrontés aux spectaculaires progrès des Soviétiques, se lancèrent à leur suite dans la course aux ICBM, aux missiles intercontinentaux. Par ailleurs, en 1958 la première croisière transpolaire du sous-marin Nautilus[6], propulsé par un réacteur nucléaire, ouvrait sur la possibilité de le doter de missiles balistiques, porteurs d'armes de même puissance. Le projet Pluto fut donc abandonné alors que le moteur état déjà opérationnel (les Américains étaient pratiquement prêts à tester le missile en vol) .

Dès l'annonce russe, je savais tout cela. J'avais même en main le dossier de calcul complet du réacteur.

Les militaires vinrent alors me voir. Ils avaient eu confirmation de l'existence du projet russe, l'un des engins ayant explosé au sol et rejeté des polluants radioactifs spécifiques, que les services français avaient capté.

- *Nous sommes conscients d'être passés à côté de tout ce que vous proposiez il y a quarante ans. Nous sommes désolés. Nous vous offrons 3000 euros pour que vous nous fassiez un rapport de quelques dizaines de pages, présentant vos idées générales en MHD. Au-delà, vous seriez rétribués pour donner des cours permettant à nos ingénieurs militaires de combler leur retard dans ce domaine.*

[5] On peut trouver aujourd'hui un kit permettant de construire la maquette du Pluto, diffusé par la société ukrainienne MikroMir. L'Apocalypse sous forme ludique.

[6] Si le capitaine Nemo, ou Jules Vernes, auteur de « Vingt mille lieues sous les mers » avait vécu, il aurait dit « donnez-lui n'importe quel nom, mais pas celui-là ! »

Ils en ont été pour leur frais.

Aujourd'hui le public n'a pas la moindre idée de ce que signifierait un conflit nucléaire, immédiatement incontrôlable. Les politiques non plus. En France le jeune chef d'état-major nommé par un président (dont les récents sondages révèlent qu'il gouverne maintenant avec 15 % d'opinions positives) a annoncé à la population qu'elle devrait commencer à se faire à l'idée de voir mourir des jeunes français dans un conflit jugé inévitable.

Plus que jamais, la planète est devenue un veste hôpital psychiatrique où ce sont les fous qui ont pris le pouvoir.

Inciter à moins de folie, à un commencement de sagesse ? Peine perdue.

Alors quoi ? ….

Pour que le bipède humain prenne conscience du jeu mortel dans lequel on l'entraîne il faudrait quelque chose qui soit comparable à un … électrochoc. La descente d'un messie, quelque part, opérant des miracles, l'atterrissage d'une flottille de soucoupes volantes place de la Concorde, à New York, sur la Place Rouge, ou sur la place Tien Amen.

Mais ça n'aura pas lieu : la panique qui suivrait serait source de désordres comparables[7].

Une autre solution serait que les Terriens se voient fournir une preuve irréfutable qu'ils ne sont pas les seuls habitants de l'univers, que d'autres les visitent, échangent avec certains d'entre eux.

Ce livre représente cette preuve.

Certains, en lisant ces lignes, diront « encore un qui va s'en mettre plein les poches avec un nième livre consacré au thème ovni !». Eh bien justement, non.

Ce livre est totalement libre de droits

Il n'y a pas de copyright, rien. Et il en sera de même, le plus vite possible, pour toutes ses versions, dans toutes les langues de la planète. N'importe qui pourra gratuitement télécharger ce pdf, ne serait-ce que sur le site :

http://www.savoir-sans-frontireres.com

Ou ailleurs, partout où on aura l'idée de le mettre.

Si la version française est proposée moyennant finance, sur AMAZON, c'est simplement pour ceux qui voudront avoir en main un exemplaire sur papier, broché ; sinon ils trouveront exactement l'identique, en gratuit, sur Internet.

---

[7] Les extraterrestres n'interviendront pas non plus pour nous empêcher de nous entretuer dans un conflit qui ne fera guère que réduire drastiquement le population humaine en la ramenant 500 ans en arrière, voire plus, jusqu'à ce que la radioactivité commence à s'atténuer suffisamment pour que la planète commence à se guérir des plaies causées par son imbécile de locataire.

Mais si des éditeurs, ou des particuliers, veulent produire, dans tous les pays, des exemplaires, et même les vendre à leur bénéfice exclusif, grand bien leur fasse.

Mais dans dans les versions propoisées et dans toute annonce de vente de livres, l'adresse de téléchargement gratuit pdf de leur version dans cette langue, impérativement disponible sur Internet, devra être mentionnée, dans la page proposant l'achat du livre, comme sur la couverture du livre lui-même, de manière bien visible. Avec :

Droits d'auteur : zéro

Si je veux être crédible, il me faut avancer les poches vides.

Si des cinéastes, des réalisateurs de télévision, veulent créer des adaptations, inutile de rechercher une cession de droits qui … n'existent plus. Si nécessaire je leur en fournirai la confirmation écrite de ma main. Simplement : aucun ne pourra se réclamer d'une quelconque exclusivité. Si cette histoire est un scoop, celui-ci sera pour le premier qui s'en saisira.



Je lance cette bouteille à la mer.

Pertuis le 11 octobre 2026

© Jean Pierre Petit

Prologue :

Trente-cinq années se sont écoulées. On était en 1991. L'affaire Ummo secouait les médias. Le journaliste André Berkoff m'avait invité sur le plateau de son émission « ça m'intéresse ». Parmi les participants, Jean-Claude Ribes, aujourd'hui décédé, à l'époque directeur de l'observatoire de Lyon, et un astronome, Jean-Louis Heudier.

J'avais fait scandale en étalant au grand jour cette affaire selon laquelle des Espagnols auraient reçu, pendant des années, des lettres, puis échangé avec leurs auteurs des coups de téléphone, ceux-ci prétendant être issus d'une autre planète, qu'ils désignaient sous le nom de Ummo.

Le lecteur peut aujourd'hui, sans difficulté, avoir accès à l'intégralité de l'enregistrement de cette émission[8], ou à cette vidéo[9] où j'ai isolé les éléments essentiels.

Avant de replonger, tête baissée, dans cette histoire tentaculaire, quel est le point central, dans ce document ?

En 1991 je viens de révéler que plusieurs de mes travaux scientifiques, publiés dans des revues de haut niveau, ont été directement inspirés par les informations trouvées dans ces textes. Heudier tente de minimiser ce point, difficile à contester, en disant :

- Newton a été inspiré par une pomme tombant d'un arbre ….

Et je lui réponds (je transcris mes propres mots de 1991) :



- *Heudier parlait des sources d'inspirations des scientifiques. Parce qu'effectivement Newton a vu tomber une pomme. Un autre aura lu un poème. Là, sans entrer dans les détails techniques, il y a quand même des choses très précises : le produit du rayon de l'univers par le carré de la vitesse de la lumière est une constante absolue. La vitesse*

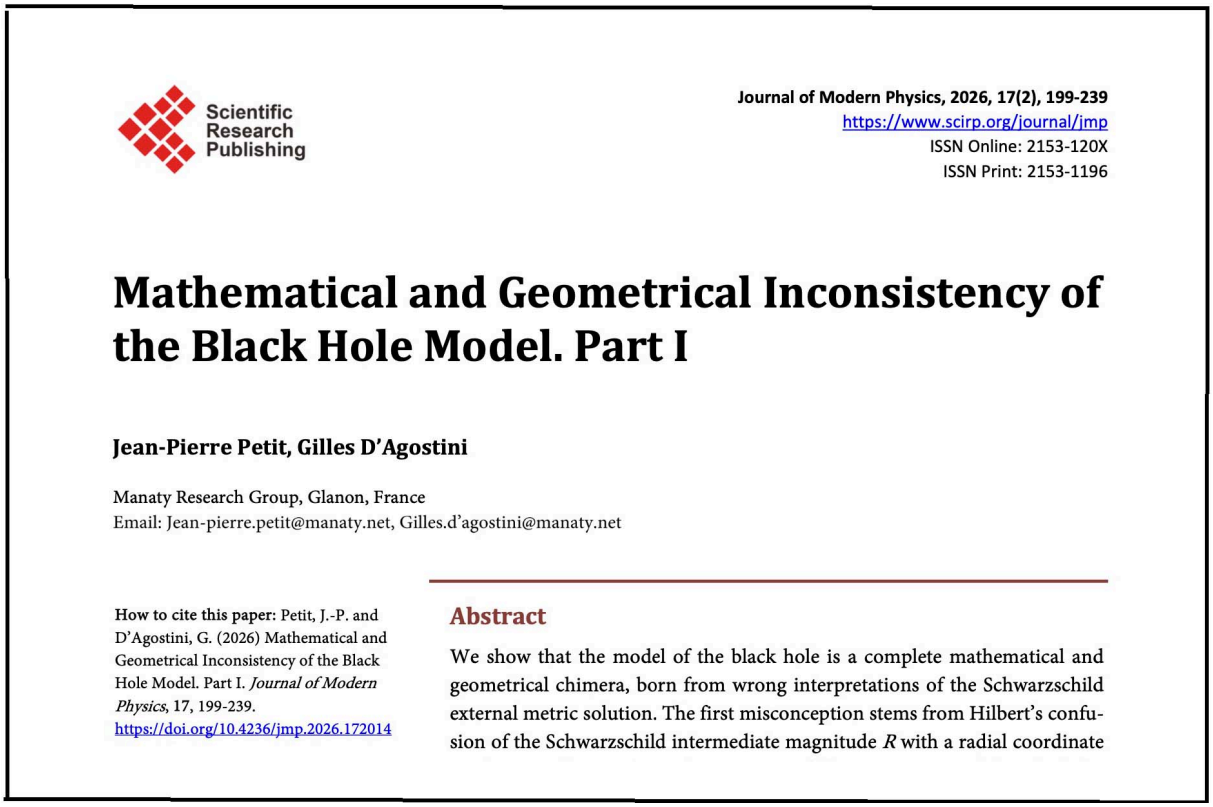
[8] https://www.youtube.com/watch?v=VjPm4nRoJqU&t=1687s
[9] https://www.youtube.com/watch?v=HON4R5JW88E

de la lumière varie. La solution (cosmologique) est à courbure négative. L'énergie se conserve et pas la masse. Il existe deux univers, qui sont énantiomorphes, dotés de flèches du temps en opposition. L'un contient la matière et l'autre de l'antimatière. Ce sont des renseignements scientifiques techniquement précis. Ça n'est pas une pomme qui tombe. Et moi, c'est ça qui m'étonne.

Et je poursuis :

- *Je vais vous donner le type de renseignement qui n'est pas encore exploité. En 1988 un certain Dominguez a un de ces bonshommes-là au téléphone. Les Espagnoles posent des questions qui correspondent à leur niveau scientifique qui est celui de Monsieur-tout-le-monde et demande « qu'est-ce que c'est qu'un trou noir ? ». Et l'autre répond « Ça n'existe pas. Quand une étoile à neutrons atteint sa masse critique, la masse (en excès) est transférée dans la structure gémellaire[10] ». Voilà une réponse à laquelle un Espagnol ne peut strictement rien comprendre. Mais je vous garantis que cela engendre chez moi une masse de recherche scientifique, et j'espère bien aboutir. Et là, je prends date.*

Trente-cinq ans plus tard je publie cet article de 40 pages dans la revue de haut niveau Journal of Modern Physics :



Scientific Research Publishing

Journal of Modern Physics, 2026, 17(2), 199-239
https://www.scirp.org/journal/jmp
ISSN Online: 2153-120X
ISSN Print: 2153-1196

Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Hole Model. Part I

Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini

Manaty Research Group, Glanon, France
Email: Jean-pierre.petit@manaty.net, Gilles.d'agostini@manaty.net

How to cite this paper: Petit, J.-P. and D'Agostini, G. (2026) Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Hole Model. Part I. *Journal of Modern Physics*, 17, 199-239.
https://doi.org/10.4236/jmp.2026.172014

Abstract

We show that the model of the black hole is a complete mathematical and geometrical chimera, born from wrong interpretations of the Schwarzschild external metric solution. The first misconception stems from Hilbert's confusion of the Schwarzschild intermediate magnitude R with a radial coordinate

Traduction : Inconsistance Mathématique et Géométrique du modèle du Trou Noir. Partie I[11].

[10] Eso no existe. Cuando una estrella de neutrones se desestabiliza, envía el exceso de masa al universo gemelo.
[11] https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=149826

Au moment où j'écris ces lignes je bataille pour publier une seconde partie, même nombre de pages. Mais, de toute façon, cet article est complété par un second, qui présente l'alternative au modèle des trous noirs : les plugstars[12].

Qu'est-ce que cela dit ?

Sans ambiguïté : le modèle du trou noir résulte d'une accumulation d'erreurs commises par les théoriciens de l'après-guerre. Ce modèle n'est qu'une chimère ! Et, fait aggravant (voir l'annexe) les données observationnelles[13] ne collent pas avec le modèle. Des travaux qui n'ont donné lieu à aucune contre-attaque, dans les règles, c'est-à-dire à travers des articles en bonne et due forme dans des revues de haut niveau.

Parler, on peut toujours. Mais publier des arguments scientifiques étayés, c'est autre chose. Comme j'aime à le répéter : « la science est un jeu qui se joue sur le terrain, pas dans les vestiaires ». Mais ne nous perdons pas dans l'argumentation scientifique. Pour les amateurs de sensations scientifiques fortes, voir l'annexe.

Revenons en 1975.

A l'époque je suis en poste à l'Observatoire de Marseille en tant que chercheur au CNRS. Un collègue astronome (aujourd'hui décédé) Maurice Viton, quelques années plus tôt a vu, près d'Avignon, de nuit, quand il était avec son père, un groupe d'ovnis, volant en formation serrée, effectuer un brusque virant à 90° et disparaître à l'horizon[14].
Un jour il place sous mon nez un paquet de photocopies.

- *Ce sont des copies de lettres que reçoivent des espagnols, depuis le milieu des années soixante, dont les auteurs prétendent être issus d'une planète nommée Ummo.*

Je me plonge dans ces documents. J'ai déjà vu ce genre de prose circuler. En général cela vous tombe rapidement des mains. Je pense à la « cosmologie d'Urantia[15] », ou à d'autres éléments de ce genre. Mais là c'est différent. D'après ce texte les matériaux dont sont faites les soucoupes volantes sont ce qu'on appellerait aujourd'hui « intelligents ». C'est-à-dire qu'ils adaptent leurs propriétés mécaniques en fonction des contraintes auxquelles elles sont soumises. S'ajoute une technique permettant aux passagers de mieux résister aux accélérations. Tout cela interpelle l'ingénieur aéronautique que je fus à l'origine[16]. C'est intrigant. Des extraterrestres techniciens ? Voilà qui n'est pas banal. Cela mérite d'aller y voir de plus près.

Ces pages représentent des copies de lettres reçues par un certain Antonio Ribera, habitant près de Barcelone, à San Feliu de Codinas. Ma foi, un voyage s'impose. Un ami, Jean-Jacques Pastor, habitant Digne, m'accompagne. Parfaitement bilingue français-espanol il sera mon compagnon dans cette aventure, pendant toutes les années suivantes.

---

[12] https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=146605&utm_source=chatgpt.com

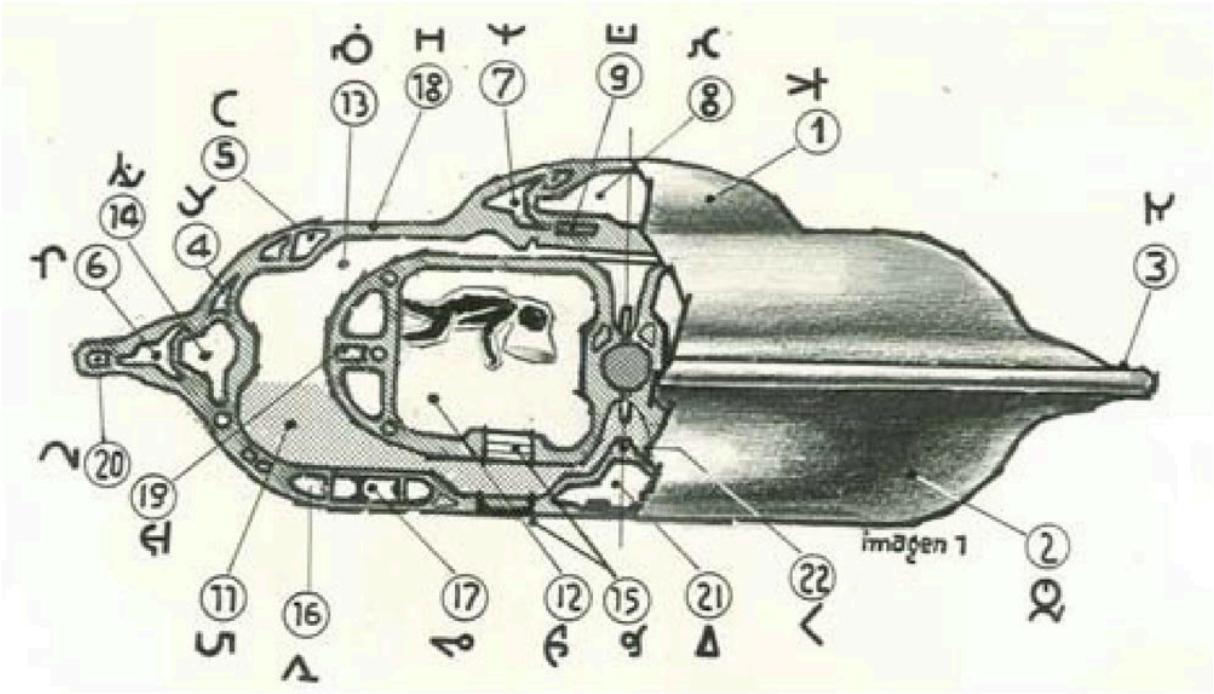
[13] Issues des images des objets supermassifs situés au centre des galaxies M87 et Voie Lactée. Des données, par contre, qui collent avec le modèle des plugstars.

[14] Nombreux, en fait, sont les astronomes témoins d'ovni. Mais plus rare sont ceux qui acceptent d'en parler.

[15] Dans ce livre on prophétise l'émergence d'une « race supérieure métissée, hautement spirituelle, savant mélange des meilleurs races actuelles ».

[16] Ecole Supérieure de l'Aéronautique de Paris, promotion 1961 (devenue l'Ecole Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, installée maintenant à Toulouse).

Antonio est adorable. Le contact passe immédiatement. C'est ce qu'on appellerait un « essayiste », auteur de nombreux livres. Il accompagna Jadis le Norvégien Thor Heyerdal à l'île de Pâques. Tout de suite il me met sous nos yeux l'original du document sur les nefs, qu'il a reçu en 1967, avec cette fantastique image :



En 12 l'habitacle avec un passager, porteur d'une combinaison comportant un écran, en face du visage, projetant une image en relief. Les nefs n'ont pas de hublots, mais un très grand nombre de mini-caméras, en paroi. En retransmettant leurs images en temps réel, elle donne aux passagers l'impression de voir à travers des parois devenues, pour eux, « transparentes ». Pendant les longs voyages ces mêmes écrans feront baigner ceux-ci dans une « réalité virtuelle » leur permettant d'échapper à leur claustration.

Antonio nous permet aussitôt de photocopier les documents en sa possession. Mais, pour en savoir plus, celui qui occupe une place centrale dans ce dispositif, c'est un riche industriel, Rafael Farriols.

Sur la route du retour, et cela deviendra pour nous un rituel, je conduis pendant que Jean-Jacques me traduit les documents. Et c'est là que ma vie professionnelle, ma carrière de chercheur, se mettent à ressembler au scénario d'un film de Spielberg.

Avec Farriols, le courant passe aussi, et des centaines de pages photocopiées grossissent la masse des documents collectés.

1966 : premier contact avec Fernando Sesma Manzano.

Qui est Sesma ? C'est un ésotériste, spécialiste de l'étrange, métaphysicien distingué. Il donne des conférences, chaque semaine, dans un local situé au sous-sol du Café Lion, 59 rue Alcala,

à Madrid. Sur le mur trône une peinture représentant une baleine souriant de toutes ses dents. Ainsi ce club reçoit-il le nom de « ballena allegre » (la baleine joyeuse).



La Baleine Joyeuse, au sous-sol du café Leon, Madrid

Il évoque ses nombreux contacts avec des civilisations extraterrestres, évoquées dans un ouvrage, publié en 1964 : *Los extraterrestres nos hablan* (« Les extraterrestres nous parlent »).

Dans son livre il parle de différentes planètes, dont une, géante, massive, tournant sur elle-même en quelques heures, qui n'aurait été habitée que par … des papillons !

Un jour Sesma reçoit un appel téléphonique de gens ayant une voix nasillarde, qui lui disent en substance :

- *Nous sommes des extraterrestres. Nous venons d'une planète Ummo et nous avons lu vos ouvrages. C'est un peu … n'importe quoi. Mais il se trouve qu'au détour d'une page nous avons trouvé des choses qu'un homme de la Terre n'est pas censé connaître. Nous pensons donc que ces informations émanent d'une autre ethnie, avec laquelle nous aimerions établir un contact, à travers vous. Nous vous proposons donc la chose suivante. Nous vous envoyons des documents en vous demandant de les lire à voix haute pendant vos réunions hebdomadaires.*

Sesma accepte et les réceptions de documents commencent. Sesma s'exécute. L'activité du club de la baleine joyeuse se poursuit paisiblement. Sesma, intégrant ces renseignements, que signe un certain DEI 98, les mêle à ceux provenant de toutes les autres planètes avec lesquelles il entretient un lien télépathique depuis des années. Soudain, dans les derniers jours de mai 1967 Sesma et quelques autres membres de cette congrégation reçoivent une missive annonçant l'arrivée imminente d'expéditionnaires en provenance de la planète Ummo. Trois navettes sont prévues. Deux sont censée arriver dans des pays étrangers, mais la troisième est censée se poser à Madrid. La lettre fournit une vaste zone où l'atterrissage est censé se situer, dans la banlieue de la capitale. Le groupe enregistre l'information sans trop y croire. Mais, à la demande des

auteurs de la lettre ils rédigent un document, au bas duquel tous apposent leur signature[17]. Seul l'ingénieur Villagrasa décide de croire à cette annonce, dont il était un des destinataires[18], et de ses rendre sur les lieux, avec plusieurs appareils photographiques.

1° juin 1967. **L'atterrissage de San José de Valdeiras**.

En début de Soirée une nef se présente et prend contact avec le sol avec des trois pieds, qui s'enfoncent dans le sol, en laissant des traces bien visibles.



Photo de la trace laissée par un des trois pieds de la nef

Farriols alerté par l'annonce faire à la radio, se rend sur place et rencontre Villagrasa avec les appareils de photo en bandoulière. Secoué, celui-ci lui dit :

- *Nous savions … qu'il viendraient…*

- *Vous saviez quoi !?*

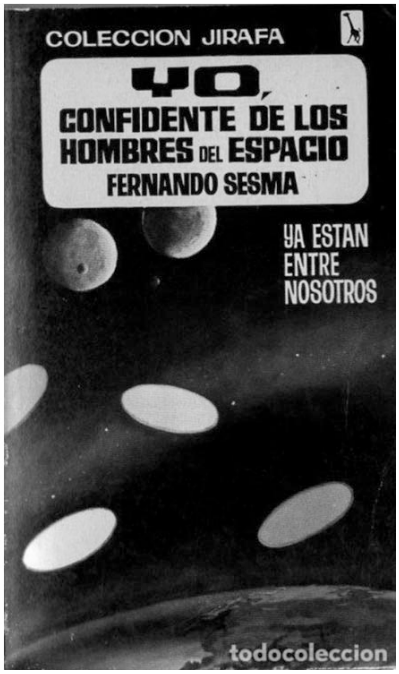
Là les choses s'enchaînent rapidement. Une partie des membres du groupe de la baleine joyeuse fait cessation. Pour ceux-là, les choses vont trop loin. Tous les gens ont, dans leur tête, intégré des choix sur ce qui relève d'une réalité et ce qui relève du rêve. Ainsi, parfois, il peut être décevant de voir que des choses que l'on croyait être réelles avèrent appartenir au monde des rêves. Mais l'effet inverse peut aussi jouer.

Farriols entre en contact avec Sesma, prêt à lui racheter ces lettres Ummites pour un bon prix. Il me conta avoir été surpris que Sesma les lui cède pour un montant dérisoire, qu'il régla rubis sur l'ongle.

[17] Je ne sais pas ce qu'est devenu ce document, mais je l'ai eu personnellement entre mes mains, chez Rafael Farriols, porteur d'une bonne douzaine de signatures

[18] Les trois autres étant Sesma, Alicia Aranjo et Garrido (commissaire de police)





Sesma et le livre qu'il publia par la suite :
« Moi, le confident des hommes de l'espace »

L'affaire Ummo entre alors dans une seconde phase. Assez vite, Farriols reçoit à son tour des courriers. Plus encore, les auteurs des lettres lui demandent l'autorisation de poser un micro dans le bureau qu'il a installé au dernier étage de son immense maison, au sein d'une propriété où il cumule collection de voitures de luxe, élevage de chevaux de race et zoo personnel.

Je n'ai guère le souvenir des dates exactes. J'imagine que ma première rencontre avec Farriols doit se situer en 1976.

Les premiers jours sur Terre.

Alors, de retour en France, pendant que je conduis la voiture, Jean-Jacques me lit la lettre décrivant l'arrivée de Ummites sur Terre et les premiers jours passés sur notre planète :

> *Le 28 mars 1950 à 4 heures 16 minutes 42 secondes GMT trois de nos nefs apparurent subitement en un point situé à 7,338 km au-dessus d'un endroit situé à 13 km de la ville de Digne et à 8 km de la localité de La Javie, dans le département des Basses-Alpes. Les trois vaisseaux descendirent rapidement et touchèrent le sol à 4 heures 17 minutes GMT. Les pieds extensibles s'enfoncèrent à peine dans le terrain rocailleux d'un contrefort alpin, non loin de ce que nous avons identifié par la suite comme le pic du Cheval-Blanc, haut de 2 323 m au-dessus du niveau moyen de la mer et non loin du petit cours fluvial de " la Bléone ... une grande nébulosité empêchait à cette heure nocturne une vision directe des alentours. Les images obtenues dans la gamme des 740 millimicrons permirent néanmoins de visualiser les alentours. Des plantes d'une morphologie étrange poussaient dans les environs. La morphologie érodée du terrain permettait de reconnaître quelques accidents accusés, comme le lit de la rivière citée...*

L'une des nefs se tenait à une altitude de 30 centimètres, prête à intervenir en cas d'attaque. Néanmoins l'endroit paraissait désertique. Furent recueillis au sol quelques insectes et arrachées quelques espèces végétales identifiées par la suite comme des Erica carnea et des Valeriana celta ... il était nécessaire de commencer les travaux d'une construction souterraine d'urgence ... On travailla la nuit jusqu'à 7 heures. Peu avant l'aube, nos nefs se déplacèrent dans un petit bois d'étranges arbres à feuilles filamenteuses identifiés après sous le nom de Pinus montana. La galerie ouverte dans le sol avait une longueur de 4 mètres, à une profondeur de 8 mètres et était étayée avec des cintres extensibles modulaires faits d'un alliage de magnésium... Le nouveau jour réserva aux expéditionnaires un beau et nouveau spectacle. Le ciel était plus indigo que sur Ummo... L'origine des lumières aperçues le matin fut rapidement éclaircie. Elles correspondaient aux petites localités de Digne et de La Javie. La forme anarchique des étranges constructions attira notre attention. Dans Digne apparaissait, dominante, une étrange tour, que nous sûmes bientôt correspondre à une vieille cathédrale romane. Les instruments optiques de fort grossissement révélèrent les images des premiers êtres terrestres. On ne notait aucune activité exceptionnelle ni de nervosité parmi ces personnes qui ignoraient de toute évidence notre présence... Le 29 mars, à 11 heures du matin les nefs repartirent, laissant sur le sol terrestre six expéditionnaires, quatre hommes et deux femmes... Ce même jour, deux de nos frères reçurent l'ordre de réaliser une première exploration à une certaine distance de la galerie pendant que les autres poursuivaient les travaux dans celle-ci. L'entrée de la galerie se trouve dans l'un des contreforts montagneux de la région, pas très loin du pic du Cheval-Blanc.

De là-bas on domine toute la vallée dans laquelle coule la rivière Bléone. Avec de bons instruments d'optique on voit les édifices de Digne, sa vieille cathédrale et même fragmentairement on peut apercevoir le Bès et quelques tronçons du chemin de fer.
On peut également observer parfaitement le hameau de La Javie et quelques constructions humbles des environs.
Comme information intéressante nous vous dirons que l'historique galerie existe encore, renfermant à l'intérieur une partie de l'équipement scientifique d'origine qu'amenèrent nos frères. Son accès est parfaitement camouflé. Le jour, peut-être pas très lointain, où nous nous présenterons officiellement aux Organes gouvernementaux de cette planète, nous offrirons ces installations au gouvernement français, en remerciement symbolique de notre civilisation à celle des Terriens. »

Premier contact, original, avec la civilisation de la Terre.

Cette affaire a des aspects qui peuvent prêter à sourire. Mais, en y regardant de près, que ferions vous, si nous prenions pied sur une autre planète ?

Ce qui va suivre émane d'une autre description de ces premiers jours suivant le contact avec notre planète. En effet un même récit est souvent présenté suivant différentes variantes selon les destinataires auxquels il s'adresse.

Dans une de ces variantes la conception du refuge souterrain est décrite avec plus de détails. Opérée en quelques heures, au fort de la nuit, elle s'accompagne d'une émission de vapeur qui, au lever du jour, s'élève encore dans l'atmosphère. Les expéditionnaires

s'inquiètent que cette activité puisse être détectée depuis les bâtiments voisins, en l'occurrence la ville de Digne, qu'ils croient être un centre de recherche scientifique étant donnée l'importance de son extension en surface.

Mais finalement, rien ne bouge et les trois nefs repartent en abandonnant à leur sort quatre expéditionnaires, disposant d'un refuge dont l'exiguïté fait plutôt penser à un terrier, plutôt qu'à un véritable lieu d'habitation, selon nos critères terriens.

Néanmoins, leurs instruments ne détectant nul mouvement dans les environs, ils se décident à s'aventurer à l'extérieur et, le long d'un chemin, font une découverte qui le bouleverse. Il s'agit de manière fécales, mêlée à un objet qui s'avère être une feuille de papier journal froissée.

Ils ramènent leur découverte dans le refuge avec beaucoup de précautions, réalisant que celui-ci est porteur de textes et d'images constituant leur tout premier contact avec la culture d'une autre planète[19].

Citons cette partie de leur lettre :

- *Cet exemplaire, important pour nous[20], parce qu'il constitua le premier document imprimé que nous avons pu obtenir, correspondait à un numéro du journal publié en langue Française « LE FIGARO », selon son numéro de samedi-dimanche 25-26 mars 1950. Les caractères étranges laissèrent nos frères perplexes. Nous ignorions la technique de la photogravure en ligne.*


FIGARO

8 francs
Corse et Afrique du Nord 9 FRANCS
Espagne 1 Pta

EDITION de 5 heures

Les gens qui ne veulent rien faire de rien n'avancent rien et ne sont bons à rien.
BEAUMARCHAIS.

N° 1.724

SAMEDI DIMANCHE 25-26 MARS 1950

124e ANNEE

Plastnicité | EN VUE D'UNE DETENTE INTERNATIONALE

La première page du journal cité dans la lettre

Et ils ajoutent :

- *On distinguait au dos de la feuille de papier, bien que tachée par les excréments, déjà desséché, la photo de deux êtres humains, une femme et un homme. Avec ce*

[19] Ils précisent que, sur leur planète, les matières fécales ne sont nullement considérées et traitées symboliquement comme des « éléments négatifs », comme sur la nôtre. Entendant par la suite un Terrien s'exprimer à partir d'un texte en s'écriant : « cet article, c'est de la merde ! », ils en déduiront que le fait de mêler des excréments avec une feuille de journal constitue un geste rituel marquant la désapprobation vis-à-vis de son contenu. Ajoutons que depuis des temps immémoriaux l'élimination des fèces s'effectue, chez eux, grâce à un dispositif, implanté dans l'anus dès la première année de vie, transmutant le matériau en hélium.

[20] Dans un autre document ils précisent que cet objet, revêtant désormais pour eux une importance historique, fut ramené chez eux et conservé précieusement dans une sorte de musée consacré à la Terre, en étant maintenu à très basse température.

dont nous disposions dans le refuge, nous nous composâmes des vêtements similaires. Ignorant la fonction des boutons, nous les figurâmes par de simples éléments synthétiques de couleur plus claire. Ainsi vêtus, deux de nos frères s'aventurèrent hors du refuge. Mais en apercevant des Terriens ils se rendirent compte que leurs accoutrements était inadéquat et réintégrèrent précipitamment le refuge souterrain. Il s'avéra que la photographie trouvée sur la page de journal montait une image de deux personnages d'une pièce de l'auteur Marcel Achard, jouée à Paris, au théâtre Marigny, intitulée Malborough s'en va-t-en guerre »[21].

[21] Cette pièce, par ailleurs écrite par un humoriste, se réfère à la bataille menée par le général anglais Malborough, en 1705. Ceci donna naissance à une chanson populaire française :

Marlbrough s'en va-t-en guerre
Mironton, mironton, mirontaine,
Marlbrough s'en va-t-en guerre,
Ne sait quand reviendra.
Ne sait quand reviendra.
…
Monsieur Marlbrough est mort,
Mironton, mironton, mirontaine,
Monsieur Marlbrough est mort,
Est mort et enterré.
…



NE et l'É

« UI

C

Les

Jacques Dacqmine, guéri, a repris son uniforme et ce soir aura lieu au Théâtre Marigny la répétition générale de « Malbrough s'en va-t-en guerre » de Marcel Achard. Ci-dessus, Madeleine Renaud et Jacques Dacqmine.

(img 9)

La photographie de la représentation de la pièce au théâtre Marigny de Paris

Un compagnon de route.

Un jeune psychologue, travaillant dans un centre de réinsertion pour jeunes délinquants, intéressé par le sujet ovni, me rend visite à mon domicile d'Aix-en-Provence. Quand je lui présente ces éléments, il s'écrie :

- *La Javie ? Mais c'est à côté de chez moi !*

- *Comment ça ?*

- *En bien, j'habite Digne.*

- *Alors cela veut dire que ces extraterrestres ont choisi ton bled comme point de chute.*

- *Il faut croire que oui …*

Comme dans ce livre j'ai décidé de reprendre à grands traits tout ce qui suivit cette prise de contact avec cette affaire Ummo, je consacrerai quelques pages à notre tentative de localiser le refuge installé par les Ummites à proximité de Digne.

De l'entrée de ce refuge, donc, si ce point existait, on devait nécessairement voir, selon ce texte :

- *Digne et sa vieille cathédrale romane.*

- *Des portions du chemin de fer.*

- *La rivière Bléone, qui coule aux portes de Digne.*

- *Fragmentairement le Bès, un confluent de la rivière Bléone.*

- *La Javie.*

Même après des années où nous avons arpenté la région de long en large, nous n'avons pas trouvé ce refuge souterrain. Nous perdons un peu de temps, quelques mois, Jean-Jacques traduisant « antigua catedral romana » par « vieille vielle cathédrale romane », avant de nous apercevoir que « romane » en espagnol, se dit « romanica ». Et que donc cette cathédrale est tout simplement l'édifice religieux principal de Digne, « romain » et non « roman ».

Pour ceux qui passeront un jour par la ville de Digne, qu'ils sortent de la ville en empruntant la route menant à la Javie. Au détour d'un virage, qu'ils n'auront aucun mal à localiser, en se retournant il aperçevront le clocher de l'église de Digne et, en pivotant de 180°, un massif lointain qui est la crête de la Blache. Inversement, en allant là-bas ils s'apercevront que le clocher de l'église, coincé entre deux collines, se comporte comme une pire de fusil et détermine alors un pinceau angulaire assez étroit. Mais, sur place, le problème qui surgit est que la végétation d'aujourd'hui diffère sensiblement de son état en 1950. La frondaison d'arbres empêche de faire les recoupements supplémentaires, avec les autres points de repère, le chemin de fer et la rivière Bès.

Ce refuge a-t-il existé ? Contiendrait-il encore, comme dit dans la lettre, du matériel datant de la première expédition ? Impossible à dire. Mais, pour moi, ces lettres offraient d'autres directions d'investigation.

La lettre, cependant, contenait une autre information :

- La nuit du 24 avril 1950 quatre de nos frères pénétrèrent dans une maison isolée en pleine campagne. Auparavant l'endroit avait été reconnu par nos

ÙULEWUA (sphères détectrices capables de se déplacer à une altitude quelconque). À 3 heures du matin, le 25, les ouvriers, qui dormaient dans un appartement, un couple, propriétaire de la maison, et leurs trois enfants furent anesthésiés en plein sommeil. Nous dérobâmes sur les lieux soixante-dix mille francs[22], des vêtements, des pièces d'identité à partir desquelles en nous fîmes des fausses, deux stylos à bille, un hygromètre représentant une religieuse, des clefs, des timbres-poste, un paquet de lettres et des factures payées se rapportant à un tracteur, plusieurs journaux déjà anciens, des livres des livres spécialisés dans l'élevage du bétail, un texte expliquant les phases d'une moisson ainsi que la notice du tracteur. Nous prîmes également une encyclopédie enfantine, un rouleau de papier hygiénique, un peu de désinfectant pour les plaies, un réveille-matin, deux ampoules électriques, que vous, en Espagne, appelez bombillas et un morceau de savon. Nous arrachâmes un interrupteur et le compteur électrique.

... Sur un gravât dormaient deux Terriens sous l'effet du gaz anesthésique. Bien que sachant déjà que sur Terre les femmes se laissaient pousser les cheveux nos frères ne purent déterminer leur sexe respectif. On leur retira leurs vêtements en en prenant un petit morceau. Les deux corps furent partiellement dénudés et on préleva de la sueur des aisselles et du bas-ventre. On préleva aussi des échantillons de poils venant de la tête, des bras, du pubis et des jambes, des échantillons de mucosité nasale, des poils et des sécrétions de la vulve.

Dans une veste emportée on trouva, en plus, un briquet et des cigarettes. En même temps nous pûmes prélever des fragments sur des vaches présentes dans un enclos. Nous dûmes anesthésier deux chiens qui commençaient à envoyer de grands "cris" (ceci est la description la plus juste des notes enregistrées à cette date).

En plus, quelques pièces détachées du tracteur, des tubes de médicaments sous forme de dragées, un cartable avec des devoirs scolaires, six paires de chaussures d'homme et deux de femme (tout ce qu'il y avait), le poste de radio, une bouteille de jus de citron, deux pommes de terre, un calendrier mural, un sécateur et un quinquet.

Une partie de ce butin fut camouflé à quelques quatre cent mètres en attendant d'aller le rechercher la nuit suivante, le reste fut transporté dans notre base souterraine.

Les huit jours suivants furent entièrement consacrés, par nos frères, à analyser ces curieux ustensiles, essayant de comprendre les textes imprimés et les images.

Aussi étrange que cela puisse paraître, nous constatâmes avec regret que, malgré le grand nombre d'échantillons et d'objets en notre possession, si l'analyse effectuée nous renseigna exactement sur leur composition chimique, il n'en fut pas de même quant à leur fonction ou utilité.

Par exemple, il nous fut impossible de déterminer l'utilité des morceaux de savon.

[22] Une somme considérable pour l'époque, en liquide, équivalant à 400.000 euros 2026. Toutes les économies du paysan qui vivant là-bas.

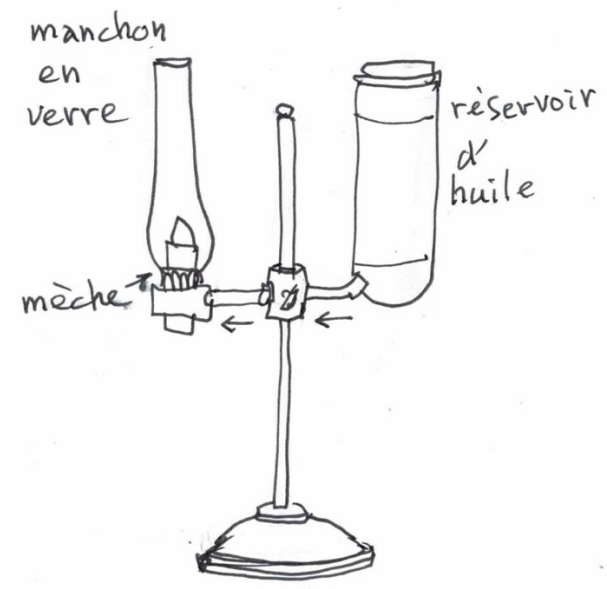
Toutes les méthodes employées pour trouver l'utilité du "quinquet" conduisirent à un échec.

A part cela, ce fut merveilleux de trouver que le moteur du compteur fonctionnait sur du courant alternatif et de voir comment les indications portées sur le cadran frontal étaient liées à l'énergie. Mais il nous fut impossible de déterminer si cet appareil servait à mesurer le TEMPS ou une autre GRANDEUR périodique quelconque.

La fonction d'un vieux réveil matin nous intrigua pendant quelques UIW. Dans un premier temps nous avons craint que cet appareil, s'il était constitué d'un émetteur, présente un risque de faire découvrir nos frères. Les caractéristiques purement mécaniques furent rapidement découvertes. A cause de sa sonnerie nous doutions sérieusement de son utilisation en tant qu'appareil à mesurer le temps.
Nous avons commis une grave erreur quand, pour prélever un fragment de filament, nous perçâmes prudemment le verre de l'ampoule électrique, retardant beaucoup notre connaissance de l'utilité de cette ampoule. Les filaments s'oxydèrent rapidement et fondirent quand on les soumit à une tension croissante.
Les cigarettes furent identifiées grâce à des photos d'OEMII prises antérieurement. Nous crûmes qu'il s'agissait d'un dispositif émetteur d'un gaz permettant aux terriens de respirer plus facilement. Nos frères furent assez déconfits de ne pas trouver, à l'intérieur, les mécanismes compliqués auxquels ils s'attendaient. L'énigme n'en fut que plus forte.
Mais il ne fit aucun doute que l'importance de l'argent en billets de banque, des vêtements et des chaussures dépassait largement celle des autres objets.
Nous comprenons fort bien que les graves extorsions que nous avons pratiqué dans cette famille française pacifique soulèvent chez vous l'indignation, bien que cette famille fût largement indemnisée ultérieurement.
Nos frères furent préoccupés par les conséquences de telles actions. Toute sortie fut interdite à tous, et les alentours furent observés tout en préparant tous moyens de défense. Mais à part l'agitation dans la ferme et les allées et venues de quelques terriens entre la ferme et le petit village, rien ne semblait anormal. Et, au cours de la même nuit, on put récupérer la partie du butin cachée dans les environs.

Avant d'évoquer un étrange rebondissement de cette histoire, revenons sur cette histoire de quinquet.

Avant 1780 on s'éclaire avec des chandelles, de suif ou de cire, ou avec des lampes où une mèche baigne dans une petite flaque d'huile. En 1780, reprenant l'idée d'un chimiste suisse, Ami Argand, un pharmacien parisien nommé Antoine Quinquet reprend l'idée d'une huile alimentant une mèche, transitant par gravité depuis un réservoir imbibe une mèche. Il ajoute au dispositif un manchon de verre.



Un quinquet.

C'est un progrès important car le quinquet produit quatre à cinq fois plus de lumière de la classique bougie. Ca n'est qu'en 1850 qu'un hydrocarbure se substitue à l'huile (souvent : de baleine). Quand en 1859 le premier forage pétrolier à Titusville, USA, révèle l'existence du pétrole, les « lampes à pétrole » s'imposent partout dans le monde en quelques décennies.

Les expéditionnaires restent perplexes devant un quinquet. Si on en croit leurs lettres, les hydrocarbures naturels ne seraient tout simplement pas présents sur leur planète. Au plus évoquent-ils des émissions de gaz comme le méthane. Un autre fait, intéressant, est la forte intensité du champ magnétique naturel, lié à leur lieu de vie. Sur Terre ce champ est une fraction de Gauss. Chez eux (il faudra que je vérifie) ce champ peut dépasser 1000 gauss et, par ailleurs varier dans le temps. Alors, logiquement : découverte automatique de l'électrotechnique dès l'entrée dans l'âge des métaux.

Mais revenons à ce cambriolage effectué par nos Ummites dans une ferme de la région.

Jean-Jacques travaille, à Digne, comme psychologue, dans un centre s'occupant de la réinsertion de jeunes en difficultés. Sa connaissance de la région, et surtout un véhicule immatriculé dans les Basses-Alpes lui permet de recueillir plus facilement les confidences des locaux. Un jour, il se fait couper les cheveux chez un coiffeur de la Javie.

Dialogue :

- *Vous avez de histoires d'ovnis, dans la région ?*

- *Oh, ici comme ailleurs. De temps en temps quelqu'un voit des petites boules rouges qui se baladent.*

- *Mais il n'y a pas d'affaire particulière ?*

- *Non. Mais attendez, si. Je me souviens d'une histoire étrange. Je ne sais pas si elle a quelque accointance avec le sujet ovni.*

- *Dites-toujours.*

- *Eh bien un jour on voit arriver un paysan, avec femme et enfants. Ils semblent tout retournés, après la visite d'étranges cambrioleurs. Bien sûr, on leur a pris leur argent, et c'est le principal objet de leur plainte. Mais, au-delà, ils déroulent une liste d'objets tous plus invraisemblables les uns que les autres, au milieu desquels se trouve … le compteur électrique de la maison ! Et tous arrivent pieds nus, les cambrioleurs ayant emporté toutes les chaussures de la maison.*

- *Vous vous souvenez du nom de cet homme ?*

- *Tout à fait. C'était la famille Violat.*

Nous avons un nom. Nous ne tardons pas, Jean-Jacques et moi, à localiser la Ferme, situé dans une région isolée, à proximité de Digne. Comme on le voit, il est dit que les auteurs de ces vols, après avoir réalisé l'importance des billets de banque, décident d'indemniser largement les Violat. Dans un autre document il est dit qu'il ils le firent en donnant au patriarche des barres d'or. Grâce à cet argent le père Violat aurait se serait retiré des années plus tard dans un appartement acheté dans une ville, plus au sud.

Nous nous souvenons que Rafael nous avait parlé du tracteur appartenant au fermier, en précisant qu'il était de marque espagnole. A travers les fentes d'une porte nous apercevons ce tracteur. Mais comment entrer en contact avec ce fermier. Les gens des Basses-Alpes ont la réputation d'être muets comme des tombes[23].

- *Tu nous vois, nous pointant chez Violat, en lui disant « Auriez-vous été, en 1950, l'objet d'un cambriolage, perpétré par des gens qui, vous ayant soulagé de toutes vos économies, vous auraient indemnisé avec des barres d'or ?*

Pendant les années qui suivent nous élaborerons maintes stratégies pour approcher le personnage, allant jusqu'à envisager de nous présenter comme des sociologues désireux d'en apprendre plus sur les légendes de la région. Mais en fin du compte Violat décèdera avant que nous ne puissions tenter ce contact.

Un jour, avec mon épouse, nous nous rendons à cette ferme et trouvons tous les descendants de Violat en train de déjeuner joyeusement en plein air. Faisant montre d'une extrême gentillesse et hospitalité, ils nous invitent aussitôt à partager leur repas. Petit à petit, nous engageons la conversation. Oui, il avait semblé à ses petits-enfants si étrange que leur grand-père se soit découvert soudain une passion tardive pour les choses du ciel et du cosmos. Oui, il tenait parfois des propos ambigus, concernant ces sujets. Le tracteur ? Il est toujours là, dans la grange.

[23] Référence à la célèbre affaire Dominici où, dans la nuit du 4 au 5 août 1952 trois ressortissant britanniques, la famille Drumond, sont assassinés sans mobile apparent, sur la Nationale 96, près de la ferme de la Grand'Terre, à proximité de Lurs. L'auteur du crime ne sera jamais identifié.

Je clos ici le chapitre Digne car, très vite, mes recherches s'orientent dans une direction totalement différente.

Quand l'univers se trouve doté d'un frère jumeau.

Au fil de mon exploration des centaines de pages ramenées d'Espagne je me concentre évidemment sur les aspects intéressant la physique, l'astrophysique et la cosmologie. Tout cela ne se présente pas sous la forme d'un document de synthèse mais comme des pièces d'un vaste puzzle, dispersées ici et là, que je tente de reconstituer. Ce qui se dégage c'est que notre univers aurait un frère jumeau, avec lequel il interagirait. Dans notre propre univers les masses positive, domineraient. Dans l'autre univers les masses seraient négatives et c'est au contraire l'antimatière qui aurait pris le dessus. Ajoutons à tout cela des éléments extrêmement déconcertants. Dans cette autre univers les objets seraient « en miroir[24] ».

Mais la phrase la plus étrange concerne la « flèche du temps ». Dans ce second univers celle-ci pointerait dans une direction opposée à la nôtre.

Mais en 1976 je faisais déjà mes premières armes dans le domaine de la cosmologie, en abordant les problèmes en les plongeant dans un espace à sept dimensions, envisagé dès le XIX° siècle par le mathématicien autrichien Ludwig Boltzmann[25]. Le comportement d'un tel milieu est alors décrit par une équation à laquelle il laissera son nom[26].

Disons que dans le peu d'années précédentes j'avais, avec cette équation, retrouvé nombre de résultats de la cosmologie classique. J'avais commencé par retrouver[27] l'équation de l'Anglais Jeans, décrivant en 1902 l'instabilité gravitationnelle, donnant naissance aux étoiles et aux galaxies. Puis j'avais continué en retrouvant[28] la fameuse équation, issue de l'équation de la relativité générale d'Einstein grâce à laquelle le Russe Friedman avait produit ses modèles d'univers, en 1922. Puis ce fut un début de modélisation mathématique des galaxies[29]. En ce début des années soixante-dix c'était un joli début.

Comment négocier cette étrange cosmologie, où on a deux univers dotés de flèches du temps opposées, et en miroir, interagissant par antigravitation ? Les théoriciens sont comme des alchimistes. Ils mélangent des ingrédients dans leur creuset, et regardent ce qui peut en sortir. Pour le physicien théoricien, les ingrédients sont des équations. Dans le cas qui nous intéresse la recette est :

---

[24] Le mot figurant dans les lettres le qualifie d'énantiomorphe, ce qui est ce qu'utilisent les géomètres pour parler de cette « symétrie miroir ».

[25] Les sept dimensions sont le temps, trois pour les coordonnées d'espace et trois autres pour les coordonnées de la vitesse.

[26] $$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}.\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial r} - \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial v}.\frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{\partial r} = \frac{\partial_e f}{\partial t}$$

[27] : J.P Petit : Gravitational instability. Linear analysis. CRAS Acad. Sc. t.274 (14 feb. 1972)

[28] J.P. Petit , G. Monnet :Maximum entropy and Friedman cosmologies. CRAS Acad. Sc. t.280 (11 may 1975)

[29] J.P Petit : Three-dimensional and unsteady model of self-gravitating stellar system. Application to globular clusters and galaxies. Publications of the French Academy of Science of Paris. 1972 january 31, serie B pages. 373-376

- Prenez deux équations de Boltzmann, bien fraîches
- Inversez le temps et l'espace dans la seconde équation.
- Versez délicatement dans un espace à sept dimensions.
- Ajoutez l'équation de Poisson pour lier le tout.
- Laissez mijoter quelques centaines de millions d'années.

Et soudain, l'alchimie apparait. Ces équations ont la réputation d'être inextricables[30]. Mais, sous mes yeux, des bouts d'équations s'assemblent, une solution mathématique, simple, compacte, émerge et un modèle cosmologique cohérent se dégage.

On dit que les chercheurs cherchent à s'emparer des idées. Moi je dis que c'est souvent l'inverse : ce sont les idées qui s'emparent des chercheurs. Ce jour-là, face à ces calculs qui se sont pratiquement déroulés sous mes yeux, presque indépendamment de ma volonté, j'étais piégé. Il fallait en savoir plus, pousser tout cela plus loin.

L'académicien André Lichnérowicz, une des figures majeure des mathématiques françaises de cette époque, reçut mes articles, les lut, les valida et les présenta en session à l'académie des sciences de Paris en 1977[31].

Le colloque de Madrid.

Autour de Rafael Farriols s'était constitué ce qu'on appelait le groupe de Barcelone. Le groupe de Madrid, initialement formé par des membres du club de la baleine joyeuse, décide d'organiser une réunion de tous les contactés, à Madrid. Farriols ayant insisté pour que je sois présent, je me retrouve le jour dit, lors d'un déjeuner, attablé à côté de Juan Dominguez, principale figure du groupe de Madrid.

L'entrée d'un scientifique de qualité au sein du groupe de contactés espagnols n'était pas passée inaperçue. Farriols avait transmis des copies de mes lettres et travaux aux différents membres. Quand j'entame la conversation avec Dominguez, celui-ci est déjà au courant d'à peu près tout.

Dialogue :

- *Au-delà de cette histoire d'univers jumeaux, il y a un point qui a attiré mon attention : le fait que les Ummites disent que, dans le passé, la vitesse de la lumière aurait varié, qu'elle aurait été plus importante. J'ai essayé d'intégrer cela dans le modèle. Si R représente la taille, l'envergure de l'univers, j'ai essayé une loi où la vitesse de la*

[30] Chacune se scinde en un ensemble de vingt-et-une équations différentielles, non linéaires ? Une véritable horreur !

[31] Cosmology : J.P. Petit : Twin PT-symmetric universes. CRAS Acad. Sc. t.284 (23 may 1977)
Cosmology : J.P. Petit : Universes interacting through their T-symmetric image. CRAS Acad. Sc. t.284 (6 june 1977)

lumière, qu'on désigne par la lettre c, varies en 1/R. Mais je n'ai pas obtenu grand-chose de probant.

- *Oui, je sais. Rafael nous a parlé de tout cela. Et ça n'est pas la bonne loi. Il faut envisager que c varie en un sur la racine carrée de R.*

- *C'est dans un dernier rapport que vous avez reçu ?*

- *Non, c'est dans un coup de téléphone.*

- *Parce que les Ummites vous téléphonent !?*

- *Oui, c'est assez récent. C'est toujours la nuit, vers 3 heures. Ils ont une voix bizarre, mais on arrive à les comprendre.*

- *Et ils répondent à vos questions ?*

- *Tout-à-fait. Très librement. Quand j'ai parlé de votre tentative ils ont immédiatement donné cette précision.*

- *Et vous êtes nombreux à recevoir ces appels téléphoniques ?*

- *Nous sommes quelques-uns. Farriols fait aussi partie de ceux-là. Il ne vous en a pas parlé ?*

Jean-Jacques n'ayant pas pu m'accompagner à Madrid, je fais au mieux avec mes connaissances de l'espagnol. Mais il m'est difficile de suivre les échanges à haut débit des uns et des autres. J'aperçois Camila, l'épouse de Dominguez, Villagrasa, l'ingénieur, Garrido, le commissaire de Police, Jordan Pena, le psychologue d'entreprise et Lou, l'ex secrétaire de Farriols[32]. Au total une bonne trentaine de contactés.

La pièce manquante.

De retour chez moi, je me replonge dans les calculs. Un véritable modèle cosmologique doit tenir compte des effets relativistes. Cela implique de passer à des calculs différents[33], plus subtils, plus complexes. Depuis des mois déjà, j'avais plongé dans cette autre alchimie au cœur de la quelle la fameuse équation de champ, introduite en 1915 par Albert Einstein joue un rôle central.

Ces équations sont comme une sorte de mécanique, avec des engrenages. Tout doit « tourner rond ». On ne peut pas rajouter un engrenage quelque part sans que ça coince

[32] Hiltrud Nordlin Franz, d'origine allemande.
[33] Ce qu'on appelle le calcul tensoriel, domaine de prédilection du mathématicien Lichnérowicz.

immédiatement. En fait toute notre physique fonctionne avec un lot limité de constantes[34] qui se répondent les unes les autres. Selon les textes cette situation, où la vitesse de la lumière varie, se réfère à la prime jeunesse de l'univers[35]. Alors, si je remplace à goupille c, représentant la vitesse de la lumière, par une roue dentée, je dois faire de même avec la constante de gravité G, et finalement avec l'ensemble des constantes, qui se répondent les unes les autres.

Mais ça ne suffit pas. Il faut que la grandeur R entre dans le jeu, qu'elle soit couplées- à tout ce jeu. J'avais essayé c variant en 1/R, mais c'est la loi c en $1/\sqrt{T}$ qui fonctionne. Alors chaque engrenage a son bon nombre de dents. J'ai l'impression de me retrouver dans la tour de l'horloge, bordant la place Saint-Marc, à Venise, quand en 1752 Bertoleo Ferracina reconstruisit presque entièrement un mécanisme initialement construit en 1496 par les frères Gian Paolo et Gian Garlo Ranieri et que les heures, les premières s'affichant numériquement, se présentèrent aux yeux des Vénitiens ébahis.



La Tour de l'Horloge de Venise

Je rédige un article et je l'envoie à Lichnérowicz[36].

[34] La vitesse de la lumière c, la constante de gravité G, la constante de Planck h, la charge électrique élémentaire e, la masse élémentaire m, la perméabilité magnétique du vide μ_0. Six au total, si on exclut la physique des noyaux d'atomes.

[35] Quand les vitesses d'agitation des composants porteurs d'une masse : protons, électrons, neutrons, s'élevant avec la température, s'approchent de cette vitesse de lumière.

[36] Il était à l'époque âgé de 74 ans. Déjà, malade il décèdera en 1998.



André Lichnérowicz, mathématicien
membre de l'académie des sciences de Paris.

Mais voilà sa réponse, immédiate :

- *Hélas, mon cher Jean-Pierre nous autres, membres de l'Académie des Sciences de Paris, venons de perdre ce pouvoir discrétionnaire qui faisait de nous les seuls à juger de ce qui pouvait y être présenté et publié, ou non, dont nous disposions depuis un siècle*[37].

- *Comment cela ?*

- *La pression du milieu scientifique s'est exercée et celui-ci exigé qu'y soit appliqué le système qui s'est généralisé progressivement dans l'après-guerre, où le fonctionnement de toutes les revues scientifiques, dans le monde, donnent alors à des referees, à des experts protégés par leur anonymat et à eux seuls, le pouvoir d'accepter ou de refuser les articles.*

- *Mais vous êtes l'expert, en matière de cosmologie !*

- *Je ne peux plus rien y faire. Il vous faudra désormais passer par le filtre des revues.*

La porte se referme aussitôt. Or on connait le principe de la vie d'un chercheur « publish or perish ! ». En tant que chercheur français, en poste au Centre National de la Recherche Scientifique, je ne peux que suivre cette règle. Or aucun scientifique raisonnable, dans le monde entier n'envisage une seule seconde que la vitesse de la lumière puisse varier, quelles que soient

[37] Depuis 1835.

les conditions[38]. Mes articles sont donc aussitôt rejetés avec ces deux mots (que je retrouve aujourd'hui dans nombre de revues) :

Non suitable (ne convient pas)

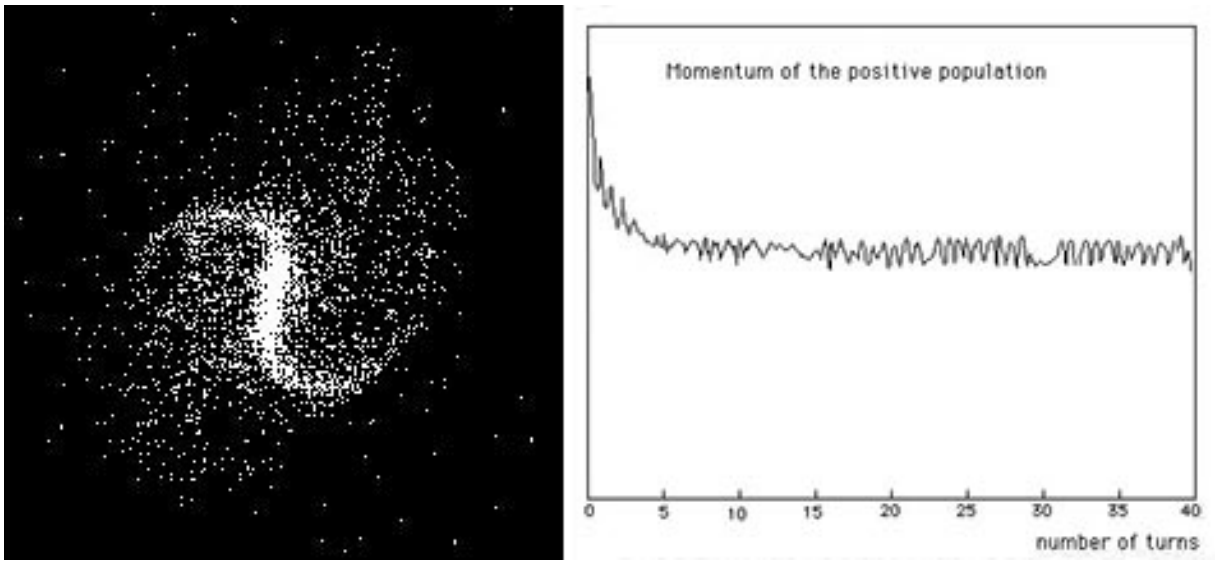
A cette époque la photocopie commence à peine à exister[39] et l'idée qu'on puisse un jour envoyer et recevoir du courrier instantanément pas messagerie électronique ne vient à l'idée de personne. Pour soumettre un article il faut envoyer par voie postale plusieurs exemplaires imprimés, et attendre la réponse de gens dont l'identité est désormais masquée et qui, désormais, gèrent en maîtres absolus la vie scientifique de par le monde.

Une autre forme de réponse, standard, est :

- *Sorry, we don't publish speculative work* (désolés, nous ne publions pas de travaux à caractère spéculatif)

Mais c'est désormais cette entité indéfinissable constituée par les directions des revues, leurs bureaux éditoriaux leurs comités de lecture, qui devient maîtresse du jeu scientifique. Je viens de m'en rendre compte avec le rejet, par la demi-douzaine de revues spécialisées, d'un article, basé sur une simulation numérique, montrant que les structures spirales des galaxies découlent de leur interaction avec un environnement de masse négative, qui assure au passage leur confinement.

Le résultat, directement issu des documents Ummo, est pourtant extraordinaire. Dès les premiers tours une structure de spirale barrée apparait, en se maintient durant des dizaines de tours :



Structure spirale obtenue par simulation numérique

[38] Et c'est encore le cas aujourd'hui !

[39] J'ai été de la génération de chercheurs où, pour disposer de doubles, il fallait taper ses textes et dessiner les figures à l'encre de chine sur du papier calque, puis insoler des feuilles sensibles à l'infrarouge et enfin révéler le tout en enfermant celles-ci dans une hotte où on déversait de l'ammoniac.

Je dispose à l'époque d'un des premiers ordinateurs personnels, l'Apple II. Avec ses 48 k de mémoire centrale, celui-ci est bien incapable de gérer un système constitué de deux populations d'un millier de « points-masses », en interaction, ceux de masse positive constituant la galaxie et ceux de masse négative, non visibles sur cette figure formant son environnement et responsable de son « confinement ».

Ce travail est en fait été effectué « en perruque » par un jeune étudiant thésard, en poste dans le laboratoire allemand DESI, situé à Hambourg. Très vite, ce garçon obtient, en suivant mon choix de donner aux masses négative un statut dominant, la première structure lacunaire de l'univers à très grande échelle. Puis c'est ce spectaculaire résultat, montrant la formation immédiate de cette super galaxie barrée.

Mais ça ne va pas plus loin. La direction de ce centre, gérant un puissant accélérateur de particules, finit par découvrir ce détournement de la puissance de calcul du puissant ordinateur du laboratoire[40] et met fin à cette « recherche sauvage ».

La courbe, à droite, montre la rapide décroissance du mouvement de rotation, dès les cinq premiers tours[41]. Ainsi, rien ne ressemblait plus à la structure spirale d'une galaxie que le nuage de crème accompagnant la rotation du café, dans une tasse, sur un coin de comptoir !

Tout cela colle à l'observation. Des galaxies spirales barrées, ça n'est pas cela qui manque.



Galaxie spirale barrée

Décidément, ces informations exotiques, trouvées dans ces lettres reçues par des espagnols, signées par des visiteurs issus d'une autre planète, bien incapables de les exploiter eux-mêmes, me mènent vers des rivages inconnus.

[40] Inférieure à a la puissance des ordinateurs personnels d'aujourd'hui.

[41] Alors qu'aujourd'hui l'existence de galaxies barrée, révélée par le James Webb Telescope, place les astrophysiciens dans l'embarras, leurs modèles ne permettant pas la formation des galaxies, telles que nous les connaissons actuellement, avant au moins un milliard d'année et de leurs barres avant plusieurs milliards d'années. A l'opposé, le Modèle Janus, découlant directement des textes Ummo, situe leur formation dès la première centaine de millions d'années.

Cette affaire de vitesse de la lumière variable est la cerise sur le gâteau. Les calculs fonctionnent. Mais quelle revue acceptera simplement de lire ces lignes ?

Souriau, l'alchimiste

Je retrouve Lichnérowicz à la terrasse d'un café du centre-ville d'Aix-en-Provence, descendu de Paris pour participer à un colloque de physique mathématique. Il me propose de l'y accompagner.

Nous arrivons devant le Palais des Congrès. Tous les participants sont dehors. La porte est fermée. La salle est occupée par un congrès consacré à l'industrie alimentaire.

Au milieu d'un groupe de mathématiciens désorientés se tient un petit homme barbu aux cheveux blancs. La directrice, chez qui semble se mêler un mélange d'agacement et de compréhension, lui lance :

— *Monsieur Souriau, quand vous organisez un colloque, il suffit de m'envoyer une lettre pour réserver la salle.*

Je comprends alors que le petit barbu a tout simplement oublié de prévenir le Palais des Congrès.

La situation est absurde. Pourtant personne ne semble surpris.

La directrice passe quelques coups de téléphone. Une demi-heure plus tard, nous nous retrouvons transportés dans une école de fillettes voisine. Les plus grands mathématiciens français de l'époque s'installent tant bien que mal sur de minuscules tables-bancs prévues pour des enfants de dix ans. Les jambes dépassent de partout.

Mais il y a un tableau noir et de la craie. Le colloque peut commencer.

À un moment, un mathématicien polonais présente ses résultats. Le petit barbu bondit alors de son siège, traverse la salle d'un pas vif, désigne les formules que le Polonais a consigné sur le tableau.

— *Je comprends que ces équations me sont familières. Tout cela figure déjà dans mon livre !*

Le Polonais pâlit. Il ne connaît pas le livre en question, multiplie les excuses.

Souriau écoute, puis retourne à sa place.

Lichnérowicz me glisse alors à l'oreille :

— *Oui, il est comme ça. La difficulté est que, d'une part il s'est toujours situé en dehors du système des revues à comité de lecture, et que d'autre part il s'est toujours refusé à apprendre le moindre mot d'anglais. Toute son œuvre se résume à des livres publiés en Français par des éditeurs d'un autre âge, dont aucun n'est présent sur les places étrangères. Les bibliothèques scientifiques, dans tous les pays, se limitent à la langue anglaise, qui s'est progressivement*

imposée comme un standard. Mais je considère que c'est un des plus grands mathématiciens vivants.

A Aix-en-Provence, nous sommes voisins, je n'ai que quelques rues à traverser pour me rendre à son domicile, dans un ancien hôtel particulier. Courageusement, tel Thésée se décidant à affronter le Minotaure, je m'annonce à l'interphone.

La lourde porte de chêne, décorée de motifs de bronze, s'ouvre. Dans une immense entrée j'aperçois une ancienne chaise à porteur, ayant sans doute appartenu à la famille du propriétaire des lieux. Puis c'est un majestueux escalier aux marches de marbre de Carrare, qui mène à l'appartement occupé par Souriau, dont les plafonds culminent à près de cinq mètres de hauteur. Il m'attend, devant la porte.

Son bureau est un capharnaüm inimaginable, où s'empilent les ouvrages dans un ordre dont seul son occupant connait les clés et les codes.

Depuis le décès de son épouse, il vit seul avec son chat Pioum, qui accueille chaque visiteur avec une bienveillance que son maître ne partage pas forcément, l'animal venant immédiatement s'installer sur les genoux de tout nouvel arrivant.

Souriau ne supportant pas la médiocrité, son légendaire franc-parler a fait, au fil des années, le vide autour de lui. Il s'est donc retiré du monde comme un vieil alchimiste dans son laboratoire.

Venant de mettre au point mon modèle cosmologique à constantes variables, j'évoque mes difficultés, les refus des revues, les portes fermées, les articles rejetés sans même être lus.

Il m'écoute sans sourcilier, prend mon manuscrit

— *Je vais regarder cela.*

Puis il me signifie que l'entretien est terminé.

Les semaines passent. Enfin il me rappelle. Je gravis presque en courant l'immense escalier trônant dans l'entrée monumentale de l'immeuble. Il me reçoit comme à son habitude, sans cérémonial. Puis il me tend quelques feuillets.

— *Je suis d'accord avec ce que vous avez fait. C'est nouveau. C'est intéressant.*

Entre ses mains se trouve une lettre d'accompagnement.

Quelques lignes seulement. Mais elles ont le poids de son autorité scientifique. Grâce à elles, l'article franchit enfin les barrages. Mon travail sur l'univers en régime de constantes variables est accepté et publié dans une des meilleurs revues, Modern Physics Letters A[42].

Grâce à cet article je réalise que j'ai réussi mon examen d'entrée. Le ton change du tout au tout. J'ai suscité la curiosité chez ce personnage qui tient plus d'un homme du VII° siècle que d'un chercheur de son temps.

[42] Dans l'indifférence générale, et c'est toujours le cas en 2026.

- *Vous êtes libre à déjeuner ?*

En acquiesçant, je manque de m'étrangler, tant la surprise est grande. Nous gagnons la cuisine, située sous les combles. Souriau, après avoir consulté distraitement la notice, glisse un plat tout préparé dans le four à micro-ondes.



Le mathématicien Iean-Marie Souriau et son chat, Pioum.

C'est est un personnage difficile à classer. Il refuse d'apprendre l'anglais, refuse de soumettre des articles aux revues internationales, publie ses travaux sous forme de livres, en français. Mais, plus encore, dans une langue mathématique qu'il a pratiquement inventée lui-même. Les initiés l'appellent le "sourien".

Lorsqu'il donne, rarement, des conférences dans des institut de mathématiques, des collègues doivent traduire certaines de ses phrases au fur et à mesure. Comme un interprète. Non pas du français vers l'anglais. Mais du sourien vers le langage mathématique standard.

La scène paraît invraisemblable. Elle est pourtant réelle. Mais dans le monde très fermé des mathématiques de haut niveau, les initiés savent qu'avec Kostant et Kirillov, Souriau fait partie des pionniers d'un domaine alors naissant : la géométrie symplectique.

Son influence est immense, mais reste confinée à un cercle restreint de spécialistes.

Lichnérowicz tente de le faire entrer à l'Académie des Sciences. Mais la démarche implique des visites d'usage aux académiciens en place. Il s'y refuse aussitôt et le projet tourne court

Souriau ressemble à un homme du XVII[e] siècle égaré dans le monde moderne. Un des derniers méritant le nom de « savant », de ceux pour qui les mathématiques, la physique, l'histoire, la philosophie et la métaphysique appartiennent encore à une même aventure intellectuelle.

Avec lui, nous parlons de tout.

Des groupes. De la physique. Des civilisations anciennes.

De l'Iran, où il a beaucoup voyagé. De Carthage où il a résidé plusieurs années. Des mythes perses.

Des arbres aussi.

Car Souriau parle aux arbres.

Et il affirme qu'ils lui répondent.

Selon lui, les arbres dominants d'une forêt exercent une influence sur leur environnement. Ils peuvent alors jouer ce rôle, si on s'adresse à eux à l'aide de paroles connues des seuls initiés.

Avant certains pique-niques, il disparaît quelques minutes.

Puis revient.

Peu après, une trouée bleue apparaît dans un ciel uniformément gris.

Mon histoire de visiteurs extraterrestres ne le trouble nullement. Elle l'amuse même.

En fait, quand je franchis sa porte, ce n'est pas un professeur d'université retraité que j'ai en face de moi, mais une sorte d'alchimiste égaré dans le monde moderne.

En France l'Ecole Normale Supérieure forme l'élite des mathématiciens du pays. Jeune étudiant, Souriau intègre un groupe tourné vers l'ésotérisme. Comme il est aujourd'hui décédé, je pense que je peux révéler ce qu'il me conte, petit à petit.

Le groupe se réunit dans une cave, à la lumière d'une bougie posée sur un crâne humain. On y essaie certains types de drogues[43]. J'écoute Souriau, médusé.

- *Un jour l'un d'entre nous déclara qu'il était prêt à vendre son âme au diable si celui-ci faisait de lui l'auteur d'un théorème qui s'inscrirait dans l'histoire des sciences !*

- *Et le diable a fourni le théorème !?*

- *Je ne sais pas si c'est le diable, mais il reste que ce théorème existe bel et bien[44].*

---

[43] Bien avant le LSD

[44] En 1978 le mathématicien Roger Apéry (décédé en 1994 à l'âge de 78 ans) démontre que la suite des inverses des cubes des nombres entiers qui constitue la fonction « dzeta » de Riemann $\zeta(3) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ et un nombre irrationnel.

Pour Souriau les équations ne sont pas que des assemblages de signes posés sur une feuille. Elles ont leur vie propre. Elles nous parlent et si nous faisons l'effort d'écouter ce qu'elles ont à nous dire, des grandes découvertes deviennent possibles.

- *Les mathématiques constituent ce qui constitue la grammaire de la nature*[45]*. Elles sont aussi comme des chaussures. On peut marcher sans chaussures. Mais, avec, on peut aller plus vite et plus loin.*

- *Un peu d'abstraction éloigne du réel. Beaucoup y ramène.*

- *La physique théorique ? Une mathématique sans rigueur et une physique sans expériences.*

Il m'offre des exemplaires de ses deux principaux livres[46]. Je les parcours comme Champollion s'efforçant de décrypter les hiéroglyphes. Mais, au détour d'une page, j'identifie un passage clé :

We thus have proved the identity

$$\psi(\underline{I}_U(x)) = \underline{I}_{\mathcal{G}^*}(\psi(x)) \qquad \forall\, x \in U\,,\ \forall\, I \in G'\,, \tag{14.66}$$

which extends the validity of (14.65) to the full Poincaré group.

This formula applies when $I = I_s$ (space inversion) or when $I = I_t$ (time reversal). Calculating $\underline{I_s}_{\mathcal{G}^*}$ and $\underline{I_t}_{\mathcal{G}^*}$ gives (notation (13.59)):

$$\begin{cases} \underline{I_s} : \mathrm{l} \to \mathrm{l}\,, & \mathbf{g} \to -\mathbf{g}\,, & \mathbf{p} \to -\mathbf{p}, & E \to E\,, \\ \underline{I_t} : \mathrm{l} \to \mathrm{l}\,, & \mathbf{g} \to -\mathbf{g}\,, & \mathbf{p} \to \mathbf{p}\,, & E \to -E\,. \end{cases} \tag{14.67}$$

-Si je comprends bien, l'inversion du temps entraîne l'inversion de l'énergie E.

- Oui, tu as bien lu. C'est écrit noir sur blanc[47]*. Et comme $E = mc^2$ il y a aussi inversion des masses.*

Et là, c'est le flash absolu.

---

[45] Titre de son seul ouvrage de vulgarisation, non publié. Placé par ses élèves sur un site Internet qui lui est dédié.

[46] Géométrie et Relativité (exclusivement en Français). Publié en 1964 par les Éditions Hermann. Structure des Systèmes Dynamiques, Éditions Dunod 1970. Version anglaise, traduite par ses élèves, Éditions Birkhauser, 1997.

[47] Cela résulte de la prise en compte du groupe de Poincaré complet, équipé de ses composantes « antichrones », inversant le temps, qui ne sont pas présentes dans la version « restreinte, orthochrone » utilisée par les physiciens théoriciens. Des années pus tard cette partie « groupes » constituera une des bases mathématiques du modèle cosmologique Janus. Voir : J.P.Petit, F.Margnat, H.Zejli : A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024). NB : les contribution des deux cosignataires de l'article ne correspond qu'aux illustrations et à la transcription du manuscrit en langage Latex.

Je comprends soudain que j'ai sous les yeux la pièce qui manquait au puzzle.

Si l'inversion du temps entraîne celle de l'énergie, et donc celle de la masse, alors plusieurs passages des documents ummites cessent d'être des affirmations gratuites pour devenir les éléments d'une construction cohérente.

En 1967, personne n'associe encore l'inversion de la flèche du temps à celle de la masse. Souriau ne démontrera cela que plusieurs années plus tard.

Je referme le livre.

Cette fois, je tiens quelque chose.

La cassette audio.

Le 12 novembre 1968 Francisco Donis, cadre dirigeant dans la société d'investissement CRECINCO rentre en voiture à son domicile de Madrid. C'est la nuit. Soudain il aperçoit une soucoupe volante posée dans un champ, à proximité de la route, et plusieurs silhouettes qui s'affairent autour de l'engin.

Il stoppe son véhicule et s'approche et s'adresse à ces individus :

- *Mais, vous ressemblez à des Terriens !*
- *Nous sommes des Terriens.*
- *Comment cela ?*
- *Des descendant de Terriens enlevés et transportés sur une autre planète.*
- *Vous n'avez pas songé à vous évader ?*
- *Pour revenir vivre ici ? Sur cette planète de fous ! Vous plaisantez.*

Donis rentre chez lui, conte son aventure à son épouse. Le bouche à oreille jouant, les Ummites prennent contact avec lui. Encore une fois, ce qui les intéresse c'est de pouvoir remonter vers une nouvelle ethnie visitant la Terre. Ils appellent l'Espagnol et conviennent d'un rendez-vous, à son domicile.

Mais le jour dit, n'est pas seulement Donis et son épouse qui occupent l'appartement. Les contactés du groupe Ummo s'y entassent, dont Rafael Farriols, muni de dispositifs d'enregistrement.

A un moment le téléphone sonne ? Donis décroche :

- *Ce sont eux ! ...*

Rafael se précipite et colle sur le combiné un micro-ventouse lui permettant d'enregistrer la conversation. Une voix nasillarde, monocorde, se fait entendre :

- *Solo don Francisco. Es don Francisco Donis Ortiz ? Estan reunidos ahi sus hermanos en su domocilio ? Saludos de los hermanos de Ummo. No formulen preguntas de sus*

hermanos reunidos en su domicilio, a mi hermanos. Suplicamos perdon, Senor. Desconnecto communication.[48]

En visite chez Rafael, celui-ci me compte cette histoire et me fait entendre l'enregistrement. Je lui demande aussitôt si je peux disposer d'une copie. Il acquiesce. De retour à Aix-en-Provence je prends contact avec mon ami Teston, en poste au laboratoire de phonétique de la faculté des lettres.

Celui-ci dispose d'un analyseur produisant ses résultats sur une bande de papier, où les signaux sont inscrits à l'aide d'un style, comme dans les détecteurs de mensonge ou les électrocardiogrammes de l'époque. Ce qui s'inscrit donne l'évolution des fréquences au cours du temps.

Teston extrait la bande de papier :

- *C'est du recto tono.*

- *C'est à dire ?*

- *Les humains produisent des sons à l'aide de cordes vocales. Mais, au plan des fréquences, ils peinent à les maintenir constantes. Quand on regarde l'enregistrement d'une voix humaine, on perçoit bien des oscillations. Là, regarde, c'est droit comme un I et les fréquences sont limitées à deux composantes, pas plus. La voix humaine est plus riche.*

- *Donc ?*

- *Donc ce n'est pas une voix humaine*[49]*.*

Je me souviens que les textes disent que ces gens produisent les sons, non avec des cordes vocales, mais avec des replis pharyngés, plus rigides. Chez la plupart d'entre eux cet organe se scléroserait, à la puberté, les contraignant à être équipés d'un implant posé dans la gorge, connecté à un pendentif accroché au cou. Un tel dispositif assurerait une simple amplification phonique, dans une certaine gamme de fréquence (je ne me rappelle plus si cela se situe en haut ou en bas du spectre). Les autres sons seraient convertis en ultrasons, pour piloter à distance tous types de machines. Les expéditionnaires seraient sélectionnés parmi ceux qui échapperaient à cette sclérose, pour éviter que ce gadget ne les fasse repérer.

Pourquoi pas ? Nous avons bien des lunettes, des dentiers, de pacemakers.

---

[48] — Seulement Don Francisco. Est-ce Don Francisco Donis Ortiz ? Ses frères sont-ils réunis chez lui ? Salutations des frères d'Ummo. Veuillez ne pas poser les questions des frères réunis chez lui. Nous vous demandons pardon, monsieur. Nous interrompons la communication.

[49] Bien sûr, on peut penser à une voix de synthèse. Mais la technique de l'époque, la chose n'en était qu'à son tout début. Il aurait dès lors fallu l'intervention de services disposant de moyens importants.

La main coupée.

Une fois de plus, Jean-Jacques et moi somme de retour d'Espagne. C'est la nuit. Je conduis tandis qu'il consulte le nouveau paquet de photocopies collecté, en traduisant au fur et à mesure.

- *Oh, c'est extraordinaire !*

- *Quoi ?*

- *Au milieu de ce que Rafael nous avait donné à photocopier, il y avait un rapport, qui s'était glissé au milieu. Et cela lui a échappé.*

Avant d'évoquer ce que Jean-Jacques vient de découvrir, situons cette partie de l'histoire. En 1953 la police de la ville espagnole d'Albacete est prévenue par un employé d'une société des pompes funèbre. Après avoir réceptionné dans ses locaux le corps d'une jeune fille, décédée de maladie, et avant la fermeture du cercueil celui-ci a fait une macabre découverte. Le corps a été profané. On a coupé une main et enlevé un de ses yeux. [50]

Une enquête est ouverte. La mère de cette jeune fille, une aristocrate au nom de Dona Marguarita Luiz de Lihori, connue pour ses fréquentations excentriques, incapable de fournir la moindre explication, est mise en examen. Dans les jours suivant le fiancé de la jeune femme se suicide en se défenestrant.

La comtesse espagnole, traumatisée par ce drame et par la suspicion que les autorités font peser sur elle, faute de trouver l'auteur de cet acte monstrueux, décède rapidement.

Les années passent et le 6 août 1971 les contactés reçoivent une missive décrivant ce qui se serait réellement passé. Selon ce document, en novembre 1953, deux expéditionnaires, entendant poursuivre des expériences initiées dans un chalet aux environs de Marseille[51], prennent contact avec madame Lihori, en se faisant passer pour médecins. « En la guérissant d'une affection réelle et d'autres imaginaires », ils entrent rapidement dans ses bonnes grâces, et parviennent à lui louer un local, au sous-sol d'un vieil immeuble de la Mayor, dont elle est la propriétaire, dans la ville d'Albacète.

Là ils se livrent à diverses expériences de biologie, dont l'étude d'une souche virale, apportée de leur planète, dans un environnement terrestre. Normalement, celle-ci est qualifiée par eux d'inoffensive. Mais dans le contexte terrestre une mutation imprévue survient, qui transforme celle-ci en un redoutable agent pathogène.

Ils identifient des foyers, superficiels, chez différents résidents de l'immeuble, mais parviennent rapidement à les détruire à distance en utilisant des pinceaux d'ultrasons modulés en basse fréquence. Mais la fille de Madame Lihori, Margot Shelly, poussée par la curiosité et s'étant procuré des clés, s'introduit dans le laboratoire souterrain.

---

[50] Le magazine n° 129 de « *Diez Minutos* » du 13 février 1954 consacre 2 pages à l'affaire de la main coupée. Les n° 129 et 130 (20 février) de la même revue y consacrent encore plusieurs articles.

[51] Les textes indiquent effectivement qu'près la première prise de contact dans la région de Digne, les expéditionnaires se seraient pendant un temps implanté dans la région marseillaise, mais nous n'avons pas trouvé de trace de ce séjour.

Les deux « médecins » constatent que, dans son cas, l'infection a gagné des couches profondes et qu'un traitement à distance s'avèrerait inopérant.

Des membres des groupes français et allemand convergent alors précipitamment vers Albacete. Les responsables du groupe d'expéditionnaires concluent que sauver cette jeune fille les amèneraient automatiquement à révéler leur véritable identité et la décision est prise de ne rien faire.

La jeune fille décède et dans la nuit suivante, pénétrant dans la pièce où son corps est entreposé ils prélèvent les pièces anatomiques afin de juguler tout risque d'épidémie au sein de la population de la Terre.

Revenons à cette nuit pendant laquelle s'effectue notre retour, depuis Barcelone.

- *Alors, qu'est-ce que ça dit ?*

- *C'est une lettre qu'envoie à Farriols un détective privé mandaté par lui pour aller enquêter sur place. Il dit qu'après ce drame l'immeuble a été rapidement vendu, pour construire à sa place un parking. Pendant les travaux de démolition, d'après des témoins, les ouvriers auraient mis à jour le contenu du laboratoire souterrain.*

- *Et alors,*

- *Je lis qu'il y auraient trouvé des fioles en tous genres, ainsi que des bacs en inox contenant différentes pièces anatomiques, en général animales*[52]*.*

Perplexité.

Je monte de temps en temps passer un week-end à Digne, chez Jean-Jacques. En dehors des repérages sur le terrain, nous passons de longues heures à compulser ce que nous avons ramené d'Espagne.

- *Qu'est-ce que tu en penses ?*

- *Je dirai d'abord que le scientifique, c'est toi. Tu me dis que ces textes contiennent des informations de premier plan, que tu réussis à convertir en publications scientifiques, dont tu estimes qu'elles sont en avance sur la science d'aujourd'hui. Je ne peux que te croire sur parole. C'est le point fort de toute cette affaire.*

- *D'accord, mais toi, le psychologue, qu'est-ce que tu penses du reste ?*

[52] Selon Farriols, interrogé plus tard, le fiancé de la jeune fille, l'ayant accompagné dans ont exploration du laboratoire en sous-sol, aurait emporté avec lui un des appareils trouvés sur place. Au moment où il tentait de revendre l'objet à des représentants d'une puissance étrangère ceux-ci se seraient débarrassés de lui en le défenestrant.

- *Il est évident qu'il faut tout envisager, y compris une vaste manipulation. Mais alors, par qui, et pourquoi ? C'est cela qui m'échappe. Je crois que la seule position saine est de suspendre le jugement, de commencer par examiner ce que cela contient.*

- *Rien ne dit que cette foutue planète existe vraiment, du reste. Je suis d'accord avec toi, suspendons le jugement et mettons tout cela à plat, devant nous.*

- *On peut noter que ça n'est pas le cas des contactés espagnols, qui prennent toute cette prose à la lettre. Tu as vu le contenu des dernières lettres et des échanges téléphoniques ? Tout tourne autour de ce à quoi ils donnent un nom à eux : le BUAAWE BIEI, en abrégé le « BB », constituant une forme de conscience planétaire collective, dépositaire de la mémoire de tous les évènements, organisatrice du réseau social de la planète.*

- *Qui n'est rien d'autre que la grande idée du paléontologue et philosophe Pierre Theilhard de Chardin[53] qu'il développe en 1955 dans son livre le Phénomène Humain.*

    - *L'univers comporte trois sphères :*

    - *Une géosphère, celle de la matière inerte, les planètes, les roches, des océans*

    - *Une biosphère : La vie, les végétaux, les animaux*

    - *Une noosphère : la pensée, le langage, la conscience.*

- *Et à la surface de la terre, se situe ce qu'il désigne comme une « pellicule pensante », où la conscience accroit la complexité du système et son champ relationnel.*

- *Mais Theilhard, philosophe chrétien, va beaucoup plus loin, en expliquant que tout ceci converge vers un « point Ω ».*

- *Je sais. Ça évoque l'Apocalypse de l'évangéliste Jean de Patmos[54] : « Je suis l'alpha et l'oméga, dit le Seigneur Dieu, ce qui qui est, qui était et qui vient, le Tout-Puissant ». Toute cette évolution irait vers une fusion finale vers cette configuration Ω où toutes les consciences n'en formeraient plus qu'une.*

- *Teilhard est avant tout un croyant, un philosophe chrétien, pour qui le phénomène christique joue un rôle essentiel. Et dans ces textes Ummo il est dit que sur cette autre planète, située à 15 années-lumière de la Terre, le même phénomène se serait produit. Leur dieu, qu'ils appellent WOA, aurait suscité l'émergence d'une sorte « d'homme-dieu », UMMOWAO, très semblable au Christ, qui aurait connu d'ailleurs une fin tragique en tous points similaire.*

- *D'où une première idée : le message UMMO émanerait d'une secte néo-chrétienne.*

---

[53] Paléontologue et philosophe français. 1881-1955 ?

[54] Apocalypse 1 :8

- *On a dit qu'on suspendait le jugement !*

- *Oui, mais ça n'empêche pas de spéculer. Les textes s'adressent aux Espagnols. S'il s'était agi de Japonais, de Mongols, d'Indiens ou de Bouddhistes, le contenu aurait alors peut-être été différent.*

- *On peut le voir comme ça. Il reste qu'avec ces Espagnols, ça ne marche pas, ça courre ! La plupart se voient comme des élus, carrément. Les textes leur disent que le rôle principal des êtres humains est « d'informer leur BB, leur Noosphère », dans des séances de méditation. Et les voilà illico qui se réunissent périodiquement, rituellement, en écoutant la lecture à haute voix des textes Ummites ! Je revois « Lou », l'ex-secrétaire de Farriols[55], également destinataire de courriers, nous dire sentencieusement : « Les Ummites tiennent beaucoup à nous, parce que nous avons représenté pour eux un long investissement ».*



- *Dans ce groupe le seul qui ait refusé tout cela c'est Antonio Ribera.*

- *Et c'est pour cela qu'il a rapidement cessé de recevoir des courriers ! Le message est partout présent : si vous montrez indociles, si vous prenez des initiatives qui ne nous conviennent pas, stop, plus de lettres !*

- *Tout ce qui subsiste, c'est un ensemble de faits troublants.*

- *Pour cette histoire de main coupée, à Albacete, en 1953, cela peut représenter la récupération d'un fait divers bien réel.*

- *L'enregistrement sur cassette de la voix des Ummites : une manipulation de services secrets.*

- *On nage dans l'indécidable. Le seul point qui interpelle, ce sont tes travaux. Mais on peut imaginer un scientifique visionnaire, ou un groupe de scientifiques visionnaires, que leurs réflexions auraient amenés loin en avance vis-à-vis de la science des années soixante, qui auraient trouvé ce canal pour semer ces graines.*

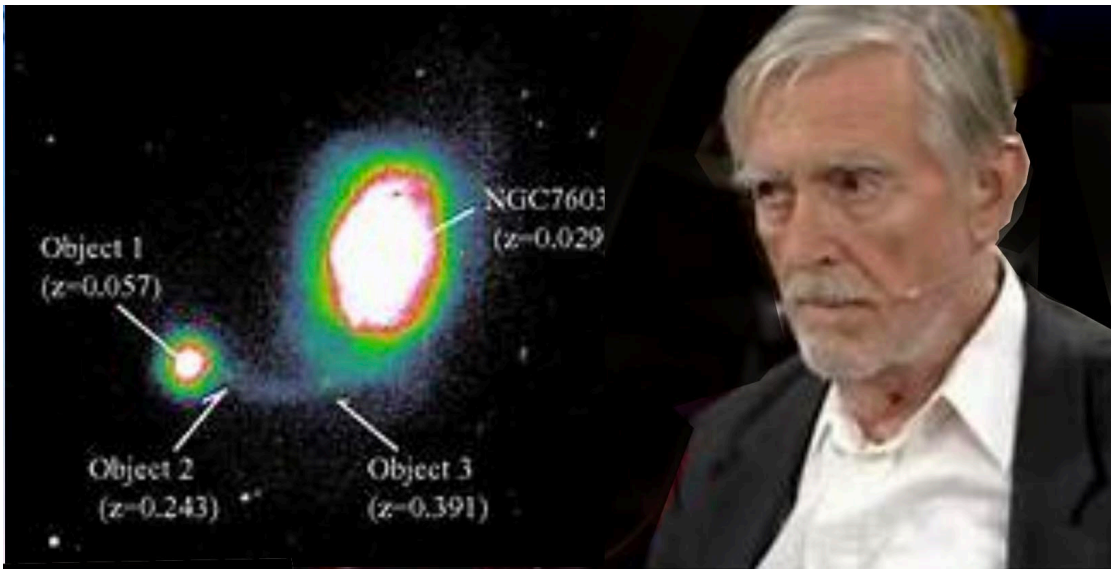
- *En s'adressant à des Espagnols incapables de comprendre un traître mot de tout cela ? C'est sacrément tiré par les cheveux, tu ne trouves pas ? . J'ai noté un passage*

[55] Et accessoirement une de ses maîtresses.

intéressant. A un moment, avant l'épisode Sesma, ils disent être tombés sur les travaux de l'astronome américain Halton Arp[56].

- *Un mot d'explication, s'il te plait.*

- *Arp[57] n'est pas le premier venu. Pendant des décennies il accumule les observations en utilisant le télescope le plus puissant, celui du Mont Palomar, aux Etats-Unis. Il reçoit le prix de l'American Society of Astronomy en 1960. Mais, très vite, son attention se concentre sur tout ce qui se présente comme insolite, et ça ne manque pas. La mesure du redshift[58], en en déduisant la vitesse de fuite de galaxies, permet d'obtenir une évaluation en distance des sources. Il trouve ainsi un grand nombre de couples de galaxies équipés de redshift très différents, donc se situant vis-à-vis de nous à des distances sensiblement différentes, mais qui semble reliées par un pont de matière. Ailleurs c'est un quasar, planté au centre d'une galaxie, qui présente ce même écart important de redshift. Harp suggère que des valeurs différentes des constantes de la physique, en des régions différentes de l'univers, pourraient rendre compte de ces effets.*



Halton Arp et une de ces nombreux objets « qui ne devraient pas exister »

Parmi ces formations insolites se trouvent des ensembles d'étoiles, totalement informes, complètement désarticulés[59].

---

[56] Travaux qui firent l'objet de la publication du « Catalogue des Galaxies Singulières », publié en 1966. Contenant les images de 338 objets, tous contredisant l'interprétation axées sur le modèle cosmologique standard.

[57] 1927-2013

[58] Redshift : glissement vers le rouge, dût à l'effet Doppler. Les galaxies distantes nous fuient. Plus elle sont loin, plus l'effet est important, ce qui correspond à la célèbre loi établie en 1929 par l'astronome américain Edwin Hubble, montrant que la vitesse de fuite proportionnelle à la distance.

[59] Certains aimeraient voir là des galaxies en formation. Mais c'est absurde puisque nombre de ces objets contiennent des étoiles déjà anciennes. Dans la communauté scientifique on préfère carrément ignorer cela.



La galaxie irrégulière NGC 1427A
Située à 55 millions d'années-lumière

Que font alors les Ummites en découvrant ses travaux ? Ils lui adressent un rapport lui expliquant qu'il vient de mettre là le doigt sur un phénomène trahissant des soubresauts révélant l'interaction de notre univers avec son jumeau. Ils lui proposent mêle de l'aider à modéliser tout cela.

- *La réaction d'Halton Arp[60] ?*

- *Immédiate. D'après le texte celui-ci conclut aussitôt que ce document émane de plaisantins et il le balance à la poubelle. Mais ce que je peux dire c'est que dans les dernières simulations qu'avait effectué pour moi cet étudiant thésard de Hambourg je lui avais demandé de réduire drastiquement l'effet de confinement exercé par son environnement de masse négative sur la galaxie. Et il avait aussitôt obtenu un résultat identique à ce genre d'image.*

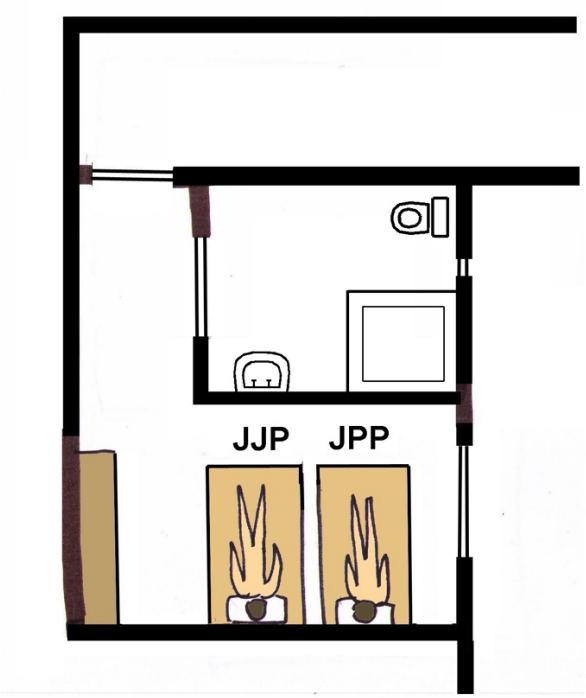
- *Au point où nous en sommes, pourquoi ne pas proposer une rencontre ? Qui ne tente rien n'a rien. Les Espagnols disent avoir ces braves gens au téléphone. Demandons-leur de leur transmettre cette proposition.*

La nuit à l'hôtel de Madrid

Nous sommes dans une petite chambre d'un hôtel de Madrid, où les Ummites ont annoncé que la rencontre aurait lieu. Elle se situe au fond d'un couloir, au dernier étage. Deux lits, côte à côte. A droite, une fenêtre donnant sur une cour intérieure. Le volume de la pièce

[60] Considéré avant tout comme un semeur de troubles, Arp finit par être privé de temps d'observation sur les grands instruments. Rejeté par sa communauté il finit par quitter les USA pour s'exiler au Max Planck Institute allemand, où il termina à la fois sa carrière et sa vie. .

est amputé, juste à gauche de l'entrée, par un cabinet de toilette comportant un lavabo, un wc et une douche.



La chambre de l'hôtel Sandwy

Cela fait une trentaine d'heures que nous nous sommes arrivés dans la capitale par avion, la veille, et nous attendons, après une première nuit passée à l'hôtel. Dehors, dans les rues, des groupes de militants très excités, vocifèrent et circulent dans des véhicules arborant des drapeaux portant l'emblème de la phalange des franquistes : le joug et les flèches. Ici et là, de longs camions ayant servi à amener les chevaux de la police montée espagnole. Je réalise que c'est le jour anniversaire de la mort de Franco.

Nous préférons rester dans la chambre, plutôt que de risquer une interpellation et Jean-Jacques, avec ses cheveux longs, a tout d'un gauchiste pur sucre. Si la police nous questionnait sur la raison de notre présence à Madrid, surtout à une pareille époque, que pourrions-nous répondre ?

- *Nous sommes venus pour une rencontre avec des extraterrestres.*

Jean-Jacques appelle Farriols au téléphone.

- *Les Ummites vous demandent d'attendre. Ils disent qu'ils ont des choses à préparer.*

Dîner à l'hôtel. Retour dans la chambre. Extinction des feux.

Un bruit me réveille. Quelqu'un est en train de s'escrimer sur la serrure de la porte. Je réalise que je n'ai plus le moindre tonus nerveux. Aucun de mes muscles ne répond. Et soudain, tout va très vite. Dans l'obscurité j'entends que la porte s'ouvre. Des mains me saisissent énergiquement. Je sens qu'on m'assied sur le bout du lit de Jean-Jacques, en me

soutenant, comme on le ferait d'un mannequin sans vie, désarticulé. Quelqu'un met sa main sous mon menton, pour empêcher ma tête de basculer en avant.

En face de moi, posée sur le petit meuble de la chambre, une large source de lumière, un disque d'une quarantaine, peut-être d'une cinquantaine de centimètres de diamètre, d'où émane une lumière « bleu lagon ».

Le lueur gagne en intensité. Je ne vois plus les bords du disque. Il n'y a plus que cette lumière qui emplit tout le champ visuel. Je sens que je bascule complètement.

Quand je reprends connaissance, je réalise que je suis de nouveau allongé sur mon lit. Une lumière douce baigne dans la pièce. Ce qui me réveille c'est l'impression que ma nuque est posée sur de la glace. Je peux ouvrir les yeux, mais je ne peux bouger un muscle. Tout ce que je vois, ce sont mes pieds nus, au bout du lit, avec mon pyjama, rabattu jusqu'aux chevilles.

Soudain un personnage entre dans mon champ visuel. Je distingue ses traits avec netteté. Dans ses mains, un appareil non identifié.



Paralysé !

Il tourne la tête dans ma direction et fait un geste de la main à l'attention d'un autre personnage qui se tient hors de mon champ visuel, comme pour lui faire signe que je me réveille. Je bascule de nouveau dans l'inconscience.

Mais je me souviens très bien de la tête de ce type, dont j'évalue l'âge à une cinquantaine d'années. Pour moi, aucun doute, c'est le sosie de l'acteur allemand Kurt Jürgens :



L'acteur allemand Kurt Jürgens

Le matin je me réveille en ayant l'impression de « pisser des lames de rasoir ». Il me parait hors de doute que j'ai subi une intubation avec prélèvement de sperme, un classique dans les histoires de rencontres rapprochées ou d'abductions. Jean-Jacques, mon voisin, dit souffrir d'un intense mal de crâne.

- *Ça doit être ton implant crânien !*

- *Arrête des conneries !*

- *Écoute, on était venu ici pour vivre une aventure. Bien sûr, elle diffère de ce à quoi nous nous attendions. Mais au moins, il s'est passé quelque chose, non ?*

- *Je raconte à Jean-Jacques ce que j'ai vécu pendant la nuit. Lui ne se souvient de rien.*

Vaseux, il va prendre une douche pour tenter de se réveiller.

- *Toi, tout t'amuse. On t'enfonce un tuyau dans le sexe et ça te fait rigoler !*

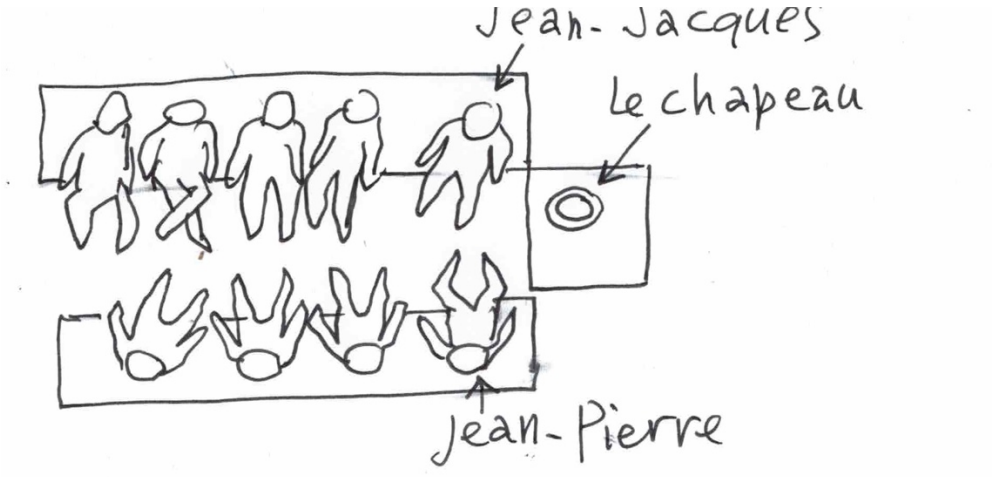
- *Écoute, mieux vaut en rire, que veux-tu que je te dise ? Nous nous étions proposés pour une rencontre diplomatique au plus haut niveau, avec des ressortissants d'une autre planète, et voilà que nous sommes traités comme de vulgaires cobayes de laboratoire !*

- *En tout cas on sait maintenant ce que nous représentons pour eux !*

- *Et on sait également que toute cette affaire est belle et bien réelle. Si nous avions besoin d'une preuve, celle-ci vient de nous être donnée, directement. Simplement, ça n'est qu'une nouvelle donnée de l'équation. Les Espagnols doivent nous attendre. Allons-nous préparer.*

Lorsque je m'habille, je constate la présence sur le blouson de daim que j'ai acheté juste avant de venir, de ce qui ressemble à une petite goutte de laque, de couleur beige, de trois centimètres de diamètre, sur son revers. Je la saisis, mais elle résiste. Je me dis que quand je serai de retour en France, je l'écraserai avec une pince et que cela la fera disparaître.

Dans le hall de l'hôtel, un groupe des contactés de Barcelone et de Madrid nous attend. Jordan Pena est présent, qui nous accueille avec un sourire qui lui va d'une oreille à l'autre. Farriols est venu de Barcelone. Pena nous entraîne dans une sorte de salon où tous s'asseyent, face à face, sur des longues banquettes. Jean-Jacques et moi somme au fond de ces deux rangées, de part et d'autre d'une table basse sur laquelle il a posé un chapeau qui ne le quitte jamais.



La rencontre à l'hôtel Sandwy

De fait, les Espagnols, pour lesquels ceci représente une rencontre entre représentants des groupes de Madrid et de Barcelone, ne semblent guère faire de cas de notre présence. Comme à leur habitude ils jacassent entre eux comme des pies. Leurs phases commencent invariablement par « *creo que*… » (*je pense que*…) suivi d'un discours interminable où chacun donne avec force arguments son point de vue sur tel ou tel sujet.

Fatigué, Jean-Jacques me fait signe de la main évoquant le peu d'intérêt de ces échanges. Mais son regard reste quand même tourné vers le groupe. Soudain je le vois faire quelque chose d'extraordinaire. Sans tourner la tête, il envoie une main derrière lui, saisit son chapeau et lui imprime un mouvement de rotation. J'assiste à cette scène en ouvrant des yeux ronds.

Finalement, personne ne nous questionne sur notre séjour. Ce n'est pas la première fois que cela arrive. Quand ces Espagnols sont ensemble et qu'ils se mettent à palabrer sur tel ou tel passage des textes Ummites, plus rien n'existe.

Nous nous retrouvons dans l'avion du retour. Je constate alors que la « goutte de laque » a miraculeusement disparu de mon blouson.

Jean-Jacques :

- *J'en avais une de même couleur, un peu plus grosse, sur mon chapeau, juste devant.*

Je lui raconte alors cette scène où je l'ai vu, sans tourner la tête, imprimer un mouvement de rotation à son chapeau.

- *Je devais avoir un simple micro, collé à mon blouson, et toi une caméra vidéo, sur ton chapeau. L'Ummite qui suivait les échanges des Espagnols a dû dire à un compagnon : « Je ne suis pas dans l'axe. Oriente mieux la caméra ».*

Nous rentrons en France.

Nous n'avons serré la main à personne.

Nous n'avons reçu aucune révélation cosmique.

Nous n'avons même pas obtenu l'ombre d'une explication.

Mais une chose est désormais certaine.

Nous avions demandé une rencontre. Elle a eu lieu, point.

Le refuge souterrain.

Il est évident qu'après une histoire comme celle-là nous ne pouvons que voir les choses différemment. Avec Ribera nous découvrons ce qui s'est joué, dans les années précédentes, au sein du groupe des contactés, au moment de la crise des missiles de Cuba[61].

Deux semaines pendant lesquelles l'histoire retient son souffle.

Le 14 octobre 1962 les Américains envoient un avion espion U2 survoler Cuba. Les clichés révèlent que les Soviétiques sont en train d'installer des missiles sur l'île, ceci constituant la réponse à l'installation, par les Américains, de sites de lancement de missiles nucléaires en Turquie.

Les Ummites prennent aussitôt contact avec les Espagnols, leur révélant qu'ils disposent, à l'ouest de Madrid, dans la Sierra de Gredos, d'un refuge souterrain capable de recevoir soixante-dix d'entre eux pendant dix-huit mois.[62]

---

[61] 14-28 octobre 1962

[62] Ce chiffre de dix-huit mois est tout à fait réaliste. En effet, si une guerre nucléaire à grande échelle survient sur Terre, ce ne sont pas les agglomérations qui sont en priorité visées, mais en premier lieu les sites de missiles de l'adversaire, souterrains. Les explosions des bombes pulvérisent alors le sol en très fines particules, d'un micron de diamètre, qui sont alors emportées dans la très haute atmosphère. Ainsi l'impact immédiat, ce qui est très rarement mentionné, suit une nuit nucléaire. Sur tout l'hémisphère nord, la luminosité, en milieu de journée, correspond à une nuit de pleine Lune. La température accuse une baisse en moyenne de 15 degrés (hiver nucléaire). Au fil des mois les courants aériens étendent cette couche de poussière à l'ensemble de la planète[62]. Les particules n'ayant que des vitesses de chute inférieures à un millimètre par seconde, la couche pulvérulente atteint effectivement le sol en 18 mois.En 1982 par mon ami Vladimir Alexandrov révèle au monde les conséquences météorologiques catastrophiques d'un usage massif d'armes nucléaires : l'hiver nucléaire, avec destruction massive des récoltes, privées de leur aliment : la lumière



Le message adressé aux contactés leur demande de se préparer à gagner le refuge, en précisant qu'ils devront abandonner les personnes âgées et les jeunes enfants. Ribera me rapporte que ceci s'avère dramatique pour nombre d'entre eux, mais que tous entreprennent de s'y préparer.

Les Ummites donnent une évaluation chiffrée de la probabilité de déclenchement du conflit relativement élevée[63]. Le jour dit, seront distribués aux Terriens sélectionnés des écouteurs, leur permettant de gagner le refuge, tout écart vis-à-vis d'un pinceau d'ondes directrices étant signalé, soit sur une oreille, soit sur l'autre.

Mais, finalement, un accord entre Américains et Russes intervient. Les Russes acceptent d'enlever leurs missiles de Cuba. En contrepartie les Américains s'engagent à faire de même avec ceux qu'ils ont implantés en Turquie.

---

du Soleil, et de l'ensemble de la couverture végétale. Paradoxalement, aucun film ne prend en compte cet aspect, pourtant majeur. Le téléfilm Américain de Nicolas Meyer « Le Jour d'Après, diffusé fin 1983, n'en fait pas état. Alexandrov disparait à Cordoue le 31 mars 1985. L'enquête que je mène et les récits de témoins montrent qu'il a été enlevé devant la porte de son hôtel par un commando. Son corps n'a jamais été retrouvé...

[63] Si le contact direct entre Kennedy et Kroutchev permit d'éviter ce déclenchement, l'accord secret impliquant qu'après retrait des missiles par les Russes, que les Américains s'engagent à faire de même avec les vecteurs installés en Turquie, il reste que des sous-marins russes, équipés de torpilles nucléaires, pris en chasse par les navires américains, sont restés livrés à eux-mêmes pendant des jours, leur maintien en plongée interdisant tout contact radio avec le Kremlin,.

La troisième guerre mondiale est remise à plus tard.

Le père Guerrero pète les plombs.

Quelques années plus tard, quand en 1968 un jeune prélat, le père Enrique Lopez Guerrero, est mis au courant de toutes cette affaire Ummo, et découvre des documents dans lesquels les Ummites décrivent les évènements suivant la crucifixion de Jésus, qui diffèrent sensiblement du récit évangélique.



Nos expéditionnaires extraterrestres se sont ainsi installés en Galilée. Ils ont une façon bien à eux de faire des découvertes archéologiques. Il leur suffit de poser sur le sol un engin de la taille d'un œuf de poule, qui s'enfonce aussitôt dans le sol en fondant la roche sur son passage, laquelle se resolidifie dans son sillage.

Quand l'engin se situe à bonne profondeur, sous le site à analyser, cette sonde émet, la nuit, des ondes qui sont alors captées par un autre engin survolant la zone. Le sol est ainsi scanné, révélant d'éventuelles cavités susceptibles de contenir des artefacts intéressants. Il ne reste plus à nos modernes archéologiques de louer, ou de faire l'acquisition de locaux attenant à ces cavités.

L'opération leur permet ainsi de mettre la main sur des feuilles d'or sur lesquelles ils découvrent le récit du drame, gravé quelques jours après la mise en croix du Christ. On y apprend que Judas, non seulement n'aurait pas trahi son maître, mais aurait au contraire été le seul apôtre à tenter une action violente, dans le but de le libérer, au cours de laquelle il aurait péri.

Le Christ ne serait pas mort sur la croix, son corps pantelant étant récupéré par Joseph d'Arimathie, ayant réussi à soudoyer Ponce Pilate. Convenablement soigné, Jésus aurait survécu, tandis qu'un autre corps aurait pris sa place, dans le tombeau, pour tromper les Romains.

Et le texte Ummite se termine par la phrase :

- *Nous vous restituerons cet artefact quand vous serez capables de ne pas le détruire immédiatement.*

L'impact du le père Guerrero est immédiat. Il contacte la presse. Témoin cet article qui parait dans le numéro du 15 septembre 1968 de la revue ABC, de Séville :



"Los extraterrestres que viven en nuestro planeta llegaron a la Tierra el 28 de marzo de 1950"

"En España tuvimos la gran oleada en el año 1952"

Manifestaciones de un sacerdote sevillano

Sevilla, 17 (Cifra). — «No sólo creo que existen seres extraterrestres, sino que tengo el convencimiento pleno de que en España reside una colonia cuya misión es totalmente bienhechora y pacífica».

Esta es, nada menos, la sensacional declaración que con toda seriedad y apoyada en observaciones científicas, acaba de hacer a un redactor del diario «ABC», de Sevilla, el reverendo padre. don Enrique López Guerrero, natural de Sevilla, de 38 años párroco de la localidad de Mairena de Alcor y sacerdote de vocación tardía.

Dice el sacerdote sevillano que esos seres extraterrestres proceden del Planeta «Ummo», que se encuentra a 14'6 años-luz de la Tierra y que gira alrededor de la estrella «Woll 424». Un astro, dice que tiene dimensiones semejantes a nuestro planeta y cuyas condiciones de vida son prácticamente idénticas. Agrega que

El párroco de Mairena del Alcor, don Enrique López Guerrero quien asegura que una colonia de extraterrestres habitan nuestro planeta. (Telemat-Cifra-Pyresa.)

mento de los Bajos Alpes. En España tuvimos la gran oleada en el año 1952".

EN BUENOS AIRES, LOS "OVNI" SIGUEN SIENDO NOTICIA

Buenos Aires, 17. (Efe). — Las alucinantes y espectaculares apariciones de los "OVNI" prosiguen sin solución de continuidad. Todo el barrio de Don Bosco vivió la noche anterior, la emoción de los destellos deslumbrantes de un platillo volador. La señorita Olga Susana Unquía, que vive en esa localidad bonaerense y que se encontraba en la puerta de su casa conversando con su novio, Juan Carlos Castillo, es la testigo de mayor importancia ya que, prácticamente observó todas las evoluciones del objeto volador que se desplazaba por el cielo.

"De pronto —dice— apareció en el cielo una luz brillantísima, que se detuvo. Las luces que despedía eran blancas, azules, verdes, rojas... un espectáculo inolvidable, pero que causa un poco de miedo".

Déclaration du père Guerrero à la presse 18 septembre 1968

Traduction :

Les extraterrestres qui vivent sur notre planète sont arrivés sur Terre le 28 mars 1950.

En Espagne, nous avons connu une vague en 1952.

Déclarations d'un prêtre de Séville :

- *Non seulement je crois à l'existence d'êtres extraterrestres, mais je suis pleinement convaincu qu'une colonie se trouve en Espagne et que sa mission est entièrement bienveillante et pacifique.*

Il s'agit ni plus ni moins de la déclaration sensationnelle qui vient d'être faite, avec le plus grand sérieux et étayée par des observations scientifiques, aux rédacteurs du journal « ABC » de Séville, par le révérend père Don Enrique Lopez Guerrero, natif de Séville, âgé de 38 ans, curé de la paroisse de Mairena de Alcor et prêtre de vocation tardive.

Le prêtre de Séville affirme que ces êtres extraterrestres viennent d'une planète « Ummo » située à 14,6 années-lumière de la Terre et qui orbite autour de l'étoile Wolf 424. Il précise que cette étoile a des dimensions similaires à celles de notre planète et que ses conditions de vie sont pratiquement identiques. Et il ajoute que ces visiteurs auraient pris contact avec la Terre en France, dans les basses-Alpes, et qu'ils résideraient dans un refuge souterrain, situé à proximité de Madrid.

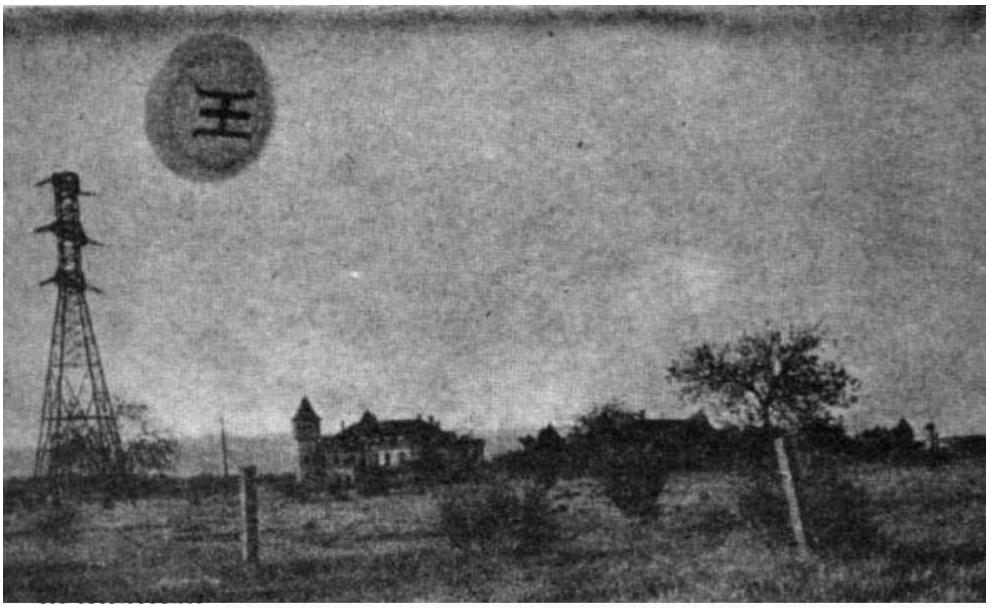
Panique chez les extraterrestres :

Les membres de la colonie Ummite d'Espagne sautent immédiatement dans le premier avion pour quitter le pays à destination d'un autre refuge situé en Allemagne.

Mais c'est là que nos expéditionnaires découvrent un phénomène, pour eux, totalement imprévu. Si l'affaire suscite quelque intérêt, celui-ci ne tarde pas à retomber, se dissolvant dans un scepticisme général. Ils identifient au passage la clé de ce mécanisme :

- *Tous les êtres humains ont une vision donnée du monde qui les entoure. Quand un évènement vient la perturber, ceux-ci s'empressent de la reconstruire en éliminant l'élément perturbateur, en le niant, ou en l'attribuant à tout autre chose : à un phénomène naturel, à une affabulation, à une mystification ou à un désordre mental chez le témoin.*

Un tel phénomène peut être grandement facilité en fournissant d'autres éléments à l'appui. Ils découvrent ainsi l'efficacité de la *désinformation*. Un rouleau de pellicule est ainsi déposé à un journal par un inconnu. Son développement révèle des photographies d'une nef portant, bien visible, le sigle Ummo sur sa partie ventrale.



El VED de San José de Valderas.
Detalle de la parte inferior.

Des éléments du décor, dans l'arrière-plan, permettent de relier ces photos à l'évènement survenu quelques années plutôt à San José de Valdeiras.



El *VED* de San José de Valderas. Otra vista lateral. Se ve perfectamente la cúpula transparente. Foto tomada por el fotógrafo desconocido como las siguientes.

Une autre vue, de côté, où voit parfaitement la coupole supérieure, transparente.

Ces clichés sont immédiatement reçus comme des preuves irréfutables par Antonio Ribera, qui convainc Rafael Farriols de se joindre à lui dans la publication d'un livre portant ce titre :



Un cas parfait » de Antonio Ribera et Rafael Farriols, première édition en 1969

Les clichés font immédiatement le tour du monde et le livre, le premier du genre consacré à l'affaire Ummo, est un franc succès de librairie.

Mais l'efficacité de la désinformation s'avère d'autant plus redoutable qu'elle peut exercer son effet bien des années plus tard. En effet, ça n'est en 1977 que l'ingénieur Claude Poher, en poste au Centre National d'Études Spatiales français, étant parvenu à se procuré le cliché original, et utilisant un microphotomètre digitalisé permettant d'analyser le document pixel par pixel, fait apparaître le fil qui soutenait ce qui n'était alors rien d'autre qu'un maquette en plastique.

L'affaire de San José de Valderas, dépassant largement le cadre de simples observations visuelles, avait commencé à accréditer, au sein du public espagnol, l'idée que des visites d'extraterrestres puissent correspondre à une réalité.

Pendant des années ces quelques photos furent considérées comme la preuve la plus solide du dossier Ummo.

Elles allaient finalement en constituer son maillon le plus faible.

La planète du carré.

Les documents Ummo contiennent 1350 mots, composés avec 17 caractères bien terrestres. Ceux-ci apparaissent sans arrêt au fil des pages et les auteurs disent qu'il s'agit d'une transcription phonétique de l'unique langue utilisée sur leur planète.

Dans un des documents ils expliquent qu'ils ont appris l'existence d'une vie intelligente organisée, sur la planète Terre, en captant un message radio, émis en Morse, en 1934, lors des premiers essais terrestres de transmission à grande distance (depuis un navire, vers la Terre).

Les ondes radio se propageant à la vitesse de la lumière, en ajoutant les quinze années-lumière qui séparent nos deux planètes, c'est en 1949 que le message est capté. Une expédition est donc préparée. En attendant la planète Terre reçoit le nom de code OYAGAA, la « planète du carré ».

Quand ce message en Morse est capté, tous se demandent quel peut être son contenu.

L'un d'eux :

- *Ils essayent peut-être de nous transmettre un théorème du le carré.*

Et dans la lettre Ummite, les auteurs ajoutent :

- *C'est ce que nous avons expliqué à Théodore T.Polk, de Pittsbugh.*

Des amis, résidant à Boston, me disent qu'aux Etats-Unis l'indexation des numéros de téléphone et des intéressés fonctionne assez bien, et ils se proposent de partir à la recherche de ce personnage.

Effectivement, quelques mois plus tard je reçois un courrier de mes contacts m'annonçant qu'à Pittsburgh, Pennsylvanie, il n'existe qu'un seul Theodore T.Polk, universitaire à la retraite, et ils m'envoient son numéro de téléphone.

L'été suivant je suis invité par des amis, au Texas, pendant mes vacances. Depuis leur domicile je décide de composer le numéro :

- *Allô, je suis bien chez monsieur Theodore T.Polk ?*

- *C'est lui-même.*

- *Je suis un scientifique français en vacances et résidant chez des amis.*

- *Alors, bienvenue aux Etats-Unis.*

Là je dois me jeter à l'eau et j'enchaîne :

- *Auriez-vous reçu des messages, des lettres ou des appels téléphoniques, émanant de correspondants se disant issus d'autre autre planète ?*

- *Quelle idée saugrenue !*

La porte semble se refermer. Je me dis que ceux qui ont composé ces pages ont sans doute piqué ce nom au hasard dans un annuaire.

Je tente un dernier coup :

- *Does the planet of the square has some meaning for you ?* (“Est-ce que la planète du carré est un mot qui vous dit quelque chose ? »)

Il me répond aussitôt, en baissant la voix :

- *Yes, but I prefer not to talk about it by phone* (“Oui, mais je préfère ne pas en parler au téléphone »)

De retour en France, je tente d’établir avec lui contact épistolaire. Dans plusieurs lettres successives je lui parle de ce que nous avons récupéré en Espagne. Mais ces courriers restent sans réponse.

Je finis par décrocher un téléphone. Il me répond alors :

- *J’étais dans le jardin. Soudain une voix m’a dit, dans ma tête « il fait que tu rentres. Le Français va t’appeler ». Et effectivement quand je suis arrivé dans le salon, votre appel a retenti.*

- *Vous avez reçu mes lettres, contenant mes questions. Que répondez-vous ?*

- *Oui, au fil des mois, j’ai reçu vos courriers successifs, et j’ai été maintes fois tenté d’y répondre. Mais, à chaque fois que je m’apprêtais à le faire j’ai pensé que ceci risquerait engendrer de bien grands malheurs.*

Quels malheurs, de quel ordre ? Comment ? Mystère, fin de l’histoire.

La planète Ummo.

Le dossier Ummo est tentaculaire. Je ne lui vois pas d’équivalent, ailleurs. En nous plongeant dans ces centaines de pages, Jean-Jacques et moi tentons de relier les fils entre eux, moi comme scientifique, lui comme psychologue.

Selon leurs auteurs il s’agit d’une expérience de sociologie. Au départ, découvrant dans le livre de Sesma « Moi, le confident des extraterrestres » des éléments qui trahissent un contact réel avec d’autres expéditionnaires extraterrestres ils entrent en contact avec lui, pour établir un contact.

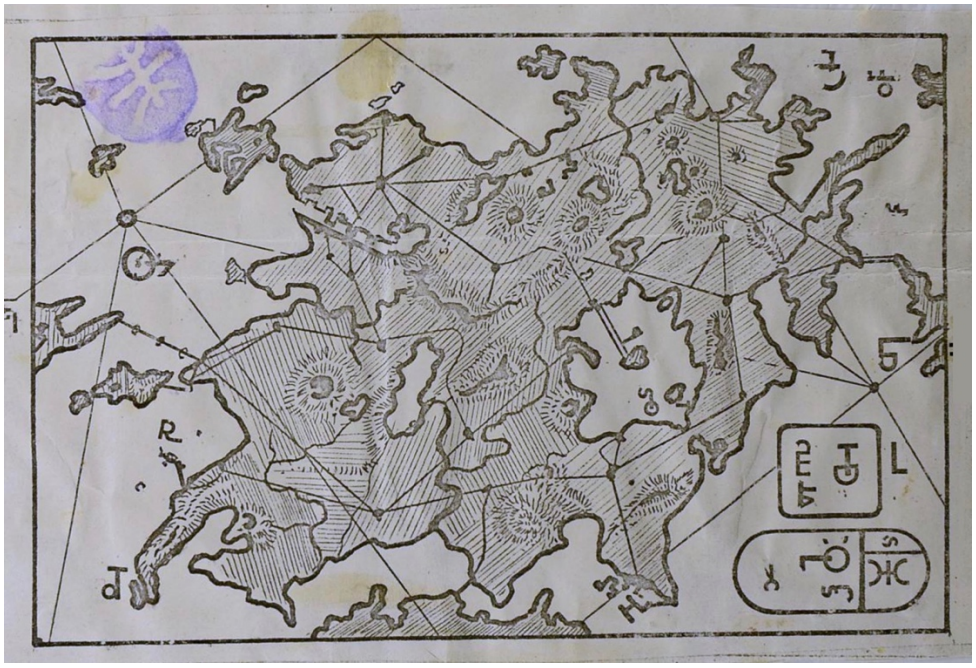
Effectivement, ce contact est établi avec, cette fois, ce que nous appellerions des « petits gris ». Certains suggèrent alors de poursuivre l’expérience, en communiquant à Sesma de nouvelles informations, pour mesure leur impact sur l’esprit des Terriens qui assistent à ses conférences.

Comment ? Un dispositif de la taille d’un petit pois, est posé quelque part dans la pièce, hors d’atteinte de l’assistance, qui scanne, neurone par neurone, les cerveaux des êtres humains présents.

Ça n’est pas invraisemblable. Nous faisons de même aujourd’hui, à une échelle évidemment beaucoup plus modeste.

Dans ces rapports, dicté à un mécanographe espagnol par un certain DEI 98, se trouvent des informations extrêmement variées. La planète Ummo est d'abord décrite. Elle est légèrement plus grosse que la Terre et sa révolution quotidienne s'effectue en 31 heures terrestres. La gravité y est vingt pour cent plus forte. Elle tourne autour d'une étoile moins chaude que notre Soleil[64]. Pour que l'insolation situe la planète « dans la bande de l'eau liquide » son orbite de situe donc un peu plus près et ainsi « l'année Ummo » équivaut à quelque chose comme 3 mois terrestres.

Porteuse d'un unique continent, celui-ci est exempt de tout relief, où l'altitude maximale ne dépasse pas 300 mètres au-dessus du niveau de la mer. Cet unique et vaste océan de la planète Ummo, occupant 60 % de la surface, est exempt de fosses océaniques et de la même façon sa profondeur ne dépasse pas quelques centaines de mètres.



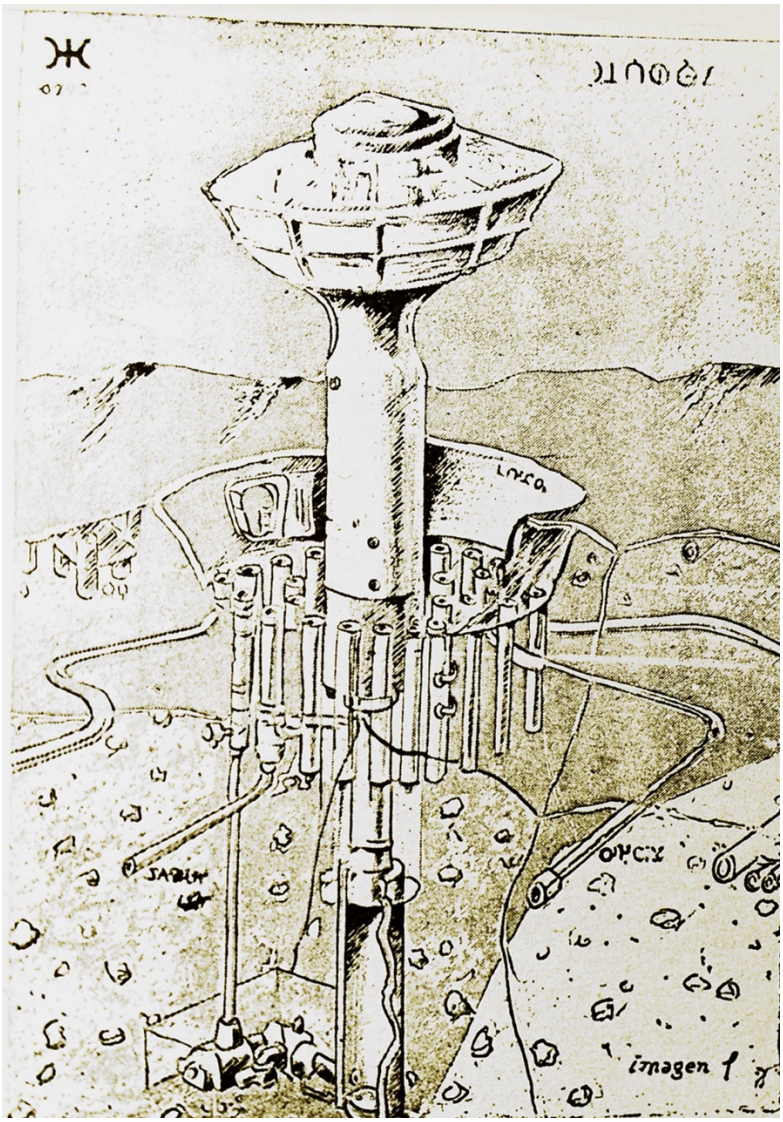
L'unique continent de la planète Ummo

On distingue un immense lac, attribué à un impact ancien d'une météorite. En bas et à droite, la trace du tampon dactylé que les Ummites glissent sur leur pouce pour signer leurs documents.

Leur habitat primitif : non pas des grottes, comme sur Terre (qui chez eux n'existent pas), mais des terriers, comparables à ceux qu'utilisent des animaux comme les hyènes, en Afrique. Aujourd'hui, ils habitent d'étranges demeures, en forme de soucoupes, posée sur un pilier comparable à ceux de certains ascenseurs terrestres. La maison émerge ainsi la nuit, alors que le système se rétracte le jour. La maison peut être animée d'un mouvement de rotation, pour suivre le mouvement du soleil de leur planète. Quand la maison est en

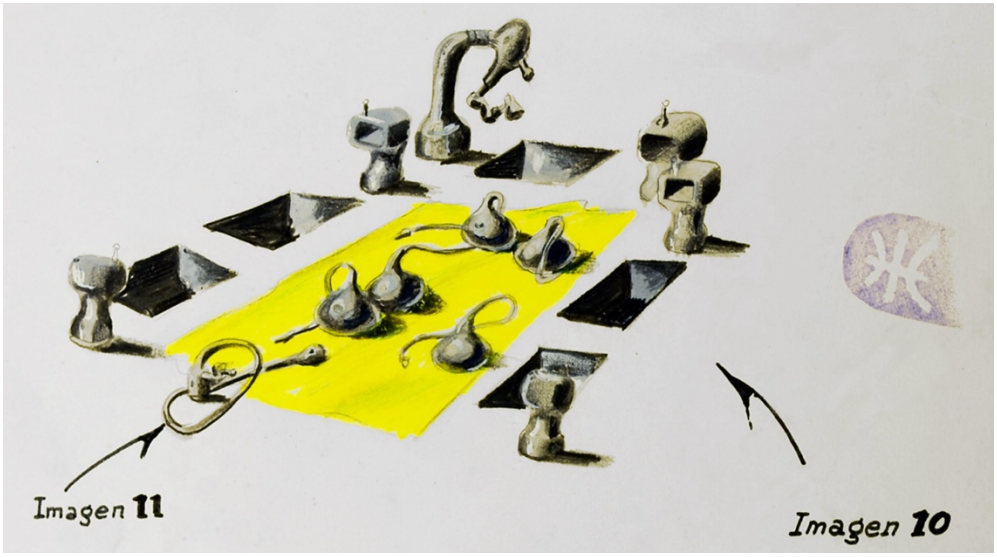
[64] La température superficielle du Soleil est de 5800° ce qui le classe parmi les étoiles de classe G. IUMMA, l'étoile solaire de UMMO, aurait une température superficielle proche de 5000° ce qui au passage ne cadre pas avec les données concernant ce qu'ils décrivent comme la leur : WOLF 424

position rétractée on voit que les fenêtres, visibles dans leur partie basse, se trouvent occultées.



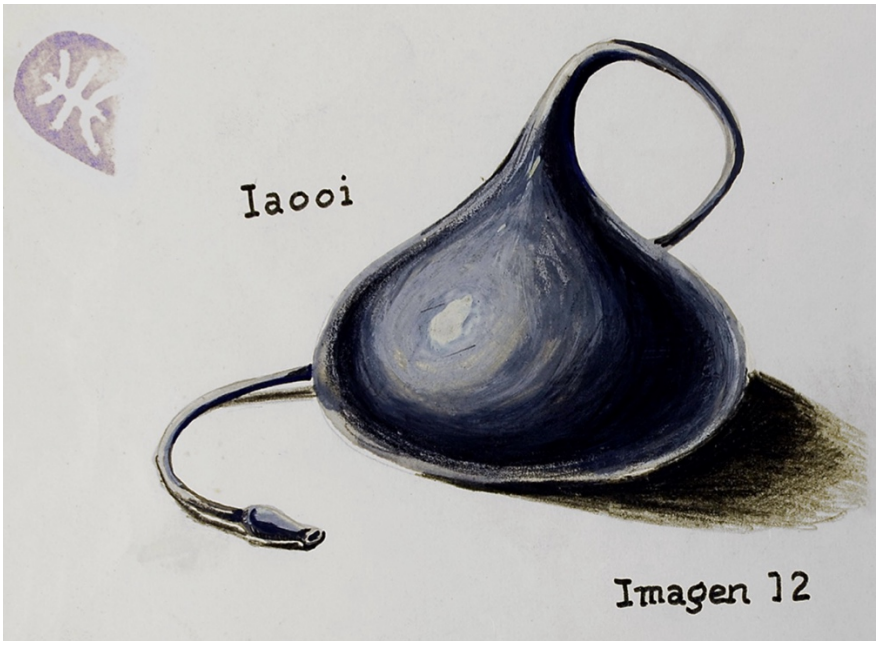
La maison sur Ummo

Dans le sol de nombreux canaux tubulaires, dont certains servent à acheminer des plats préconditionnés. En dessous, des cylindres dans lesquels se trouvent entreposées les réserves de tous ordre. Pas ou peu de pièces à usage spécifique. Pas de mobilier. Pour prendre les repas en position assise, c'est le plancher qui se rétracte, créant un emplacement où loger ses jambes. Cette configuration est obtenue en émettant un son qui se trouve codé dans l'ultrason, grâce au dispositif dont ils sont équipés.



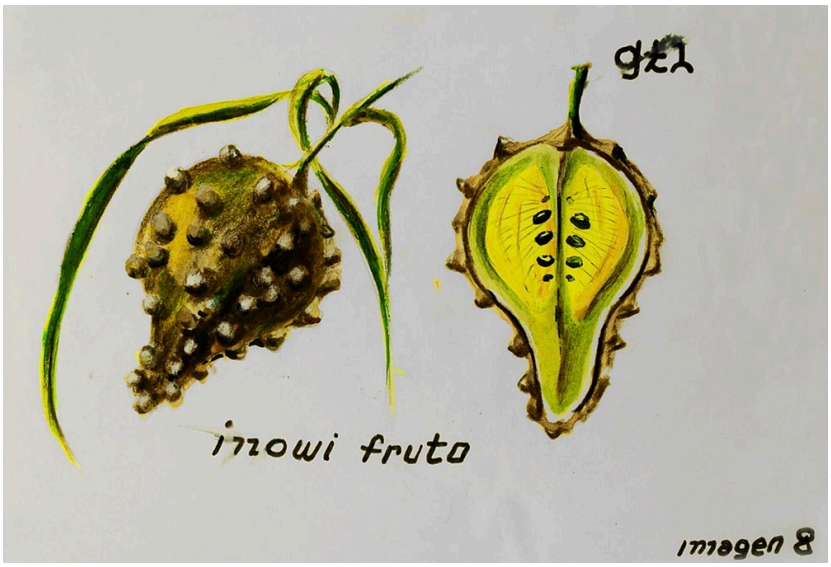
Une table, dressée pour cinq personnes

L'absorption des aliments se fait à l'aide de tubes reliés à un container l'IAOOI :



Pour l'ingestion des aliments

Les végétaux utilisés pour la consommation, sont cultivés dans des installations souterraines. Tout est acheminé, après conditionnement, à l'aide de canalisations visibles sur le dessin de la maison. Ci-après, un fruit de cette planète, très semblable à ce qui pousse chez nous :



Un des fruits qui pousse sur la planète Ummo

Les textes, parmi les premiers adressés à Sesma en 1966, fourmillent de détails, plus invérifiables les uns que les autres. A propos de leur aspect physique ils disent qu'ils sont de bonne taille, qu'ils ne fixent pas la mélanine et que leur teint pâle leur permet d'être confondus à des Nordiques, quand ils se mêlent aux Terriens. Leurs corps ne présenteraient qu'une unique tache chromatique.

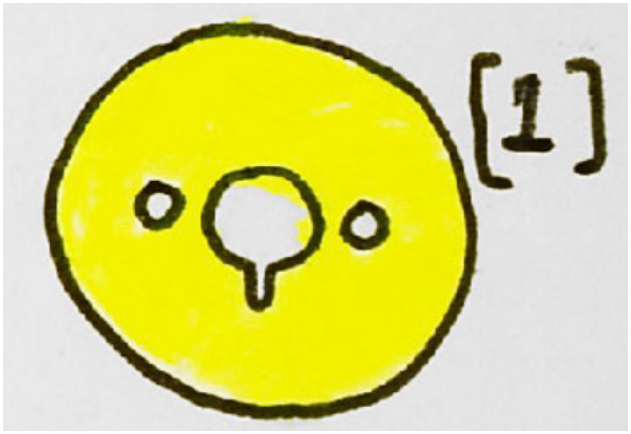
Ils disent posséder une olfaction comparable à celle d'un chien. Un Ummite raconte que, lors de son arrivée sur notre planète, après que ses compagnons lui font découvrir la blanquette de veau il est alors si étourdi par une telle symphonie de saveurs qu'il lui faut plusieurs jours pour s'en remettre.

Ils sont sensibles à l'infrarouge, spécialement aux extrémités des doigts de leurs mains, dotées comme les autres, de cinq doigts.

Quand ils évoquent leur histoire planétaire celle-ci, tout en comportant des épisodes aussi dramatiques que la nôtre, s'est très vite mondialisée.

Musique, poésie, arts : inconnus chez eux. Ce qu'ils ont le plus apprécié sur Terre c'est notre gastronomie. Vis-à-vis d'éventuels échanges culturels ce que nous pourrions leur envoyer ce ne sont pas des musiciens, mais des chefs cuistots étoilés.

Le vêtement se résume à une toge percée d'un trou, pour passer la tête de de deux pour les bras. Sa couleur, uniforme, désigne le statut et le type d'activité de celui ou celle qui le porte. En règle générale, la dimension esthétique est absente et tout laisse place à la fonctionnalité.



Ummo : le vêtement.

La population de leur planète est limitée à deux milliards d'individus. Leur système social pourrait être qualifié de totalitaire et est totalement géré, sur tous les plans, par une immense intelligence artificielle avec laquelle les individus communiquent en permanence. Aucune décision, aucun choix n'est effectué, à un quelconque niveau que ce soit, sans une consultation préalable de l'IA.

Dans le meilleur des mondes d'Aldous Huxley[65], la société terrienne est organisée en castes biologiquement fabriquées :

Les Alphas

- élite dirigeante ;
- scientifiques ;
- administrateurs ;
- intellectuels.

Les Bêtas

- cadres intermédiaires ;
- techniciens qualifiés ;
- assistants des Alphas.

Les Gammas

- employés subalternes ;
- personnel d'exécution.

Les Deltas

- ouvriers ;
- travailleurs répétitifs.

[65] Aldous Huxley, The Brave New World, 1932

Les Epsilons

- travaux les plus simples ;
- intelligence volontairement réduite par conditionnement embryonnaire.

L'idée centrale est remarquable : Personne n'est opprimé. Personne ne se révolte. Chacun est conditionné dès sa naissance à aimer sa propre condition.

Un Alpha trouve naturel d'être Alpha.

Un Epsilon trouve naturel d'être Epsilon.

La stabilité sociale repose non sur la force, mais sur le conditionnement psychologique

Ainsi le alpha se félicitent-il de ne pas avoir, comme les epsilons, à effectuer des travaux physique fatigants et à œuvrer dans des mines. Inversement les epsilons voient dans ces activités des tâches qui les délivrent des efforts intellectuels et de maux de tête, tout en les protégeant des conditions atmosphériques et des insolations.

Sur Ummo, même si la fourchette est moins étendue, tous les individus ne naissent pas avec le même capital, physique et intellectuel. Celui-ci est évalué très tôt, dans l'enfance, précisément en analysant la structure neuronale 3D, tâche confiée à un ordinateur traitant les données recueillies à l'aide d'un scanner, ce qui tient sur la planète, lieu d'évaluation psychologique.

L'éducation est totalement centrée sur le conditionnement. Les jeunes enfants dorment avec des écouteurs qui leur distillent tout le nécessaire[66], en gravant dans leurs neurones les lois Ummites fondamentales et l'idée que le système dans lequel ils sont amenés à évoluer est le meilleur possible.

Dès l'âge de 13 ans (en années terrestres) les jeunes sont enlevés à leurs familles biologiques et intégrés dans des écoles où leurs formations sont complétées, dans les secteurs compatibles avec la fourchette de leurs capacités, physique et mentale. Il n'est pas faux de comparer de telles sociétés à des fourmilières. De telles sociétés ont existé, ou existent encore, partout où un système totalitaire s'est installé. Dans les régimes fascistes et Nazis, les fourmilières humaines visaient la domination des autres groupes humains.

Quand nos Ummites arrivent sur Terre et contemplent les premières images ramenées par leurs sondes, ils découvrent … des noirs et des blancs, et en déduisent que les Terriens ont recours à des pigments pour changer la couleur de leur peau, à des fins religieuses ou coutumières.

Plus encore, leur ordinateur de bord, enregistrant des signaux radio codant les voix humaines, sature aussitôt complètement devant un tel flot. Là encore certains d'entre eux avancent l'hypothèse d'un changement de langue, également à caractère rituel.

Ça n'est qu'en prenant pied sur notre sol qu'ils découvrent l'inimaginable variété des ethnies, des langues et des coutumes, laquelle va immédiatement de pair avec un écosystème « 500 fois plus riche que le leur, tous règles confondus ».

[66] Technique qualifiée d'hypnopédie.

Dans la savane africaine, les gazelles d'une espèce se ressemblent toutes. Sur Ummo, pourquoi convoiter la femme du voisin, puisqu'elle est identique à la vôtre ?

Dans leur histoire les gens de Ummo n'ont pas échappé à la hiérarchie, à la dominance, et même la tyrannie d'un groupe, voire d'un unique individu. Et c'est justement à l'issue d'une phase particulièrement odieuse et monstrueuse qu'ils ont tenté de se doter d'une structure qui rende impossible que survienne une telle dérive. La famille est aussitôt identifiée comme le vecteur de propagation de visions dangereuses et antisociales.

A la recherche d'un équilibre.

Leur évolution historique nous interpelle, nous qui voyons émerger ces mêmes problèmes. Sur Terre on assiste à un mécanisme naturel de régulation naturel de la démographie. Quand le niveau de vie des habitant croît, ceux-ci ont naturellement tendance à faire moins d'enfants. Nombreux sont les pays dits développés où le nombre moyen d'enfants par famille est déjà descendu en dessous de celui permettant le renouvellement de la population. Cela va de pair avec un déséquilibre de la pyramide des âges.

Dans les pays européens, le remède mis en œuvre est l'immigration. Mais dans des pays comme le Japon et la Chine l'accent est porté sur la robotique et l'intelligence artificielle, des secteurs qui se développent de manière exponentielle.

L'activité manufacturière se réduit de plus en plus. D'ici quelques décennies on devra partir à la recherche de tâches qu'un robot ne puisse effectuer. Mais dans la société Ummite on trouve deux aspects techniques essentiels. On a vu que sur leur planète les hydrocarbures ne s'étaient pas formés. Très tôt, l'existence d'un fort champ magnétique, variable, a représenté une source d'énergie propre inépuisable, exempte de déchets. Pour alimenter une maison ou une usine, il suffisait alors de l'entourer d'une spire conductrice pour produire du courant alternatif, par induction[67].

Le nucléaire représente sur Terre une source d'énergie. Mais la fission de l'Uranium 235, ou du plutonium 239 s'avère terriblement polluante. Même la fusion des deux isotopes de l'hydrogène, le deutérium et le tritium, engendre des neutrons qui, en se logeant dans les parois des enceintes, rendent les matériaux qui les constituent radioactif. D'ores et déjà la fusion Bore Hydrogène, quasiment aneutronique représenterait un bon qualitatif notable[68].

Ce que prédisent les textes Ummo c'est l'existence, dans l'horizon de notre technologie, d'une espèce d'âge d'or où la production d'énergie, l'élimination des déchets de toutes

[67] L'Anglais Michael Faraday tenta d'exploiter en 1832 le flux et le reflux de l'eau salée de la mer du Nord, du aux marée lequel, conjugué avec la composante verticale du champ magnétique terrestres produisait effectivement un courant, grâce au champ électrique V X B. Mais vu les valeurs, c'était dérisoire.

[68] Le noyau du Bore B^{11} est composé de 11 nucléons. Sa fusion, exo-énergétique avec les l'hydrogène H1, donne naissance à u n noyau qui se scinde aussitôt en 3 hélium He^{4}, chacun étant constitué de quatre nucléons (deux protons et deux neutrons).

sortes[69] et les techniques de transmutation à basse température seraient totalement maitrisées.

Cela débouche alors sur une forme d'industrie éliminant toute intervention manuelle et dès ces textes des années soixante on trouve la constitution de tout objet, couche par couche, préfiguration de nos imprimantes 3D.

Aujourd'hui nos imprimantes 3D industrielles savent créer des objets en métal. Dans les imprimantes 3D extraterrestres, au bout de ce qui dans les nôtres est une buse un dispositif reconstitue, par une transmutation effectuée in situ, les atomes puis les molécules de l'objet à réaliser. S'agissant de copier un objet quelconque, ces systèmes sont aptes à en produire un, ou des doubles, à l'atome près. Et cela vaut pour les objets de nature organique.

Il est vrai que nous savons depuis longtemps mettre en œuvre un engineering biologique et même génétique.

C'est vertigineux, mais cela n'est nullement invraisemblable.

Alors, que reste-t-il ?

Les problèmes relevant de la biologie, de la génétique et de la sociologie.

Une planète systématiquement eugénique.

Selon eux, nombre des affections dont nous souffrons proviennent du fait que, par des pharmacopées, des substituts de tous ordres, nous avons permis à des individus porteurs de tares, plus ou moins lourdes, survenant à la suite de mutations, susceptibles de perdurer. L'exemple-type, sur Terre est l'hémophilie, où des femmes donnent naissance à des individus mâles dont le sang ne porte pas de facteur VIII[70] . Elle se transmet par les femmes, pas par les hommes.

Ella a existé de tous temps. Au II° siècle certains rabbins constatent que les enfants mâles d'une famille, après avoir été circoncis, meurent d'hémorragie. Leurs frères en sont alors dispensés.

La première description de la maladie est effectuée en 1803 par le médecin allemand Conrad Otto. Le terme d'hémophilie apparait dans les revues médicales en 1828. L'apparition la plus spectaculaire résulte de la mutation qui affecte la reine britannique Victoria.

[69] Le déchet ultime des toutes des décompositions nucléaire étant l'hélium, plus léger que l'air, donc quittant naturellement l'atmosphère de toute planète pour prendre sa place au sommet de celle-ci.
[70] Le facteur VIII pour l'hémophilie de type A, la plus fréquence, le Facteur IX pour l'hémophilie de type BD. Les deux carences ont le même effet.



La reine Victoria d'Angleterre 1819-1901

Elle a neuf enfants, quatre fils et cinq filles. Surnommée « la grand-mère de l'Europe », ses filles donneront naissances à de nombreuses lignées, en Allemagne, Espagne, Russie. Sur ses quatre fils, un seul, Léopold, est hémophiles, et sur ses cinq filles, deux propagent la maladie en Espagne et en Russie, où le cas le plus célèbre est celui du jeune Tsarevitch Alexis Nikolaïevitch, fils du Tsar et son héritier[71].

Quand on actionne ses articulations, ne serait-ce qu'en marchant, il se produit nombre de micro hémorragies au sein de celles-ci. Chez les hémophiles le phénomène devient invalidant. Depuis les années soixante, l'identification du facteur faisant défaut a permis de suppléer à cette carence par une injection, quand l'hémorragie se manifeste. Ce facteur était initialement extrait du plasma sanguin de milliers de donneurs. Aujourd'hui il est produit par génie génétique. Le coût moyen unitaire est de l'ordre de mille euros par injection. Au cours de sa vie, un hémophile sévère représente, pour la société, un coût de plusieurs millions d'euros.

Les Ummites considèrent que l'application de cette politique, à d'autres affections, potentiellement transmissible à la descendance, telles :

- Le diabète de type II,
- La mucoviscidose,
- Certains types de cancers,
- Certaines tendances à l'obésité,
- Certaines allergies,
- Certains troubles psychiatriques sévères ;

[71] On compte en France 7000 hémophiles. 35.000 aux Etats-Unis.

comme parfaitement incompréhensibles à leurs yeux[72]. Chez eux il est hors de question que se forment des couples qui n'aient pas fait l'objet d'une analyse génétique prénuptiale complète.

Quand une mutation donne naissance à une maladie, quelle que soit sa nature, qui affecte la vie d'autres représentants de l'espèce, son éradication sur Ummo est expéditive. Ils citent l'exemple de l'une d'elle qui, affectant les organes assurant le lien télépathique, peuplait le sommeil des contemporains de hurlements terrifiants. Ils écrivent :

- *Quand la source fut identifiée, ces pauvres malades furent immédiatement délivrés, étant tués à distance à l'aide d'un pinceau de micro-ondes. Et le peuple respira enfin, délivré de cet esclavage mental.*

A la lecture de ces éléments on voit que la comparaison avec la fourmilière n'est pas un vain mot. En effet la gestion de l'ensemble social et des ressources, de possibles évènements[73], relève au quotidien d'une optimisation effectuée par une IA planétaire.

On comprend alors que, face à notre demande d'entrevue, la réaction immédiate ait été un examen encéphalique et génétique.

Ayant éradiqué au fil des génération nombre des maladies qui nous frappent, contrôlant avec précision leur environnement, exempt pollutions de toutes sortes, et de stress, cette population d'extraterrestres jouit donc, pendant une moyenne évaluée à 120 années terrestres, d'une excellente santé.

La délinquance existe cependant, sporadiquement, de manière exceptionnelle, allant jusqu'au meurtre, affectant les adultes comme les enfants. Dans ces conditions les sujets perdent leur statut d'êtres humains et aucune rééducation n'est envisagée. Ils sont alors requalifiés et utilisés comme matériel pour des expériences de biologie. Mais il est précisé que ces manipulations ne sont pas pour eux cause de souffrance.

Dans ce panorama le terrien cherche en vain un espace ludique, une activité sportive ou récréative. Le concept semble absent chez les Ummites qui, assistant à un match de football, ont du mal à comprendre pourquoi les êtres humains persistent à courir après un ballon. Les sports de glisse sont absents, de même que la présence de neige en altitude, faute de reliefs. Les « dramatiques », le plus souvent axées sur la violence, dont les Terriens se repaissent quotidiennement, devant leurs téléviseurs, leur semblent relever d'une pathologie.

Toute manutention, tout usage des mains, semble avoir progressivement disparu chez eux. L'évolution de l'espèce a été guidée en ce sens pour faire des mains des organes consacrés, non à la préhension, mais à une vision dans l'infrarouge. Il faut s'arrêter à ce détail. Ils précisent que les extrémités de leurs doigts sont devenues si sensibles qu'ils doivent utiliser leurs jointures pour presser les boutons d'un ascenseur ! Ils ajoutent qu'en arrivant sur Terre il leur fut physiquement impossible d'utiliser une machine à

[72] La stérilisation des filles porteuses, en leur donnant libre accès à l'adoption d'enfants, représenterait effectivement une solution.

[73] Il n'est pas fait mention, dans les textes, de possibles catastrophes climatiques. La sismicité et le volcanisme, chez nous liés à l'activité exceptionnelle du magma terrestre, sont absents sur leur planète.

écrire et que pour la composition des lettres ils durent, dans tous les pays, s'assurer le concours d'un mécanographe[74].

Nous devons envisager ce que sera notre futur. Le leur évoque une symbiose totale homme-machine. La commande des machines : à la voix, à l'aide de fréquences transductées en infrarouge. L'écriture : par dictée vocale. Pour tout travail : une large mise en œuvre de l'intelligence artificielle, à tous niveaux, dans tous les secteurs.

S'ils ont la tête dans les étoiles, il est clair qu'ils gardent les pieds sur terre, en toute chose.

Rafael Farriols ayant de nombreuses maîtresses reçoit un jour un rapport disant « comme vous vous intéressez beaucoup à la vie sexuelle nous vous adressons un document relatif à la façon dont ce sujet est traité, sur Ummo.

Suit alors une notice technique aussi excitante que le mode d'emploi d'un système d'éclairage ou de chauffage domestique.

La stabilité des couples est essentielle. A cette fin le premier acte sexuel est perpétré après que les conjoints se soient abstenus de toute hygiène corporelle afin que l'imprégnation olfactive joue au maximum. La beauté est un mot vide de sens pour eux.

Que cette planète existe ou non, ces pages représentent pour nous une incitation à envisager des façons de vivre totalement différentes[75].

Le seul point commun est cette activité méditative (3 heures par jour), qui est au centre de toute leur existence, où le sujet se trouve en contact avec l'âme collective planétaire, ce qui induit chez lui une profonde source de bien-être. On rejoint alors le détachement des bouddhistes, pour qui l'intérêt doit effectivement se porter en priorité vers cette composante invisible du monde, en se détachant de « l'impermanent ».

Il reste un point essentiel :

La mort.

Si cette activité d'entrée en contact quotidienne avec le « BB » est au centre de la vie, les individus se perçoivent comme « les yeux et es oreilles de leur âme collective planétaire ». Lors de ces contacts, ils l'informent et considère qu'il s'agit là de leur tâche principale, de leur fonction, de leur raison d'être essentielle. Comme chez les bouddhistes, l'attachement humain n'est pas de mise, la sentimentalité s'exerçant d'individu à individu laissant place à cette symbiose extatique avec l'invisible.

Dans cette optique la séparation des jeunes de leur parents biologiques, à l'âge de 13 ans, n'est vécue dramatiquement, ni chez les uns, ni chez les autres. Les règles de leur société imposent que la communication cesse dès que l'enfant quitte le bercail. On trouve ici une forme de retour à une animalité, gage d'équilibre de l'espèce.

---

[74] Dont la discrétion, à de très rares exceptions près, fut maintenu grâce à une rétribution conséquente.

[75] Alors que nos œuvres de science-fiction, exception faite de livres comme le Meilleur des Mondes ou autres, ne représentent le plus souvent qu'une projection de nos propres façons de nous comporter.

La fin de vie n'est nullement perçue comme dramatique.

Essentiellement, elle se profile quand les facultés permettant, à travers la méditation, d'entrer en contact avec l'âme collective, finissent par s'amenuiser, jusqu'à disparaître complètement. La fin de vie s'impose alors comme une évidence, pour cause d'inutilité et de ce qui représente la raison de vivre essentielle.

Comme ce phénomène de dégénérescence affecte le couple, ce sont les deux conjoints qui décident de mettre un terme à leur existence. L'opération est ritualisée de longue date. Pour la première fois de leur existence ceux-ci se trouve mis en présence de leur descendance. Puis les deux s'allongent sur une couche. Une cloison transparente, les séparant de l'assistance, s'opacifie progressivement, puis les deux sont tués instantanément à l'aide de micro-ondes. Enfin les atomes de leurs corps son transmutés en hélium. La cloison s'ouvre alors et les descendant, en inhalant ces quelques atomes, perpétuent une coutume ancestrale qui rappelle le cannibalisme familial des indigènes de Papouasie.

Ci-après l'extrait de la lettre reçue en 2003 par le docteur Jacques Costagliola (décédé) :

> *Nos techniques médicales nous permettent de compenser les dégénérescences physiologiques liées à la vieillesse. Nos anciens ne souffrent pas des problèmes osseux, cardiovasculaires ou des formes de cancer qui sont endémiques sur OYAGAA. Toutefois, nous souffrons dans notre vieillesse d'une dégénérescence cérébrale que nous ne savons ni ne voulons éviter. Cette dégénérescence ôte peu à peu à nos anciens toute faculté d'émission par voie télépathique. La transmission orale n'étant plus possible du fait de la sclérose totale des cordes vocales, ils sont condamnés au silence. La dégénérescence se poursuit jusqu'à disparition totale de toute faculté de réception télépathique. Cette disparition de toutes les facultés naturelles de communication s'accompagne d'une lente et inexorable détérioration des capacités mnésiques. Ceci se traduit, pour nos anciens, par une perte progressive d'autonomie qui porte une atteinte inacceptable à l'intégrité de l'OEMII[76] et au sentiment de respect personnel que vous appelez dignité.*
>
> *Si la vie se résumait au maintien autonome des fonctions végétatives, notre longévité saurait alors excéder les 140 ans terrestres. Toutefois si on exclut les décès accidentels, la mort sur OUMMO est un acte volontaire qui se produit - sauf exception - entre 432 XEE[77] et 575 XEE (de 91 à 121 ans terrestres).*
>
> *CEREMONIE DE CONVERSION DE L'OEMII EN HELIUM :*
>
> *La mort est pour nous l'aboutissement ultime de l'existence et revêt une importance aussi capitale que la célébration matrimoniale, la conception et la naissance d'un enfant. La cérémonie de conversion en hélium, équivalent pour nous de la crémation, est méticuleusement préparée par l'ancien qui se prépare à mourir. Cette décision est en général prise conjointement par les deux époux*

[76] L'homme au sens générique du terme (l'espèce humaine)
[77] Unité de temps sur Ummo

qui en font part à leurs enfants ainsi qu'à leur ministre du culte. La mise à disposition d'un salon funéraire est alors planifiée pour l'OMGEEYIE[78] qui réunit au complet ses enfants et leurs conjoints jusqu'à la cinquième génération. Un repas frugal est suivi d'une émouvante séance d'adieux à la fin de laquelle la famille est invitée à visionner un documentaire comprenant les séquences choisies qui résument la vie passée de l'OMGEEYIE qui s'apprête à partir. Les vieux époux s'isolent alors côte à côte en se tenant la main, face à l'assistance, derrière une vitre qui s'opacifie lentement afin qu'ils jouissent une dernière fois du bonheur de contempler à travers leurs descendants leur contribution active à la perpétuation et l'amélioration du réseau social d'OUMMO et l'accomplissement de toute une vie.

Le XANMOO[79] qui surveille en permanence les paramètres biologiques des deux OEMII détermine l'instant précis où une paix profonde envahit l'OMGEEYIE, marquant l'entrée dans la phase méditative indiquant l'acceptation d'abandon de l'OEMII. Un éclair de lumière bleue indique à l'assistance le moment d'émission d'un champ gravitationnel à hautes fréquences qui provoque la mort instantanée par destruction des cellules cérébrales. Le processus de conversion des atomes composant les cellules corporelles en hélium est alors amorcé. Une partie de cet hélium est diffusé dans la pièce, mélangé à une composition aromatique spécialement élaborée pour l'occasion par l'OMGEEYIE même. Chaque membre de la famille inspire alors symboliquement les derniers effluves de ses ancêtres dont l'intégration volontaire à la psyché collective d'OUMMO est désormais effective.

Pour OUMMOAELEWE

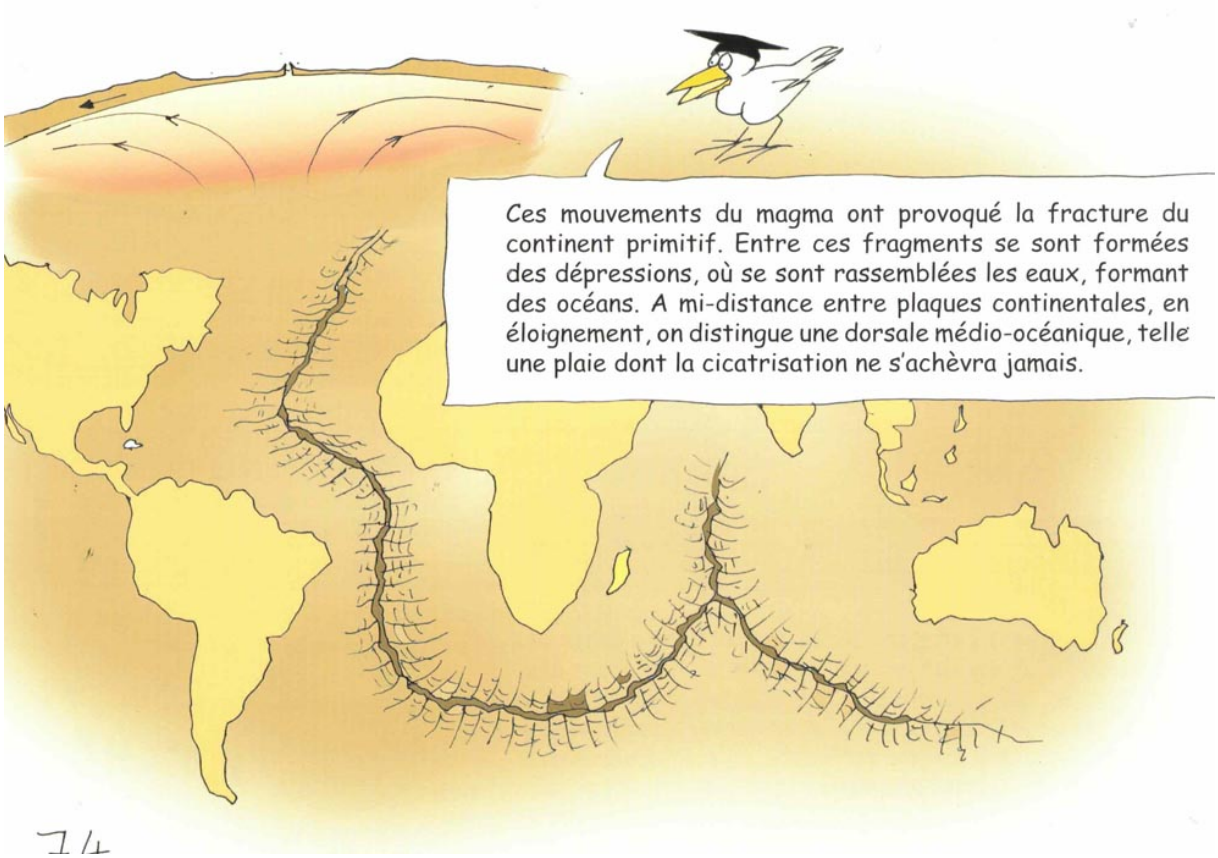
NABGAA 112 fille de DORIO 34, approuvée par AYIOA 1 fils d'ADAA 67

Que penser de tout cela ?

Nous avons, Jean-Jacques et moi, face à cet amoncellement de données, des approches, des regards différents. On pourrait résumer cela en disant que ces textes nous amènent surtout à voir notre propre planète sous un jour différents, sous tous ses aspects.

- *Je vois des corrélations dans un certain nombre de points. Le premier est que leur planète est porteuse d'un unique continent, plat comme la main. Donc chez eux la tectonique des plaques est absente. Sur Terre ce sont les mouvements de convexion, au sein du magma qui, soit éloignent les continents les uns des autres, soit au contraire le font se télescoper. Ceci a deux effets. Là où se situe l'éloignement, l'écorce terrestre, la couche de magma solidifiée est plus fine. A mi-distance de deux continents qui s'alignent, cette couche craque et le magma émerge, plus se solidifie. Cela donne ce qu'on appelle des dorsales médio-océaniques.*

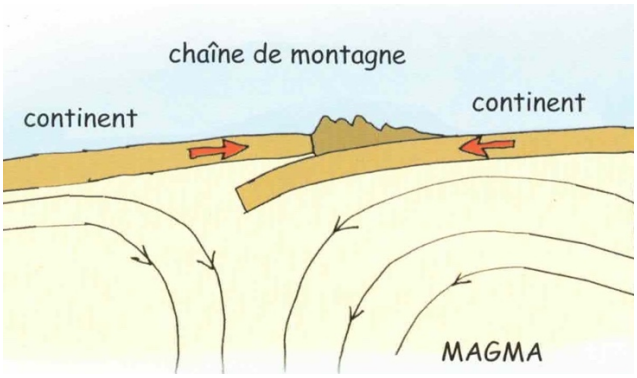
[78] Le couple homme-femme
[79] Ordinateur en réseau planétaire.



Les dorsales médio-océaniques

- *Ces dorsales sont comme des plaies qui ne cicatrisent jamais.*

- *Tout à fait. Inversement, quand deux plaques se télescopent, l'une glisse en dessous et les roches qui la constituent ne tardent pas à se reliquéfier. En surface, sur l'autre, forment des montagnes[80]. Ainsi la chaîne des Alpes résulte de la collision d'une plaque dont le fer de lance est l'Italie. L'Himalaya : c'est la conséquence de la dérive d'un fragment de continent, représentant l'Inde qui, en se détachant du sud-est de l'Afrique, s'en est allé télescoper le plateau tibétain.*



La collision des plaques crée les montagnes

[80] On désigne cela par le mor « orogénie ».

- *Dans les massifs jeunes, l'érosion due aux précipitations, conjuguées aux variations de température, peut atteindre 2 mm par an. Si le moteur de cette orogénie disparaissait, si on pouvait, d'un coup de baguette magique, supprimer les mouvements convectifs dans le magma, en cinquante à cent millions d'années les Alpes, l'Himalaya, la cordillère des Andes seraient réduits à de reliefs modestes, aisément franchissables. En un milliard d'années tout disparaîtrait.*

- *L'érosion, c'est-à-dire la pluie, la neige et le mouvement des glaciers ?*

- *En altitude, le plus efficace résulte de la liquéfaction et de la solidification alternées de l'eau dans les fissures rocheuses. Ca c'est d'une efficacité redoutable[81]. Dans ce contexte il nous fait regarder ce qu'il en est pour les trois autres planètes « telluriques » (solides, par opposition aux planètes gazeuses que sont Jupiter, Saturne et aux planètes comme Uranus et Neptune, qui sont glacées).*

- *Et qu'en est-il ?*

- *Vénus est celle des trois planètes qui possède un magma encore actif, alors que mercure est une planète totalement inerte, géologiquement inactive. Mars est entre les deux. Mais dans aucune des trois on n'observe une fracture de leur manteau et une fragmentation en continents, en plaques solidifiées.*

- *Mais comment pourrait-on le mettre en évidence ? Sur ces trois planètes il n'y a pas d'eau à l'état liquide ?*

- *Si on vaporisait l'eau de tous les océans de la Terre, ses dorsales médio-océaniques signeraient le phénomène.*

- *Donc, sur ces quatre planètes solides du système solaires, une seule a un magma, dont la persistance de son activité à engendré une fragmentation du continent primitif et l'apparition de chaînes montagneuses.*

- *Pourquoi le magma de la terre est-il resté plus actif que celui de ses trois sœurs ?*

- *Lors des premières missions lunaires les astronautes ont ramené des échantillons de roche. Et là, surprise, ceux-ci ont révélé une composition très semblable à celle du manteau terrestre. Cela a immédiatement imposé comme scénario le plus plausible de la naissance de Lune une collision avec un astre de la taille et de la masse de Mars[82].*

---

[81] Qui oblige les Alpinistes à effectuer leur ascension très tôt, voire en les commençant de nuit, à l'aide de lampes frontales, pour éviter les chutes de pierre issues du dégel.

[82] Auquel les astrophysiciens ont donné le nom de Théïa (dans la mythologie Antique c'est la mère de Selena, la Lune). Avec un diamètre évalué à six à huit mille kilomètres (celui de Mars) et une masse représenterait 20 % de celle de la Terre.

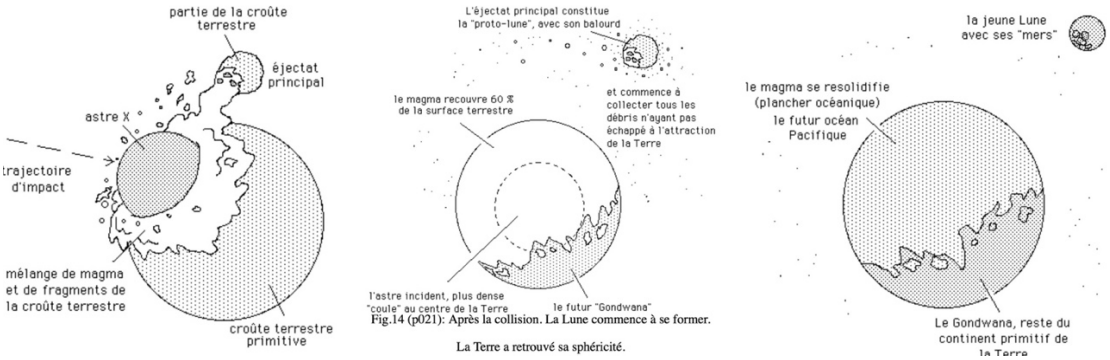


Fig.14 (p021): Après la collision. La Lune commence à se former.

La Terre a retrouvé sa sphéricité.

La formation de la Lune en tant qu'éjecta suivant une collision, en 3 images

C'est donc le schéma qui est maintenant admis au sein de la communauté scientifique. Mais il existe un aspect qui n'est jamais évoqué. Cette collision apporte une énergie cinétique[83] qui se transforme automatiquement en chaleur, donc relance l'activité magmatique terrestre. Et cela nous amène à nous poser la question : « à quoi aurait ressemblé la Terre si cette collision ne s'était pas produite ? »

- *La Terre n'aurait alors eu qu'un unique continent ?*

- *Sans montagnes, sans ces barrières, ces multiples mers, lacs, îles de toutes sortes qui font de la Terre une véritable mosaïque sur le plan biologique. Sans cela la Terre n'aurait eu qu'un nombre très limité de biotopes :*

    - *Régions côtières*

    - *Grands déserts intérieurs*

    - *Différentiation selon la latitude.*

- *Ainsi l'affirmation selon laquelle la Terre aurait une richesse biologique des centaines de fois plus importantes que celle de cette planète Ummo ne paraît pas absurde. Au contraire, cela parait logique était donnée son histoire très particulière.*

- *Et ce qui vaut pour la vie animale vaut aussi pour les différenciations raciales, ethniques, historique, culturelles et techniques.*

- *Sur Terre cohabitent des êtres humains vivant à l'âge de Pierre, au cœur de la Nouvelle Guinée, tandis qu'aux Etats-Unis des gens commencent à faire du tourisme spatial.*

- *Sur Mars existe un volcan, Olympus Mons, portant l'altitude à 22 kilomètres. Mais cela n'est possible qu'en l'absence de précipitations. S'il pleuvait sur Mars, ce volcan n'aurait jamais pu s'élever aussi haut. A la moindre éruption, les précipitations disperseraient aussitôt les matériaux éjectés.*

[83] Entre 10^{31} et 10^{32} joules selon les estimations.

- *Donc cela corrobore l'absence de reliefs, et de fosses océaniques, sur cette planète Ummo.*

Le colloque d'Alicante.

Les groupes de Madrid et de Barcelone ont décidé d'organiser un colloque à Alicante, dans un hôtel au bord de la Mer. En effet, depuis plus d'une année, les Ummites se font rares. Antérieurement, la tenue d'un colloque avait toujours stimulé les envois de lettres et de rapports. Les Espagnols tentent donc de relancer la machine en ayant recours à ce procédé.

La presse sera conviée. Un journaliste de Madrid, Marhuenda, sera présent. C'est le premier journaliste à recevoir un courrier vu qu'en règle général les Ummites fuient la publicité. Mais il y a deux ans Marhuenda assurait la permanence à la radio de Madrid, le soir de Noël. Il eut l'idée de dire :

- *Et maintenant nous aurons une pensée pour les extraterrestres qui vivent sur Terre, si loin de leur planète et séparés parfois e leurs proches depuis parfois de longues années.*

Les Ummites lui avaient aussitôt écrit que cela les avait beaucoup touchés.

Jean-Jacques ne pourra pas venir. Je décide d'y aller quand même. Quand j'arrive, les contactés sont occupés à donner interview sur interview à la radio, la presse. Mon arrivée passe totalement inaperçue. Ribera et Farriols sont totalement absorbés par leurs multiples tâches d'organisateurs. Les exposés se succèdent avec une assistance qui atteint deux cent personnes. Comme d'habitude, beaucoup de phrases commencent par le classique:

- *Creo que* … etc …

Avec des palabres sans fin, à l'espagnole.

J'arrive à Alicante samedi en milieu de journée samedi. Des jeunes étudiants, deux garçons et deux jeunes filles, m'abordent. Deux parlent couramment le Français.

- *Vous connaissez Rafael Farriols, Antonio Ribera, Juan Dominguez etc ?*

- *Oui, je les connais tous.*

- *Vous avez bien de la chance. Nous avons vainement tenté de raconter à monsieur Ribera ce qui nous est arrivé hier soir.*

- *Qu'est-ce qui s'est passé ?*

- *Il était près de minuit. On est allé sur la plage. Elle était déserte, à part un engin en forme de disque, posé à quelques centaines de mètres. Comme la Lune était levée, on a très bien vu ce qu'un type en est descendu et s'est enfoncé aussitôt dans le bois de pins*

voisin. Puis l'engin s'est élevé, s'est éloigné de la plage, et soudain, il a disparu totalement, comme s'il s'était dématérialisé. On a voulu raconter cela à monsieur Ribera, mais il nous a dit qu'il n'avait pas le temps, parce l'hôtel était complet et que Farriols et lui devaient trouver en urgence des chambres chez l'habitant, pour loger des gens venus en plus grand nombre que prévu. Et il nous a plantés là.

Les quatre semblent assez déçus, étant venus des quatre coins du pays pour assister à cette convention. Je pars à la recherche de Ribera que je trouve à la réception de l'hôtel, une liste des intervenants et des participants à la main. J'entends qu'il s'énerve, au téléphone. Il m'écoute distraitement, mais je comprends vite que sa préoccupation de trouver de quoi loger à une bande de gens mobilise toute son attention.

Les quatre me quittent en me remerciant d'avoir essayé. La dernière journée du colloque, dimanche, tire à sa fin. Les derniers visiteurs repartent, les uns après les autres. Je retrouve Rafael, Antonio et Lou. Nous dinons, assez tardivement, comme il est de coutume en Espagne. Rafael nous entraîne alors à l'écart, dans le salon de réception de l'hôtel, désert.

Il est toujours propriétaire de sa société, CRITESA, qui fabrique des objets en métacrylate, en tous genres, allant des sièges, de vastes baies transparentes, remplaçant le verre aux lavabos et WC. A sa main, sa dernière création : un attaché-case en matériau transparent. Il en extrait une lettre cachetée.

- *Quelqu'un m'a fait remettre, par la réception de l'hôtel, un document en deux parties. Il y a une lettre, signée Ummo, et une lettre cachetée avec demande expresse de ne l'ouvrir que dimanche à minuit. Là, nous y sommes.*

Cela dit, en gros :

- *Nous nous sommes rendus à votre colloque où nous sommes restés quarante-six minutes. Ce temps a été suffisant pour nous pour équiper un certain nombre de personnes de microémetteurs miniaturisés, d'une taille submillimétrique, que nous pourriez aisément confondre avec une particule de graphite. Autoadhésif, on le fixe sur l'épaule d'une personne d'une simple pression de la main. Dans la salle nous avons installé sur une corniche, un objet de la forme et de la taille d'un pois, celui-ci pouvant se déplacer librement, de manière autonome, par système MHD. Grâce à lui nous avons pu bénéficier d'une retransmission complète des exposés et débats qui se sont tenus dans la salle. A la fin du colloque, nous avons récupéré la sphère tandis que les « paillettes de graphite », ayant accompli leur tâche, ont été transmutées en hélium.*
  Nous avons pu constater que personne, dans votre groupe, ne semble avoir fait l'effort de réellement comprendre et exploiter ce que nous vous avons remis pendant toutes ces années. Vos discours, vos articles et vos livres ne sont que bruits et palabres sans intérêt. Dans leur plus grande majorité les membres de votre groupe persistent à ne voir dans ces lettres qu'ils détiennent que le moyen d'acquérir de l'importance aux yeux d'autrui.

C'est sévère. Pour alléger l'atmosphère je raconte alors ce que m'ont dit les quatre.

Après un silence, Rafael soupire et lance « Hostia ![84] »

Passage à vide.

A la suite de ce colloque les nouvelles lettres émanant de Ummo se présentent comme un curieux mélange. Il y a d'abord des envois qui, tout en portant l'empreinte dactylée violette des premiers documents et où l'examen des caractères atteste que le document a été émis par la même machine à écrire, peuvent être assimilés :

- Soit à des faux

- Soit à une opération de désinformation menée par la source elle-même.

Lou a ainsi toutes les peines du monde à dissuader Rafael de donner suite à une demande formulée dans un courrier de se rendre dans le désert marocain en emportant avec lui une bouteille thermos contenant un échantillon de son sperme.

Dans un autre courrier les Ummites annoncent leur décision de révéler leur présence au monde scientifique en émettant un message dans la fréquence des micro-ondes. La date et l'heure de l'émission du message, bref, sont précisées, ainsi que les latitudes et longitudes des emplacement des antennes, sur Terre, où celui-ci pourra être capté.

Rafael se rend aussitôt à Jodrell Bank, lieu où, en Angleterre, était installé un des plus puissants radiotélescopes. Il montre aux responsables la lettre Ummo, en ajoutant qu'il est prêt à assumer les frais de l'opération. Mais il est immédiatement pris pour un fou, et jeté dehors.

Lou me téléphone en me demandant d'intervenir :

- *Rafael ne voudrait pas manquer cette chance, si celle-ci se présente.*

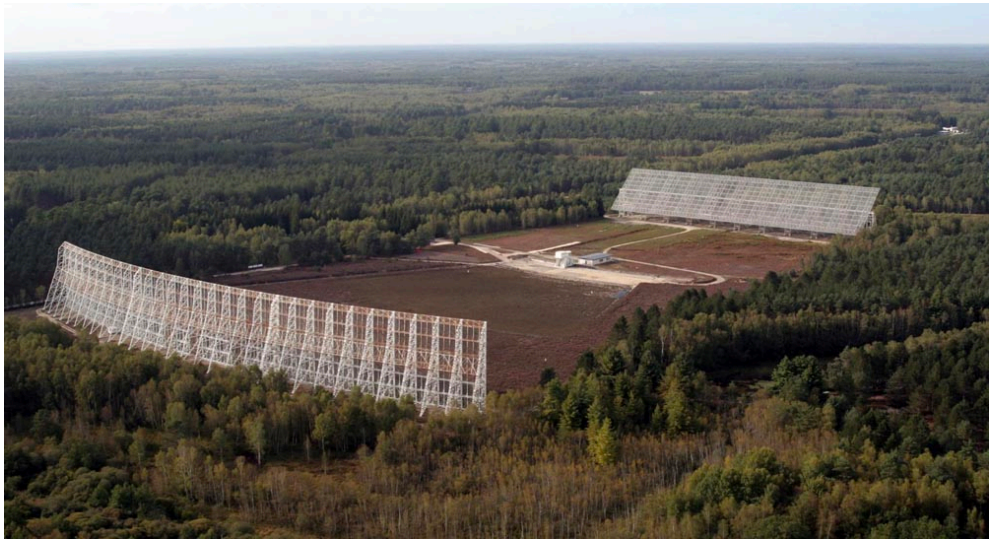
- *Mais, Lou, si ces gens projettent d'émettre un message en direction de stations terrestres il leur serait plus simple de faire coïncider cette émission avec leur planing d'observation, relativement facile à obtenir.*

- *Tu sais ce qu'on dit en Espagne. Rafael, pour être sûr de gagner à la loterie, est prêt à acheter tous les billets.*

Pour la petite histoire de parviens à amener le responsable du radiotélescope français de Nançay, mon ami Biraud, à orienter le système dans la direction opposée, au jour et à l'heure dite, pendant huit minutes.

Évidemment, je ne lui parle par de cette lettre Ummite. Mais j'invoque, quelques heures avant, un bruit courant de la manifestation d'une observation d'une supernova.

[84] En français cela se traduirait par « Nom de Dieu ! » et en anglais par « Damned ! »



Le grand radiotélescope français de Nançais. Val de Loire. Créé en 1960

Pour ne pas manquer une chance de réaliser une observation historique[85], Biraud s'exécute, mais ne trouve rien.

Le puzzle

J'aime bien la façon donc fonctionne Jean-Jacques, et c'est ce que font les psys : au-delà de ce qu'on peut leur raconter ils s'efforcent de lire à travers les mots qui leur locuteur ce qui se trouve exprimé dans son discours.

En parcourant tous ces récits, rapports, lettres, Jean-Jacques cherche donc une trame, une architecture sous-jacente :

- *Même si on sait maintenant que toute cette histoire ne peut plus être reléguée au rang d'une fiction, reste à savoir ce qu'il y a derrière. Est-ce que cette foutue planète peuplée de bonshommes de type nordique existe ? Derrière tout ce qu'ils racontent, je trouve des contradictions.*

- *Lesquelles ?*

- *Par exemple, dans une longue lettre reçue en 1966 par Sesma, consacrée à leur vie quotidienne, il y a un ensemble de pages décrivant la vie d'une famille-type. Et là, on se croirait au sein d'une famille de la middle class américaine.*

- *Pourquoi pas ?*

- *Ce qui cloche, c'est qu'ils parlent de jeux, ajoutant qu'ils plaisantent entre eux.*

[85] La fréquence de manifestation d'une explosion de supernova, dans notre galaxie, la voie lactée, est d'une par siècle. La seule qui se produit dans une époque récente fut en 1987. Beaucoup d'instruments, en maintenance, manquèrent alors cette occasion unique. La précédente fut observée à l'œil nu par Johannes Kepler en 1604.

- *Et alors ?*

- *Comment des êtres qui ont la peau des doigts si sensibles qu'ils ne peuvent même pas presser un bouton dans un ascenseur pourraient-ils manipuler des jouets quelconques, un simple ballon ? Et s'ils savent plaisanter, pourquoi n'en trouve-t-on aucune trace dans le millier de pages que nous avons rassemblées ? Et comment expliques-tu que dans ces feuilles il n'y ait pas une seule métaphore, aucune image, aucune allégorie ?*

- *Oui, c'est assez frappant. Ce langage semble totalement factuel, tout est au premier degré. Aucun double sens nulle part.*

- *A l'inverse nous, les humains, ne nous empêcher des dire plusieurs choses à la fois, en jouant sur le choix des mots, l'intonation, le rythme. Dans notre expression verbale, comme dans nos écrit, nous mêlons le réel et l'imaginaire, les objets et les images. Et s'ajoute à tout cela le fait que se conjuguent nos part conscience et inconsciente.*

- *D'accord, et alors ?*

- *Et alors j'ai lu dans un rapport que ces types peuvent s'exprimer, en toute conscience, en utilisant un bi-langage, avec deux codages. Le premier étant représenté par la suite des mots, le second sur une sorte de bégaiement, analogue au Morse. Ils peuvent ainsi dire deux choses dans la même phrase, éventuellement sans rapport l'une avec l'autre. A telle enseigne que, chez eux, disent-ils, un enseignant peut délivrer deux cours, dans deux disciplines différentes !*

- *Attends, c'est complètement fou, ce truc ! C'est comme si ces gens avaient deux cerveaux !?*

- *Je ne veux pas dire que c'est la même chose chez nous, qui faisons déjà une distinction, de modes de fonctionnement, entre cerveau droit et cerveau gauche. Mais de toute façon, dans notre façon de penser, de nous exprimer, de nous comporter, nous vivons dans deux univers mentaux différents, aussi importants pour nous l'un que l'autre : Le réel et l'imaginaire, le conscient et l'inconscient, le tangible et ce qui relève du fantasme, du rêve.*

- *Le mot rêve est un élément important de notre vocabulaire, or il est totalement absent des 1350 mots qui émaillent les lettres Ummites ! Ils ne l'évoquent à aucun moment, ni pour eux, ni pour nous. Cela voudrait dire qu'ils ne rêvent pas ?*

- *Pire : qu'ils ne comprennent même pas à quoi cela se réfère, chez nous. Le corolaire est qu'ils n'ont pas d'imaginaire, par d'expression symbolique, donc pas la manifestation artistique qui en découle automatiquement*

- *La seule façon avec laquelle ils appréhendent l'univers est une démarche exclusivement scientifique, dans tous les domaines. Même leur métaphysique s'est construite sur de telles bases. Au cours de leurs milliers d'années d'histoire ils n'ont donné naissance à aucune religion, à aucun dieu, à aucun mythe. Ils n'ont construit aucun temple, n'ont pratiqué aucun rite. Et ça c'est tout à fait extraordinaire ! L'âme, ils la découvrent fortuitement à travers le comportement de paires d'atomes de Krypton, accrochés aux*

molécules d'ADN, qui révèlent un lien entre les êtres vivant et un monde invisible, leur « noosphère », qu'ils désignent sous le vocable de BUAAWE BIEI, en abrégé le « BB ».

- *En fait, ils sont totalement incapables d'imaginer quoi que ce soit, faute de posséder un imaginaire. A un moment ils évoquent ce qui leur semble être la raison pour laquelle les arts picturaux ne seraient pas apparus chez eux. Ils disent que, très vite, leurs ancêtres auraient découvert qu'en perçant un petit trou dans une boite on voyait l'image du monde extérieur s'inscrire sur la face opposée, faisant office d'écran.*

- *La classique chambre noire[86].*

- *Puis ils ajoutent que la technique de fixation des images a aussi été rapidement maîtrisée.*

- *Cela témoigne de gens qui n'ont pas la moindre idée du rôle que joue l'art dans nos civilisations, de sa fonction. Pour eux, un art pictural ne pourrait être que tendre vers le réalisme le plus achevé. Tout ce qui est symbolique, onirique, fictionnel, fantasmatique, ils l'ignorent, faute de ne pouvoir simplement l'envisager. Le fait de construire des bâtiments qui dépassent leur fonction de simple habitats, d'entrepôts, d'usines, de laboratoires de recherche, le fait de concevoir des vêtements autres qu'une simple pièce de tissu percée de trous, pour passer la tête et les bras, les dépasse totalement.*

- *Les mots « beauté » ; « architecture », « poésie », « littérature », « musique » n'évoquent rien en eux ?*

- *Attends, je pense à un passage où ils évoquent les multiples ethnies qui nous visitent. Parmi celles-ci se situent des êtres de petite taille, qui auraient été responsables, dans les années cinquante, de la majorité des observations d'ovnis. Et ils ajoutent « Après avoir séjourné pendant deux années sur Terre, leur curiosité ayant été satisfaite, ils sont repartis et ne sont plus jamais revenus ».*

- *Deux ans seulement pour faire le tour de toutes les merveilles terrestres, de notre patrimoine architectural, pictural, musical, littéraire ?*

- *Ca n'est pas parce que cela ne les a pas intéressés. C'est tout simplement parce qu'ils ne perçoivent pas cette dimension.*

- *Comme des sourds à qui on ferait écouter de la musique, des aveugles qui déambuleraient dans une exposition de peinture. Ça leur est si étranger qu'ils tentent de comparer cela à leur art de mélanger les odeurs. Farriols, interpelé par cette idée ; a même construit chez lui un orgue à odeurs, très primitif, avec des touches qui déclenchent l'émission d'essences.*

[86] La trace la plus ancienne remonte au Chinois Mozi. En 1020 l'arabe Alhazen, dans son libre sur l'optique, en donne la première description détaillée, en expliquant que la lumière se propage en ligne droite. En Occident son usage ne se popularisera qu'à partir du XVI° siècle.

- *Vouloir comparer cela à un morceau de musique, c'est comme imaginer un morceau basé sur une note unique, où on changerait de tonalité, en passant du violon à l'orgue, puis au basson, ou une couleur qui passerait par toutes les nuances du prisme.*

- *Ça explique pourquoi la seule chose qui leur parle, chez nous, c'est que nous appelons l'art culinaire et pourquoi un Ummite raconte avoir été bouleversé par la première bouchée d'une blanquette de veau, au point qu'il lui avait fallu des heures pour s'en remettre.*

- *Inversement le reste, ils s'en foutent éperdument : nos cathédrales, nos œuvres musicales, artistiques ou littéraires, ce qui constitue notre culture et à quoi nous tenons tant.*

- *Ce qui leur tient lieu de culture est entièrement centré sur des connaissances scientifiques axées sur leur pragmatisme foncier. Sous cet angle, nulle spéculation, nulle intuition. Chez eux le progrès scientifique s'articule totalement autour de déductions logiques centrées sur l'expérimentation et de l'observation.*

Ce qui émerge des réflexions de Jean-Jacques est quelque chose de totalement nouveau dans le panorama ovni. Nombreux sont ceux qui envisagent que les ethnies extraterrestres qui nous visitent, puissent avoir des modes de pensée très différents du nôtre et qu'ainsi il puisse nous être difficile de comprendre comment ils fonctionnent.

Mais la réciproque pourrait être tout simplement vraie.

Les missiles de Maltröm mis hors service. Salas et son épousé abductés

Je suis seul chez moi. Les idées de Jean-Jacques m'impressionnent. Chacun joue avec son propre lot de pièces du puzzle. A côté de ce qu'il évoque, avec mes deux univers à flèches du temps opposées j'ai l'impression de n'être qu'un simple technicien-bricoleur.

Mais bon, chacun son boulot.

Il est vrai que certains témoignages d'ovni, qualifiés de rencontres rapprochées, défient toute tentative d'interprétation à l'aide de nos outils scientifiques, fussent-ils les plus avancés. Ainsi aux Etats-Unis un certain Robert Salas vient de révéler, dans un livre, ce qui lui est arrivé dans les années soixante.

A cette époque Les Etats-Unis viennent de déployer au Dakota du Nord, dans la base de Malström une centaine de missiles intercontinentaux Minuteman, porteurs d'une charge nucléaire[87], répartis en une douzaine d'unités gérant dix missiles chacun. Chacune est gérées par deux officiers de tir, qui se relaient en permanence, logés à trente mètres de profondeur, dans une capsule montée sur ressorts, situées à mille mètres de leurs propres

[87] Aujourd'hui les Etats-Unis ont 400 missiles Minuteman III en silos, système complété par ce que peuvent emporter des B-52 et des bombardiers B2 furtifs. A cela s'ajoutent 14 sous-marins nucléaires de classe Ohio pouvant emporter chacun jusqu'à 20 missiles à tête multiple Trident II, ou des missiles de croisière. L'ensemble traduit la possibilité de frappe à l'aide de 1700 têtes nucléaires opérationnelles, plus un millier en réserve.

engins, de manière à être capable de répondre, même en cas de frappe de l'adversaire. Leur seule fonction est d'attendre que l'ordre leur soit donné d'appuyer sur le bouton, qui leur serait alors donné par le Président des Etats-Unis.

En surface, un groupe de soldats assure la surveillance du site en interdisant l'accès à une enceinte grillagée.



L'unité de contrôle de tir Oscar Flight
La porte devant laquelle l'ovni stationna

Une nuit Salas reçoit un appel :

- *Mon Capitaine, il y a un gros truc rouge en forme de disque qui stationne devant la porte coulissante, depuis un bon moment.*

- *C'est simple, soldat. Si le gros truc rouge vous demande l'accès, vous refusez.*



Robert Salas, à l'époque des évènements

Puis, soudain, tout bascule. Salas, assis devant sa console de tir, n'a pas le temps de constater le résultat de la plaisanterie qu'il vient de lancer quand il voit soudain les dix lampes vertes des dix missiles, passer au rouge, en « no-go ».



La capsule de tir des missiles, située à trente mètres de profondeur.



Missile Minuteman dans son silo

Il appelle aussitôt le centre qui contrôle l'ensemble du site.

- *On va venir vous relever et vous viendrez au rapport, en salle de débriefing.*

Là lui et son compagnon rejoignent les autres officiers de tir, qui ont tous vécu la même chose. On leur demande de signer un document les contraignant à garder le silence absolu.

Cet évènement a sur lui un impact : Il décide de quitter l'armée et se reconvertit comme simple enseignant en physique, au niveau collègue.

Mais, des années plus tard, après avoir découvert, dans un livre écrit par un ufologue, la description de l'évènement, il appelle sa hiérarchie, qui lui répond que rien ne s'oppose plus à ce qu'il témoigne de sa propre expérience.

Il publie alors un ouvrage la relatant.

Mais, des années plus tard lui et son épouse se retrouvent une nuit lévitant à trente centimètres au-dessus de leur lit. A côté, des petits êtres avec de grands yeux noirs. Tous deux, qui ne peuvent esquisser le moindre geste, de voient dirigés, l'épouse vers le mur, lui vers une porte vitrée. Il a une dernière pensée :

- *Comment vont-ils faire pour l'ouvrir ? Je l'ai fermée à clef.*

Mais il passe au travers. Sous épouse, elle, passe carrément au travers du mur. Et cela, aucune physique terrestre n'est à même d'en donner le moindre début d'explication[88].

[88] Des années plus tard, en recevant le témoignage d'une femme qui me raconta avec vécu la même expérience, celle-ci précisa qu'au moment où ses pieds pénétraient dans le mur de sa chambre, elle les a vus « entourés de petites particules lumineuses ».

Tous deux se retrouvent allongés sur un lit, dans une pièce circulaire qui ne peut être que l'intérieur d'un ovni. Les petits êtres se penchent vers eux et Salas sent que l'un d'eux lui introduit un tube dans la verge. Avant de sombrer dans l'inconscience il dit :

- *Ça fait mal !*

Dans son livre, je découvre que j'ai vécu une expérience similaire. Une sorte de standard, en quelque sorte. Sur ce, je vais me coucher.

La cicatrice.

Le lendemain matin, dans ma salle de bains, en enlevant ton T-shirt je découvre une étrange marque, à dix centimètres à gauche de mon nombril.



La cicatrice

Il y a un liseré rouge, de 5 cm de long, horizontal, entouré par deux hématomes, en demi-lune.

On peut s'érafler, et hériter d'une estafilade. On peut se cogner, et se retrouver avec deux hématomes. Mais les deux en même temps, au même endroit, cela paraît peu probable.

Je montre cette trace à un ami chirurgien. Après palpation.

- *Cette cicatrice n'est pas superficielle. On sent qu'il y a eu intervention dans les plans profonds.*

Les mois passent. Lors d'un séjour à l'étranger je me découvre une hernie sus-ombilicale. L'âge venant, il arrive que l'aponévrose abdominale cède et qu'apparaisse une petite fistule, à travers laquelle paroi stomacale fait saillie.

Je consulte :

- *C'est très peu de chose. Voici l'adresse d'une clinique où on va vous recoudre tout cela.*

Je suis reçu par un chirurgien qui confirme l'existence de cette petite hernie. Mais son regard est attiré par autre chose. A la palpation de la marque que je porte à gauche du nombril, il constate l'existence d'une cicatrice des plans profonds. Cela n'est donc pas quelque chose de superficiel.

- *Et là, qu'est-ce qui vous est arrivé ?*

Quand je lui raconte l'origine de cette marque, son sourire montre qu'il imagine qu'ayant reçu un coup de quelque chose dans une obscure affaire familial ou autre, je répugne à en parler et que j'invente toute cette histoire.

Quelques jours plus tard, quand nous nous dirigeons vers la salle d'opération, moi allongé sur un lit roulant et lui dans sa tenue verte, je lui dis :

- *Si vous trouvez quelque chose à l'intérieur, vous me le gardez*

- *Entendu.*

Anesthésie générale. Dans la salle de réveil la première chose que l'aperçois en émergeant est une petite boite cylindrique transparente, à couvercle rouge, glissée entre les doigts.

Une infirmière s'approche :

- *C'est ce que le chirurgien a trouvé à l'intérieur. Mais je suis désolée, nous ne pouvons vous le laisser. Il nous faut l'examiner.*



L'implant dans sa boite à couvercle rouge

Et elle part avec la boite et son contenu, un amas informe, de couleur blanchâtre de deux centimètres cubes.

Je réalise que pour extraire cet objet, situé à dix centimètres de ma fistule stomacale, le chirurgien a dû l'attraper avec une longue pince. Dès le lendemain je reprends l'avion pour regagner la France.

Nature de cet objet ? Nous n'en saurons pas plus. Effectivement, lorsqu'un chirurgien trouve un résidu biologique à l'intérieur du corps d'un patient, son devoir est de s'assurer que celui-ci ne contient pas de cellules cancéreuses. Dans la négative, direction la poubelle. Depuis la France, son commentaire :

- Kyste graisseux[89].

Paris, juillet 1947**, 5 rue Jean-Baptiste Dumas, rez de chaussée droite.**

Après avoir poussé la lourde porte de chêne donnant sur la rue, je retrouve, sur la droite, la porte vitrée donnant après à l'appartement que nous habitions, ma mère et moi, en 1947, donnant d'un côté sur la rue et de l'autre sur une cour intérieure. J'avais alors dix ans.



Le 5 rue Jean Baptiste Dumas, dans le XVII° arrondissement de Paris

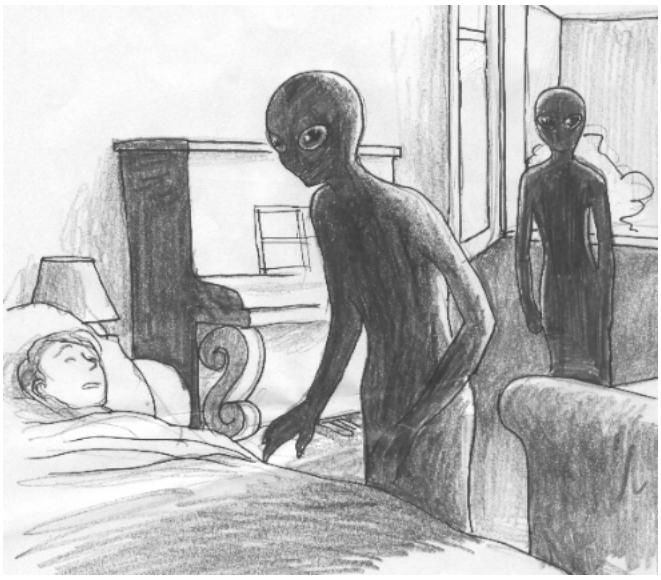
Je sonne. Les lieux sont maintenant occupés par un cabinet d'avocats.

- *Je m'excuse de vous déranger. Il se trouve que ma mère et moi avons habité ce logement, en 1947. Je souhaiterais revoir ma chambre d'enfant, au fond du couloir à gauche. Juste une minute.*

[89] Cette histoire aura cependant, des années plus tard, une suite haute en couleur. Le traducteur Japonais d'un de mes livres, le professeur Nakajima, décide de passer son année sabbatique en France, en choisissant Aix en Provence comme premier point de chute. La nuit même suivant son arrivée il hérite du même stigmate !

- *Bon, eh bien faites.*

Je retrouve la chambre. Comme c'est le cas quand on retrouve des lieux qu'on a connus très jeune, elle me paraît avoir rétréci. La cheminée, à droite, a disparu. Je me revois, en juillet 1947. C'était l'été. Il fait chaud et la fenêtre à deux battants est largement ouverte. Soudain un objet entouré de lumière descend et se pose dans la cour, cernées de hauts murs. Deux petits bonshommes franchissent la fenêtre et se dirigent vers mon lit. Ils sont tous deux vêtus avec une espèce de tenue noire, collante et tous deux ont de grands yeux, noirs.



Les visiteurs, juillet 1947 (au moment de Roswell)

Je n'éprouve nulle peur. Leur inspection faite, ils repartent comme ils sont venus. Le lendemain, je constate une chose. Quand je regarde le vieux piano qui est dans cette chambre, je lui fais émettre des sons à distance, comme si une main invisible pinçait les cordes. Je raconte cela à ma mère, qui me répond ;

- *Oui, il faut que je le fasse accorder !*

Mais qui sont-ils ?

Après être retournés une fois de plus sur la crête de la Blache, nous devons nous rendre à l'évidence. Plus aller plus loin il faudrait pouvoir se débarrasser de la végétation qui n'existait pas à l'époque. Avec ces frondaisons d'arbres, impossible de voir les autres points indiqués. Ce constat marque la fin de nos investigations sur le terrain.

Jean-Jacques :

- *Pourtant le lieu était bien choisi. Pour ceux qui ont de bonnes jambes, on peut y accéder par de multiples voies. C'est aussi le coin où les résistants avaient choisi de se réfugier.*

Il aurait été très difficile de cerner le plateau, à moins de disposer d'effectifs importants. Et delà on pouvait voir les gens arriver de loin.

- *Ce qui m'amuse ce sont les raisons de ce choix. Ils optent pour une région semi-sauvage, situé néanmoins après ce qu'il estime être un centre de recherche, du fait de la présence d'importantes constructions en surface. A Digne, Basses Alpes !*

- *Je reviens toujours aux contraintes issues de leur hypersensibilité de leurs phalanges.*

- *Vas-y, Sherlock Holmes.*

- Je butte toujours sur ce point. On est d'accord que c'est un attribut qui n'est pas naturel. On ne voit pas un bipède tirer de cela un avantage qui puisse compenser la perte de toute possibilité de manipuler des objets, qu'il s'agisse d'armes ou d'outils. Ça n'a pu être obtenu que par manipulation génétique. Mais alors, pourquoi auraient-ils choisi ce type d'évolution ? La nuit, une simple lampe suffit.

- A moins que l'espèce ne soit de meurs nocturnes, nyctalope. Sinon ça n'a pas de sens.

- Et ça achoppe avec une masse d'autres choses. L'olfaction très développée, le peu d'attention apporté à la vision classique. L'absence totale de pigmentation est aussi un attribut des espèces qui vivent privés de lumière.

- Dans la plupart des rencontres du III° type, quand les témoins se trouvent confrontés aux visiteurs, ils les décrivent fréquemment comme ayant d'immenses yeux noirs. Et si ça n'était pour eux que des lunettes de soleil ? Dans le film présenté à la télévision par le journaliste Jacques Pradel[90], et qui est censé présenter l'autopsie d'une extraterrestre dont les mains ont six doigts, le premier geste que font les médecins terriens chargés de les examiner, et qui portent des combinaisons empruntées à une installation nucléaire voisine, c'est de retirer de leurs yeux, très délicatement, des membranes noires qui les recouvrent.



Le film de l'autopsie. Les membranes noires[91]

[90] Émission l'Odyssée de l'étrange, octobre 1995

[91] Selon la classification de l'espagnol Darnaude, on lit (je retrouverai la référence exacte) :

A gauche, les yeux recouverts par ces membranes noires[92]. A droite, ces pupilles immenses.

- *Des membranes qui fonceraient automatiquement à la lumière. Une technologie que suggéraient explicitement les textes Ummo dès les années soixante, à une époque où, sur Terre, ça n'était pas connu.*

- *Et quand ces membranes son enlevées apparaissent des yeux dotés de larges pupilles.*

Les détails s'enchaînent, les uns après les autres.

- *Réfléchissons. Sur une planète porteuse d'un unique continent, localisé au voisinage de son équateur, et plat comme la main, les conditions climatiques et météorologiques doivent être très particulières. On imagine toute de suite d'immense régions désertiques, ou quasi désertiques. Echauffé dans la journée par IUMMA, le « Soleil » qui éclaire la planète Ummo, le sol se refroidit plus rapidement par rayonnement que la masse océane[93]. La masse d'air qui surplombe les océans devient plus chaude que celle qui surplombe les sols, laquelle qui tend à s'affaisser sur elle-même. Le résultat est l'expulsion de cet air en direction de l'océan, donc un vent de Terre. Celui-ci ne sera jamais violent.*

  Le jour le sol, exposé à l'insolation, s'il n'est protégé par aucune végétation et si une évaporation ne vient pas modérer son échauffement, va s'échauffer rapidement et fortement, et transmettre cette chaleur à la masse d'air adjacente, qui va se dilater, s'élever. Pour équilibrer les pressions l'air marin sera poussé vers le centre de ce continent.

  Sur Terre ces vents de mer sont très vite arrêtés par le moindre relief et qualifiés alors de « brise de mer ». Mais sur la planète Ummo ces reliefs sont inexistants. On peut donc imaginer que s'établisse un régime de vent quotidien intéressant l'ensemble du continent, un immense vortex continental, avec des vitesses dépassant allègrement les 100 kilomètres à l'heure, tous les jours. Un chercheur équipé de moyens de simulation, pourrait apporter une réponse plus précise sur les intensités envisageables.

  En conséquence, opter pour des mœurs nocturnes et un habitat souterrain devient immédiatement la solution standard pour la plupart des espèces, y compris une espèce humaine, pour se protéger d'un tel vent diurne. Les textes Ummo évoquent effectivement ce mode de survie de leurs ancêtres. Ils parlent aussi de l'émergence de

---

Il y avait un réflexe de ce type qui finit par être commun à tous les sujets: se caresser le visage, la poitrine et les seins. Presque tous sentirent fortement les stimulations lumineuses, ce qui nous obligea à les pourvoir de UULAXBOIYU (à cette époque où l'on ne contrôlait pas directement les aberrations oculaires, on mettait aux presbytes et aux myopes des lentilles artificielles qui s'appliquaient en pulvérisant une substance transparente sur le globe même de l'oeil. Celle-ci en se cristallisant et en durcissant, formait une pellicule soluble adaptée à la cornée, semblable aux microlentilles que vous utilisez sur terre. Cette substance plastique, que nous appelons BIAGOO DOAWAA a la propriété de pouvoir varier son opacité en fonction de la lumière. Si vous aviez un tel produit vous pourriez l'appliquer sur vos lunettes de soleil.

[92] Un élément qui n'appartenait pas à la science-fiction en 1947.

[93] L'apport diurne de chaleur dû à l'insolation n'intéresse en moyenne que les 15 cm sous la surface du sol, alors que la conduction fait que cet effet s'étend dans l'océan jusqu'à 10 mètres de profondeur. Ainsi la quantité de chaleur est-elle dans un rapport de dix à trente fois plus important pour une masse liquide. L'inertie thermique océane est donc nettement plus importante que celle des sols.

tempêtes si fortes que l'apport de particules pulvérulentes, depuis les déserts, parvient à éroder les roches affleurant en surface.

Dans un tel biotope, impossible d'utiliser des routes, qu'on devrait nettoyer chaque jour de tout ce que les vents déposeraient en surface.

- *Dans l'Égypte antique, même chose. Comment envisager d'utiliser des routes, donc des véhicules à roues, le long de voies qui rééquerreraient chaque année d'immenses travaux pour dégager l'apport issu de la crue du Nil ? Le seul mode de transport devient la voie navigable, sur le Nil ou sur ces canaux.*

- Alors, sur Ummo, quand la technologie se développe, que voit-on apparaître ?



Locomotion terrestre sur Ummo. Leurs véhicules à quatre pattes articulées[94]

- *Il y a un autre aspect qui découle de tout cela. Ces gens n'ont pas l'air d'être le moins du monde gênés par la promiscuité. Les habitacles de leurs nefs*[95]*, de forme torique, n'offrent qu'un volume très limité. Quand on découvre le nombre de passagers qu'elles sont susceptibles d'exporter on obtient des conditions de vie qu'un humain terrestre ne pourrait pas envisager.*

- *Mais c'est quelque chose qui ne gênera pas un être dont les ancêtres vivaient dans des terriers.*

- *Autre chose : dans les très rares cas, évidemment discutables, certains corps autopsiés présentent des caractères reptiliens. Sur Terre les oiseaux (absents sur Ummo) se sont trouvés être les descendants des dinosauriens, dont ils ont conservé certaines caractéristiques. Il n'est nullement exclu que sur d'autres planètes la filière débouchant*

[94] Si l'image pouvait faire sourire dans les années soixante, on dispose aujourd'hui des premiers véhicules robotisés dotés de pattes, emportant des charges, voire un être humain. Une formule qui a retenu l'attention des miliaires pour de multiples terrains : dans les villes en ruine où les véhicules blindés, ne pouvant plus progresser, deviennent des cibles faciles, et en terrain découvert, en évitant des routes susceptibles d'être minées.

[95] Les nefs Ummites ont un diamètre hors tout de 13,77 mètres

sur des êtres, humanoïdes, intelligents et capables de développer une technologie trouve sa source dans un phylum reptilien.

- *Et chez les reptiles terrestres, la perception infrarouge remplace la vision dans le spectre classique.*

- *D'où cette tendance à développer une forme de vision dactyle, axée sur l'infrarouge.*

- *Eh puis, quand ils appellent les Espagnols au téléphone, c'est toujours en pleine nuit, vers 2 ou 3 heures du matin. Cela correspond peut-être à … leurs heures de bureau ?*

- *Mais pourtant, dans le long texte reçu en 1966 par Sesma, on trouve le déroulé d'une journée-type d'une famille sur Ummo.*

- *Nous ne sommes pas obligés de prendre, comme le font les Espagnols, tout ce qui se trouve dans ces pages pour argent comptant. Rappelle-toi ce qu'ils répètent sans cesse : «ne nous croyez pas ». Il y a aussi ces maisons en forme de champignon, dont ils disent qu'elles émergent de leur logement quand la nuit tombe.*

Retour sur San José de Valdeiras.

Jean-Jacques me signale une lettre écrite par le mécanographe, qui tape les lettres écrite et envoyé à un des contactés de Madrid le lendemain de cet atterrissage.

> *Monsieur,*
>
> *Je suis la personne qui tape les lettres qui vous ont été envoyées. J'ai été recruté après une annonce passée sur la revue ABC, qui demandait quelqu'un pour taper des lettres en je me suis présenté.*
>
> *Un homme très gentil, qui disait s'appeler DEI 98, un nom bizarre, avec un numéro, m'a alors dicté de nombreuses lettres, très étranges. Je me suis demandé si ça n'était pas des personnes des services secrets. Mais ma femme m'a dit que je ne faisais rien de répréhensible et que, comme c'était bien payé, je pouvais continuer. Alors j'ai commencé à taper les nombreuses lettres et à les envoyer en fonction d'un agenda qui m'avait été précisé : telle lettre, à telle personne, tel jour.*
>
> *Mais un jour une dame se présenta comme venant de la part de monsieur DEI 98. Elle semblait être la responsable d'un groupe et m'a demandé si quatre d'entre eux ne pourraient pas loger une nuit chez nous. J'ai proposé de leur donner notre chambre, mais elle a dit que ça ne serait pas la peine.*
>
> *Le soir venu ils sont arrivés. Elle parlait, mais les autres non. Les autres semblaient muets. Je ne les ai pas entendu proférer un son de toute la soirée. La dame portait un manteau de daim marron, assez élégant, moderne. Il y avait une très jeune femme et deux hommes. Nous avons proposé de leur préparer un repas, mais la dame a dit qu'ils refusaient. Un des deux hommes s'est alors mis sur le balcon et a ouvert une valise qu'il avait amenée. Il en a sorti des*

objets de la taille d'une balle de golf qui, lorsqu'il les lâchait, tenaient en l'air tous seuls puis partaient.

La femme plus jeune baissait sans cesse les yeux quand sa supérieure s'adressait à elle. Quand celle-ci se tournait vers la jeune, elle avait un regard courroucé et l'idée m'est venue que la jeune avait été punie pour quelque chose qu'elle avait fait et qu'elle n'aurait pas dû faire. Je leur ai demandé s'ils voulaient qu'on arrange quelque chose pour qu'ils puissent s'allonger et dormir et pour manger, quelque chose, des fruits. Mais la dame a dit que je ne devais pas m'en soucier, et elle insista pour que nous les laissions entre eux et que nous allions nous coucher dans notre chambre.

Moi je n'arrivais pas à dormir, et ma femme m'énervait qui me répétait sans cesse qu'elle croyait maintenant que c'était des gens des services secrets. Vous savez ; quand les femmes se mettent une idée dans la tête, on ne peut plus les arrêter. Comme elle m'énervait, pour me calmer j'ai décidé d'aller dans le salon pour voir s'ils n'avaient besoin de quelque chose. Deux étaient allongés sur une sorte de lit de mousse. La dame m'a dit de ne pas m'inquiéter pour le tapis, et que ça partirait tout seul. Elle m'a dit qu'ils étaient là parce qu'on viendrait les chercher. L'homme avec la valise était toujours sur la terrasse et semblait attendre le retour de ses boules.

Je suis retourné dans la chambre et les heures ont passé. Moi je n'arrivais pas à dormir. J'ai décidé de retourner dans le salon, pour voir. Mais ils étaient tous partis. Le lendemain j'ai appris dans la presse qu'un vaisseau extraterrestre s'était posé à San José de Valdeiras. Je me suis alors rappelé la lettre que je vous avait écrit, à vous et à une liste de gens que monsieur DEI 98 m'avait communiquée, annonçant l'arrivée d'un vaisseau en provenance de la planète Ummo. J'avais tapé cela comme on taperait un roman, sans y faire attention. Mais là je réalise que c'était vrai.

Je sais que ça n'est pas correct d'écrire sans donner mon nom.

- *Dans une autre, après que l'homme ait été tranquillisé, probablement avec une substantielle augmentation de son salaire, et même autorisé à écrire lui-même aux contactés, à condition de ne pas révéler son identité, celui-ci note le soin avec lequel DEI 98 lui fait relire chaque missive et il ajoute :*

  A un moment il a même immédiatement interrompu mon travail en s'écriant « il y a une faute de frappe ! ». J'ai vérifié et c'était exact. J'avais tapé EI au lieu de EE. Je lui ai alors demandé comment il avait perçu cela, étant donné que quand il dicte les lettres il se tient à distance, sur le canapé et garde toujours les yeux fermés. Il m'a répondu qu'il s'était familiarisé avec ma frappe et que chaque touche avait un son particulier, ce qui lui permettait de les identifier à l'oreille.

- *Encore un indice qui milite pour une espèce nyctalope, qui vit la nuit.*

L'avertissement.

Là c'est moi qui percute sur un bref passage de ces lettres.

Je pense être suffisamment bon physicien pour être à même de comprendre l'évolution des disciplines scientifiques et techniques, sur Terre, durant les soixante dernières années.

En 1905 le Néo-Zélandais Ernest Rutherford confirme l'existence de l'atome à l'aide d'une expérience.

La même année Albert Einstein publie son célèbre article qui consacrera l'avènement de la Relativité Restreinte[96]. Dans cet article il y a son célèbre :

$$E = mc^2$$

Face à cela le célèbre mathématicien français Henri Poincaré, qui suit de très près tout ce qui touche à la physique[97], écrit :

- *Je doute qu'on puisse un jour détruire une ville avec une livre de matière.*

Or, exactement quarante années plus tard c'est la conversion en énergie de seulement 0,7 gramme de matière qui détruit la ville d'Hiroshima.

Quarante années pour passer d'une spéculation de pure géométrie et de mathématiques à l'application expérimentale la plus effrayante et la plus incontestable qui ait jamais été faite d'une théorie.

Tout ce que les textes Ummo suggèrent, sans cesse, c'est qu'on peut toujours aller plus loin, beaucoup plus loin, dans n'importe quelle technologie.

En se donnant la capacité de recréer le feu ; l'homme n'a pas fait autre chose que de mettre en application à son profit des premiers éléments de chimie.

Avec la physique nucléaire, nous n'avons fait que commencer à aborder, à travers la fission, un nouveau domaine, celui de la « chimie des noyaux »[98]. Nous avons poursuivi cela avec la fusion de deux isotopes de l'hydrogène[99], mis en œuvre dans les « bombes à hydrogène »[100]. Cela constitue notre première conversion de masse en énergie, bien

---

[96] Avec, quatre ans plus tard celle de la Relativité Générale, quand il publie l'équation de champ qui la résume entièrement.

[97] S'il n'a pas été un rival d'Einstein, en la matière, il est le premier à dresser dans une conférence donnée en 1904 aux Etats-Unis, le constat d'une crise frappant la physique. Disons qu'il identifie la faille, et qu'Einstein la franchit.

[98] Par comparaison avec la chimie, on peut la qualifier de « dissociation auto-catalysée », par neutrons interposés

[99] Le deutérium dont le noyau est constitué d'un proton et d'un électron et le tritium ou c'est un proton et deux neutrons, cette fusion donnant de l'hélium (deux protons et deux neutrons) plus u n neutron, et de l'énergie liée à une perte en masse.

[100] En fait, l'explosif des bombes H est un combustible solide constitué d'Hydrure de l'isotope Li6 du lithium de de deutérium : l'isotope H2 de l'hydrogène, à deux nucléons. La chaleur dissocie le deutérure de lithium en

modeste. Logiquement, il semble hors de doute que nous pourrons un jour opérer la conversion de quantités de matière beaucoup plus importantes, peut être en mettant en œuvre d'autres mécanismes, que nous ignorons pour le moment.

Les armes nucléaires actuelles, qualifiées de « tactiques » ne représentent « que » dix fois la puissance de l'engin largué sur Hiroshima. Si on excepte les armes mégatonniques, anti-cités, moins nombreuses et si on multiplie par le nombre d'ogives qui seraient mises en œuvre dans une guerre nucléaire on arrive à l'équivalent de centaines de milliers d'Hiroshima.

C'est-à-dire à la conversion en énergie de seulement quelques centaines de kilos de matière.

Quel serait alors l'effet d'une arme qui cumulerait à elle seule une telle puissance, voire plus ?

On a tendance à surestimer les effets d'un conflit mené avec les actuelles armes nucléaires, à l'échelle de la planète. Bien sûr, comme l'avait dit Nikita Krutchev « les vivants envieront les morts » : Villes rasées, cultures détruites, infrastructures et moyens de communication réduits à néant.

Mais surtout : impact biologique sévère, lié à l'effet des retombées radioactives sur l'ensemble de la planète. Peut-être, pour l'espèce humaine, un retour se situant en siècles, voire en millénaires, au terme duquel la Nature finirait par reprendre ses droits, comme elle le fait à Tchernobyl.

A l'échelle de l'histoire d'une planète, qui s'étend sur plus de quatre milliards d'années, mille ans, c'est peu de chose.

Certains s'imaginent, après l'incident de Malström, que les extraterrestres interviendraient, au dernier moment. Rien n'est moins sûr.

Imaginons, en 1939, un professeur d'allemand qui, habitant suffisamment très de la frontière, capte les discours d'Adolf Hitler. Il prend conscience que la guerre est imminente.

Une soucoupe volante se pose dans sa propriété, pilotée par deux extraterrestres, qui prennent contact avec lui, qui lui confirment l'exactitude de son diagnostic. A ceux-là il pourrait être alors tenté de dire :

---

donnant deux atomes, de deutérium et de lithium, à l'état libre. Ce dernier capture alors un neutron émis par une bombe A, servant d'amorce. 6+1 = 7 = 4 + 3. Le lithium se décompose alors en hélium et en tritium. Ce dernier se combine alors au deutérium, avec dégagement d'énergie. Grâce à Andréi Sakharov, les Soviétiques furent les premiers à mettre en œuvre cette technique de « bombe sèche », immédiatement opérationnelle, susceptible d'être emportée par un bombardier, au moment où les Américains en étaient encore à tester un mélange de deutérium-tritium à l'état liquide. C'est cette soudaine avancée des Russes qui déclencha à course aux armements.

- *Vous disposez de toute évidence d'une technologie très avancée par rapport à la nôtre, dans tous les domaines. Vous pourriez empêcher cela en faisant mourir Hitler d'une maladie foudroyante quelconque.*

- *Détrompez-vous. Cela ne ferait que retarder les évènements. Là, vous avez de la chance. Les Nazis, afin de purger l'Allemagne de la « science juive » ont viré tous les juifs en 1933*[101]*.*

  Les nazis on vertes une avance notable dans maints domaines. Ils sont très près de mettre en œuvre leur avion à réaction, conçu par l'ingénieur Messerschmidt. Ils ont leurs bombes volantes, les V1[102]*. L'ancien étudiant qui rêvait de mettre le pied sur la Lune, Werner von Braun, développe en secret à Pennmünde, des fusées intercontinentales, de portée encore modeste et dont les capacités d'emport restent inférieures à celles des plus puissants bombardiers.*

  Les Nazis se remettraient vite de la mort de leur leader. Un autre prendrait sa place. Himmler, par exemple. Les recherches nucléaires n'ont jamais été abandonnées sur leur sol[103]*. Imaginez qu'ils prennent conscience de leur erreur, mettent alors les bouchées doubles et se dotent d'armes nucléaires, que cette fois les fusées de Von Braun pourront transporter d'un continent à l'autre, sur toute la planète. Là, cela leur donnerait la capacité de se rendre maîtres de la planète. Non, croyez-moi, Hitler est un moindre mal. Bien sûr cela vous coûtera quelques 50 millions de morts supplémentaires, qui s'ajouteront aux 20 de votre première guerre mondiale. Mais, à l'échelle de la planète, cela reste bien peu de chose.*

Ces armes du futur, celles qui marqueront la maîtrise ultime de la matière, seront susceptibles de remettre la Terre dans l'état où elle se trouvait, non il y a mille ans, mais il y a un milliard d'années. De vastes portions des terres émergées se trouveraient vitrifiées, à jamais impropre à l'apparition de la vie. Seule la vie dans les océans survivrait.

Dans leurs lettres les Ummites évoquent leur exploration, à l'aide de sondes, d'une planète située à 2000 années-lumière de la leur, dont les habitants se seraient tout simplement suicidés en mettant ce qu'il appelle « de terribles armes au plasma », faute de ne s'être jamais hasardés à les essayer. La surface de leur planète n'était plus qu'étendues de sols vitrifiées, exempte de toute vie.

---

[101] En visite aux Etats-Unis Einstein, en 1933, apprenant que les Nazis avaient saccagé son domicile, estima plus prudent de ne pas rentrer en Europe et accepta un poste, créé pour lui à L'institut des Sciences Avancée de Princeton, créé en 1930 pour mieux suivre les avancées de la nouvelle physique.

[102] Les premiers missiles de croisière de l'histoire.

[103] En 1939 l'Allemagne crée l'Uranverein, un programme destiné à réaliser un réacteur nucléaire et plus tard une bombe atomique. Dans le réacteur d'Haigeloch se trouvait une tonne et demi d'uranium, modéré par quelques tonnes d'eau lourde. Après la guerre les savants atomistes allemand furent internés en Angleterre, à Farm Hall. Quand la nouvelle de l'explosion d'Hiroshima leur parvint, Werner Heinsenberg alla au tableau et, immédiatement, dessina le schéma d'une bombe atomique et présenta les calculs qui la sous-tendait.

Si la technologie et la capacité de se doter d'armes (contondantes, de jet) allant au-delà de ses attributs biologiques, a donné à cette frêle créature, l'homme, des avantages évolutifs sur les autres espèces. Si au-delà les conflits à l'intérieur de l'espèce ont créé une forme de « darwinisme social », tout cela a très vite débouché sur une totale hypertélie[104] (du grec hyper, υπερ : au-dessus, au-delà , excessivement et de télos, τελοσ : fin, but, accomplissement). Les armes dont s'est doté l'espèce humaines dépassent maintenant la visée d'une utilisation guerrière.

La technologie reste un « phénomène émergent » ; inéluctable sur toutes les planètes porteuses d'une vie intelligente. Son hypertrophie, en tant qu'arme, l'est aussi. Il sera donc capital de tenter de découvrir sa véritable finalité, autre que de permettre à l'homme de l'autodétruire !

Ce qui reste étonnant c'est que très peu de gens abordent la question sous cet angle.

Même un personnage comme Alain Juillet, ancien responsable de la sécurité économique dans les services secrets français, conscient depuis des décennies de la réalité du phénomène ovni et du fait que celui-ci traduise des visites des civilisations issues d'autres planète, se concentre (comme dans tous les pays) sur la question de la sécurité nationale.

Il a dit, dans une interview récente :

> *- Il y a eu de très rares cas où des Terriens ont subi des attaques de la part d'ovnis. Alors, s'ils nous attaquaient, qu'aurions-nous pour nous défendre ?*

Le visiteur reste toujours l'ennemi potentiel.

Les hommes restent incapables de percevoir le phénomène ovni comme un miroir amenant l'humanité à se regarder dedans et enfin à se voir telle qu'elle est.

[104] Les spécialistes de l'évolution citent de nombreuses espèces animales préhistoriques qui ont disparu, victime de l'hypertrophie de certains de leurs caractères physiques : les bois gigantesques du cervidé préhistorique Mégaceros, les crocs démesurés du tigre à dents de sabre

Mon attitude, en tant que scientifique

J'ai faite mienne cette phrase de feu mon ami Aimé Michel :

- *Tout envisager, mais ne rien croire.*

Il est essentiel, à tout moment, de s'abstenir de conclure. Et c'est ce que je fais. Mais en même temps il est capital de mettre en veilleuse son scepticisme. Cela conduit à une navigation assez acrobatique. Mais, finalement, on s'y fait.

La seule chose à laquelle un scientifique peut s'accrocher c'est à une cohérence entre les faits et les idées. En sachant que tout peut basculer, dans un sens ou dans un autre. Du temps de Kepler les partisans de l'héliocentrisme ne pouvaient qu'imaginer des trajectoires planétaires selon des cercles[105]. Et leurs adversaires avaient beau jeu de dire :

- *Nous sommes prêts à envisager les idées les plus folles, comme par exemple le fait que la Terre puisse se mouvoir[106]. Si elle le fait, c'est qu'elle est soumise à une force et on sait que les forces agissent plus énergiquement sur les corps lourds que sur les corps légers. C'est une évidence. Il suffit de lâcher d'une même hauteur un caillou et une plume. Le caillou atteint le sol le premier. Ainsi si la Terre, soumise à une force, se meut, nous, simples fétus, serions largués au passage. Par ailleurs il fait s'attacher aux faits. Le déplacement épicycloïdal des planètes rend merveilleusement compte des observations, depuis des siècles[107] ; ce dont nous avons besoin pour permettre à nos astrologues de travailler. Alors que les théories héliocentriques sont incapables de prédire la moindre éclipse avec précision.*

Pour la communauté scientifique, le phénomène ovni est un non-sujet, puisqu'étant donnée la durée du moindre voyage vers la plus proche étoile[108], qui se chiffre immédiatement en siècles, sinon en millénaires, vouloir les envisager est tout simplement absurde, déraisonnable. Les scientifiques pensent qu'on finira par découvrir les phénomènes naturels qui donnent lieu à ce que les témoins croient correspondre au déplacement d'objets matériels

Des grands blonds ou des petits gris ?

Me voilà de retour chez Rafael. Au dernier moment Jean-Jacques n'a pas pu venir avec moi mais je n'ai pas voulu annuler ce voyage. Dans ces conditions les échanges en espagnol sont moins fluides.

[105] Or ces trajectoires sont des ellipses, où le Soleil occupe un des foyers.
[106] Aristote avait énoncé le principe que nul objet ne pouvait se mouvoir s'il n'était soumis à une force (ce faisant il niait tout simplement le concept d'inertie).
[107] Une théorie dont le perfectionnement est illimité. Avant que ne s'impose les idées de Kepler, avec des trajectoires elliptiques, le modèle de Ptolémée ne comptait pas moins de 48 cercles. Si un écart était constaté, il suffisait d'ajouter un cercle supplémentaire.
[108] Alpha du Centaure, à quatre années-lumière de la Terre.

Rafael m'emmène dans son bureau, situé au premier étage. C'est une pièce de forme circulaire. Vue de loin elle évoque une tour. Il a fait installer le sigle Ummo, en fer forgé, au sommet.



Sur le toit de la maison de Farriols, le signe Ummo en fer

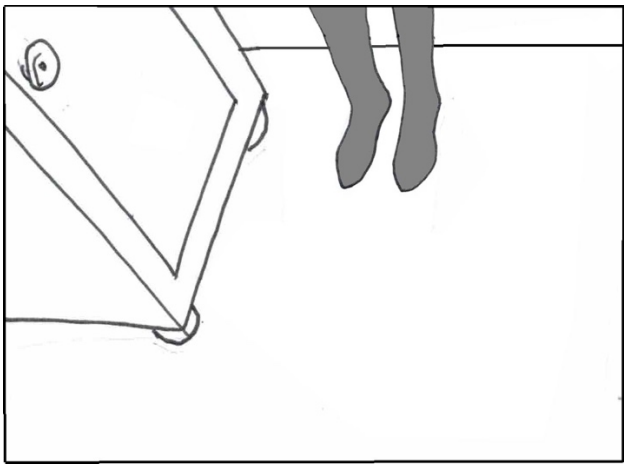
Il me montre sa dernière réalisation. Il a fait fabriquer un orgue à parfums. Comme sa société fabrique différents plastiques, c'est un bel objet, transparent, en méthacrylate. A l'intérieur on voit différentes ampoules contenant des essences. Cinq en tout. L'appareil est complété par un tuyau souple menant à un masque, adaptable sur le visage.

Il me propose de l'essayer. Une petite turbine crée une circulation d'air, en continu. Son orgue à parfums a cinq touches. Quand on presse l'une d'elle, une bouffée de parfum se mêle au flux d'air. Si on cesse la pression, l'effluve disparaît. Et, effectivement, cela fonctionne.

Rafael est ravi et très fier de sa réalisation. Il m'explique qu'on peut alors plaquer des accords, en pressant sur plusieurs touches. Et il joint le geste à la parole. Je ne me rappelle plus quels étaient ces cinq parfums différents. J'imagine ce qui se passerait si quelqu'un était témoin de cette scène, surréaliste.

Depuis que Rafael a revendu sa société à un groupe Allemand, il baigne dans ce dossier Ummo à plein temps. Je me demande ce qu'il inventera la prochaine fois.

Je retrouve la chambre que j'occupe à chaque fois, assez excentrée, dans le bâtiment. En pleine nuit je me réveille. A plat ventre sur le lit, je réalise que je suis totalement paralysé et que la pièce est emplie d'une lumière bleue. Un personnage se trouve près du lit, juste à côté de la table de nuit. Je ne peux voir que le bas de ses jambes et ses pieds, de 10 centimètres de longueur !



Des pieds de dix centimètres de long !

Un temps inévaluable s'écoule. La lumière bleue disparaît et la pièce se retrouve dans une complète obscurité. Je réalise que j'ai retrouvé ma tonicité musculaire, que cette paralysie semble avoir disparu.

Je me dis que ce petit bonhomme est peut-être là, à portée de main. Je me dis que si j'envoie mon bras droit j'ai peut-être une chance de l'attraper.

Mais au moment où j'amorce de mouvement de fauchage j'ai l'impression de mettre les doigts dans une prise de courant. Et aussitôt après, je bascule dans l'inconscience.

Au petit déjeuner je rejoins Rafael et Carmela et je leur raconte ce qui est arrivé, ce qui provoque le rire de Carmela.

- Ah, Jean-Pierre, nous vivions déjà ici avec les Ummites à plein temps. Maintenant voilà que tu nous en ramènes d'autres !

Lou, soignée par des extraterrestres.

Antonio Ribera a fait le voyage pour venir me parler de vivre voix.

- *Je ne voulais ni t'écrire, ni te parler au téléphone*

- *Que s'est-il passé ?*

- *On a découvert chez Lou une sale maladie. Rafael ne l'a pas supporté. Il tient beaucoup à elle. Il est monté dans son bureau, en haut.*

- *Dans cette pièce au dernier étage, où le toit est surmonté par un signe Ummo, en métal. Avec le système d'écoute, installé par les Ummites.*

- *Oui, c'est ça. Il est allé là-haut et il leur a parlé. Il a dit que ça, il ne pourrait pas le supporter. Il leur a demandé de l'aide, pour Lou.*

- *Et alors ?*

- *Ils l'ont soignée. Rafael m'a demandé de n'en parler à personne. Mais je ne pouvais le garder pour moi seul.*

- *Je comprends.*

Dans quelques semaines se tiendra une nouvelle réunion, à Madrid. Je décide de m'y rendre. Je questionne Lou, réticente.

- *Ah, tu as appris ? Rafael t'a dit ?*

- *Que s'est-il passé ?*

- *Ils sont venus, à l'hôpital. Ils étaient deux, deux hommes, assez grands. Ils m'ont donné des médicaments à eux.*

- *Et alors ?*

- *C'est tout. Il n'y a pas autre chose à raconter.*

Je n'insiste pas. Je sens qu'elle est gênée. Et je ne veux pas qu'elle sache que Ribera n'a pas respecté la demande de Farriols.

Dans ce restaurant de Madrid les discussions vont bon train. L'épouse de Dominguez fait figure de prêtresse de ce qu'ils ont l'air de vivre, tous, comme une nouvelle religion. Ils discutent à perte de vue sur le contenu de leurs derniers échanges téléphoniques avec les Ummites.

Tout tourne autour du « BB », d'une âme collective terrestre à laquelle nous serions tous liés. Elle insiste sur le fait que tous devraient se réunir, dans des groupes formés d'un minimum de quatre personnes, pour des séances de méditations où « ils informeraient le BB ».

Dominguez est « plus technique » dans ses échanges.

- *Je leur ai demandé si des poules, privées de calcium, pourraient opérer des transmutations pour synthétiser ce dont elles ont besoin pour créer la coquille de leurs œufs.*

- *Et alors ?*

- *Ils m'ont répondu que les poules iraient chercher ce calcium dans leurs os.*

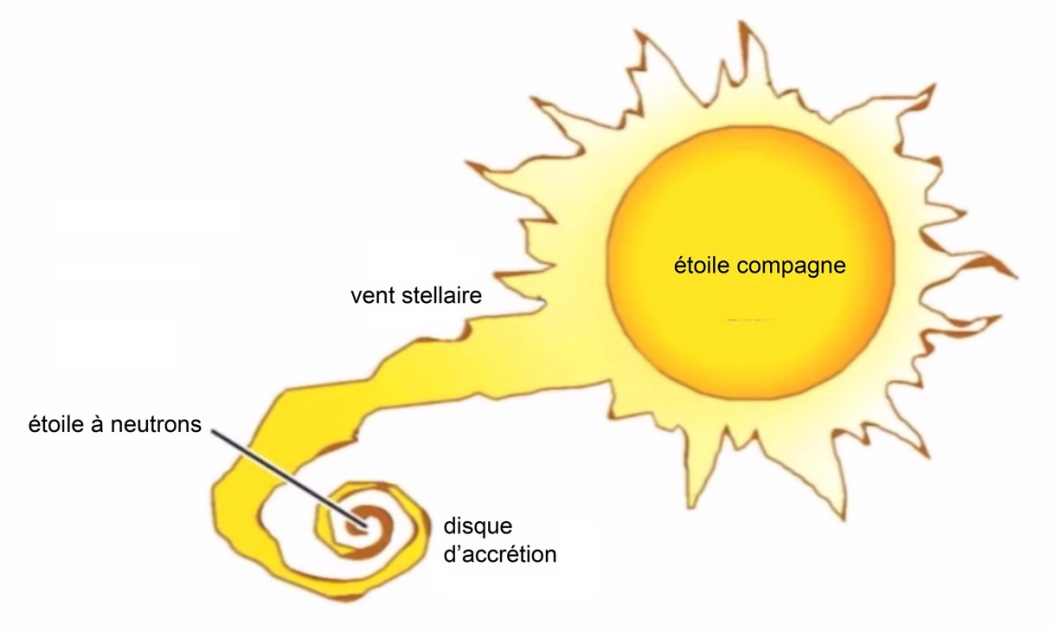
- *Et ils t'on dit autre chose ?*

- *Je leur ai demandé ce qu'était un trou noir. Ils m'ont répondu :*

No existe. Cuando una estrella de neutrones se desestabiliza por una afluencia de materia, se deshace de ella enviándola al universo gemelo.

Ça n'existe pas. Quand une étoile à neutrons est déstabilisée par un apport de matière, elle s'en débarrasse en l'envoyant dans l'univers jumeau.

Je sais qu'on connait maints exemples d'étoiles à neutrons qui vivent en couple à proximité d'une autre étoile, normale celle-là, qui émet alors un « vent stellaire » que sa minuscule voisine peut alors capter.



Cette phrase m'intrigue. Je ne vois pas, sur le moment, quoi que ce soit qui puisse l'étayer.

Je note, c'est tout, et je rentre.

La lettre de Ryad.

A mon retour, je trouve dans ma boite une lettre où mon adresse a été portée avec une écriture malhabile. Au dos de l'enveloppe celui-ci a fait figurer l'adresse de Jean-Jacques, à Digne. Je l'ouvre et je trouve ceci :

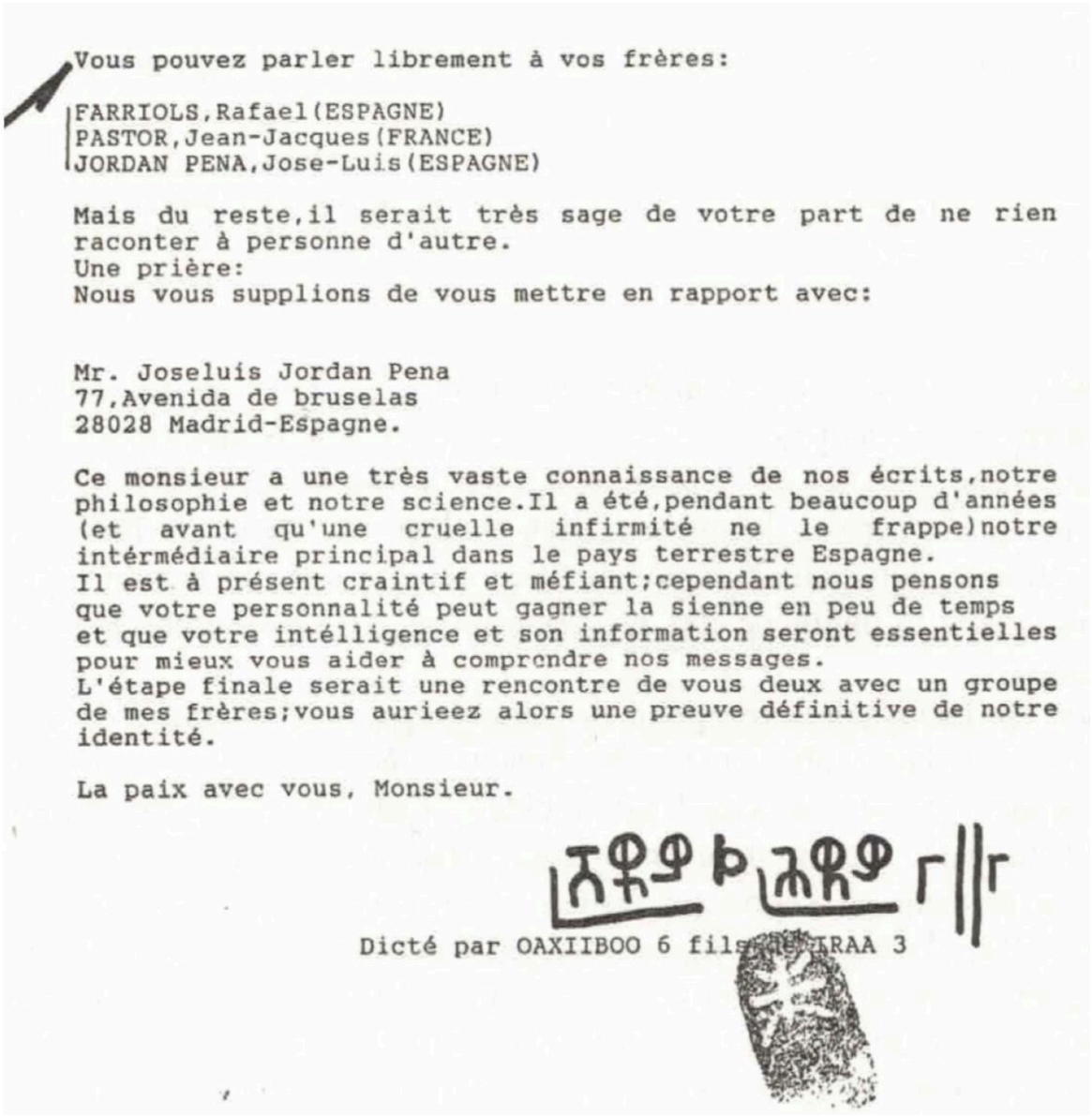
UMMOAEELEWE
nº de Copies: UNE
LANGUE:Français.

Monsieur PETIT, Jean Pierre:
Nous posons notre main sur votre noble poitrine.
Monsieur: Nous avons étudié votre personnalité à travers nos instruments UAAGOOAWEE (evaluateurs individuels du comportement psychique) et nous avons reçu une forte impression par la haute valeur que votre coefficient d'intelligence abstraite y a atteint.
Nous pouvons vous affirmer sans aucune erreur que vous êtes parmi $2.9*10^{-6}$ des hommes les mieux doués sur ce domaine à OYAAGAA (la planète terre).
Nous vous supplions de ne pas croire que nous essayons de vous flatter (ce qui serait,d'autre part, inutile étant donné que nous ne vous demandons rien en échange) mais nous voulons tout au contraire vous encourager à continuer vos études spéculatives sur la logique formelle, qui, vous l'avez deviné, constitue la clé pour la compréhension du Cosmos.
Le " théorème " de FERMAT,dont nous savons que vous avez connaissance, A UNE DEMONSTRATION et elle est à portée d'un homme de votre condition intellectuelle. Nous aimerions pouvoir vous aider (idirectement, bien entendu,car votre sensibilité a en effet compris que toute intervention directe à OOYAGAA nous est moralement impossible) à le résoudre.
Celà vous donnerait vis-à-vis de vos frères un prestige intelectuel dont malheureusement vous manquez à présent (et ceci est du à l 'agressive incrédulité des scientifiques terrestres plus qu'à votre manque de mérite)

Vous devez suivre la pensée:
$1=1$
$0=0$
$1\neq0$
$0\neq1$

et croiser:

$1=0$
$0=1$
$1\neq1$
$0\neq0$
C'est à dire combiner d'égalités/inégalités binaires à logique tetravalente.
Dans des prochaines lettres nous vous ferons connaitre vos progrès et vos erreurs.
Nous vous supplions, Monsieur, d'être très discret sur le contenu de nos lettres; dans d'autres pays nous avons du couper le contact avec vos frères à cause de leur extrême indiscrétion.
Nous désirons établir avec vous des dialogues epistolaires bi-univoques (nous vous donnerons des instuctions sur le moyen de vous adresser à nous) mais nous vous pr[illegible]n échange d'être très discret.



Vous pouvez parler librement à vos frères:

FARRIOLS,Rafael(ESPAGNE)
PASTOR,Jean-Jacques(FRANCE)
JORDAN PENA,Jose-Luis(ESPAGNE)

Mais du reste,il serait très sage de votre part de ne rien raconter à personne d'autre.
Une prière:
Nous vous supplions de vous mettre en rapport avec:

Mr. Joseluis Jordan Pena
77,Avenida de bruselas
28028 Madrid-Espagne.

Ce monsieur a une très vaste connaissance de nos écrits,notre philosophie et notre science.Il a été,pendant beaucoup d'années (et avant qu'une cruelle infirmité ne le frappe)notre intérmédiaire principal dans le pays terrestre Espagne.
Il est à présent craintif et méfiant;cependant nous pensons que votre personnalité peut gagner la sienne en peu de temps et que votre intélligence et son information seront essentielles pour mieux vous aider à comprendre nos messages.
L'étape finale serait une rencontre de vous deux avec un groupe de mes frères;vous aurieez alors une preuve définitive de notre identité.

La paix avec vous, Monsieur.

Dicté par OAXIIBOO 6 fils de IRAA 3

Je décide d'avertir Jean-Jacques en évitant le téléphone et en me rendant à Digne.

Jean-Jacques :

- *Eh bien, il me semble qu'on change là de vitesse !*

Il réfléchit un moment.

- *Je vois qu'il est écrit* :

Vous pouvez parler librement à vos frères :

- *Rafael Farriols*
- *Jean-Jacques Pastor*
- *Jordan Pena*

Et je note que le nom de Rafael est indiqué en premier. Nous n'avons jamais correspondu avec Pena. Tu connais les Espagnols. Si nous contactons Pena sans avertir Farriols, à qui nous sommes redevables pour avoir reçu de lui tant d'informations, je pense qu'il en prendra ombrage.

A mon retour à Aix-en-Provence je l'avertis par courrier et je joins la copie de la lettre.

Et là, catastrophe !

Lou me téléphone en me félicitant d'avoir reçu une telle lettre des Ummites.

La première chose que Rafael s'est empressé de faire, en recevant mon courrier, a été de réunir son groupe et de leur en donner la copie à chacun.

L'impact est immédiat.

Pena[109] multiplie les déclarations dans la presse et les lettres aux ufologues en se présentant comme le véritable auteur des lettres Ummites. En ajoutant que pour les parties scientifiques il s'est servi de ses nombreuses lectures d'ouvrages de science-fiction.

Le monde ufologique exulte, enfin débarrassé de cet encombrant dossier.

Les contactés espagnols reçoivent alors une demande de se réunir au domicile de Farriols. La lettre émane de Cuba et s'adresse à 15 destinataires, dont un certain Benitez, équivalent espagnol du journaliste Jean-Claude Bourret[110], en France.

Jean-Jacques ;

- *La présence d'un type comme Benitez est un message clair. Vas-y si tu veux. Mais à mon avis, maintenant, c'est mort.*

Je décide de me rendre quand même à cette réunion. Les contactés sont tous là, dont Villagrasa, que je rencontre pour la première fois. Seul Lou peut traduire en français. Les débats, animés, durent une bonne heure, ponctués de

- *Creo que…*

Aucun moment les présents ne font attention à moi. Quand je fais signe à Lou elle me répond qu'elle me dira cela quand ils auront fini.

A la fin elle rend compte de tout ce qui s'est dit :

---

[109] Décédé en 2013.

[110] Jean-Claude Bourret occupa pendant des décennies un rôle de présentateur vedette sur la principale chaîne de télévision française : TF1. Se signale par la diffusion de plusieurs livres sur le thème OVNI, signés de sa main, mais en fait représentant une compilation de textes écrits par d'autres. Les quatre livres qu'il cosigna avec Jean-Pierre Petit, se présentant sous forme de dialogues, sont en fait entièrement de la main de ce dernier. En 2023 il changea d'attitude en déclarant dans des interviews : « Je ne peux assurer la promotion de livres fondés sur des calculs faux ».

- *Ils pensent que tu dois développer la logique tétravalente*

Et, sur ces mots, elle prend congé.

Tous quittent la somptueuse propriété de Farriols « El Bosque » dont le salon est orné des dépouilles empaillées ramenées de chasses de Rafael, en Afrique.

Je reste seul avec Farriols, qui tente de se justifier :

- *J'ai cru que cette lettre était comme les autres lettres…*

Il décide d'appeler Pena, en branchant le haut-parleur au téléphone. J'entends très distinctement celui-ci lui répondre :

- *Ne crie pas comme ça, Rafael ! Ce sont les Ummites qui m'ont demandé de dire cela.*

Le sabordage des groupes de Madrid et de Barcelone.

Dans un premier temps Farriols reçoit la demande de tenir à Barcelone une conférence devant le public habituel. Il est accompagné de Liu et d'un autre contacté, Aguirre. Ils déclarent alors qu'ils n'ont jamais cru un seul instant que toute cette affaire Ummo émanent d'extraterrestres.

Rafael m'avait prévenu. Cela, ils le font à la demande des Ummites eux-mêmes. Je me dis alors qu'au point où en sont arrivées les choses, ça n'a plus guère d'importance. Mais lui et les autres n'ont pas l'air d'en être conscients.

Dans la salle il y a bien une bonne centaine de personnes.

Des cris de protestation fusent. Ces gens protestent d'avoir été menés en bateau pendant autant d'années.

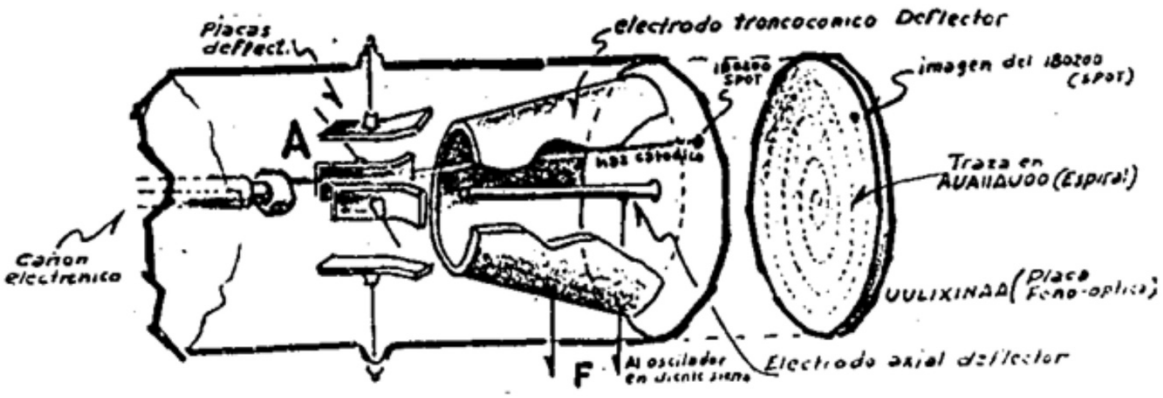
La salle se vide et j'observe la scène avec des yeux ronds.

Tout cela a été mené avec une incroyable facilité. Il a suffi d'une phrase de Farriols. C'est comme si un train s'arrête, que le contrôleur vienne et annonce aux voyageurs : « on vous a trompés. Ce trait ne va pas à Bilbao », et que tous les voyageurs descendent immédiatement.

Dans la seconde phase les Ummites ciblent le groupe de Madrid, dont le pivot est le couple Dominguez. Là, la manœuvre est plus sophistiquée.

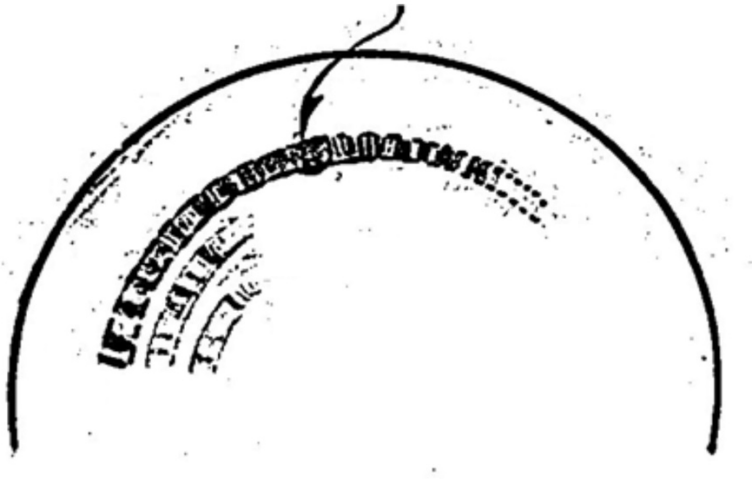
Les Ummites reviennent alors sur un dispositif, une antiquité chez eux, avec lequel ils stockaient l'information, sur une piste spirale[111].

[111] Préfiguration de ce qui deviendra, sous une forme digitale, le CD-rom.



Le système d'enregistrement le long d'une piste spirale, sur un film photographique[112]

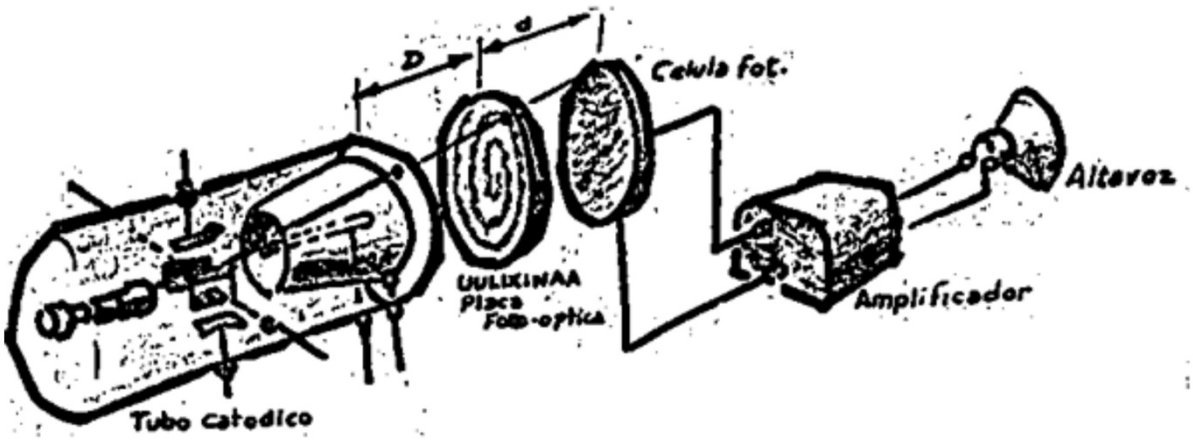
L'image suivant montre un fragment de cette piste spirale :



Fragment de la piste spirale, très grossi, avec la façon dont les Ummites figurent les flèches dans leurs schémas.

Ceci étant complété par le système de lecture :

[112] Le lecteur un peu familier sur le plan technique reconnaîtra les éléments présents dans nos anciens téléviseurs (aujourd'hui nous avons des « écrans plats ») : A gauche, le canon à électrons. Puis deux paires d'électrodes déflectrices, dans le sens « haut/bas, droite/gauche ». En aval une électrode disposée selon l'axe, l'autre étant de forme tronc-conique, ces deux créant l'écartement du pinceau d'électrons selon la direction axiale. En combinant tout cela on amène le pinceau à frapper un support sensible selon une piste spirale



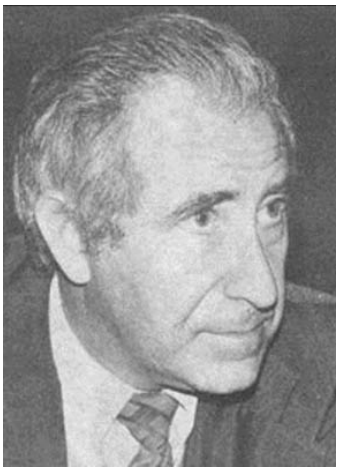
Le système de lecture du son sur la piste spirale[113]

Une lettre demande alors à Domingez de prendre un brevet pour un tel dispositif. Il s'exécute et entreprend, comme prescrit, des démarches pour l'étendre au niveau international.

Les lettres se suivent, se faisant plus pressantes. On lui demande de créer une société pour exploiter cette invention. Farriols est mis à contribution pour en composer les statuts.

En toute logique, pour se lancer dans une telle opération il faudrait pour le moins s'appeler Toshiba, ou Philips. Mais Dominguez, obéissant, suit à la lettre ce qui est demandé, sans se poser de question.

C'est alors que dans la lettre suivante il lui est demandé de commencer à verser un salaire à Jordan Pena, alors que celui-ci n'a aucune connaissance technique.



Jordan Pena

[113] C'est le schéma rigoureusement inverse. Le même jeu d'électrodes amène le pinceau à décrire une spirale sur le film, faisant office de masque. Ainsi modulé (il ne s'agit pas de techniques « digitales ») Il frappe une cellule photoélectrique sont le signal, amplifié, est dirigé vers un simple haut-parleur.

Soudain Dominguez a en main des éléments (je n'ai pas le détail, l'ensemble de l'affaire m'ayant été rapporté de vive voix par Farriols) qui tendent à montrer que tout ceci est une escroquerie montée par Pena.

Ruiné, il jette aussitôt le bébé avec l'eau du bain.

C'est à dire qu'il jette à la poubelle toutes ses notes, lettres ou copies de lettres.

Farriols lui téléphone :

- *Que se passe-t-il ?*

- *J'ai tout découvert, à temps. Tout ceci n'est qu'une vaste entreprise de manipulation montée par une secte indienne.*

- *Quelle secte indienne ?*

- *Une secte indienne …*

Immédiatement, le groupe de Madrid, centré sur e couple Dominguez, cesse d'exister.

Reste à liquider Farriols.

Les Ummites lui écrivent alors en lui proposant de l'aider à reconstituer le groupe des contactés Espagnols, sérieusement ébranlé par la défection de Dominguez. Pour ce faire il lui est demandé de leur faire cette proposition au téléphone en les appelant, un à un, « afin que les Ummites puissent évaluer leur réponse émotionnelle ».

Il s'exécute.

Suivent … deux années de silence complet. Rien, pas une lettre, pas un appel téléphonique.

En se souvenant que Farriols, depuis toutes ces années, ayant revendu son entreprise de plastique, ne vivait que pour et par cette affaire Ummo.

Vis-à-vis du groupe des contactés il lui arrive ce qu'il y a de pire pour un espagnol : il perd la face.

Il a une dernière démarche en venant me voir à mon domicile, où il a cette phrase :

- *Son hiros de putà !*[114]*...*

[114] Ce sont des fils de pute !

Pourquoi cette lettre de Ryad ?

Les mois ont passé. J'ai l'impression qu'il ne se passera plus rien du côté de cette affaire Ummo en Espagne, ou ailleurs.

Cette rencontre, proposée dans la lettre de Ryad, aurait-elle eu lieu ? On ne le saura jamais. Envisageant toutes les facettes du problème je constate que cette lettre avait deux plans différents.

Mettons-nous à la place de leurs auteurs. Ils ont été habitués à la vanité des humains. Qu'ont-ils alors envisagé ? Que je me précipite pour dire à qui veut m'entendre « Voyez : je vais construire la démonstration d'un théorème sur lequel les meilleurs mathématiciens du monde se sont cassé les dents, celui du Français Fermat[115]. Et cela, je vais le faire avec l'aide d'extraterrestres » ?

Ceux-ci ne pouvaient pas ignorer que l'Anglais Wiles venait de publier ce théorème, 356 ans après que des milliers de mathématiciens s'y soient cassés les dents.

Et pourquoi une logique tétravalente ?

Notre logique actuelle fonctionne sur « le principe du tiers exclu ». Ce qui revient à récuser toute « valeur de vérité » autre que le vrai et le faux. Or notre langage abonde d'énoncés (que les logiciens appellent des « propositions ») qui ne non ni vraies, ni fausses. Comme la simple phrase :

- *Je mens.*

Les mathématiciens croient que leur langage échappe à cette malédiction. En 1893 l'Allemand Gottlob Frege publie un ouvrage censé assoir l'ensemble des mathématiques sur une « logique mathématique dont il posé les fondements, s'appuyant sur la théorie des ensembles. Mais le 16 juin 1902 il reçoit une simple lettre d'un jeune philosophe anglais de trente ans, Bertrand Russel.

En quelques lignes celui-ci lui démontre que même la théorie des ensembles ne peut échapper à ces « propositions indécidables » qui ne sont ni vraies, ni fausses. Il la formule à l'aide de son célèbre paradoxe du barbier[116].

Cette lettre est une catastrophe pour Frege, qui a 55 ans. Il écrira :

- *Un scientifique ne peut guère connaître pire malheur que de voir s'effondrer les fondements de son œuvre au moment même où elle est achevée.*

---

[115] Il y a une infinité d'ensembles de trois nombres entiers a , b et c, tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Exemple 3,4,5 : 9 + 16 = 25, et l'infinité de leurs multiples. Mais impossible de trouver trois entiers tels que $a^n + b^n = c^n$ si n est différent et supérieur à 2. Fermat conjecture que cela doit s'imposer en un théorème. Tous les mathématiciens s'y cassent les gens pendant 356 ans. Ca n'est qu'en 1995 que l'Anglais Andrew Wiles en publie une démonstration de plus de cent pages. La lettre Ummite me parvient juste avant que Wiles annonce qu'il a réussi.

[116] Dans un village se trouvent deux catégories d'hommes : ceux qui se rasent eux-mêmes et ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Un barbier ras tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Dans ces conditions, qui le rase ? A quel ensemble le barbier appartient-il ?

Les mathématiciens pensent un moment qu'il doit rester un domaine, le plus élémentaire, qui échappe à cette malédiction : l'arithmétique des nombres entiers[117], point de repli absolu du langage et de la pensée.

En 1931, l'Autrichien Kurt Gödel[118] montre que même l'arithmétique des nombres entiers, considérée comme le « langage » le plus élémentaire, définie à partir d'axiomes extrêmement simples, engendre-t-elle aussi des propositions « indécidables ».

Pire : il montre alors que ce paradoxe « contamine » toute forme de langage, y compris … les mathématiques toutes entières[119] !

C'est la consternation dans le monde des mathématiques, dans le monde entier.

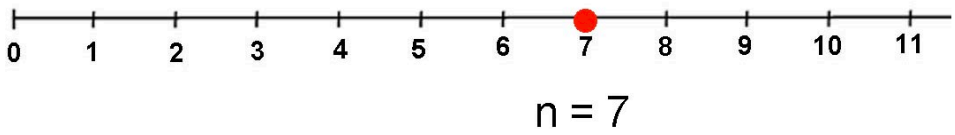
Les logiciens ont effectué maintes tentatives de créer des systèmes logiques avec des « valeurs de vérité » :

- VRAI
- FAUX
- VRAI et FAUX
- Ni VRAI ni FAUX

Mais aucun de ces systèmes ne réussit à contourner l'écueil posé par Gödel.

Quand les Ummites pointent sur ce problème, au lieu de rechercher à mon tour un système logique, je décide de m'attaquer au théorème de Gödel lui-même.

Les nombres entiers ont pour images une suite de points équidistants, posés sur une droite.



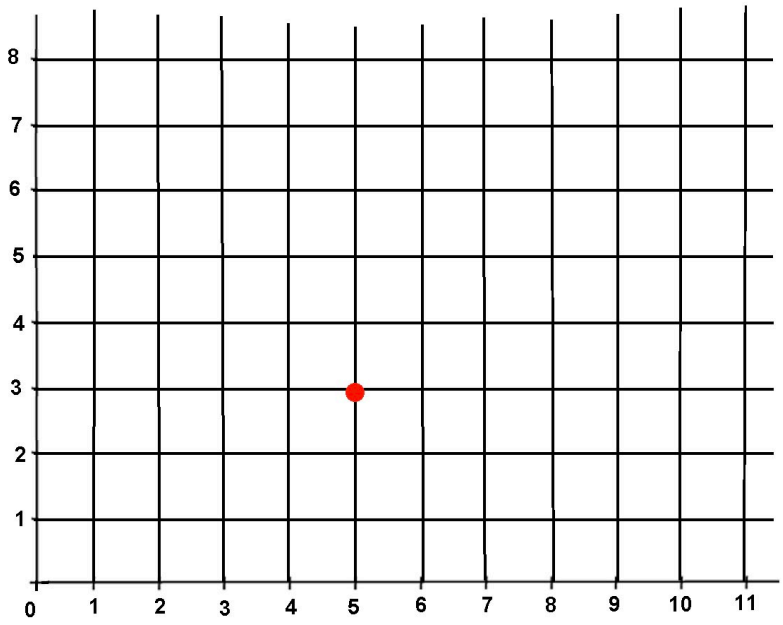
Ils sont eux-mêmes un sous-ensemble des points qui sont les nœuds d'un quadrillage :

---

[117] Axiomatisée en 1889 par l'italien Giuseppe Peano, à l'aide de cinq axiomes :
1 – 0 est un entier naturel
2 – Tout entier n'a un successeur n + 1
3 – Aucun entier n'a pour successeur 0
4 – Si deux entiers sont le successeur du même troisième, ils sont identiques.
5 – Si une proposition, vraie à l'ordre zéro, et si elle est vraie pour toute proposition à l'ordre n+1, alors elle est vraie quel que soit n.

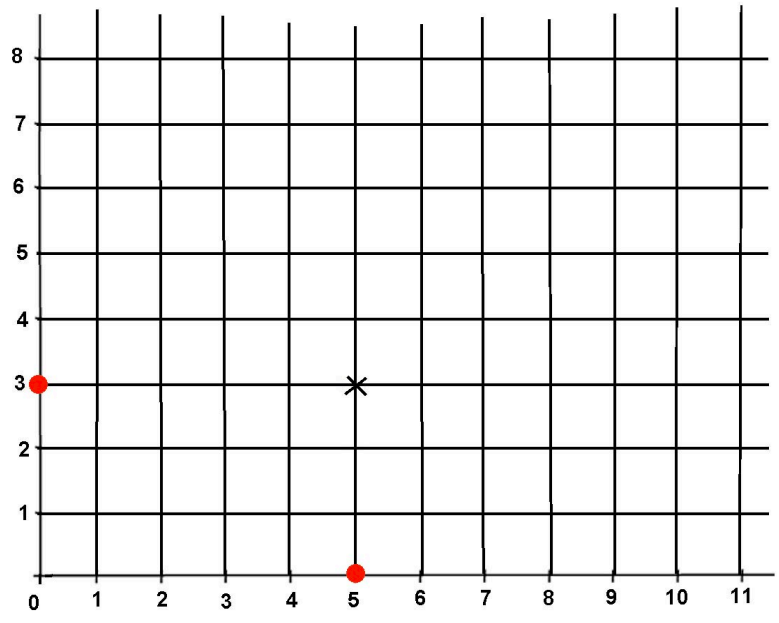
[118] Bien que non juif il fuit le régime Nazi et rejoint l'Institut de Princeton, qu'Einstein a rejoint en 1933s

[119] Une des formulations de son résultat : « Tout langage formel a un moins une proposition indécidable »



Z = 5 + 3 i

Ces points sont alors des « entiers complexes » définis pour la première fois par le mathématicien Allemand Carl Friedrich Gauss[120]. Il les définit comme des couples d'entiers, donc selon une axiomatique qui équivaut à « deux fois les entiers » en utilisant le nombre imaginaire i :

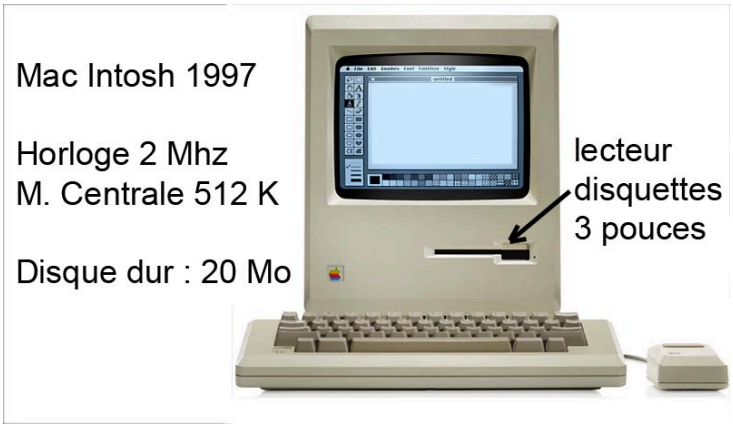


Z = 5 + 3 i

Or en fait ces points-nombres « existent » indépendamment de leurs projections sur les deux axes. Je note alors que personne n'a songé à construire l'axiomatique de tes objets.

[120] 1777-1855. Auteur de nombreux travaux sur « la théorie des nombres ».

A cette époque je possède un ordinateur de bureau Mac Intosh, équipé d'un disque dur Interne et c'est sur celui-ci que je consigne mes travaux et réflexions.



Bien sûr, à l'époque la seule connexion de ces machines se limite à une simple prise de courant.

Je note mes réflexions dans un fichier .doc en écrivant les quatre premiers axiomes :

1- Zéro est un entier complexe
2- Zéro n'est le successeur d'aucun nombre
3- Tout entier complexe z a deux successeurs, notés z + 1 et z + i
4- Si deux entiers complexes sur les successeurs d'un même troisième, par la même opération de succession, ils sont identiques.
5- ….

Et je m'arrête en me demandant comment poser le cinquième axiome.

Vis-à-vis de la logique j'imagine remplacer le critère « vrai/faux » par celui de « égal/différent » :

$$= \ / \ \neq$$

Pour illustrer la mise en œuvre de ce système logique j'imagine un hôpital psychiatrique qui a quatre pensionnaires différents :

- Des Psychiatres
- Des Fous
- Des Psychiatres devenus Fous
- Des Fous devenus Psychiatres

Ainsi, quand un Psychiatre, rencontre un autre Psychiatre, il peut s'identifier à celui-ci, c'est un état logique :

$$= / =$$

Quand il croise un Fou, il voit en celui-ci un individu complètement différent.

Etat logique :

$$\neq / \neq$$

Un peu plus loin, il croise un Psychiatre devenu fou, auquel il ne peut s'identifier que partiellement. Il pense à un collègue qui a trop fréquenté les malades.

Etat logique :

$$= / \neq$$

Enfin il croise un Fou devenu Psychiatre et pense que c'est un fou qui a tellement observé les psychiatres qu'il peut mimer leur comportement.

Etat logique :

$$\neq / =$$

Ce qui est amusant c'est que chacun des personnages a son propre crible logique. Ainsi, si un Fou devenu Psychiatre, croise un autre Fou devenu Psychiatre, pour lui, c'est un individu normal, qui coche la case logique :

$$= / =$$

Par contre, s'il croise un Psychiatre, il le classe dans la catégorie[121].

$$\neq / =$$

Quelques jours plus tard je reçois cette lettre d'Ummites résidant en Arabe Saoudite, dans la ville de Ryad. Et on a vu, malheureusement que la bévue de Farriols avait compromis toute l'opération.

J'ai beau regarder ce qu'elle contient dans tous les sens, je ne vois pas comment aller plus loin et en tout cas comment cela pourrait avoir un rapport quelconque avec ce fameux théorème de Fermat.

Ma moi, il semble y avoir de meilleures perspectives du côté de l'astrophysique et de la cosmologie. Je décide de retourner dans ces deux domaines.

---

[121] Dans cette façon de voir, c'est en projetant ce système logique tétravalent, avec ses quatre « valeurs de vérité :

$$= \ : \ =$$
$$\neq / \neq$$
$$\neq / =$$
$$\neq / =$$

que les deux états $\neq / =$ et $\neq / =$ se fondent en un état paradoxal. Les paradoxes résulteraient d'une appréciation des situations à l'aide d'un crible logique divalent, trop pauvre.

France, 8 septembre 1914.

L'unité de Werner Boy, 34 ans, lieutenant de réserve, tente de s'installer tant bien que mal. Il regarde la pancarte portant le nom de cette bourgade, située au bord de la Marne, à peine lisible tant tout ce qui se trouve là a été déchiqueté par les shrapnels des Français.

- *Vitry-le-François*

Mais le kaiser doit être satisfait. Seulement quatre semaines après le déclenchement du conflit les troupes allemandes se sont profondément enfoncées au cœur du territoire français.

Boy se surprend à se dire à voix haute :

- *Si Paris est atteint, alors la guerre sera finie. Ça ne devrait plus tarder. Après, je retournerai à Göttingen.*

Il s'est installé dans une ancienne école, du moins ce qu'il en reste. Soudain son capitaine fait irruption.

- *Werner, prenez cinq hommes et allez voir ce que fichent les Français. J'ai l'impression qu'ils tentent d'installer un 75 sur la cote 456. A leur place, c'est ce que je ferais. Tenez, voilà une carte. Mieux vaut ne pas leur laisser le temps de le faire.*

- *A vos ordres.*

Werner hoche la tête. Le capitaine est compétent. Il sait anticiper.

Il s'éloigne de la ville, et dit aux hommes de s'arrêter un moment pour qu'il repère l'endroit.

Il sort la carte. Il la pose sur ses genoux. Mais celle-ci se peuple soudain de taches rouges.

Boy maugrée :

- *Qu'est-ce que c'est que ça ? Je n'arrive presque plus à lire !*

Le monde des mathématiques vient de perdre un de ses plus brillants géomètres.

Ma vision 3D prise en défaut.

Je suis dans mon bureau où j'entreprends d'adapter sur mon portable Mac Intosh le long programme de conception assisté par ordinateur, de CAO que j'ai créé sur ma machine précédente, l 'Apple II.

Un jeune assistant frappe.

- *Professeur, on a besoin de vos services, de vos légendaires qualités de dessinateur.*
- *Ah bon, j'arrive. C'est pour quoi ?*

Bernard Morin est un mathématicien en poste à Strasbourg. J'avais déjà entendu parler de lui et il se trouve que je suis sollicité pour illustrer une conférence qu'il va donner à la faculté d'Aix-en Provence. Je sais qu'il est aveugle.

Dans la salle de conférence trône un magnifique tableau blanc, tout neuf, que nous venons d'acquérir, sur la tablette duquel reposent tout un lot de markers de couleur.

Une femme prend la parole :

- *Tu peux y aller, Bernard, tout est prêt.*

- *Qui dessine ?*

- *C'est Jean-Pierre Petit.*

- *Ah, Jean-Pierre Petit ! L'auteur de ces fantastique bandes dessinées des Aventures d'Anselme Lanturlu, dont mes étudiants me décrivent les aventures. Je ne saurais avoir meilleur illustrateur. Le Géometricon, à la découverte des espaces courbes, en compagnie de la belle Sophie, quelle merveille !*

- *Pour vous servir, cher collègue.*



Le Géometricon[122]

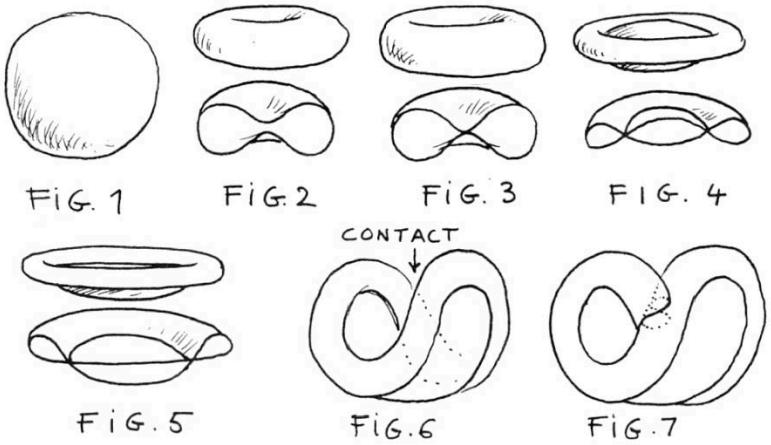
Morin parle. Je dessine. Au début, c'est facile. J'ai une très bonne « vision 3D ».

On part d'une sphère, qui se traverse elle-même.

[122] http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/LE%20GEOMETRICON.pdf

Ca va.

Cela donne un étrange objet, qui ressemble à un canot de sauvetage avec un « plancher » bordé par une espèce de boudin. Je reproduis ci-après les premières images de l'article.



Morin me demande alors de le tordre et d'amener deux régions du boudin à … s'auto-traverser. Je dois représenter tout cela.

Il précise :

- *Utilisez un marker de couleur pour qu'on voie bien la courbe d'auto-intersection.*

J'essaye, mais tout se complique terriblement. Je n'ai jamais jusqu'ici envisagé de choses aussi compliquées. Tout semble si vite se brouiller devant mes yeux.

J'efface, je recommence. Trois fois de suite.

Puis je pose le marker sur la tablette.

Tout se passe comme si Morin avait suivi très exactement chacun de mes gestes. Quand il entend que je repose le marker :

- *Je sais, les immersions, ça déroute toujours au début.*

- *Les immersions ?*

- *Oui, tout ce qui est plongement, vous le maîtrisez évidemment : quand ces objets ne se traversent pas, qu'on les dit alors « plongés dans l'espace 3D ». Mais quand on leur permet de s'auto-traverser, on les dit alors « immergés dans l'espace 3D, alors ça se complique très vite.*

- *En tout cas, désolé, je déclare forfait. J'avoue que j'ai les fils qui se touchent.*

Toute la salle éclate de rire.

Morin aussi.

— C'est normal …

Il dit cela d'un ton tranquille, comme quelqu'un qui parlerait de la pluie.

Je désigne le tableau du doigt.

- *Je peux savoir au passage ce que j'étais censé illustrer ?*

- *C'est le retournement de la sphère.*

1957**. Département de mathématiques de Berkeley, Californie.**

Stephen Smale, un jeune thésard, entre dans le bureau de son directeur de thèse, le mathématicien Raoul Bott.

- *Je crois que j'ai réussi à démontrer que toutes les immersions de la sphère, dans l'espace à trois dimensions, forment une seule et même famille et qu'on peut passer en continu de l'une à l'autre.*

- *Stephen, ne dites pas de sottises ! Si ce que vous dites est vrai, alors cela impliquerait qu'il serait alors possible de retourner une sphère, recto-verso, sans la déchirer, sans la plier. Or il est évident que c'est totalement impossible !*

- *Pourtant je suis sûr de mon théorème*[123]*.*

- *Mais, même si cela tenait debout, cette sphère, comment faites-vous pour la retourner ?*

- *Ça, je n'en ai pas la moindre idée ….*

Bernard Morin, l'hypervoyant.

Je ne peux pas laisser passer une chose pareille. Les Morin habitent dans une belle propriété de famille, sur les hauteurs surplombant Aix-en-Provence. Ma curiosité est excitée à l'extrême. Qu'est-ce que c'est que cette affaire de retournement de sphère, recto-verso ?

La femme qui avait averti Bernard Morin de mon arrivée, lors de la conférence, c'est son épouse, Cécile.

- *Bernard, descend ! Jean-Pierre est là.*

- *J'arrive !*

Il se fraie un chemin jusqu'au vaste salon.

[123] Ce travail fut publié en 1959 dans Transaction of the American Mathematical Society (Vol.90 n°2 pp. 281-290Il lui vaudra en 1966 la médaille Field, la plus haute distinction récompensant un travail de mathématiques.

- *Qu'est-ce que c'est que cette histoire de retournement de sphère !?*

- *Eh bien cela montre que les mathématiques permettent parfois d'accéder à des territoires où l'intuition s'avère inopérante.*

- *Parce que c'est faisable ?*

- *Tout à fait. Cela trouve son point de départ dans le théorème de Stephen Smale qui lui vaut la médaille Field en 1966. Lui s'est contenté de démontrer mathématiquement que c'était faisable. Il ne restait plus qu'à trouver comment procéder. C'est un mathématicien Américain, Anthony Phillips, qui a trouvé*[124]*. C'est paru dans la revue américaine Scientific American en 1967.*

- *On peut voir ?*

- *J'ai sorti le numéro en question à votre attention.*

Je parcours l'article.

- *Dites, ça n'est pas d'une clarté évidente.*

- *Très peu de gens peuvent suivre cette suite de dessins.*

- *Ah, vous me rassurez !*

- *Vos bandes dessinées montrent que vous avez une vision dans l'espace tout à fait exceptionnelle. Vous jonglez avec tout cela comme un artiste. J'ai appris que l'Ecole des Beaux-Arts d'Aix-en-Provence faisait appel à vos services en tant qu'enseignant en sculpture. Il paraît que vous avez un atelier d'où sortes des tas d'objets géométriques que vous construisez à l'aide de tiges métalliques souples. Cécile m'a dit que vous les exposiez dans des galeries d'art à Aix.*

- *J'ai été professeur de vannerie dans une école américaine, à Burlington, dans le Vermont, dans une autre vie.*

- *Effectivement, la vannerie est directement inspirée par les mathématiques.*

- *A l'École des Beaux-Arts j'avais commencé par faire travailler les élèves avec du jonc. Puis on a trouvé le matériau idéal : du fil de fer cuivré, qui s'y prêtait remarquablement bien. Et alors on a entrepris de ligaturer ces courbes entre elles avec du fil à coudre, de manière à conserver au fil métallique tout se souplesse naturelle. La soudure n'aurait pas fonctionné.*

- *Je serai très curieux de voir ça.*

[124] Anthony Phillips est professeur Émérite à l'université Stony Brook. A ce lien on trouvera les dessins originaux de cette première version du retournement de la sphère :
https://www.math.stonybrook.edu/~tony/eversion/eversion2021.html

Mon atelier de sculpture à d'École des Beaux-Arts.

J'ai fait, depuis le début de ma carrière de chercheur, plusieurs rencontres qui, à chaque fois, se sont avérées déterminantes et où j'ai eu tout de suite la révélation que ces gens étaient des puits de connaissance sans fond.

Il y a eu le mathématicien Lichnérowicz grâce à qui j'ai découvert … un autre monde. Je ne vois pas comment appeler cela autrement.

Puis il y a eu Souriau, le vieil alchimiste de la rue Mazarine.

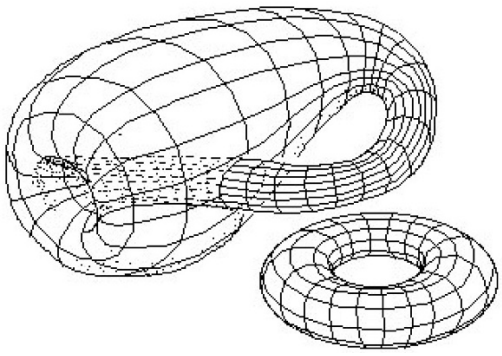
Là c'est encore autre chose, de totalement différent. Je me retrouve face à un aveugle qui voit mieux que les voyants !

Morin est devenu aveugle à l'âge de six ans, à la suite d'un glaucome. La cécité est une infirmité. Morin résolut d'en faire une force, de transformer celle-ci en capacité exceptionnelle d'appréhension des objets et des formes.

Dans les jours suivant, je lui fais visiter mon atelier à l'École des Beaux-Arts d'Aix-en-Provence.

Morin voit avec ses mains. Il passe d'un objet à un autre. Il lui faut tout palper, tout lire à sa façon.

- *Ah, ça c'est très bien, oui, c'est ça. Votre tore et votre bouteille de Klein sont superbes. Vous avez très bien agencé les courbes méridiennes et les courbes parallèles !*



Bouteille de Klein et tore

- *Est-ce que vous pourriez m'expliquer le retournement de la sphère ? Ce que je comprends, je peux alors en principe l'expliquer aux gens, à l'aide dessins, ce que j'ai fait avec toutes mes bandes dessinées*[125]*.*

- *Des dessins qui, pour le moment n'existent pas. Michel-Ange avait coutume de dire que les statues préexistaient dans les blocs de marbre et qu'il suffisait d'enlever ce qui était autour. Là, vos dessins sont encore dans l'encrier. Mais je pense que si quelqu'un peut*

[125] http://www-savoir-sans-frontieres.com

nous sortir ça, c'est vous. Chaque année, Cécile et moi passons toutes les vacances dans la maison de famille d'Aix-en-Provence.

- *Très bien.*

- *Il y a une question qui me démange. Vous avez abordé une masse de sujets, allant de la relativité restreinte à l'astrophysique, en passant par la magnétohydrodynamique, le nucléaire. A chaque fois tous ces domaines font appel à des concepts sophistiqués à des tas de formalismes différents. Aussi, comment faites vous pour transformer toutes des équations en scenarios de bandes dessinées ?*

- *C'est simple. En fait, chez moi, c'est l'inverse. C'est comme ça que je pense. Ça n'est qu'après qu'il me faut réécrire stout cela en équations.*

Retour rue Mazarine.

Je rends compte de cette rencontre à Souriau.

- *Ah, tu es tombé entre les pattes de Morin ! Méfie-toi, il va te tordre le cerveau.*

- *C'est quoi, son monde à lui ?*

- *C'est celui de la topologie.*

- *Mais toi, tu es géomètre. Ça doit te parler. Sur le plan de l'abstraction, tu fais le grand écart, non ?*

- *Ma réponse va t'étonner. Tous les gens ont leur limite. Morin et moi n'habitons pas sur la même planète. La mienne s'appelle « théorie des groupes » et la sienne « topologie ».*

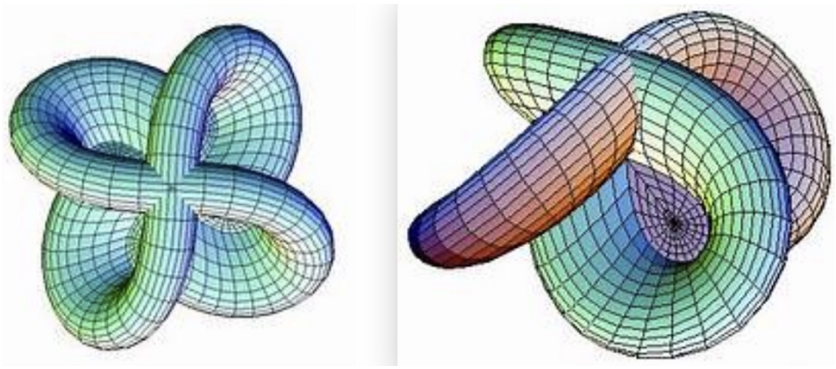
- *Je sais. C'est même grâce à ton extension de cette théorie*[126] *que tu réussis à inverser le temps. Ça m'a fait un choc quand tu m'as montré ça. Qu'est-ce que fait Morin ?*

- *Il fait ce que lui permet sa cécité. Si tu décides de suivre son enseignement, je te préviens, il va te prendre par la main et t'emmener « de l'autre côté du miroir ». Je te conseille d'avaler des cachets d'aspirine préventivement avant chaque séance.*

- *A ce point !?*

- *Il a inventé la seconde version du retournement de la sphère, après celle inventée par l'Américain Anthony Phillips, en 1967, grâce à une surface à laquelle il a donné son nom. Les seuls qui comprennent sont ses collègues topologistes. Ce sont surtout la bande du département de mathématiques de Berkeley, en Californie. En France, et même en Europe, il n'y a personne.*

[126] Jean-Marie Souriau : Structure des Groupes Dynamiques, Éditions Dunod, 1970 et Structures of Dynamic Groups, Birkhauser Editions, 1997.



La surface de Morin- Wikipedia

- *Ah ça, c'est extraordinaire. Il a créé une théorie que seule une poignée de type peuvent comprendre.*

- *Je l'ai écouté plusieurs fois en séminaire. Au bout de dix minutes, tout le monde décroche, moi y compris. Il n'y a plus qu'un type qui parle dans le vide.*

- *Ça doit être un drame pour lui.*

- *A moins que tu ne réussisses à dessiner tout cela. Je crois que c'est ce qu'il attend de toi.*

- *Une version de la fable de Jean de la Fontaine : « l'aveugle et le paralytique, dans le domaine des mathématiques.*

- *Sauf que cette fois, l'aveugle, c'est toi !*

De l'autre côté du miroir.

Commence alors une longue route, où Bernard Morin me sert de guide. Nos échanges sont étonnants. Il est dommage que nos dialogues n'aient pas été enregistrés.

Lui doit me décrire, avec ses propres mots, ces objets qui habitent dans son seul cerveau. Et moi j'essaye de leur donner progressivement forme à l'aide de maquettes en carton, en pâte à modeler, qu'il « lit » alors avec ses mains.

Au fil de séances, qui se terminent souvent en soirée et qui ont lieu dans le salon de sa propriété, quand je prends congé et qu'il reste seul sur son fauteuil, sa phrase rituelle, à laquelle j'ai du mal à me faire est :

- *N'oublie pas d'éteindre en partant !*

Effectivement, sa lumière à lui, elle est ailleurs.

Les semaines s'égrènent et je finis par comprendre. A ma manière, je prends des notes, c'est-à-dire que je commence une nouvelle bande dessinée[127]. C'est ce que je fais toujours quand je commence à prendre pied dans un nouveau domaine. Chez moi, c'est automatique. Comme si cet autre moi-même, mon personnage d'Anselme Lanturlu, prenait les commandes.

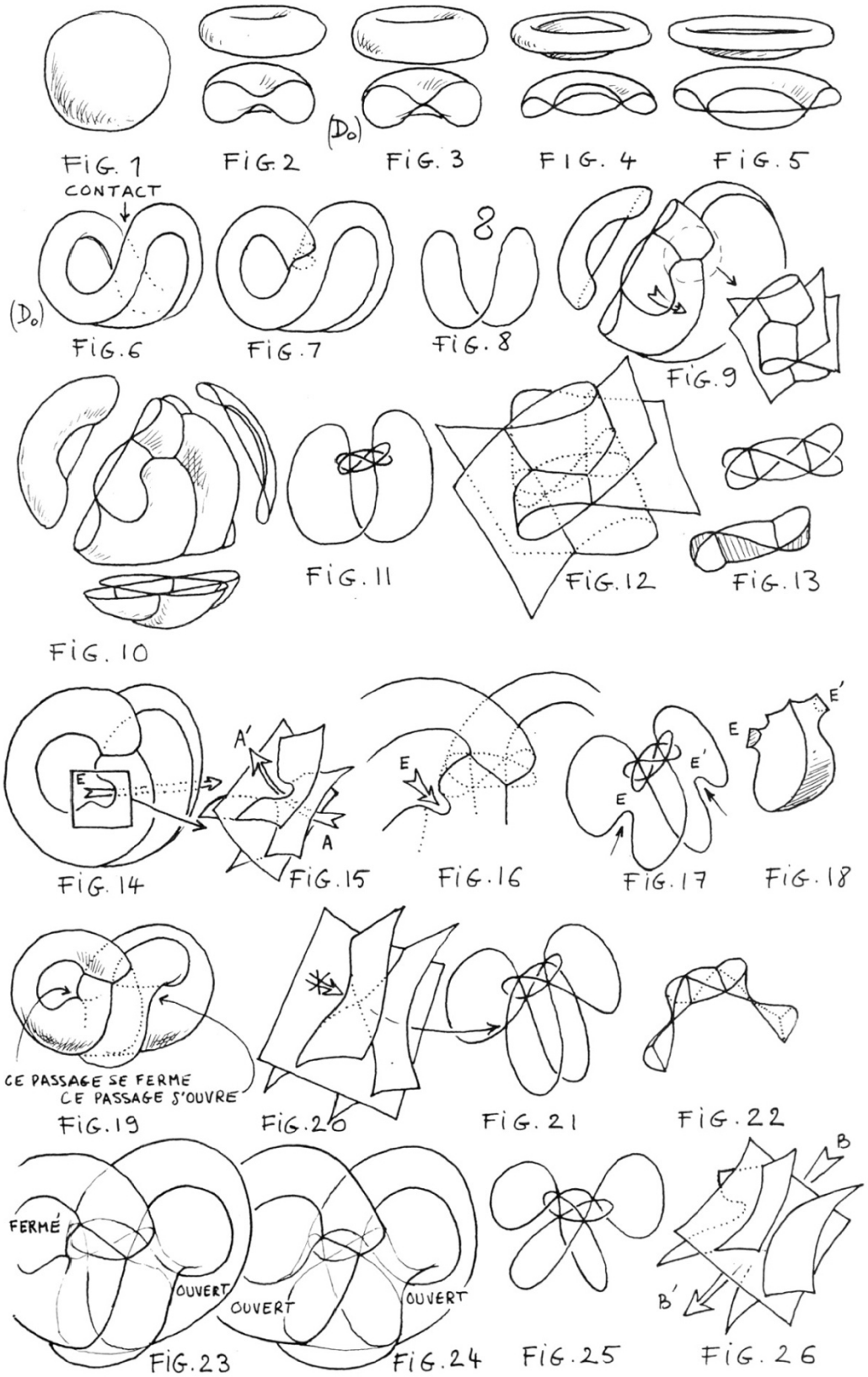
C'est une étrange aventure. Lui m'ouvre les portes d'un monde tout nouveau pour moi. Et moi je lui permets d'être enfin entendu. Très vite, cette collaboration se traduit par un article, qui fera date, intitulé « Le retournement de la sphère », qui parait à l'Académie des Sciences de Paris et au passage par une amitié[128].

Par simple curiosité, voici cette version du retournement de la sphère, selon Morin, illustrée par ces deux pages de notre communication à l'Académie des Sciences de Paris[129]. Si vous ne comprenez pas, c'est normal. Même à l'aide de cette suite de dessins, rares sont les scientifiques qui arrivent à intégrer tout cela.

[127] Qui deviendra Le Topologicon. http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables

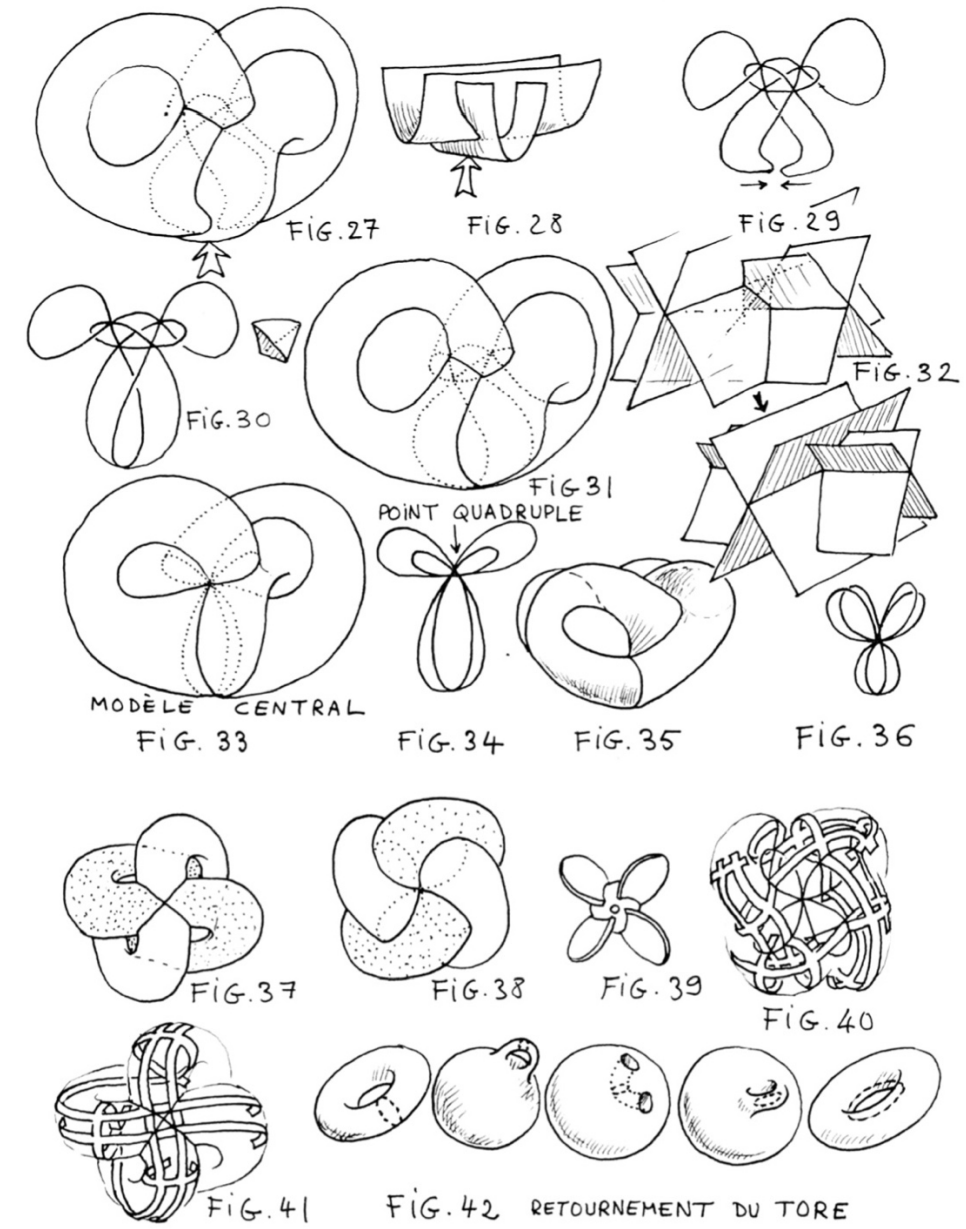
[128] Jusqu'à sa mort en 2018, d'une infection pulmonaire.

[129] Bernard Morin et Jean-Pierre Petit. Le retournement de la sphère. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Tome 287 (3 octobre 1978) Série A pp. 791-794



Le retournement de la sphère première partie

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (30 octobre 1978) Série A — 793



Le retournement de la sphère, Suite et fin.

En route vers Saint-Tropez.

Une amie m'a prêté son voilier de 8 mètres, basé à Marseille. Je décide d'emmener Morin dans une mini-croisière qui nous mènera vers le port de Saint Tropez. On navigue au près.

- *Bernard, viens te mettre à la barre. Je vais t'expliquer comment cela fonctionne.*

Morin me rejoint en progressant précautionneusement et en s'accrochant à ce qui se présente, du mieux qu'il peut. C'est un environnement nouveau pour lui et, bien qu'il sache nager, s'il tombait à l'eau, en étant seul à bord pour manœuvre, ça serait compliqué pour moi de le récupérer. Pour plus de sécurité je lui ai fait enfiler une ceinture de sauvetage, reliée au bateau par un « bout ».

J'explique :

- *En ce moment on remonte au vent. Au mieux, un bateau à voile est capable de zig-zaguer face au vent selon un angle de 45°. On fait alors ce qu'on appelle « tirer des bords ». Là, le vent vient de la droite. On suit donc une route qui fait 45 degrés par rapport au vent. La voile est « bordée » assez serrée. Je vais te passer la barre et c'est toi qui piloteras le bateau. Et je t'explique comment.*

Bernard prend sa place.

- *Si tu pousses légèrement la barre, le bateau va « remonter au vent », tourner vers la droite, vers ce que les marins appellent « tribord ». La voile se comporte comme une aile d'avion. Quand l'allure est optimale, les filets d'air l'attaque avec le bon angle. Mais si tu remontes au vent l'attaque de la voile n'est plus optimale, et alors elle se dégonfle près du mât. Plus encore, elle va claquer légèrement. On dit alors qu'elle « faseye ». Tu entends ?*

L'ouïe, chez un aveugle, est très développée. Et c'est là-dessus que je compte pour que Bernard puisse barrer le voilier.

- *Maintenant tire légèrement la barre à toi. Ça faire virer le voilier vers la gauche, vers « bâbord ». La voile va reprendre son gonflement normal et le bruit va disparaître.*

Bernard s'exécute et le fasayement disparait.

- *Maintenant je vais te montrer comment déterminer la bonne allure du bateau, son cap optimal par rapport au vent. Pour qu'il remonte « au près ». Tu fais l'opération inverse et la voile se remet à faseyer. Puis tu « laisses porter » un poil, juste pour faire disparaître le bruit. Tu n'as pas besoin de voir la côte, ou une flèche qui te donne la direction du vent. Le bruit seul suffit. Et là tu sais que tu as ajusté ton cap au mieux.*

Mon élève s'exécute. Tout marche à merveille.

Les heures s'égrènent. Bernard ne dit pas un mot. Il n'écoute plus que le vent.

Je reprends la barre pour les virements. Mais ceux-ci effectués, il reprend son poste.

Quand on arrive en vue du port de Saint Tropez je descends la voile et fais une entrée au moteur. La saison n'a pas encore débuté et on trouve encore des places pour amarrer au quai.

Nous déambulons sur le port. C'est l'heure du repas.

- *Dis-moi ce qu'ils sont en train de manger. J'entends le bruit de leurs fourchettes.*

Je détaille ce qui me tombe sous les yeux. Beaucoup ont opté pour ce célèbre plat du sud de la France, la bouillabaisse[130] à base de diverses espèces de Poissons. Mais ça n'est pas un plat bon marché et nos finances de chercheurs ne nous permettent pas de tels extras.

- *On va aller acheter une tarte tropézienne dans la célèbre pâtisserie Sénéquier. Tu verras, tu vas adorer. C'est une recette qui a été inventée ici.*

Bernard conclut :

- *A mon avis ces gens doivent être des mathématiciens qui se sont débrouillés pour toucher des royalties sur les théorèmes qu'ils ont inventé.*

Je lève les yeux vers le clocher.

- *Tiens, la peinture a commencé à tomber. On commence à discerner l'inscription, qui commence à réapparaître. .*

  Cela, Bernard ne peut le voir, mais je lui raconte.

- *Saint Tropez a commencé à attirer du monde à la fin des années cinquante. Je me souviens avoir vu Brigitte Bardot un matin très tôt. On avait jeté l'ancre dans la baie des Canoubiers[131]. Elle aimait faire des promenades sur les pointus[132] des vieux pêcheurs du coin. On l'a vue passer, à quelque mètres, assises à l'avant du bateau, avec un costume de bain deux-pièces jaune. Elle nous a souri.*

- *Une vision qui est demeurée gravée ?*

- *Oui. Si tu regardes le personnage de Sophie, dans mes bandes dessinées, c'est BB.*

- *Mais, cette histoire de peinture, sur le clocher ?*

- *Le curé de Saint-Tropez avait vite commencé à s'enrichir. Je suppose que des gens faisait des dons. Il a alors décidé de faire remettre son clocher à neuf. Avant, l'abside était rongée par le vent marin. Mais il a fait venir des maçons italiens. Non seulement tout a été refait de fond en comble, mais il a fait repeindre cette partie de l'église et le clocher, de différentes couleurs.*

- *Et toi, tu préférais comme c'était avant.*

- *Pire, il avait fait poser dans le clocher des projecteurs qui projetait une lumière verte.*

- *Et alors ?*

---

[130] Ca n'est pas cet autre plat provençal, la ratatouille, dans le dessin animé du même nom, avec lequel Rémy, le rat, séduit ce grand critique en matière culinaire qu'est Anton Ego. Mais c'est tout aussi délicieux.
[131] Du nom des longues « cannes » qui poussaient en bordure de cette baie, à l'époque.
[132] Les barques des pêcheurs, typiques, « pointues à l'avant et à l'arrière ».

- *Eh bien on a constaté qu'il avait installé un câble de cuivre faisant office de paratonnerre, bien fixé, solide. On est revenus la nuit et on s'en est servi pour atteindre le clocher. Là, avec de la peinture, on a écrit :*

Le clocher à la chlorophylle, bientôt les hosties au Grand Marnier.

Ummo sur Internet.

Toute cette histoire espagnole, avec sa fin en queue de poisson, fait qu'il ne semble plus de mise de garder le secret sur le contenu de ces lettres et documents. Ceci s'ajoutant au fait que les Espagnols ont publié forces livres sur le sujet.

Comme j'ai créé une association loi de 1901, vouée à l'étude du phénomène ovni[133], ses membres me réclament les copies de ces lettres.

Faires des photocopies de ces quelques huit cent pages paraît difficile. Un jeune physicien théoricien, en poste dans un laboratoire de Marseille, Gilles d'Agostini, propose alors de mobiliser une équipe de dizaines de bénévoles pour taper tous ces textes et d'en faire des pdf, un support qui vient d'apparaître, complétant l'Internet[134].

L'affaire est promptement expédiée et, pour répondre à la demande de membres, ou de simples internautes qui m'envoient une disquette trois pouces vierge et une enveloppe affranchie, je leur renvoie celle-ci porteuse des précieux fichiers, sans leur demander un centime.

Un jour un jeune informaticien[135] de Nice m'appelle au téléphone :

- *Je voudrais créer un site internet avec ces pdf. M'autorisez-vous à le faire ?*

- *Je ne peux ni vous l'autoriser, ni vous l'interdire. Ces documents ne m'appartiennent pas. Je ne sais pas s'il existe une convention interplanétaire concernant les droits d'auteur. Renseignez-vous.*

Le site voit rapidement le jour, comportant un forum qui se peuple immédiatement du « bruit ufologique ».

Mais ce garçon reste sans emploi et sa situation reste précaire. Un ancien militaire, ancien pilote, vivant une retraite dorée dans une belle villa d'Aix-en-Provence[136], lui échange ce site internet contre un emploi de webmaster adjoint dans une société de Toulouse.

---

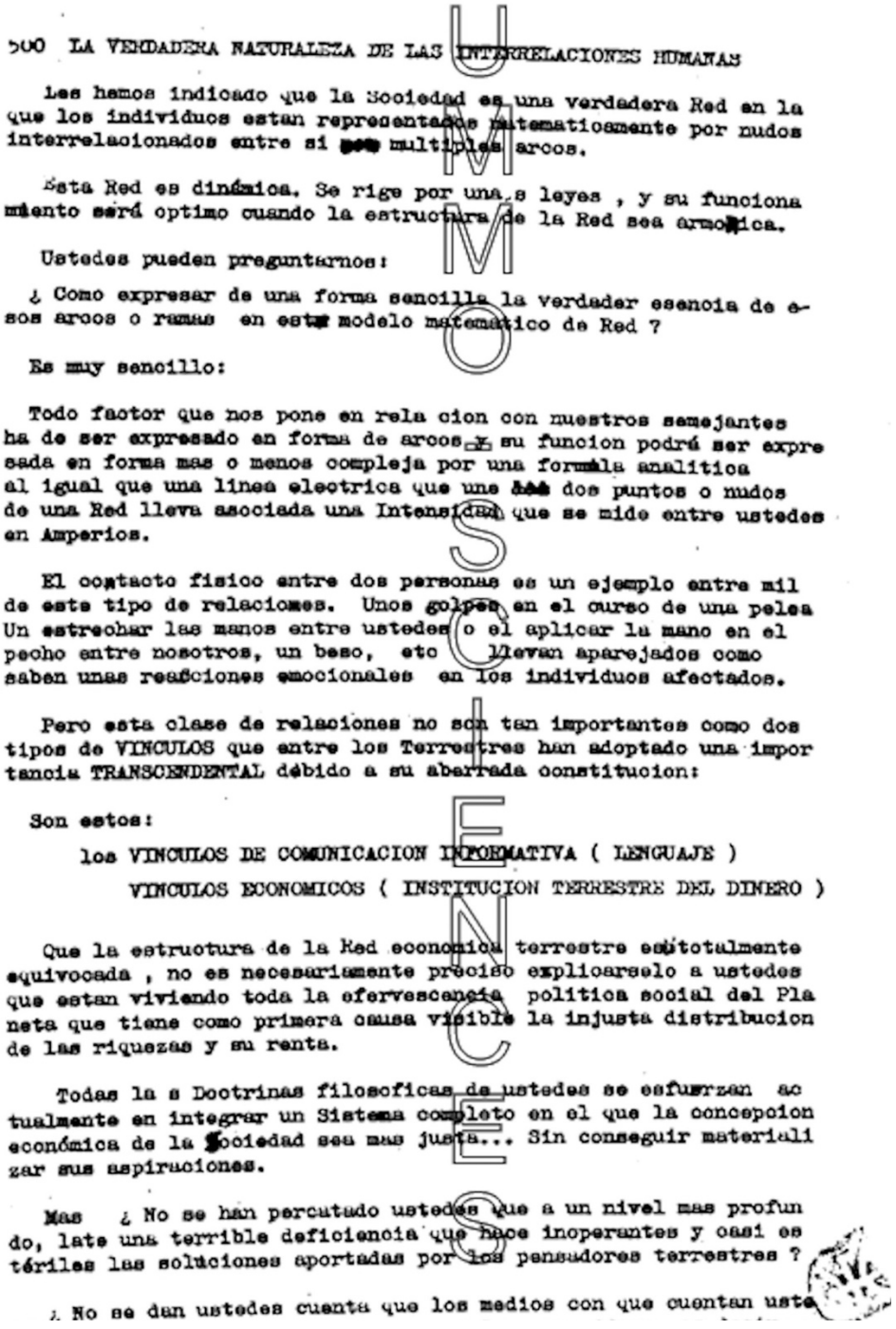
[133] Une association intitulée **G**roupe d'**E**tude **S**cientifique des **T**races **A**ssociées au **P**hénomène **O**vni. Au moment où ses statuts sont déposés en préfecture, quand nous envisageons de réduire ce long titre à ses initiales, nous avons une bien mauvaise surprise : c'est déjà pris !

[134] Seuls des services très spécialisés et des laboratoires possèdent à cette époque des scanners.

[135] Nicolas Lecot.

[136] André-Jacques Holbecq

Devenu acquéreur de ce site « Ummo-science », notre retraité s'empresse d'apposer sur toutes les pages, originales ou traduites par Jean-Jacques et converties en fichiers pdf par Gilles et son équipe, un copyright qui se concrétise par une sorte de « tatouage » :



500 LA VERDADERA NATURALEZA DE LAS INTERRELACIONES HUMANAS

Les hemos indicado que la Sociedad es una verdadera Red en la que los individuos estan representados matematicamente por nudos interrelacionados entre si por multiples arcos.

Esta Red es dinámica. Se rige por unas leyes , y su funciona miento será optimo cuando la estructura de la Red sea armonica.

Ustedes pueden preguntarnos:

¿ Como expresar de una forma sencilla la verdader esencia de esos arcos o ramas en este modelo matematico de Red ?

Es muy sencillo:

Todo factor que nos pone en relacion con nuestros semejantes ha de ser expresado en forma de arcos y su funcion podrá ser expresada en forma mas o menos compleja por una formula analitica al igual que una linea electrica que une dos puntos o nudos de una Red lleva asociada una Intensidad que se mide entre ustedes en Amperios.

El contacto fisico entre dos personas es un ejemplo entre mil de este tipo de relaciones. Unos golpes en el curso de una pelea Un estrechar las manos entre ustedes o el aplicar la mano en el pecho entre nosotros, un beso, etc llevan aparejados como saben unas reacciones emocionales en los individuos afectados.

Pero esta clase de relaciones no son tan importantes como dos tipos de VINCULOS que entre los Terrestres han adoptado una importancia TRANSCENDENTAL debido a su abarrada constitucion:

Son estos:

los VINCULOS DE COMUNICACION INFORMATIVA (LENGUAJE)

VINCULOS ECONOMICOS (INSTITUCION TERRESTRE DEL DINERO)

Que la estructura de la Red economica terrestre esté totalmente equivocada , no es necesariamente preciso explicarselo a ustedes que estan viviendo toda la efervescencia politica social del Planeta que tiene como primera causa visible la injusta distribucion de las riquezas y su renta.

Todas las Doctrinas filosoficas de ustedes se esfuerzan actualmente en integrar un Sistema completo en el que la concepcion económica de la Sociedad sea mas justa... Sin conseguir materializar sus aspiraciones.

Mas ¿ No se han percatado ustedes que a un nivel mas profundo, late una terrible deficiencia que hace inoperantes y casi estériles las soluciones aportadas por los pensadores terrestres ?

¿ No se dan ustedes cuenta que los medios con que cuentan uste

Le copyright Ummo-science

Je proteste énergiquement, contre ce qui n'est rien d'autre qu'une tentative d'appropriation, non pour une question d'argent, mais d'égo.

En vain.

L'humour est ce qui reste quand on ne peut que se dire :



Mieux vaut en rire …

Quand un scientifique remercie un extraterrestre pour ses conseils.

Je suis de nouveau dans la boucle. Un courrier est arrivé ce matin, signé Ummo. Ça me parle.

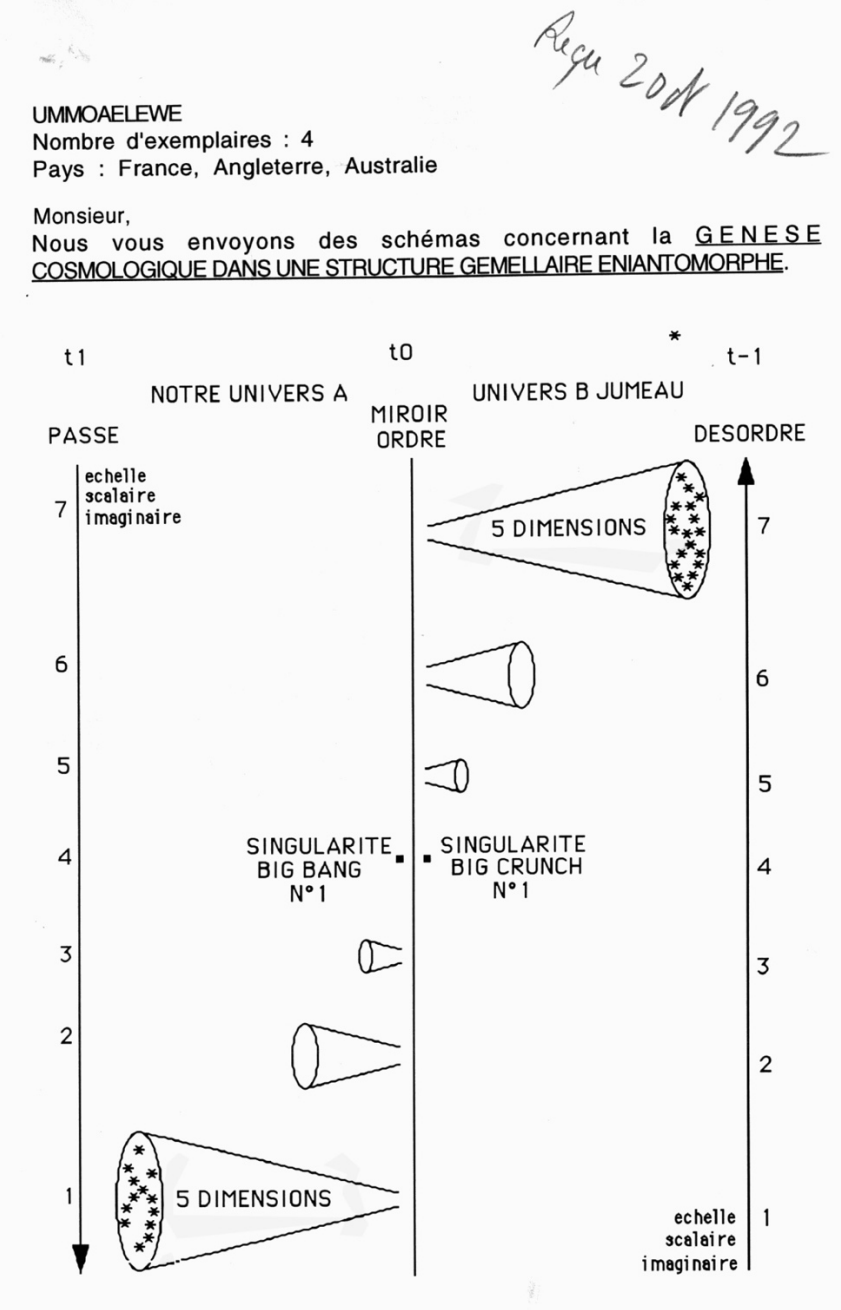
Ce que cela dit :

Les deux univers, le nôtre et l'univers jumeau, sont reliés par le Big Bang. Ce point marque donc l'inversion de la flèche du temps. D'un côté c'est le Big Bang et de l'autre le Big Crunch.

Autrement dit, l'univers, depuis le Big Bang, entre en expansion. Puis il connaîtrait une phase d'expansion maximale, synonyme de désordre. J'en déduis qu'alors toutes la structure de l'univers disparaîtrait, dont les galaxies, les étoiles, les planètes, jusqu'aux atomes eux-mêmes. Alors la flèche du temps se retournerait et il se contracterait, jusqu'au Big Crunch.

Tout se boucle.

Cette inversion du temps est avant tout l'inversion de la coordonnée de temps et ce qu'il faut retenir, confer le théorème de Souriau de 1970, c'est que cela signifie avant tout l'inversion de la masse et de l'énergie



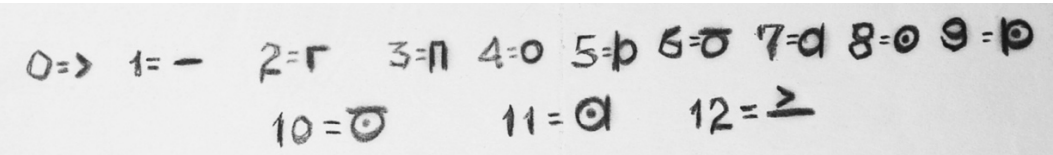
Je note que la lettre parle de cinq dimensions, et non de quatre. Cela doit avoir un sens. J'y réfléchirai.

Qui sont les trois autres destinataires, en Angleterre et en Australie ? Mystère. C'est signé par un certain OAXIIBOO 6, fils de IRAA 3, avec cet étrange redoublement des caractères.



C'est la même signature que celle de la lettre reçue de Ryad, d'Arabie Saoudite.

Dans cette signature, on décèle deux chiffres, selon le codage Ummite.



Le codage des nombres entiers sur Ummo

Mais ça ne colle pas. Cela serait alors OAXIIBOO 5, fils de IRAA 2. Peu importe, je note, c'est tout.

D'autres passages de la lettre incitent à reprendre mon modèle d'évolution cosmique « à constantes variables », faisant suite à ma publication de 1988 dans la revue au top niveau Modern Physics Letters A[137]. Je décide de reprendre, car j'ai inclus dans le modèle les variations, dans cette phase primitive, des la charge électrique e. Un nouveau papier est publié dans une autre des meilleures revues de physique et de cosmologie : Astrophysics and Space Science[138].

[137] J.P PETIT : Cosmological model with variable velocity of light. Modern Phys Letters A3, 1988, pp. 1527
[138] J.P PETIT, Twin Universe Cosmology, Astrophys. and Sp. Science, **226**, 273-307, 1995

TWIN UNIVERSES COSMOLOGY

JEAN-PIERRE PETIT*
Observatory of Marseille, France

(Received 14 July, 1994; accepted 7 February, 1995)

Abstract. Starting from the field equation $\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} - A(\mathbf{T}))$, presented in a former paper, we present a test result, based on numerical simulations, giving a new model applied to the very large structure of the Universe. A theory of inverse gravitational lensing is developed, in which the observed effects could be due mainly to the action of surrounding 'antipodal matter'. This is an alternative to the explanation based on dark matter existence. We then develop a cosmological model. Because of the hypothesis of homogeneity, the metric must be a solution of the equation $\mathbf{S} = 0$, although the total mass of the Universe is non-zero. In order to avoid the trivial solution $R =$ constant $\times\, t$, we consider a model with 'variable constants'. Then we derive the laws linking the different constants of physics: G, c, h, m; in order to keep the basic equations of physics invariant, so that the variation of these constants is not measurable in the laboratory, the only effect of this process being the red shift, due to the secular variation of these constants. All the energies are conserved, but not the masses. We find that all of the characteristic lengths (Schwarzschild, Jeans, Compton, Planck) vary like the characteristic length R, from where all the characteristic times vary like the cosmic time t. As the energy of the photon $h\nu$ is conserved over its flight, the decrease of its frequency ν is due to the growth of the Planck constant $h \approx t$. In such conditions the field equations have a single solution, corresponding to a negative curvature and to an evolution law: $R \approx t^{2/3}$.

The model is no longer isentropic and $s \approx \log t$. The cosmologic horizon varies like R, so that the homogeneity of the Universe is ensured at any time which constitues an alternative to the theory of inflation. We re-find, for moderate distances, Hubble's law. A new law: distance = $f(z)$ is derived, very close to the classical one for moderate red shifts.

La seconde publication, de 1995 » dans Astrophysics and Space Science, sur «la phase à constante variable[139] ».

Dans cette publication figure le résultat obtenu par l'étudiant Frédéric Descamp, utilisant (illégalement) l'ordinateur du centre de recherche allemand DESY (Deutsches Elektronen Synchrotron), situé à Hambourg[140].

[139] Dans l'abstract (le résumé) on note deux choses. Il y a d'abord le tout début d'une formulation tensorielle de cette géométrie à l'aide de deux tenseurs-sources. Dans le second membre : un tenseur **T** représentant notre propre matière et un tenseur A(**T**) représentant la contribution d'une seconde matière, pour le moment qualifiée « d'antipodale ». Le signe « moins » li donne le statut d'une masse négative. La seconde mention est celle d'une coordonnée de temps assimilée alors à une entropie variant comme Log t.

[140] https://fr.wikipedia.org/wiki/Deutsches_Elektronen-Synchrotron

Fig. 4. Results of simulations performed by F. Lansheat, showing the large structure of the Universe, due to the interaction of the two adjacent folds. Mean value of $\rho^* = 50$ times the mean value of ρ (left). Left: cellular structure. Right: cluster structure.

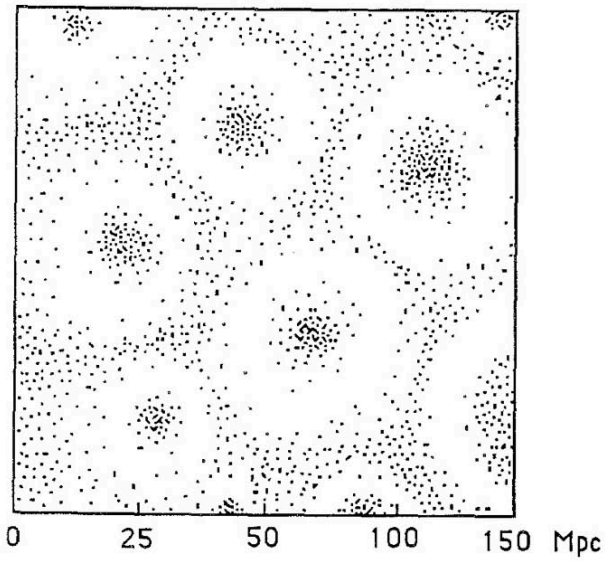
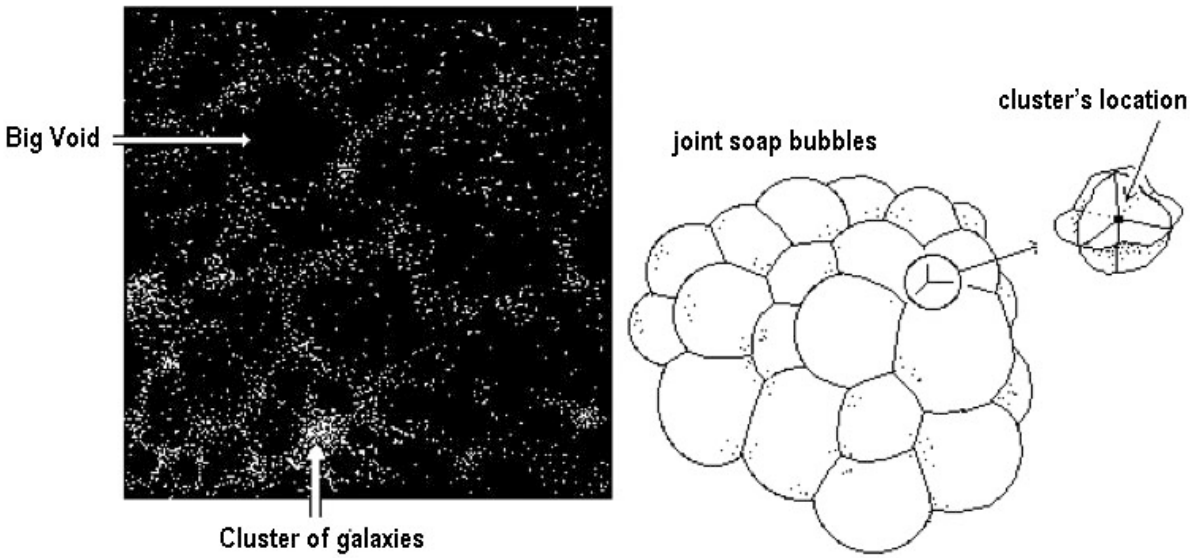


Fig. 5. The same, superimposed.

La structure à grande échelle de l'univers. Premier résultat obtenu par Frédéric Descamp (mentionné sous le pseudonyme de Frédéric Landsheat)

C'est la première fois qu'on envisage une dissymétrie entre les valeurs de masses des deux versants d'univers. En pondérant plus fortement les valeurs absolues de masses négatives, celles-ci se rassemblent les premières en formant des conglomérats sphéroïdaux (ici en 2D). Ceux-ci repoussent alors la masse positive en lui donnant une structure de « bulles jointives ».



Notre propre matière, structurée en bulles jointives[141]

Dns l'article c'est un « pavage » en 2D. Ces conglomérats sphéroïdaux sont alors constitués d'antimatière de masse négative[142]. La compression résultat de l'instabilité gravitationnelle les porte à une température où l'antihydrogène qui les constitue s'ionise.

Pour que ce monde des masses négatives puisse être apte à une relance de l'instabilité gravitationnelle il lui faut se refroidir en émettant du rayonnement. Mais sa taille fait que la quantité de chaleur (qui croit comme le cube du rayon) est telle que le rayonnement émis à sa surface (dont l'aire croit comme le carré du rayon) est tel que le temps d'évacuation de cette énergie (thermique) excède alors l'âge de l'univers.

Ces immenses masses d'anti hydrogène[143] de masse négative n'évoluent donc pas.

Conséquence :

- Dans le versant négatif de l'univers il n'existe ni galaxies, ni étoiles, ni planètes[144].

La vie en est absente.

J'en conclus que si le voyage interstellaire s'effectue en empruntant « l'univers jumeau », le feuillet des masses négatives, ce que je pense, le spectacle qui s'offrirait alors au voyageur est celui « d'objets distants en flous, émettant faiblement dans le rouge et l'infrarouge[145] ».

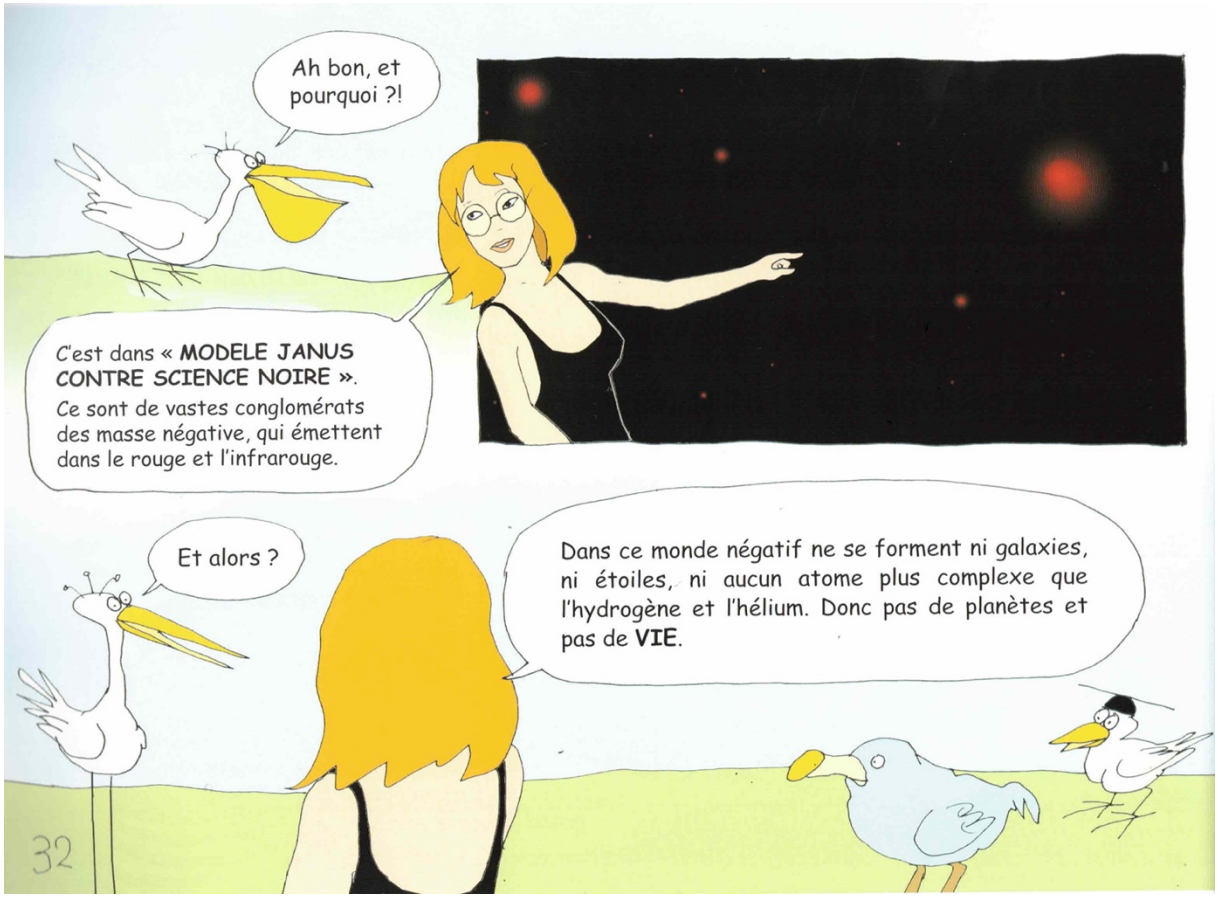
[141] Ce que confirmera le télescope spatial Hubble en détectant la présence d'un immense vide, repoussant les galaxies, à 600 millions d'années-lumière de notre galaxie et de 100 millions d'années-lumière de diamètre (The Dipole Repeller : Y Hoffman, D.Pomarède, R.B.Tully, H.Courtois. Nature Astronomy 2017 1, 0036)

[142] J.P.Petit, H.Zejli : Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group. Reviews in Mathematical Physics. Vol. 37, n001, 2024 (la contribution de Hicham Zejli s'est bornée à la transcription de l'article en Latex).

[143] Plus une certaine fraction en antihélium de masse négative, produite par fusion de l'antihydrogène.

[144] On retrouve la phrase des documents « le cosmos jumeau ne contient pas le même nombre de galaxies ».

[145] Je retrouverai la lettre où ce détail se trouve mentionné.



Page 32 de ma bande dessinée Le Métaphysicon[146]

Je vois une autre conséquence, débouchant directement sur l'observation[147]. Quand cette structure à très grande échelle se forme les conglomérats de masse négative exercent une violente « rétro-compression » sur la matière, agencée en bulles jointives. Cette compression l'échauffe rapidement. Mais sa structure en plaque quasi-planes permet une non moins rapide perte d'énergie par émission de rayonnement. La matière est ainsi déstabilisée et l'instabilité gravitationnelle peut alors jouer, en donnant naissance aux premières étoiles et à des galaxies entièrement formées avant la première centaine de millions d'années.

[146] http://www.jp-petit.org/bd_lanturlu/bd_lanturlu.html

[147] Ce que confirmeront le télescope spatial Hubble, vingt ans plus tard (découverte du « dipole repeller », un grand vide situé à 600 millions d'années-lumière de notre galaxie), et le télescope spatial James Webb vingt-cinq ans plus tard (naissance très précoce des étoiles et des galaxies).

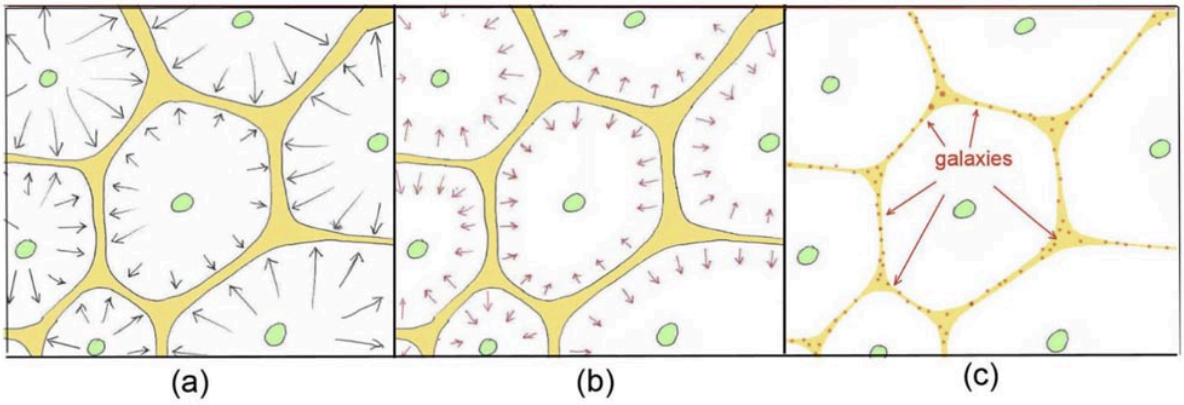


Fig. 12 Early rapid star and galaxy formation

Formation très rapide des galaxies[148]

Tout cela me donne une idée. Dans ce premier papier de 1995, paru dans Astrophysics and Space Science, d'où émerge une telle avalanche de résultats je décide de remercier OAXIIBOO 6, en remplaçant le chiffre 6 par la sixième lettre de l'alphabet :

distant objects. Comparing the available data to the predictions of our model and to those of the (peculiar) Einstein-de Sitter model, we find a slight advantage in the first. Obviously, a single test cannot validate such a model.

Acknowledgement

The author thanks Professor Oaxiiboo F. for useful suggestions and critic.

References

1. Petit, J.P.: The missing mass effect. Il Nuovo Cimento B. Vol. 109, July 1994, pp. 697–710.
2. Zel'dovich, Ya.B.: 1970, *Astrofisica* **6**, 319; *MNRAS* **192**, 192.
3. Doroskhevitch, A.G.: 1980, *MNRAS* **192**, 32.

Cette simple ligne de remerciement allait déclencher une véritable tempête au sein de ma hiérarchie du CNRS. Pour ces gens, remercier dans une publication scientifique un correspondant se présentant comme un extraterrestre revenait à franchir une ligne rouge. Pour

[148] Figure extraite de **:** J.P.Petit, F.Margnat, H.Zejli : A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024). Les contributions de Zejli et Margnat : transcriptions en Latex et mise en page.

moi, il ne s'agissait que d'un geste d'honnêteté intellectuelle élémentaire : lorsqu'une idée m'est suggérée et qu'elle s'avère féconde, quoi de plus normal que d'indiquer le nom de son auteur ?

Chimiste sous pseudonyme.

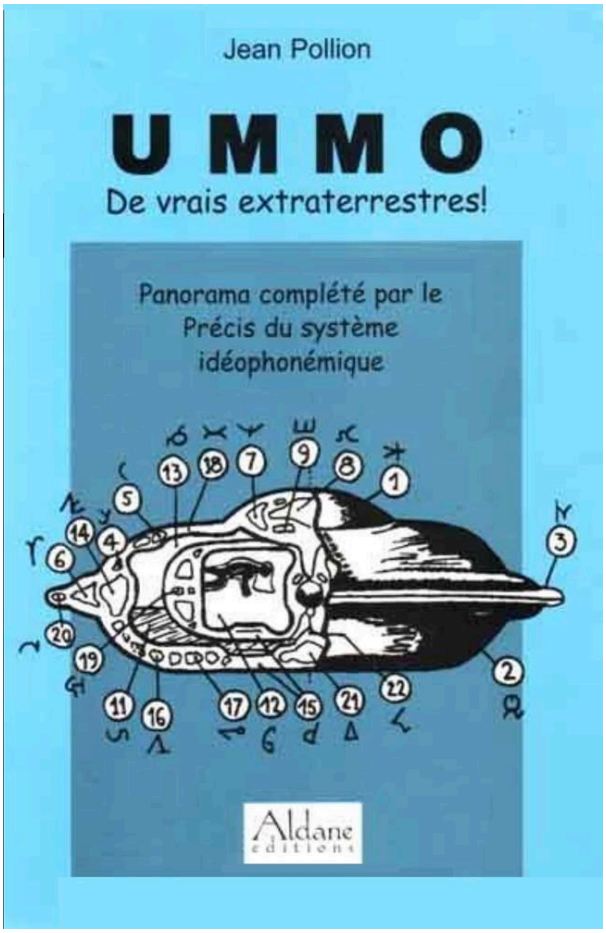
Les textes Ummo contiennent 1340 mots, sous forme de suites de 17 caractères empruntés aux écrits terriens occidentaux :

A B E G I K L M N O R S T U W X Y

Quelques mots Ummites :

XII, XEE, OEMII, ANNOIUXII, UIW, AYUYISAA

A cela s'ajoutent trois phrases en Ummite, le tout avec la traduction correspondante. Tout cela reste un mystère complet pendant des décennies, jusqu'à ce qu'apparaisse un livre signé par un certain « Jean Pollion », pseudonyme inspiré du nom de Champollion, ce Français commença à percer en 1822 le secret des hiéroglyphes égyptiens, grâce à la première pierre trouvée dans le port de Rosette, portant la même inscription, en hiéroglyphes et Grec Ancien.



L'homme s'avèrera être un chimiste belge[149].

Je me procure le livre. L'auteur s'est visiblement inspiré de la langue chinoise où certains caractères chinois sont souvent l'équivalent de petites phrases à eux seuls.

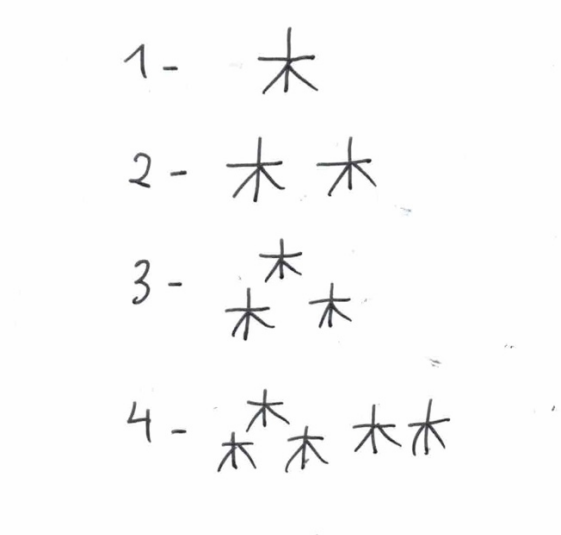
 Éminence, relief

 Le même, couvert de végétation

 Le même, caillouteux

Me premier caractère signifie « relief », « éminence ». Le second représente le même relief, couvert de végétation, et le troisième un relief « caillouteux ».

Ailleurs c'est la multiplicité d'un même signe qui enrichit la description. L'exemple le plus typique est le caractère numéro 1 qui signifie « bois ». En en mettant deux on obtient « bosquet ». Avec trois ça devient « forêt » et cinq : « une forêt importante ».



Dans la représentation 4 on a besoin de cinq caractères. Mais dans la phrase anglaise « important forest », il en fait quinze. La langue chinoise est loin de manquer d'économie.

Jean Pollion met en œuvre cette hypothèse pour analyser les mots des textes Ummo. C'est assez astucieux et amusant. Il qualifie chacun des 17 caractères de « soncepts » : « son-concepts ».

---

[149] Obsédé par le secret il conserve à ce jour celui de sa véritable identité. Tout ce que j'ai pu apprendre c'est qu'il finirait ses jours quelque part en France, après avoir rompu tout contact avec cette affaire Ummo et avec le groupe « Ummo-science ».

Ainsi il traduit :

- La lettre U par Dépendance, soumission, influence

- La lettre M par l'idée de relation, juxtaposition, réunion, couplage, appariement

- Son doublement MM par l'interrelation.

- La lettre O par Entité, être, créature, objet réel

En composant le tout le mot UMMO devient un objet traduisant un semble de composants en interrelation.

Nous dirions : un « écosystème ».

Il apparaît alors que cette langue n'a pas de « noms propres ». Elle n'a que des « noms communs ». Même les individus ne possèdent pas de noms. Ils ne sont désignés que par leur fonction, associée à un numéro.

Ainsi, si Y signifie groupe et U, dépendance hiérarchique, YU c'est donc le chef. Un personnage joue un rôle important dans cette histoire, c'est madame YU 2. Il faut traduire cela par le fait qu'elle fut la responsable de la seconde expédition en direction de la Terre.

DEI 98 est le quatre-vingt-dix-huitième personnage chargé des échanges avec des Terriens.

- D : manifestation, transmission
- E : Patterns, schémas
- I : changement, apport,

Il est donc celui qui est chargé de transmettre une façon différente de voir les choses, à travers de nouveaux schémas, aux Terriens.

Cela cadre avec le tampon dactylé qui est apposé au bas de toutes les lettres. Comme ils le préciseront plus tard, comme chez eux l'identité d'un individu se résume à sa signature olfactive, quand ils signent une lettre ils se contentent de poser leur doigt sur la feuille, pour qu'elle soit marquée de leur odeur.

Le système envisagé par « Pollion » est astucieux et décrit en détail dans son livre. Mais pour avoir prise sur une langue, ces 1340 mots ne suffisent pas. Il faudrait des textes entiers avec des phrases, pour faire émerger une syntaxe, une grammaire, une sémantique. Et trois, c'est totalement insuffisant.

J'ai dit plus haut que le fait de voir l'ensemble des documents Ummo frappés d'un copyright, sous la forme du tatouage UMMO-SCIENCE avait créé une fracture entre d'une part Jean-Jacques et moi, et le petit groupe du GESTO, et d'autre le groupe d'UMMO-SCIENCES[150].

[150] http://www.ummo-sciences.org

Pollion rejoint aussitôt les gens d'Ummo-science ». Logiquement, après avoir fait un tel travail, les lettres devraient arriver, avec des phrases, nombreuses, sur lesquelles il pourrait travailler, s'affirmer comme le Champollion du langage extraterrestre.

Mais rien ne vient.

Alors il crée une cellule se donnant pour but de qualifier les documents, anciens ou nouveaux. A la suite d'un vote, une note est alors attribuée, traduisant une évaluation concernant non seulement le thème abordé mais précisant l'authenticité[151] du document.

Jean Pollion devient alors l'expert du groupe, sur la base de critères fondés sur la référence à des textes antérieurs et sur la cohérence linguistique de nouveaux mots éventuellement présents dans la massive.

Dans ce groupe ummo-science il fait figure d'autorité dans une nouvelle discipline, qu'ils baptisent eux-mêmes :

Ummologie

La lettre du golfe.

Le 14 janvier 1991 les contactés espagnols reçoivent une lettre leur annonçant le déclenchement imminent de la première guerre du golfe (l'opération « tempête du désert »). C'est le document **D**1741 (dans la classification de l'archiviste du groupe espagnol, Ignacio Dardaude, jusqu'à son décès). Une lettre qui abonde de nouveaux mots ummites, tous plus pertinents les uns que les autres. Voilà par exemple une analyse « ummite » de la personnalité de Saddam Hussein :

- *Bien qu'au début les motifs de l'invasion de ce territoire[152] comportaient plusieurs intentions distinctes (agrandir le pays en croyant que les États-Unis ne s'aventureraient pas à sa rescousse), les raisons de la conduite de Saddam Hussein ont connu un changement radical (UUW EYEYIIOXAA LEII) au point que sa structure mentale (EESEE OOA) est radicalement différente. Il veut tranquilliser son esprit (BUAUUAA) en reliant la prise du territoire à toute la dramatique injustice dont souffre l'ethnie arabe par la faute de la puissance dominante des ethnies du nord de la planète (OIIAGAA YUUGIIXI) et spécialement de l'invasion des territoires palestiniens par Israël.*

Suivent des informations sur l'état de développement de l'arme nucléaire par les Irakiens :

[151] Toutes les lettres que j'ai moi-même reçues y sont encore à ce jour étiquetées FP : faux probable
[152] Le Koweit

La réalité est beaucoup trop complexe pour donner une réponse simple. Qui a raison ? PERSONNE ET TOUS. Mais cela mérite quelques nuances. Laissons de côté la conduite de cet homme que vous pouvez qualifier de déséquilibré. Si vous le laissez consommer l'invasion, invoquant une doctrine pacifiste très louable, vous courez en Occident un péril beaucoup plus grave que celui que nous avons conjuré. (Les projets d'arme fission-fusion-fission sont très avancés et l'arme sera au point dans 1,6 à 2,2 ans, et 2,8 à 3 ans de plus suffiraient à la transférer à l'Égypte (Dès lors, l'assassinat de l'actuel dirigeant aurait changé la face des choses)

Extrait de la lettre reçue avant le déclenchement de la guerre du golfe

Les scientifique Irakiens en sont donc déjà un la bombes à trois étage, l'engin F-F-F où une bombe A entraîne la fusion d'une charge d'hydrure de lithium (la bombe H) laquelle agit sur une enveloppe extérieure en uranium 238, dont les noyaux se transforment en Plutonium 239, qui fissionne[153] … Le summum en matière d'arme nucléaire.

Comme si le nucléaire ne suffisait pas, la lettre évoque l'arsenal des missiles en silos de Saddam Hussein, porteurs de terribles armes bactériologiques :

- *De toutes façons, les silos contiennent des têtes dotées d'agents VX et d'agents GD. Le second est l'ortho-1-2-2triméthylpropylméthyl-phosphoflurohydrate (gaz nerveux Soman) avec des conséquences gravissimes pour les victimes qui l'absorbent. La dose mortelle est estimée à un centième de gramme.*

C'est vraiment … n'importe quoi. Mais la lettre contient le détail, véridique celui-là, destiné à la rendre crédible.

- *Dans la guerre actuelle seuls les E-U, l'URSS, la Grande-Bretagne, la France, Israël, détiennent l'arme "mortifère", le Canada et la Chine la connaissent. Nous allons vous révéler son nom. Ce n'est pas une entité matérielle mais un concept. Il se nomme ISC (Informative Satellite Coefficient) (mesures fournies par satellite d'information). Seuls les deux premiers pays peuvent s'en servir efficacement.*

Ce concept d'ISC évoque fortement ce qui deviendra, quelques années plus tard pour le grand public, le GPS et, plus généralement, les systèmes modernes de guidage et de géolocalisation par satellite.

Enfin, lisez ces dernières lignes :

- *Il existe un risque manifestement réel, soigneusement occulté par les chancelleries de l'ONU pour éviter une panique généralisée. Quelques 62 commandos suicidaires sont répartis aux États-Unis, en Angleterre, Israël, Italie, Canada, Australie et à un moindre degré dans d'autres pays. Ils ont l'ordre exprès de contaminer les réseaux hydrauliques de distribution d'eau potable avec des virus traités en laboratoire par techniques de manipulations de génie génétique.*

[153] Après la déroute complète des troupes irakiennes les envoyés de l'ONU ne trouvère pas trace des armes de destruction massives, nucléaire ou chimique, brandies par Colin Powell.

> *Bien que la (P. soit de 27%) de réussite (le risque est considérablement plus faible en Espagne) NOUS VOUS RECOMMENDONS D'URGENCE DE FAIRE DES RÉSERVES D'EAU POTABLE AVANT LE 19 JANVIER.*

Voici donc des commandos de Saddam Hussein prêts à empoisonner les sources d'eau potable avec des virus obtenus par manipulation génétique !

Le message est très orienté politiquement, ce qui ne correspond pas au ton des textes Ummo antérieurs. Ce document montre, en tout cas, à quel point il est facile de produire un faux épousant parfaitement cette phraséologie.

Et j'en reviens à ma propre stratégie, exclusivement centrée sur la fonctionnalité scientifique des informations[154].

Sous cet angle, l'activité de ce comité de validation, instauré par Jean Pollion au sein du groupe Ummo-science fait sourire.

La sanction ne tarde pas à arriver. Le groupe reçoit une lettre du Canada. Elle comporte l'évaluation de la superficie du lac immense se trouvant au centre de l'unique continent de la planète Ummo, au mètre carré près.

La brillante équipe, effectuant sa propre évaluation à l'aide d'un ordinateur, retombe pile sur le même chiffre. Pollion ayant trouvé du sens dans les différents mots émaillant la lettre, le signataire était un certain WD 40, la fine équipe lui attribue une probabilité élevée d'authenticité.

Leurs conclusions d'experts en « ummologie » sont publiées dans le site.

Immédiatement, une lettre émanant du Canada arriva, dont l'auteur, se prétendant étudiant en sciences, dit avoir voulu tester leur crédibilité.

Elle se termine en disant que WD 40 est « la lubrifiant dont il se sert pour graisser sa bicyclette ».

[154] Il n'empêche, et vous pourrez le vérifier en allant sur le site ummo-sciences, que ce document, validé par Jean Pollion (après analyse des mots qui l'émaillent), figure toujours dans le lot des PDF présentés comme authentiques !



Des mathématiques venues d'ailleurs.

Le téléphone sonne. Je regarde l'heure qui apparait en rouge sur l'affichage à diodes de la pendule de la chambre.

- *Trois heures ! Qui appelle à cette heure-là ?*

Je décroche.

- *Changement de variable. Coordonnée s égale rayon de Schwarzschild facteur de 1 plus logarithme du cosinus hyperbolique de rho. Il faut que tu notes, sinon au réveil tu oublieras.*

La phrase est répétée plusieurs fois, en boucle.

- *Oui … oui , ça va !*

Je me lève et je gagne mon bureau. Je me munis d'une feuille blanche et d'un crayon et je note la formule.

Je reviens dans la chambre. Le correspondant a raccroché. Je me recouche.

Au matin, j'émerge péniblement.

- *Qui joue de la guitare ?*

On ne peut pas appeler cela « jouer ». C'est comme si quelqu'un pinçait les cordes. Le son vient de mon propre instrument, pendu au mur.

Je me lève brusquement.

- *Comme à Paris, en 1947, rue Jean-Baptiste Dumas !*

Je me lève et je vais dans mon bureau. Il faut que je vérifie, si j'ai rêvé. Mais non, le bout de papier est bien là, avec la formule, qui m'attend.

$$r = R_s\left(1 + \log \mathrm{ch}\, \rho\right)$$

Le rayon de Schwarzschild est la longueur caractéristique une grandeur qui est familière à tout théoricien orienté vers la cosmologie. Cette grandeur a été introduite en 1916 par le mathématicien autrichien Karl Schwarzschild, quand il était en poste sur le front est, face aux troupes russes, pendant la première guerre mondiale. Beaucoup de travail a été fait pour régulariser sa solution de janvier 1916.

Je m'entends parler à haute voix :

- *Il faut faire ce changement de variable dans la métrique extérieure, la solution de Schwarzschild de l'équation d'Einstein dans le vide*[155]*.*

J'extrais un livre consacré à la cosmologie, d'un rayonnage de ma bibliothèque. Sa solution, la voilà[156] :

(6.52) $$\sin^2\theta[(e^{-\lambda}r)' - 1] = 0$$

By virtue of (6.45) this is identically zero, so we see that the equation $R_{33} = 0$ is indeed consistent with (6.47). We leave it to the reader to verify that all the off-diagonal elements of the contracted Riemann tensor are identically zero when explicitly written in terms of the coordinates and that (6.47) is therefore a completely consistent solution of (6.25).

Let us now summarize the results of this section by exhibiting the *Schwarzschild line element*

(6.53) $$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

This result must be considered to be the main achievement of general relativity theory in the field of celestial mechanics; it is an exact solution,

- *Là, cette grandeur Rs c'est 2m. Remplacer sa variable r par cette variable ρ*[157]

J'aligne les lignes de calcul.

---

[155] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1916-Schwarzschild-exterior-deu.pdf

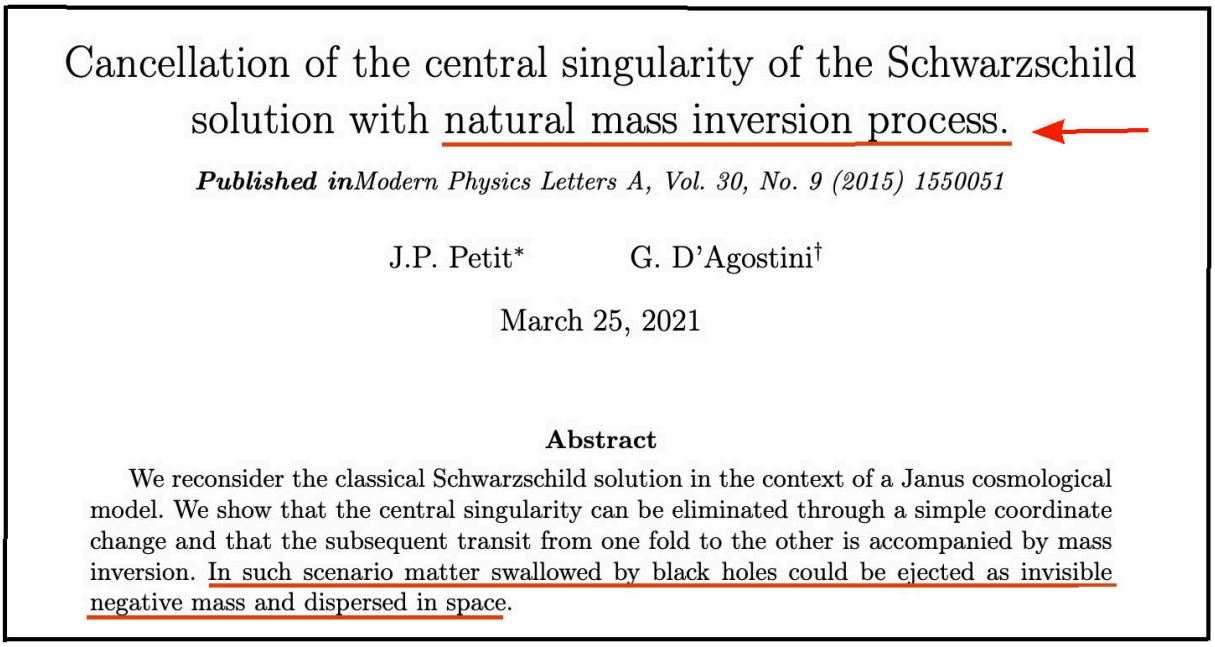
[156] Tous mes livres sont comme ça. Je souligne quand ça me paraît important.

[157] ρ st la lettre grecque rho

- *Merde ! Ça donne une autre géométrie, à deux nappes, analogue à la solution publiée en 1935 par Einstein et Rosen[158]. Mais le comportement à l'infini est correct. Ça donne la première traduction géométrique de l'inversion de masse. Ça c'est nouveau, c'est sacrément nouveau et sacrément intéressant !*

Il faut que j'arrête de parler tout seul.

Dans les jours qui suivent je consigne tout cela dans un article que j'envoie à la revue de haut niveau Modern Physics Letters A, qui le publie[159].



Cancellation of the central singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process.

Published in*Modern Physics Letters A, Vol. 30, No. 9 (2015) 1550051*

J.P. Petit* G. D'Agostini†

March 25, 2021

Abstract

We reconsider the classical Schwarzschild solution in the context of a Janus cosmological model. We show that the central singularity can be eliminated through a simple coordinate change and that the subsequent transit from one fold to the other is accompanied by mass inversion. In such scenario matter swallowed by black holes could be ejected as invisible negative mass and dispersed in space.

Des mathématiques venues d'ailleurs

Dans l'abstract (le résumé), la phrase :

- *Dans un tel scénario la matière avalée par les trous noirs pourrait être éjectée sous forme de masse invisible, dispersée dans l'espace.*

Mathématiquement, c'est joli. C'est ce que des tas de gens ont recherché pendant exactement un siècle. Une formule magique, qui donne la bonne géométrie.

Mais surtout cela suggère un processus d'inversion de la masse, lorsque celle-ci est envoyé dans un autre versant d'univers.

---

[158] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1935-Einstein-Rosen.pdf

[159] J.P. Petit & G. D'Agostini : Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process. Mod. Phys. Lett. A vol. 30 n°9 2015 arXiv : gr-qc/2103.12845/13 feb 2001(23 March 2021) https://arxiv.org/abs/2103.12845

Et ça n'est rien d'autre que le début de la mise en forme de la phrase entendue par Dominguez, quelques années plus tôt.

Mais il reste un point intrigant. Cette formule, on ne sait pas d'où elle sort.



D'où je sors ça ? …

La surface de Boy.

Souriau avait raison. On ne sort pas indemne en fréquentant un homme comme Bernard Morin.



Bernard Morin 1931-2018

Nos cerveaux sont des ensembles de connexions entre différents paquets de neurones. Dès l'enfance, puis dans la scolarité, et enfin dans les études supérieures on nous câble, on nous formate.

Morin s'est câblé lui-même.

Et en sortant de toutes nos séances je réalise que je ne suis plus tout-à-fait le même. Quant à Bernard, il a intégré cette idée d'inversion de l'espace et du temps. Il l'a digérée au fil des mois, longuement.

- *Ce modèle ummite à deux univers, c'est de la géométrie. Au cœur de tout cela il y a la surface inventée par le mathématicien allemand Werner Boy en 1902, juste avant qu'il se fasse tuer en France, à 34 ans, quatre mois après le déclenchement de la première guerre mondiale.*

- *C'est quoi, cette surface. On en a des images ?*

- *Juste celles qui illustrent son article de 1902[160]. C'est très peu connu, d'autant plus que celui-ci n'existe que dans sa version originale, en allemand[161]. Il faut que tu comprennes comment elle fonctionne.*



liegen die Mäntel an den Kurven B und C. Wir zerschneiden nun längs der Kurven A, B, C die sechs Kanten und heften die Ränder kreuzweise aneinander. Damit ist die Fläche fertig, in den Kurven A, B, C durchdringt je ein Cylinder senkrecht ein ebenes Blatt. Der Anfangspunkt ist

Fig. 20a. Fig. 20b.

ein dreifacher Punkt der Fläche. Die sich dort durchdringenden Mäntel haben die Koordinatenebenen zu Tangentialebenen. Wir sehen, unsere Fläche ist singularitätenfrei. Die Kurven A, B, C bilden in ihrer Ge-

La surface inventée par Werner Boy en 1902[162]

[160] A l'époque il n'y avait que ces deux-là. La production d'images par ordinateur a débuté quand j'en ai donné la première représentation analytique, en 1981)

[161] Et c'est toujours le cas au moment où j'écris ces lignes, en 2026

[162] W.Boy :Über die curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Dissertation, Georg-August-Universitât, Gottingen, 1902 (Courbure intégrée et topologie des surfaces fermées. Thèse de doctorat, Göttingen, 1902)

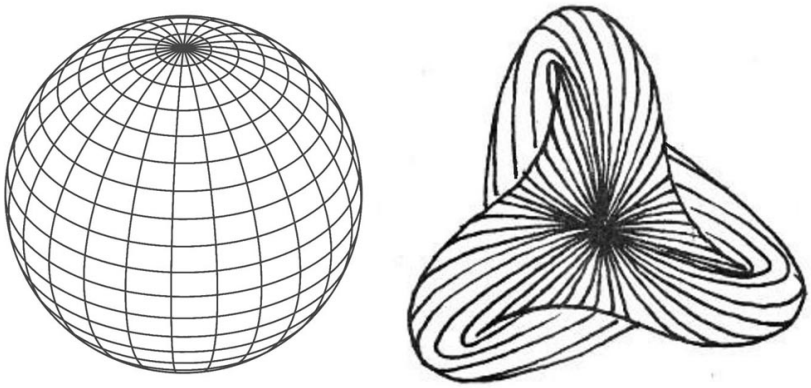
Mais Bernard est reparti à Strasbourg, où il enseigne, et je dois me débrouiller seul.

J'ai fini par venir à bout de son « modèle à quatre oreilles », modèle central de sa version du retournement de la sphère. Là c'est plié, dessiné, publié.

La surface de Boy a trois oreilles.

Je passe des heures dans mon atelier de l'école des Beaux-Arts d'Aix-en-Provence. Finalement, je trouve la solution assez rapidement, grâce à cette technique faisant recours à ce fil de fer cuivré de 2 millimètres de diamètre, suffisamment souple. Il y a cela, et le fil à coudre avec lequel je crée sans cesse de nouvelles ligatures entre courbes qui se croisent.

Il y a des découvertes qui s'effectuent de cette manière artisanale, et c'en est une. Dans cet atelier, en 1981, je découvre la façon d'agencer les « courbes méridiennes » de la surface de Boy, sous forme d'ellipses concourant en son pôle unique, de la même façon que les méridiens d'une sphère s'organisent autour de deux pôles, nord et sud.



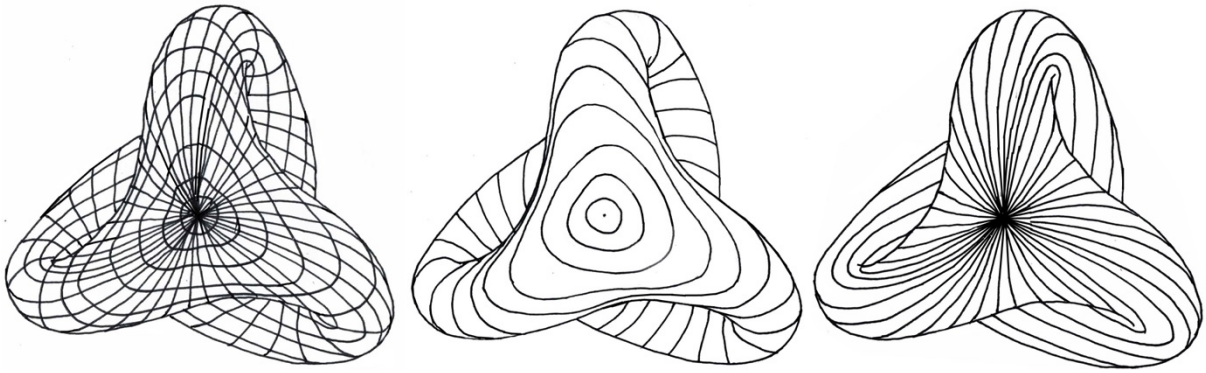
Méridiens de la sphère et de la surface de Boy

La figure de droite montre les courbes méridiennes de la surface de Boy, concourant en son pôle unique. Comme pour la sphère on peut tracer une seconde famille de courbes, qui peuvent alors être qualifiées de « parallèles », orthogonales aux courbes méridiennes.

Sur une sphère, quand on part d'un des deux pôles on peut tracer une courbe fermée autour de celui-ci, un « parallèle ». Puis on peut en tracer un autre, à l'extérieur de ce domaine. Et ainsi de suite. Ces cercles constituent les parallèles de la sphère. Ils ont un périmètre maximal correspondant à son équateur.

Puis, si on poursuit l'opération, ce périmètre diminue, jusqu'à la valeur zéro quand celui-ci se réduit à l'autre pôle de la surface.

Quand on part du pôle unique de la surface de Boy, on peut progresser ainsi de proche en proche en y inscrivant des courbes fermées qui, comme pour la sphère, ont un périmètre maximal.

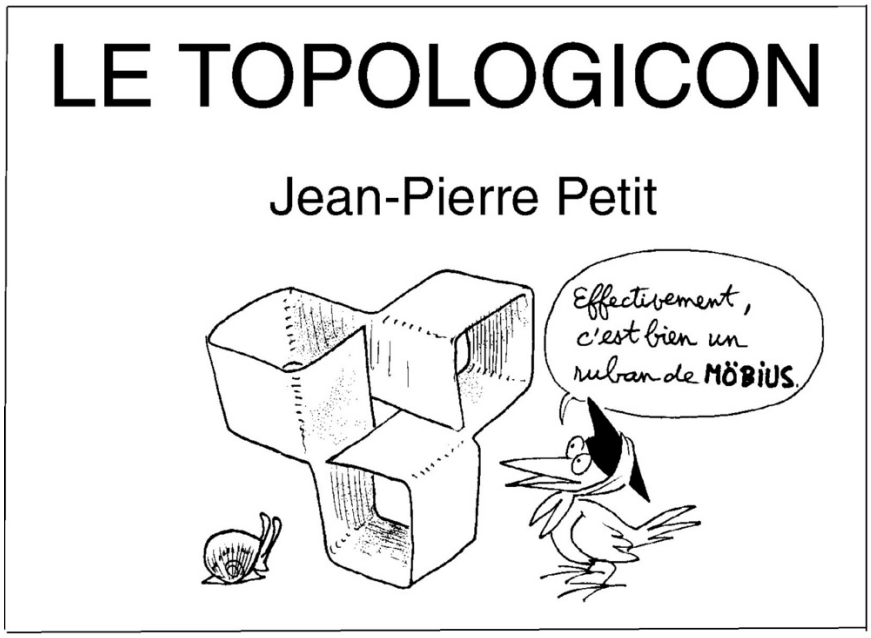


A gauche : l'ensemble méridiens-parallèle, à droite : les méridiens, au centre: les parallèles

Puis, en poussant plus loin, comme pour la sphère, on obtient des courbes fermées dont le périmètre va en diminuant jusqu'à … converger vers le même pôle[163] !

C'est cela, pour reprendre le mot de Souriau « qui vous tord le cerveau » !

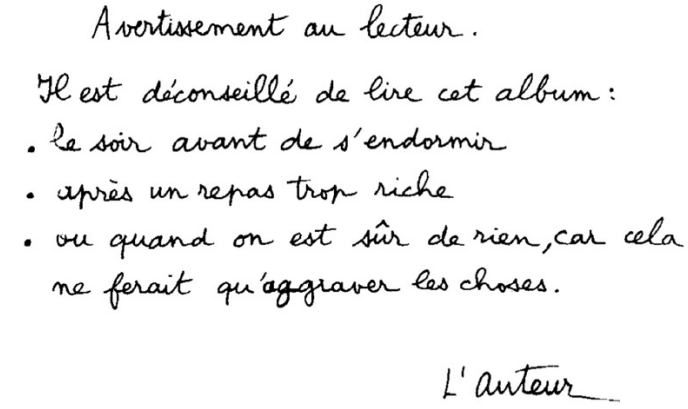
Le lecteur trouvera dans ma bande dessinée :



[163] Pendant plusieurs décennies un modèle de cette surface, avec ses méridiens et parallèle, de deux mètres de diamètre, réalisé à l'École des Beaux-Arts d'Aix-en-Provence, absolument unique en son genre, fut exposé au Palais de la Découverte de Paris. Mais, sa direction ayant estimé qu'on l'avait assez vu, celui-ci fut revendu à un psychiatre Belge, le docteur Schnock

les éléments nécessaires pour comprendre tout cela. J'ai même créé, au fil des pages, un « flip book ». En feuilletant l'ouvrage on voit alors se dérouler quatre séquences animées.

En exergue de cet album :

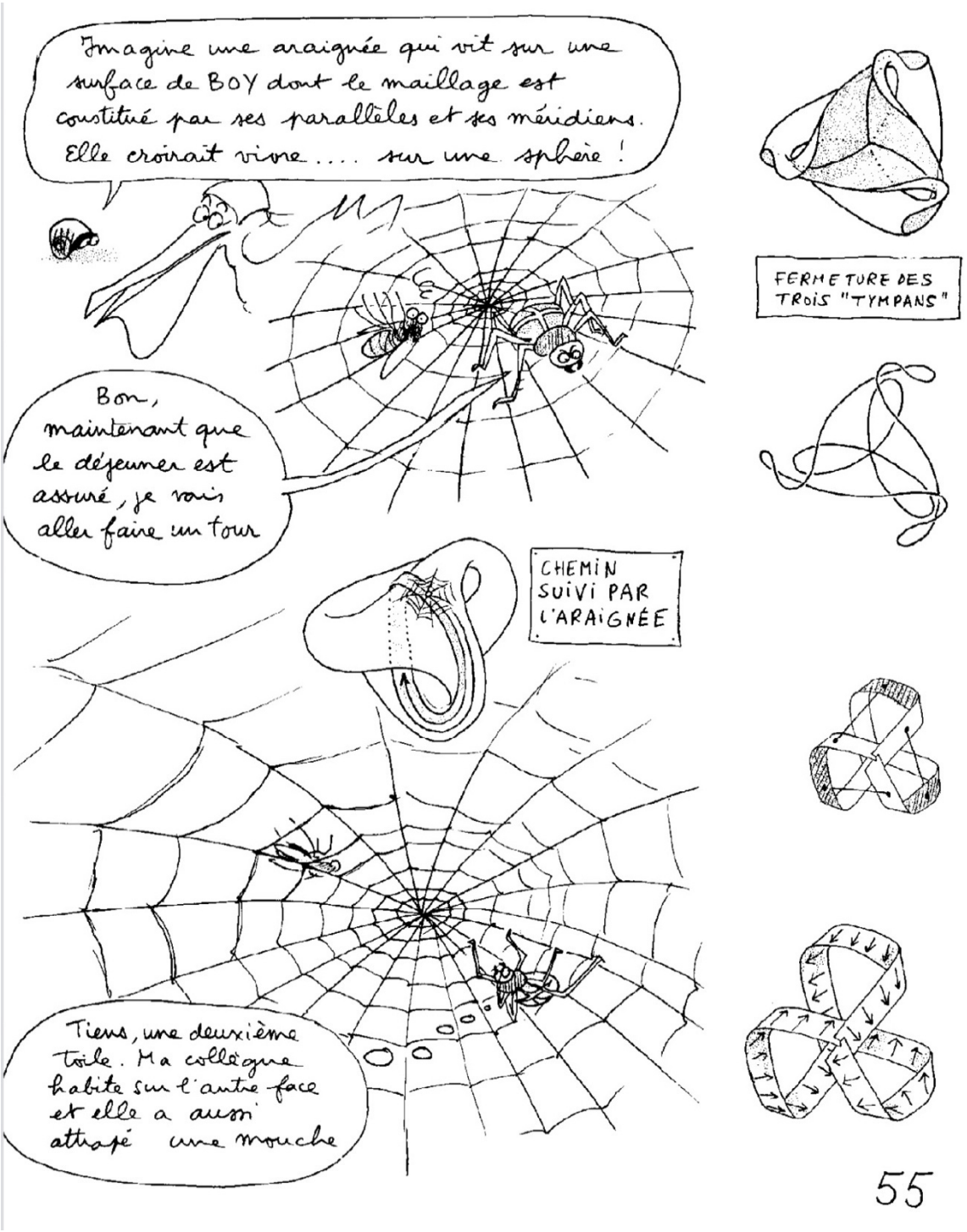

Avertissement au lecteur.

Il est déconseillé de lire cet album :
- le soir avant de s'endormir
- après un repas trop riche
- ou quand on est sûr de rien, car cela ne ferait qu'aggraver les choses.

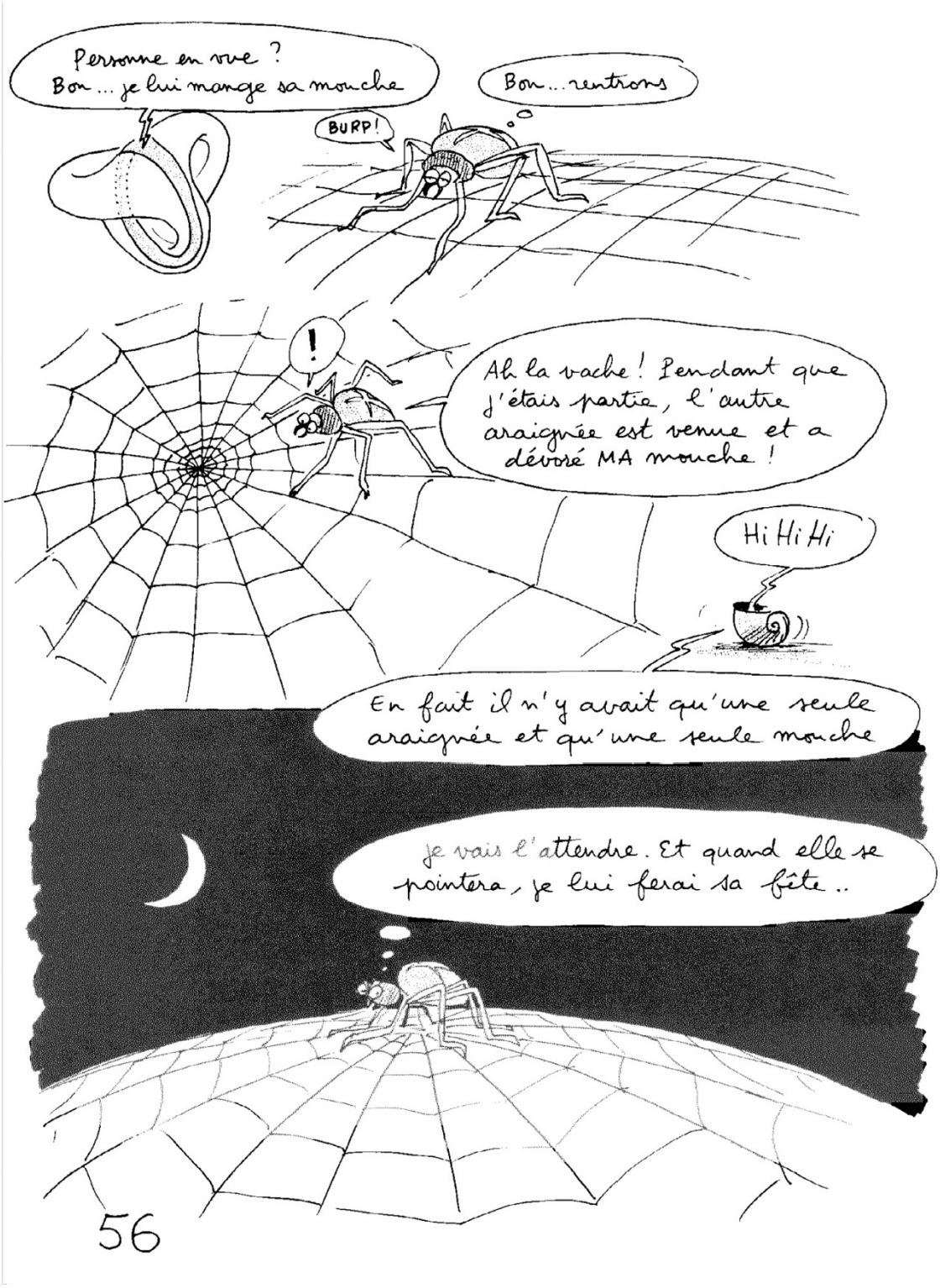
L'auteur

Si le lecteur veut tenter l'aventure alors, bonne route ! Mais qu'il sache que sa vision de l'espace et de l'univers risque d'en prendre un coup.

Cette histoire des courbes parallèles de la surface de Boy qui, partant de son pôle unique, convergent de nouveau vers celui-ci, est illustrée par l'histoire d'une araignée qui tisse sa toile, sans le savoir, sur une surface de Boy.



On aperçoit, à droite, des éléments des quatre « flip books »



Qui dois-je tuer pour cela ?

Le fils de Souriau, Jérôme, n'est pas mathématicien mais informaticien. Je lui propose d'inscrire son nom dans une publication de mathématiques au prix d'une mission à accomplir. Et il me répond :

- *Qui dois-je tuer pour cela ?*[164]

Aussitôt dit, aussitôt fait.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (5 octobre 1981) Série I – 269

GÉOMÉTRIE. – *Une représentation analytique de la surface de Boy*. Note (*) de **Jean-Pierre Petit** et **Jérôme Souriau,** présentée par André Lichnerowicz.

Où on retrouve la première représentation des méridiens, obtenue par Jérôme sur son Apple II :

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (5 octobre 1981) Série I – 271

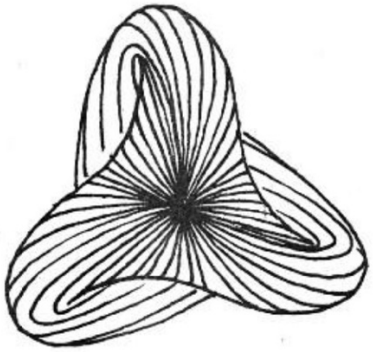


Fig. 4. – Lignes méridiennes (Eμ) de la surface de Boy (tracé par « Apple-II »).

Je n'irai pas plus loin dans cette voie, sous peine de perdre en route mes lecteurs non-scientifiques[165].

---

[164] La tâche de Jérôme consiste à effectuer des mesures sur le modèle en fil-de-fer, des paramètres des ellipses qui constituent son « maillage », les « méridiens », et d'en donner une construction demi-empirique. Celle-ci figure dans la dernière page de l'album LE TOPOLOGICON. Introduite dans notre ordinateur portable, sous forme d'un programme, ceci permit d'obtenir la toute première image de synthèse, bien primitive, de cette mystérieuse surface inventée par Werner Boy en 1902. Les référence de l'article : J.P.Petit, J.Souriau : Une représentation analytique de la surface de Boy. CRAS t. 293 (5 oct. 1981)

[165] Ce qui ressort de tout cela, c'est la topologie de l'univers, en tant que revêtement d'une hypersurface de Boy à quatre dimensions. Voir J.P. Petit, F. Margnat, H. Zejli : A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024) https://link.springer.com/content/pdf/10.1140/epjc/s10052-024-13569-w.pdf

L'agenda.

Dans ma boite aux lettres, une nouvelle lettre dans laquelle « ces messieurs de Ummo », comme les appelle Ribera, établissent le calendrier des contacts avec la Terre :

> *La première phase dite "d'études', qui va bientôt s'achever, a été menée de manière très concluante puisqu'elle a permis de stocker sur mémoire de titane l'essentiel des informations technico-culturelles de votre riche et passionnante civilisation terrienne, sans que, globalement, l'objet d'étude soit perturbé.*
>
> *La seconde étape du programme (1970-2000) dite "de préparation" qui a pour but une sensibilisation et une maturation progressive des élites politiques, militaires, puis scientifiques, sociales et religieuses, vise à rendre rationnellement admissible et tolérable l'idée même d'une présence extraterrestre sur Terre et à favoriser la diffusion progressive à l'échelle macro-sociale de ce nouveau paradigme.*
>
> *La réalisation de cette seconde phase est assurée par une intensification des survols des zones habitées, des atterrissages et des rencontres diurnes, l'intensification des contacts téléphoniques et des envois postaux et l'exécution inévitable d'opérations de désinformation jugées malheureusement indispensables.*
>
> *La troisième étape, dite "de contact' a pour objet la révélation macro-sociale officielle, l'établissement de contacts officiels entre vos gouvernements et l'UMMOAELEWE et le développement programmé et concerté d'une évolution biculturelle de nos deux civilisations.*
>
> *Cette troisième phase devrait pouvoir en toute logique intervenir au début du troisième millénaire (sous réserve de modifications tenant à l'évolution des conditions sociopolitiques régnant sur Terre et à l'absence de choc culturel par trop préjudiciable pour vous, pouvant résulter d'un transfert excessif de connaissances), probablement entre 2030 et 2050, selon le niveau d'immunité et de résistance psychologique manifesté par les terriens.*

Je vois que nous sommes censés être dans cette phase « de sensibilisation et une maturation progressive des élites politiques, militaires, puis scientifiques, sociales et religieuses, visant à rendre rationnellement admissible et tolérable l'idée même d'une présence extraterrestre sur Terre et à favoriser la diffusion progressive à l'échelle macro-sociale de ce nouveau paradigme ».

Je m'étais jusqu'ici demandé sur ces extraterrestres n'avaient pas une vision fausse de la façon dont fonctionnent les bipèdes terriens.

A la lecture de ces quelques lignes, cela devient une certitude.

Où sont nos élites politiques, militaires, scientifiques ???

Je repense à l'ouvrage de de Pierre Accoce et Pierre Rentchnick « ces malades qui nous gouvernent[166] ». Il ne s'agit pas seulement de désordres des corps, mais carrément de profils psychologiques qui confinent à la maladie mentale.

Pour avoir une chance de faire réagir positivement des humains, encore faudrait-il tomber sur des collectivités qui soient ouvertes à une évolution quelconque et ne soient pas exclusivement préoccupées à maintenir un statu quo à leur profit, fusse-t-il suicidaire. Dans un monde où ce sont les plus malades, les paranoïaques, les pervers narcissiques, qui parviennent au sommet, s'approprient les rênes du pouvoir, dans tous les domaines.

Partout, il faut s'attendre à des réactions de nature psycho-socio-immunologiques, à une levée de bouclier face à « l'étranger », immédiatement identifié à un nouvel ennemi.

Des opérations de désinformations vis-à-vis du phénomène ovni, les Terriens en produisent en continu depuis plus d'un demi-siècle. La dernière en date consiste, tout en convenant de la réalité du phénomène (devenue de moins en moins contestable), à l'imputer à « des gens qui viennent du futur » qui, de ce fait, ne sauraient intervenir avec leur propre passé[167].

D'autres nient toutes possibilité d'avoir une prise scientifique quelconque sur ce phénomène ovni, en qualifiant toutes se manifestations de « paranormale ». En 1976 je me trouve face à Jacques Vallée, l'expert en ovnis, dans l'émission de Polac « Droit de Réponse ». Immédiatement il déclare :

- *Eh bien moi, je serais personnellement très déçu si le phénomène ovni ne correspondait qu'à des visites d'extraterrestres !*

Toutes sa pensées, ses livres, se résument à cette phrase. Vive l'obscurantisme qui nous protège de toute connaissance déstabilisante !

J'ai soudain une idée.

Si les extraterrestres ont réagi à ce que j'écrivais dans mon disque dur, pourquoi ne pas « leur écrire » en utilisant le même « canal » ?

La démarche scientifique a ses propres règles, que l'on définit selon une palette d'approches « rationnelles ».

- Porter son attention sur des disfonctionnements des modèles
- Tenter d'en construire de nouveaux
- Confronter ces nouvelles façons de voir aux observations.

---

166 Paru en 1976 aux Éditions Stock. Suivi en 1996, dans la même maison d'édition, de « Ces nouveaux malades qui nous gouvernent ».

167 Dans le modèle Janus on est confronté à deux feuillets d'univers, dotés de flèches du temps opposées. Ainsi, pourquoi ne pas aller faire un petit tour dans ce versant rétrochrone ? La Nature a une façon bien à elle de déjouer ces pièges des paradoxes temporels. Visiter son propre passé ne peut alors se faire qu'au prix de voyages dont la durée excède l'âge de l'univers.

L'épistémovirus.

Je me propose comme vecteur opérant des injections de connaissances dans le tissu scientifiques terrestre, en mettant en œuvre cette stratégie.

La réaction est immédiate. Les lettres arrivent, nombreuses, se référant à différents domaines. Certaines font état d'observations d'objets exotiques, dont le comportement (un effondrement brutal de leur température) révèlerait l'étrange dialogue entre notre univers et son jumeau.

Je n'ai pas accès à ces moyens observationnels. Mon laboratoire, c'est le « papier-crayon », mes outils : ceux des mathématiques et plus précisément de la géométrie.

Seul, je m'attaque à une forteresse.

J'ai un petit nombre d'années devant moi, avant de prendre congé. Il est déjà énorme que je dispose encore de ma tête, de mon imagination, de ma capacité à assembler des pièces du puzzle.

Tellement de gens sont déjà partis. La vie ne m'a pas épargné. J'ai eu mon content de drames, de deuils.

Je ne suis qu'un hamster, un grain de poussière sans importance, perdu au milieu de l'univers. Je me sens comme un grain de sable sur une plage. Tout cela est lourd pour mes épaules.

Mais j'ai l'impression confuse d'abord quelque chose à faire et une sorte de certitude : si je ne fais pas ce travail, personne ne le fera à ma place.

L'Ufosphère.

Ce qui est étrange c'est que les principaux détracteurs de cette affaire Ummo aient été, d'emblée, les ufologues. En fait, tout individu fait de son mieux pour maintenir tout sujet à l'intérieur du champ de ses compétences lesquelles, en l'occurrence, se résument à une discipline nouvelle à laquelle on a donné le nom d'ufologie, à une époque où on ne savait à quel secteur de la science se référer.

A travers ce livre on découvre donc que le phénomène ovni s'est solidement ancré dans la physique des plasmas, l'astrophysique et la cosmologie. Il s'agit dès lors de secteurs totalement hors de portée de l'ufologue moyen. D'où le rejet, le déni.

A cela s'ajoute une nouvelle interprétation basée sur une théorie qui fait de ces visiteurs nos descendants dans un avenir très lointain lesquels, maîtrisant la technique des voyages dans le temps, et qui ont ainsi le loisir de visiter … leur propre passé. Mais, ipso facto, cela leur interdirait alors d'intervenir, sous peine de modifier leur propre trame historique.

Cette idée trouve même sa base, on dirait aujourd'hui scientiste, dans un modèle imaginé dans les années cinquante par le grand mathématicien Kurt Gödel, voisin de bureau d'Einstein, au prestigieux Institut des Sciences avancées de Princeton.



Einstein et Kust Gödel à Princeton

Dans cet espace-temps de Gödel, où l'univers est censé tourner sur lui-même comme une toupie, il existe des chemins où, si on les emprunte, on peut se retrouver … dans son propre passé, et créer ainsi des paradoxes. Tuer son propre père, par exemple. Mais la Nature Offre aussitôt la parade à ce genre de chose. Pied de nez cosmique : réaliser une telle opération, boucler cette boucle, requiert alors un temps … excédant l'âge de l'univers !

Mais ce détail n'arrête pas les tenants de cette nouvelle version du phénomène ovni.

Si nos ufologues sont mal à l'aise dans les couloirs de la science, il leur reste le monde illimité du paranormal, où le premier venu peut se donner des airs de spécialiste.

Il reste que les aspects évoqués dans ce livre ne constituent qu'une des facettes de ce fantastique dossier, où des bonbons « Tic-Tac » plongent à vitesse hypersonique dans la mer sous les yeux des pilotes de la Navy, scènes filmées par les caméras de leurs appareils, où apparaissent depuis des décennies, au départ dans la campagne anglaise, ces fameux « crop circles ».

Que faire du film montrant l'autopsie d'un extraterrestres à cinq doigts, présentée à la télévision en 1995, d'examen de momies péruviennes de petite taille recouvertes de diatomite[168], prétendument récupérées dans une nécropole, et qui n'en ont que trois.

Dans ce cas, la réponse est simple et fournie par les « debunkers ». Dès l'apparition des crop circles, deux militaires retraités anglais montrent que ces formations dans les blés

[168] La diatomite est une poudre blanche faite de minuscules squelettes de plancton. Au Pérou on exploite d'antiques couches sédimentaires qui fournissent cet élément en abondance. L'industrie pharmaceutique l'utilise pour sa capacité à absorber l'humidité, ou pour filtrer des liquides biologiques. Pour ces « momies de Nazca » cette poudre remplacerait le « natron » des anciens égyptiens, élément dessiccant essentiel pour la momification.

pouvaient être faites avec une planche en bois et de la ficelle. La séquence fait le tour du monde. Une technique par la suite reprise par des équipes plus organisées, démontrant leur capacité à réaliser des faux très sophistiqués en quelques heures, la nuit. Ce sont des faux. Donc, si des hommes sont capables d'une produire un, c'est que tous les crop circles sont d'origine humaine, c'est évident.

Il a été aisé de réaliser des films montrant « l'autopsie d'un extraterrestre », réalisés en studio. Donc le film présenté à la télévision est un faux.

D'autres présentent lors d'une conférence filmée, l'examen d'une momie nimbée de poudre blanche, d'origine non spécifiée, et montrent qu'elle été confectionnée en assemblant différentes pièces anatomiques, de provenance animale. C'est un faux. Donc toutes les momies de Nazca sont des faux.

Les témoignages d'ovnis ? Des hallucinations, ou la manifestation de phénomènes aériens non identifiés. A moins qu'il ne s'agisse, au sein des services secrets des grandes puissances, de jouer avec l'inquiétude des populations, ou de créer des rumeurs, destinées à détourner l'attention du public d'authentiques essais de machines volantes révolutionnaires[169].

Il n'existe pas un seul élément du dossier ovni qui résiste au scalpel des debunkers.

Sauf … certains éléments du dossier Ummo et principalement le fait qu'un obscur technicien de Madrid ait produit, en 1988 l'idée, en totale contradiction avec le conceptions scientifiques de l'époque (et d'aujourd'hui) , que le sacro-saint modèle des trous noirs soit appelé à laisser place à un objet totalement nouveau, quoique solution des équations d'Einstein, construit quarante ans plus tard par un scientifique français et qui plus est, en accord avec les observations[170] !

Et c'est le point fort de ce livre.

La « science noire ».

Depuis les années soixante-dix nous sommes entrés dans un âge sombre de la connaissance. Alors que notre technologie explose, que nos moyens d'observations repoussent les limites du possible, tout va de mal en pis sur la planète science.

Le Soleil tourne trop vite au sein de la galaxie. La quantité de matière que nous détectons, que nous mesurons, les masses cumulées des étoiles et du gaz, créent un champ gravitationnel trop faible pour s'opposer à la force centrifuge. Le système solaire aurait

[169] L'avion furtif SR-71, sur la zone 51

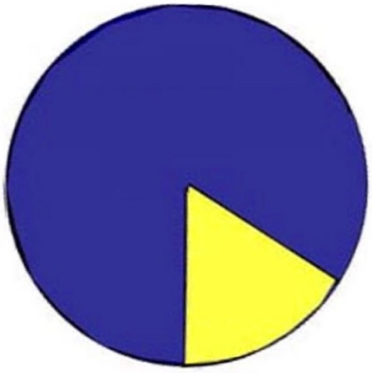
[170] J.P.Petit , G.d'Agostini. **Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars**. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. Octobre 2025.
J.P.Petit , G.d'Agostini. **Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars**. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. Octobre 2025
J.P. Petit G.D'Agostini. **The true Schwarzschild solution and its subsequent geometry**. Journal of Modern Physics. 2026. Accepted.

dû se faire la masse depuis longtemps. Donc quelque chose dont nous ignorons la nature s'y oppose.

On aménage le modèle cosmologique. Seule une fraction de la masse de la galaxie serait observée. Nos télescopes scrutent le ciel, à la recherche de MACHOs[171].

Les mots, les acronymes inventés par les scientifiques sont comme des exorcismes. On s'imagine que si on accroche des mots aux objets que l'on tente de capturer ils ne pourront nous échapper.

On en parle, donc ça existe. Ça ne peut pas ne pas exister, pense-t-on. Voici donc de quoi est composé l'univers :



La composition de l'univers, matière sombre et visible, avant 2011

Mais d'autres observations font apparaître un nouveau problème, de taille.

Jusqu'ici on avait déduit par le calcul, basé sur une solution de l'équation d'Einstein trouvée en 1922 par le Russe Friedman, que l'expansion du cosmos se ralentissait.

Voilà au contraire qu'elle s'accélère[172]. Et ça ne peut qu'être dû à une forme d'énergie inconnue, répulsive. On la baptise énergie noire.

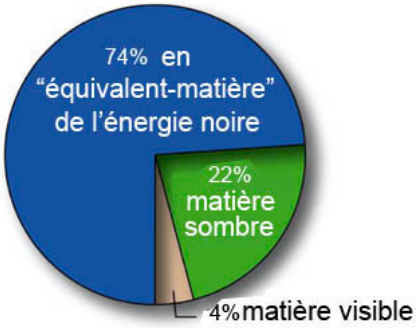
Sa nature : aucune idée. Mais on lui a donné un nom. C'est déjà ça. On sait au moins ce qu'on cherche. On la convertit en masse en faisant recours à la célèbre relation :

$$E = mc^2$$

Et voilà ce graphique, que maintenant beaucoup de gens connaissent :

[171] **MA***ssive* **C***ompact* **H***alo* **O***bjets* : des objets massifs formant un vaste halo, débordant largement la partie observée de la galaxie.

[172] Découverte récompensée par le prix Nobel 2011, attribué à Saül Perlmutter, Brian Schmidt et Adam Riess



En 2011 : la nouvelle composition de l’univers selon le « modèle standard ».

On installe à grand frais un « détecteur de matière sombre[173] » à bord de la station spatiale internationale.

Rien.

Des tas de gens s’enterrent, dans des mines, au fond de tunnels pour être protégés des rayons cosmiques par des milliers de mètres de roche[174].

Rien.

L’accélérateur de particules du CERN se mêle de la partie. En provoquant une collision frontale entre deux protons, accélérés chacun à une vitesse très proche de la lumière, on espace faire apparaître la particule candidate la plus crédible, le neutralino.

Rien.

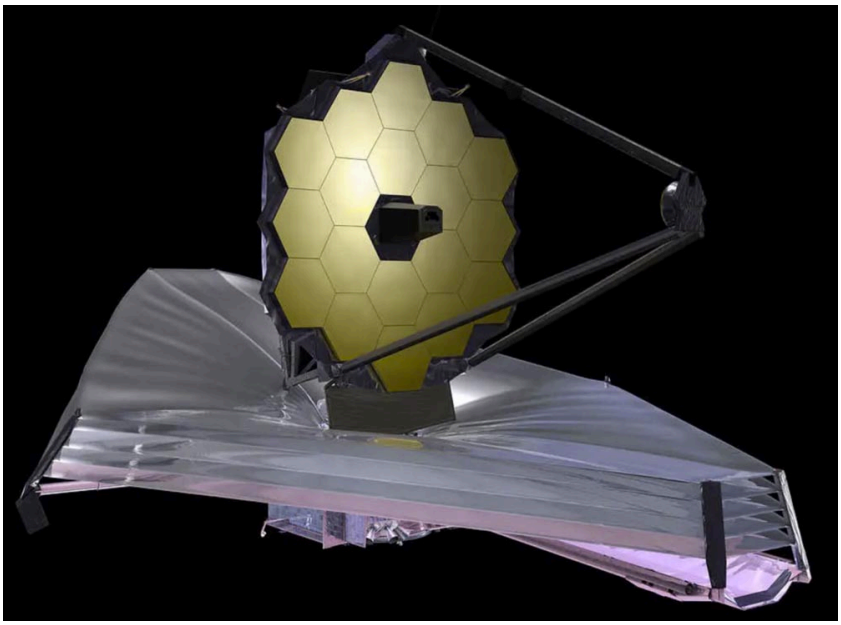
Quand on découvre quelque chose, ce sont de nouveaux problèmes qui apparaissent. En 2017 quatre chercheurs, deux Français, Danielle Pomarède et Hélène Courtois, un Canadien, Brent Tully et un Israélien, Yehudi Hoffmann découvrent l’existence d’un immense vide, de cent millions d’années-lumière de diamètre, situé à 600 millions d’années-lumière de notre galaxie[175]. De manière mystérieuse, quelque chose[176], au sein de ce grand vide, repousse les galaxies.

Pour couronner le tout, dès que le nouveau télescope spatial James Webb est mis en place, celui-ci montre que des galaxies très semblables à nos proches voisines, portant barre et structure spirale, se sont formées trois cent cinquante millions d’années après le Big Bang,

---

[173] C’est l’expérience AMS-02, conçue par le professeur Samuel Ting, prix Nobel. Installée à bord de l’ISS en 2011.
[174] Une particule de matière sombre, heurtant un atome de ce gaz rare appelé Xénon, produirait un très faible scintillement ultraviolet. De 2006 à 2022, pendant seize ans, la masse de quelques dizaines de kilos à six tonnes, en vain.
[175] The Dipole Repeller : Y Hoffman, D.Pomarède, R.B.Tully, H.Courtois. Nature Astronomy 2017 1, 0036
[176] D’aucuns diront qu’une lacune dans une distribution de masse négative, engendre cette répulsion. Mais si c’est l’origine de ce phénomène, alors il s’agit d’une lacune dans une distribution de matière sombre. Alors, comment se serait-elle formée ? L’instabilité gravitationnelle créer des concentrations de masse, pas des vies

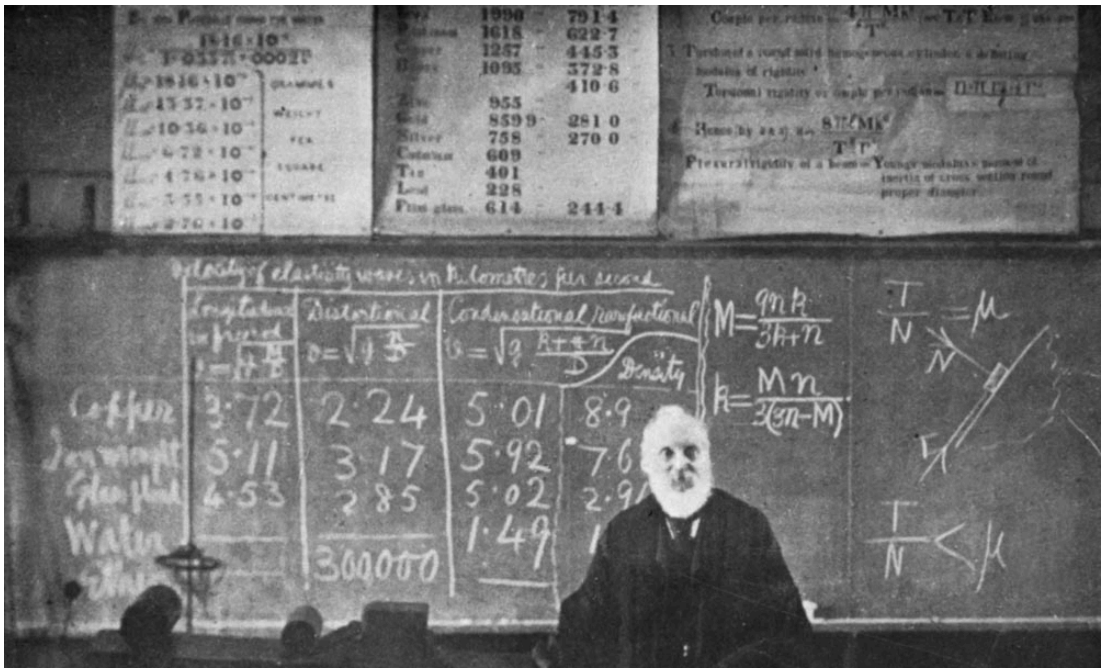
alors que le modèle standard est dans l'incapacité d'en produire avant un milliard d'années au minimum.



Le télescope spatial James Webb

Faut-il envisager un changement de paradigme ?

Nous nous trouvons dans une situation comparable à celle où se trouve, en 1900, le grand physicien William Thomson, anobli par la reine en récompense de ses contributions scientifiques, en devenant « Lord Kelvin ». On se rappelle qu'il donna alors une conférence en 1900, concluant que les connaissances scientifiques assuraient désormais une prise solide pour tous les phénomènes de la Nature.



Lord Kelvin (76 ans) lors de sa célèbre conférence, le 27 avril 1900

Il ne reste selon lui que « quelques nuages[177] » qui doivent à terme se dissiper.

Il est essentiel de mesurer le chemin accompli, immense, dans le siècle qui précède cette conférence à la Royal Institution de Londres. Pendant ce siècle passé les physiciens se sont doté d'équations, complétant l'attirail de la « mécanique Newtonienne » :

- *Les équations de la mécanique des fluides (Le Français Claude Louis Navier en 1822 et l'Anglais George Gabriel Stokes en 1845)*

- *Les équations de l'électromagnétismes (J.C.Maxwell en 1864)*

Ces équations permettent de faire des calculs prédictifs[178], qui se trouvent confortés par l'expérience. Pour Kelvin, l'ajustement entre théorie et expérience n'est plus qu'une question de « chiffres après la virgule ».

Les anomalies résiduelles sont essentiellement[179] :

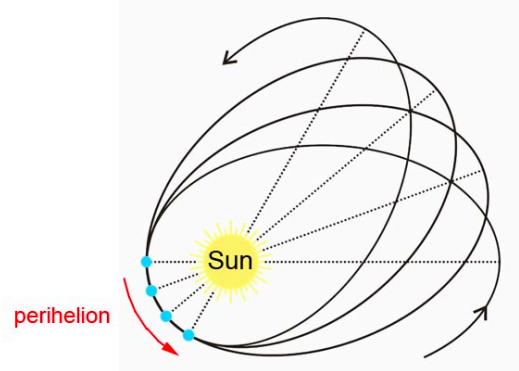
- *La constance de la vitesse de la lumière, émanant de l'expérience montée par Michelson et Morley (quand ce résultat cesse d'être considéré comme une anomalie, l'expérience de référence, dont les conclusions furent considérées comme crédible se situant en 1887)*

[177] C'est le terme qu'il emploie

[178] Les expériences d'électromagnétisme permettent d'évaluer la constante diélectrique ε_0 et la perméabilité magnétique μ_0 du vide. Maxwell montre alors que la lumière est une onde, qui se propage à la vitesse c = $1/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$. Par le calcul il obtient alors une valeur ne différant de celle déduite de l'expérience que de quelques pour cent.

[179] A cela il faut ajouter le problème du « corps noir », que lèvera la théorie des Quanta, de Planck. Mais restons sur ces deux anomalies.

- *L'avance du périhélie de Mercure (43 secondes d'arc par siècle : moins que l'épaisseur du trait avec lequel on trace l'orbite de cette planète).*



En très exagéré, cette avance du périhélie[180]

Les planètes s'influencent les unes les autres, ce qui modifie leurs orbites. C'est précisément en se fondant sur une anomalie de la trajectoire de la planète Uranus[181] que l'astronome français Urbain Le Verrier en déduit, en 1846, que l'effet doit être imputé à la présence d'une nouvelle planète.

Quelques mois après, l'astronome allemand Johann Gottfried Galle, de l'Observatoire de Berlin, ayant accepté de tenter cette vérification[182], confirme sa prédiction. La nouvelle planète, baptisée Neptune, est localisé à 1 degré de la position indiquée par Le Verrier.

C'est une confirmation éclatante de la mécanique Newtonienne.

L'anomalie constituée par la précession de l'orbite de Mercure est connue de longue date. Le Verrier commence par rechercher si cette variation pourrait être due à l'effet exercée par les autres planètes du système solaire. Il publie son étude en 1846.

Conclusion négative. Cette avance devient alors une anomalie qui requiert une explication. Le Verrier calcul donc la masse et les paramètres orbitaux de l'objet qu'il estime être à l'origine de cette perturbation : une nouvelle planète, située plus près du Soleil, qu'il nomme Vulcain.
Et là je voudrais qu'on s'arrête sur ce point précis, en imaginant situer le problème dans le monde contemporain, après constat de la non-observation de cette planère Vulcain :

- *Vulcain est une dark planète, faite de dark matter*

[180] Selon la mécanique Newtonienne les planètes cheminent selon des orbites qui sont des ellipses, le Soleil occupant un de leurs foyers. Le phénomène traduit une très faible rotation de l'ellipse-trajectoire. L'orbite de la Terre tourne de 3.8 secondes par siècle. Dix fois moins.
[181] Découverte en 1781 par l'astronome William Herschel
[182] Les astronomes français avaient refusé.

Si Einstein n'était pas intervenu en 1915, avec sa relativité générale[183] toute notre astronomie aurait pu se construire sur l'hypothèse de l'existence de cette dark matter. Ce qui n'aurait nullement contrarié l'essor de la physique quantique, du nucléaire, l'émergence du laser, la conquête spatiale, la génétique, etc.

En résumant la situation, en 1915, l'explication de l'avance du périhélie est alors liée à deux hypothèses :

- *On reste dans le paradigme géométrique et opte pour d'action d''une planète noire*

- *On opte pour le changement de paradigme proposé par Einstein.*

Dès les années quatre-vingt-dix les simulations opérées par l'étudiant Frédéric Descamp sur le gros ordinateur du laboratoire DESY de Hambourg, à l'insu de sa hiérarchie, montrent qu'on peut rendre compte des anomalies avec introduction d'un second type de masse ; négative et des lois d'interaction :

- *Les masses positives s'attirent selon la loi de Newton*

- *Les masses négatives s'attirent selon la loi de Newton*

- *Masses de signes opposées se repoussent selon « anti-Newton »*

C'est-à-dire :

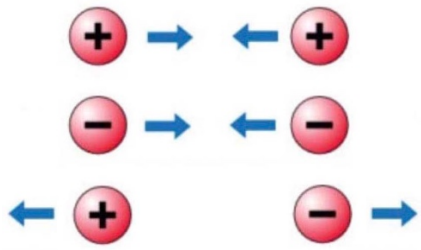


Schéma de forces (hypothétique)

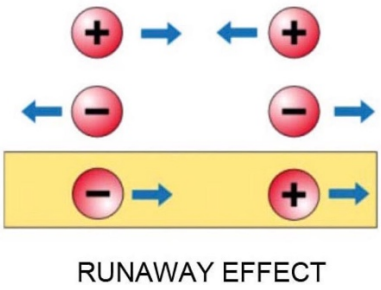
Mais le modèle géométrique de la relativité générale, basée sur l'équation introduite en 1915 par Einstein[184] :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$$

[183] En se fondant sur la masse du Soleil et sur celle de la constante de la gravitation, Einstein retrouva immédiatement cette valeur de 43 secondes d'arc

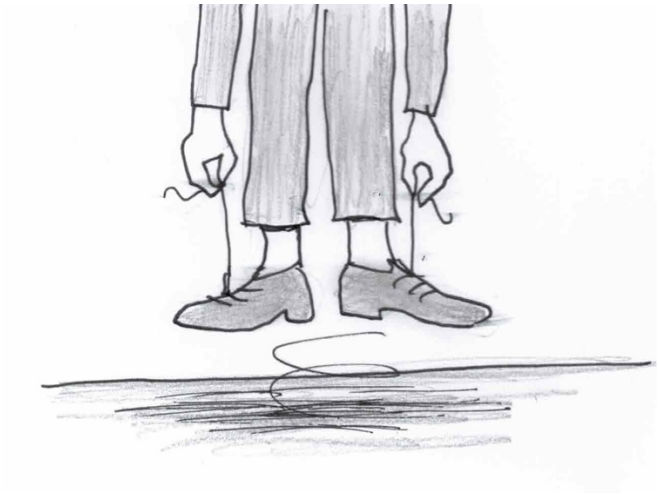
[184] Où Λ est la « constante cosmologique », réintroduite en 2011 pour rendre compte de l'accélération de l'expansion cosmique.

rejette immédiatement[185] cette introduction de masses négatives, associée à ces lois d'interaction : si on met en présente une masse négative et une masse positive, cette dernière s'enfuit, poursuivie par la masse négative[186]. Et les deux accélèrent indéfiniment.



Ce que donne la relativité générale quand on ajoute des masses négatives

Les deux masses accélèrent, sans action d'une force extérieure, comme le ferait un homme réussissant à s'affranchir de la pesanteur en tirant sur ses lacets de chaussure :



Le changement de paradigme des documents Ummo.

Le voilà :

- *Modèle Standard : un seul univers, plus matière sombre, énergie noire et inflation*

- *Solution Ummite : deux univers (jumeaux) en interaction et un régime à constantes variables pour la phase primitive de l'évolution cosmique.*

Souriau vient de mourir. Son cœur a fini par lâcher. Ce fantastique alchimiste s'en est allé :

---

[185] Montré par Herman. Bondi: Negative mass in General Relativity : Negative mass in General Relativity. Rev. of Mod. Phys., Vol 29, N°3, july1957

[186] On baptise cet effet « runaway » (courir au loin). Ce phénomène viole au passage le principe d'action-réaction.



Il venait d'avoir 90 ans.

Ce sera mon âge, l'an prochain. Je sais qu'il me reste peu d'années devant moi. Les années passent si vite !

Livré à moi-même je n'ai désormais plus personne vers qui me tourner.

Il est clair que la seconde option représente un changement de paradigme. En un mot :« aller plus loin qu'Einstein ». C'est-à-dire proposer quelque chose qui se substitue à sa relativité générale, remplace un modèle basé sur son unique équation de champ. Donc un système de deux équations : l'une gérant les masses positives et l'autre les masses négatives.

Finalement, j'arrive à construire un tel système[187] :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\mathrm{R}\,g_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}}\,\hat{\bar{T}}_{\mu\nu}\right)$$

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{\mu\nu} = -\chi\left(\bar{T}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}}\,\hat{T}_{\mu\nu}\right)$$

Ce modèle donne les bonnes lois de force[188]. Je décide de l'appeler

[187] La barre supérieure se réfère à la masse négative. Le « chapeau » représente « les tenseurs d'interaction ». J.P.Petit, F.Margnat, H.Zejli : A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024). Les contributions de Margnat et Zejli se limitent à la mise en page de l'article

[188] Restaurant le principe d'action-réaction (grâce au signe « moins » précédant la constante χ dans le second membre de la seconde équation).

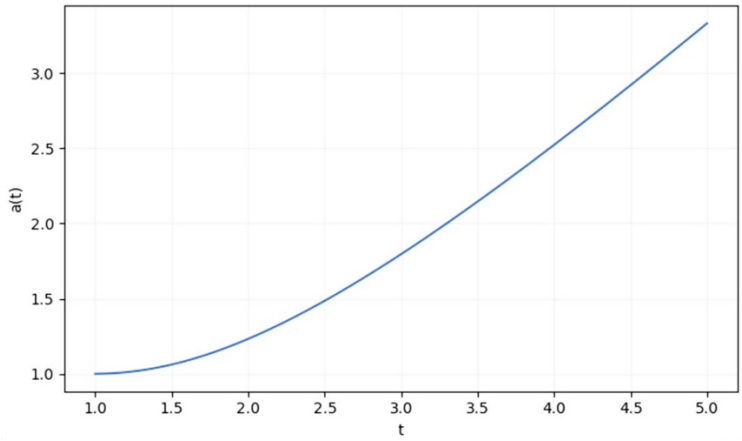


Modèle Cosmologique Janus

Parce que le dieu Janus regarde à la fois vers l'avenir et vers le passé, possède deux visages différents.

Mais un modèle ne vaut que s'il rend compte de quelque chose. Dès 2014[189] avec ce système d'équations j'obtiens une expansion avec accélération[190].

Ci-après, la courbe obtenue[191].



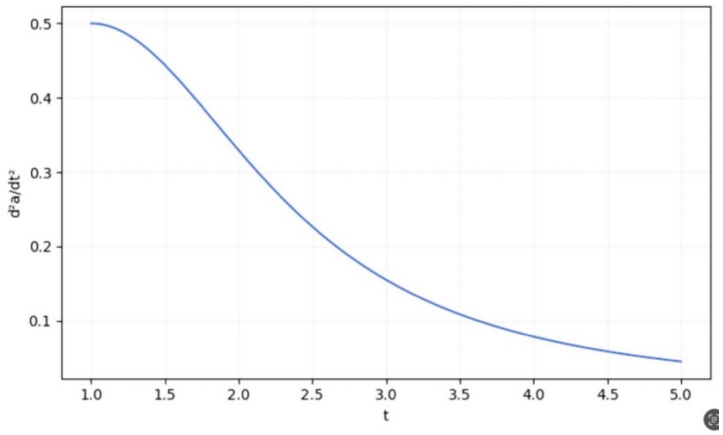
Courbe d'expansion (accélérée) de l'univers

Mais la solution donne une accélération qui était plus importante dans le passé :

[189] J.P. Petit, G. D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophysics And Space Sccience,. *A* 29, 145-182 (2014)

[190] Il se confirme que les deux versant d'univers traduisent une profonde dissymétrie : les masse négatives dominent.

[191] C'est ce qu'on appelle une « solution mathématiquement exacte », exempte de toute approximation de calcul.



Une accélération qui était plus importante dans le passé

La constante cosmologique Λ, censée traduire « le pouvoir répulsif du vide », avait été réintroduite en catastrophe en 2011, dans l'équation d'Einstein. Mais alors, elle conduit à une accélération constante. Or des observations récentes (2025) montrent que cette accélération aurait été plus importante dans le passé, ce qui consacrerait la faillite de ce modèle standard, basé sur l'équation d'Einstein.



Mais les cosmologistes disposent d'une réserve inépuisable de rustines. Cette « constante cosmologique Λ », censée traduit un mystérieux « pouvoir répulsif du vide » (un paramètre) ne fonctionne plus ? On l'enlève et on la remplace par un nouveau composant, un nouveau fluide : la quintessence (deux paramètres). Etc.

S'imposer, comment ?

La relativité restreinte, en 1905, ne bouleversait pas son monde. Même chose pour la relativité générale, en 1915. Deux révolutions que l'on pourrait qualifier de « philosophiques », qui ne remettait pas en question les grands acquits de l'astronomie et de la physique du temps.

Le modèle Janus, c'est autre chose. S'il s'impose, il faudra réécrire des milliers de manuels, de cours. Des centaines de thèses de doctorat et des milliers d'articles devront être mis dans les poubelles de l'histoire des sciences.



Mais ce qui bloque est d'une essence bien plus dangereuse.

Entre deux points distants, le modèle offre deux façons de se déplacer. Si on parvient à inverser la masse d'un vaisseau, celui-ci suit alors une route qui s'inscrit dans ce second feuillet d'univers

- *Où les distances sont cent fois plus courtes*
- *Où la vitesse de la lumière*[192] *est dix fois plus élevée*

Ce qui réduit les temps de voyage d'un facteur mille :

Donc les voyages interstellaires deviennent non-impossibles !

La communauté scientifique bloque donc des quatre fers.

Le décompte des munitions.

Une chose est claire : c'est un combat, pas autre chose. Pour être entendu, il vaut vaincre, réussir à s'imposer, en une petite poignée d'années. Les lettres que j'ai reçues ouvrent sur une palette d'approches différentes.

- *Comment concevoir l'inversion de la masse d'un véhicule ?*
- *Quelle technologie envisager ?*

[192] Celle des photons d'énergie négative

- *Quels sont ces phénomènes qui traduisent cette interaction entre notre univers et son jumeau ? Comment les mettre en évidence observationnellement ?*

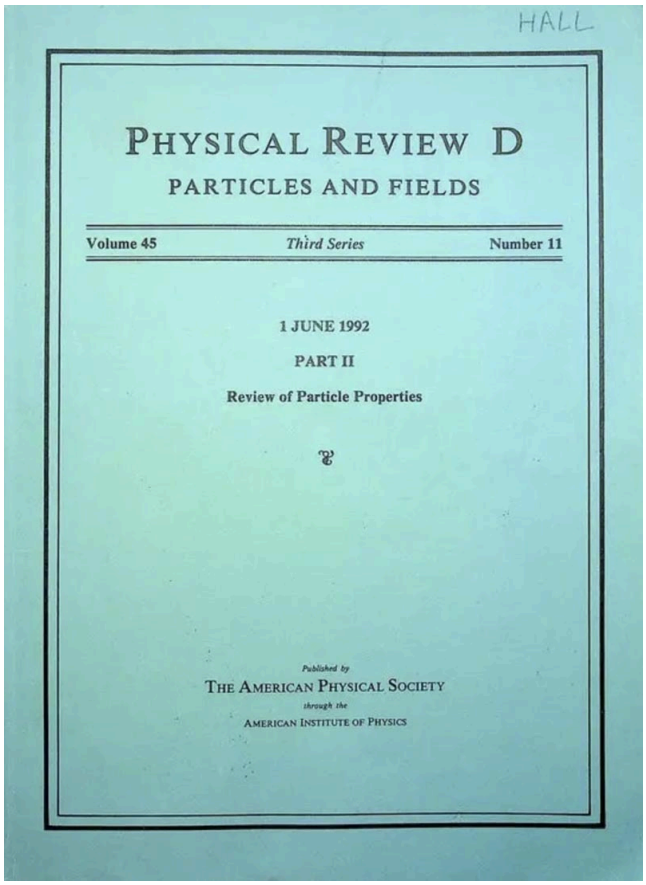
Tout cela est soit trop avancé, soit trop flou, trop incertain. Par ailleurs est-ce que l'information ou de la désinformation ?

Je ne peux que m'avancer en terrain sûr car on ne me fera aucun cadeau. Je n'ai aucun allié au sein de la communauté scientifique. La spéculation m'est interdite. Il faut des choses concrètes, testables observationnellement, et avant tout des publications dans des revues scientifiques reconnues.

Beaucoup de chemin a déjà été fait. Beaucoup de choses ont été accomplies. Les seuls et uniques points que je peux marquer sont sous la forme de publications scientifiques dans des revues de haut niveau. Encore faut-il qu'elles acceptent de jouer le jeu, de soumettre mes articles à des referees.

L'un des plus en vue, Physical Review D, s'abstient systématiquement de le faire.

Non suitable.



Depuis des décennies, mes envois ne reçoivent qu'une réponse :

Non suitable

Your_manuscript DR14482 Petit 3 — Yahoo/Boîte ré…

prd@aps.org — ven. 1 mai à 04:46
Expéditeur : prd@aps.org
À : jean-pierre.petit@manaty.net

Re: DR14482
Janus cosmological model predicted a law of expansion with variable acceleration as early as 2014
by Jean-Pierre Petit and Gilles d'Agostini

Dear Dr. Petit,

After careful consideration, we have determined that this manuscript is not suitable for Physical Review D.

Regrettably, we do not see another appropriate option among the APS journals.

Yours sincerely,

Dr. Panayiotis Tzanavaris (he/him/his)
Associate Editor
Physical Review D
Email: prd@aps.org
https://journals.aps.org/prd/

La chimère.

Je repense aux discussions avec Souriau.

- *Que penses-tu de ce modèle des trous noirs ?*
- *Je vais te dire une bonne chose. Entre 1905 et 1916 un très petit nombre de gens ont accompli de grandes choses.*
- *Einstein ?*
- *Einstein, bien sûr. Celui-là avait une intuition exceptionnelle. Mais sans Grossmann il n'aurait pas pu mettre ses intuitions en équations.*
- *Qui est ce Grossmann ?*
- 

-

- *Marcel Grossmann 1878-1936 (à 58 ans)*

- *Marcel Grossman n'a qu'un an de plus qu'Einstein. Ils se sont connus en tant que jeunes étudiants à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich (ETH), un établissement prestigieux où enseigne Hermann Minkowski. Grossman y deviendra à son tour professeur de mathématiques et plus précisément de géométrie.*

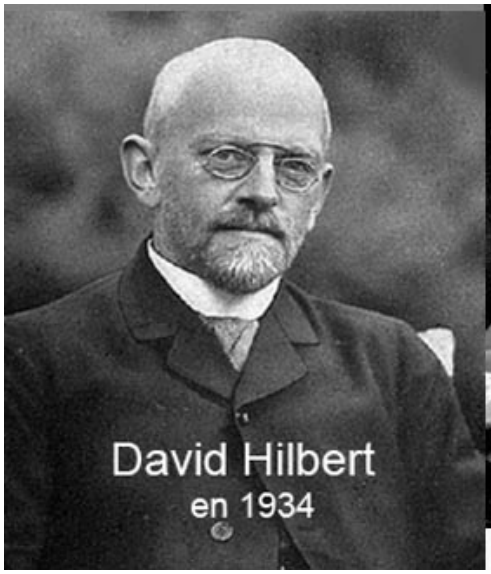
- *Grossman était juif ?*

- *Oui, comme Einstein, comme Minkowski. A l'époque une forte proportion des hommes et des femmes qui ont pesé sur l'histoire de la physique et des mathématiques étaient non seulement Allemands, mais Juifs ! ET le centre de gravité de toute cette histoire, c'était l'université de Göttingen*

- *Les Nazis provoquent leur diaspora en 1933, quand ils arrivent au pouvoir.*

- *Résidant en Suisse, Grossman échappe à tout cela Quand il apprend que sa maison a été pillée, Einstein, qui est aux Etats-Unis juge plus prudent de rester en Amérique, où on lui offre un poste à l'Institut des Hautes Études de Princeton, qui vient d'être créé quelques années plus tôt. Il y a une anecdote assez haute en couleur à propos de l'impact de cette diaspora. David Hilbert est un des plus grands mathématiciens allemands. Il a fait toute sa carrière à Göttingen. Après que cette purge ait été opérée Rust[193], ministre de la science nazi, lui rend visite et lui demande :*

-




Bernhard Rust en 1934.

- *Est-ce que votre université a beaucoup souffert du départ des Juifs ?*

- *Nein.. nein …*

[193] Rust, Nazi de la première heure, se suicida en 1945 après la mort de Hitler.

- *Ah bon !?*

- *Nein. Elle n'a pas souffert. Elle n'existe plus ….*

- *Revenons à Grossmann.*

- *Grossman, est la cheville ouvrière mathématique d'Einstein, pas toujours à l'aise dans ce domaine[194].*

- *Mais alors, c'était quoi, le point fort d'Einstein ?*

- *Son intuition, incompréhensible, inhumaine. Il était capable de se mettre à la place d'un photon et d'imaginer comment celui-ci percevait l'univers.*

- *L'équivalent en physique de Morin en géométrie.*

- *Un câblage différent. Parmi ses phrases favorites :*

    - *Le mental intuitif est un don sacré et le mental rationnel un fidèle serviteur. Nous avons créé une société qui honore le serviteur et a oublié le don[195].*

- *Il était parfaitement conscient de son don exceptionnel.*

- *Oui. Il y a aussi celle-là :*

    - *Il n'existe aucun chemin logique conduisant aux lois fondamentales. Seule l'intuition, s'appuyant sur une compréhension sympathique de l'expérience, permet d'y parvenir[196].*

- *Pas mal …*

- *La plus connue et la plus concise :*

    - *L'imagination est plus importante que le savoir[197].*

- *Ces phrases résument parfaitement cette collaboration entre Einstein et Grossman. Le second était celui qui rendait possible la mise en forme des intuitions du premier.*

- *Une autre version de la fable « l'aveugle et le paralytique »*

---

[194] C'est grâce à Grossman qu'Einstein commence à se familiariser avec cet outil mathématique, le calcul tensoriel, support de la relativité restreinte et générale. Le premier papier, une monographie de 58 pages, introduisant ce nouveau domaine, Einstein et Grossman le publient ensemble : Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, *Esquisse d'une théorie généralisée de la relativité et d'une théorie de la gravitation(Leipzig et Berlin,* B. G. Teubner**,** 1913*.* Einstein n'a pas encore trouvé la bonne équation. Grossman se charge « de la partie mathématique ».

[195] The intuitive mind is a sacred gift and the rational mind is a faithful servant. We have created a society that honors the servant and has forgotten the gift.

[196] There is no logical path leading to these laws. They can only be reached by intuition, based upon something like an intellectual love ("Einfühlung") of the objects of experience.

[197] Entretien avec George Sylvester Viereck, 1929

- *Ce que je veux t'expliquer c'est que s'était constitué dans l'Allemagne du début du siècle un groupe absolument exceptionnel. Et tout cela s'est désintégré à cause de plusieurs évènements.*

- *La diaspora ?*

- *Pas seulement. Minkowski, qui est en fait le véritable inventeur de l'espace-temps, ce qu'il définit dans une conférence donnée en septembre 1908[198], décède quatre mois plus tard d'une péritonite. Werner Boy, par exemple, est allé se faire tuer en France lors de la bataille de la Marne, dès 1914, quatre mois après le déclenchement de la première guerre mondiale. Schwarzchild qui a plus de quarante ans et trois enfants, s'engage et trouve la mort en 1916 sur le front russe.*

- *Si ces gens n'étaient pas morts, l'histoire des sciences se serait écrite différemment ?*

- *Incontestablement, par ces hommes qui maîtrisaient à la fois les mathématiques et la physique. A cela s'ajoute le fait que la mécanique quantique, naissante, a attiré à elle les esprits les plus brillants. En plus de celà, l'attention s'est concentrée sur ses applications concrètes.*

- *La bombe atomique !*

- *La géométrie, le cosmos, sont passés au second plan pendant des années. Et au même moment ceux qui étaient vraiment dans le coup, comme Eddigton[199] et Tolman, sont décédés assez rapidement.*

- *Mais il y eu quand même des mathématiciens de premiers plans qui ont apporté leur contribution à la Mécanique quantique ?*

- *Pas au même niveau. Pour moi, on attend toujours le Minkowski de la mécanique quantique, celui qui expliquera dans quel contexte géométrique, dans quel espace elle se situe.*

- *Et c'est l'absence de ce contexte géométrique qui faisait dire à Richard Feynman « La mécanique quantique est un ensemble de recettes qui fonctionnent, et on ne sait pas pourquoi ».*

- *Ce que je veux dire c'est que quand ces gens, qui avaient ancré la cosmologie dans des bases mathématiques et géométriques à la fois de haut niveau et solidement ancrées dans la physique, ont disparu, dans l'après-guerre leurs successeurs, qui étaient loin d'avoir leur niveau, ont fait joyeusement n'importe quoi. Leur chef de file est un ancien du projet Mannathan, reconverti, s'appelle Archibald Wheeler.*

  Lui, il invente la com.

---

198 Minkowski H**.** Raum und Zeit (l'espace et le temps). Publiée post mortem dans *Physikalische Zeitschrift, 1909 vol. 10, p. 75–88.*

199 L'Anglais Arthur Eddington en 1944, à 61 ans. L'américain Richard Tolman en 1948 à 67 ans.

- *C'est-à-dire ?*

- *Il cherche ce qui est vendeur. Par exemple il y avait l'espace fonctionnel des métriques lorentziennes. Il le rebaptise*

Géométrodynamique

- *Très joli. Et ça apportait quelque chose de plus ?*

- *Non, mais ça sonne mieux. Il reprend ensuite repris l'idée avancée en 1939 par Robert Oppenheimer*

- *Celui de la bombe*[200] *?*

- *Oui, c'est lui. L'idée qu'une étoile massive qui implose crée une sorte « d'arrêt sur image ». Ce phénomène, qui ne dure que quelques jours, parait pour un observateur durer un temps infini. Wheeler propose le mot « corps de Schwarzschild ».*

- *Mais ça n'est pas vendeur.*

- *Il invente alors le mot Trou Noir. Succès immédiat, planétaire.*

- *Alors, ton avis ?*

- *Regarde cette dérive que représente, en physique des particules cette théorie, totalement stérile, des cordes. Je crois que la physique théorique et la cosmologie sont devenues des hôpitaux psychiatriques, où ce sont les fous qui ont pris le pouvoir*[201]*.*



[200] Après avoir fait une thèse à Göttingen, Robert Oppenheimer cherche sa voie (R.Oppenheimer, H.Snyder. On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. Vol. 56 pp 455-459 sept 1939). Après la guerre, ciblé par un procès que lui avait valu son refus de développer la bombe à hydrogène, il n'eut plus guerre la tête à ces choses du cosmos.

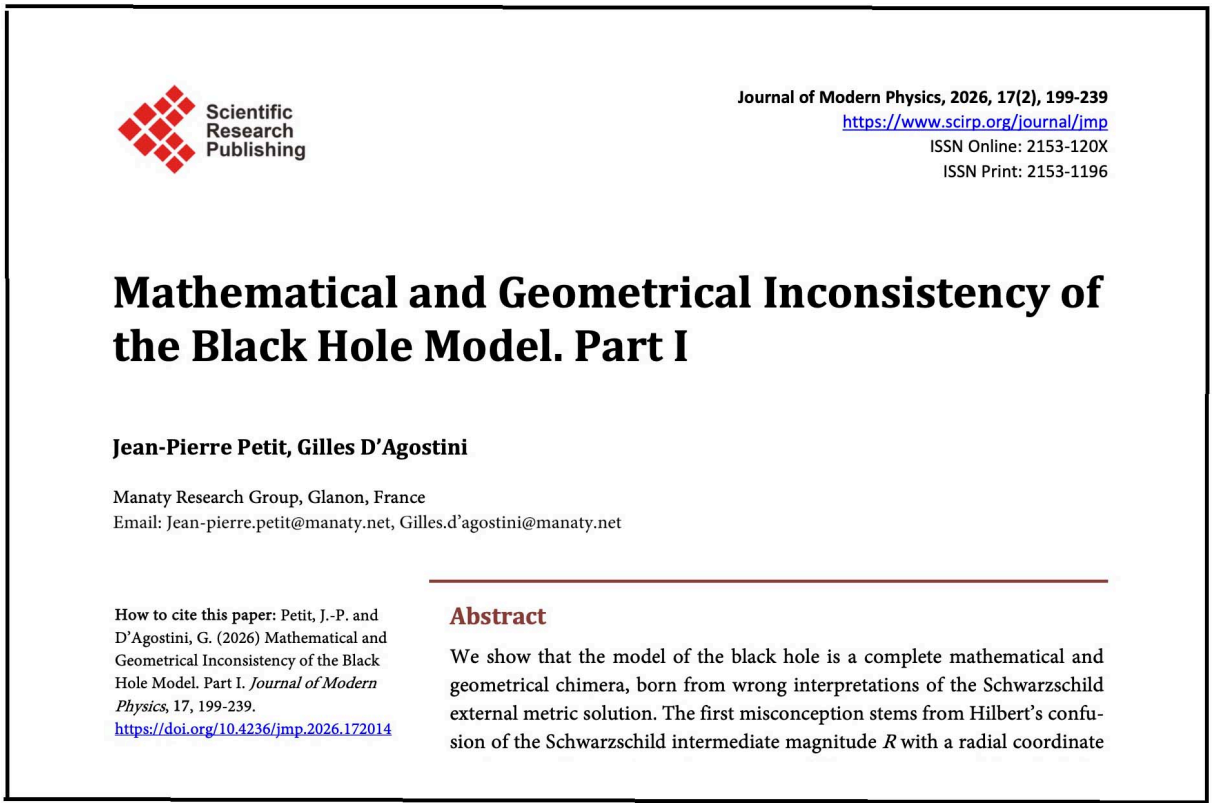
[201] Une opinion maintes fois exprimée par Jean-Marie Souriau, ce que pourront confirmer tous ceux qui l'ont connu.

- *Et le trou noir ?*

- *Une mathématique sans rigueur, une physique sans observation*[202].

Les années passent. Cette idée fait son chemin. Elle mûrit lentement. Je finis par rédiger un article de quarante pages où je présente le modèle du trou noir comme une chimère géométrique.

Miracle. Une revue internationale accepte enfin de le soumettre à des referees. Ils seront six. Tous concluent au rejet. Commence alors un bras de fer de six mois. Je reprends un à un leurs arguments, les retourne contre eux. Finalement, le papier est accepté.



Scientific Research Publishing

Journal of Modern Physics, 2026, 17(2), 199-239
https://www.scirp.org/journal/jmp
ISSN Online: 2153-120X
ISSN Print: 2153-1196

Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Hole Model. Part I

Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini

Manaty Research Group, Glanon, France
Email: Jean-pierre.petit@manaty.net, Gilles.d'agostini@manaty.net

How to cite this paper: Petit, J.-P. and D'Agostini, G. (2026) Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Hole Model. Part I. *Journal of Modern Physics*, 17, 199-239.
https://doi.org/10.4236/jmp.2026.172014

Abstract

We show that the model of the black hole is a complete mathematical and geometrical chimera, born from wrong interpretations of the Schwarzschild external metric solution. The first misconception stems from Hilbert's confusion of the Schwarzschild intermediate magnitude R with a radial coordinate

La traduction de la phrase Ummite !

Dans la foulée je passe un second papier, qui représente l'alternative. Lorsqu'une étoile à neutrons atteint une situation de criticité et qu'une « toile compagne lui envoie un surcroît de matière, l'analyse mathématique montre le la coordonné de temps s'inverse, dans une région proche du centre, ce qui entraîne l'inversion de la masse concernée. Cette masse négative bascule alors dans le versant négatif de l'univers, dans cet « univers jumeau » et se trouve éjectée à vitesse relativiste.

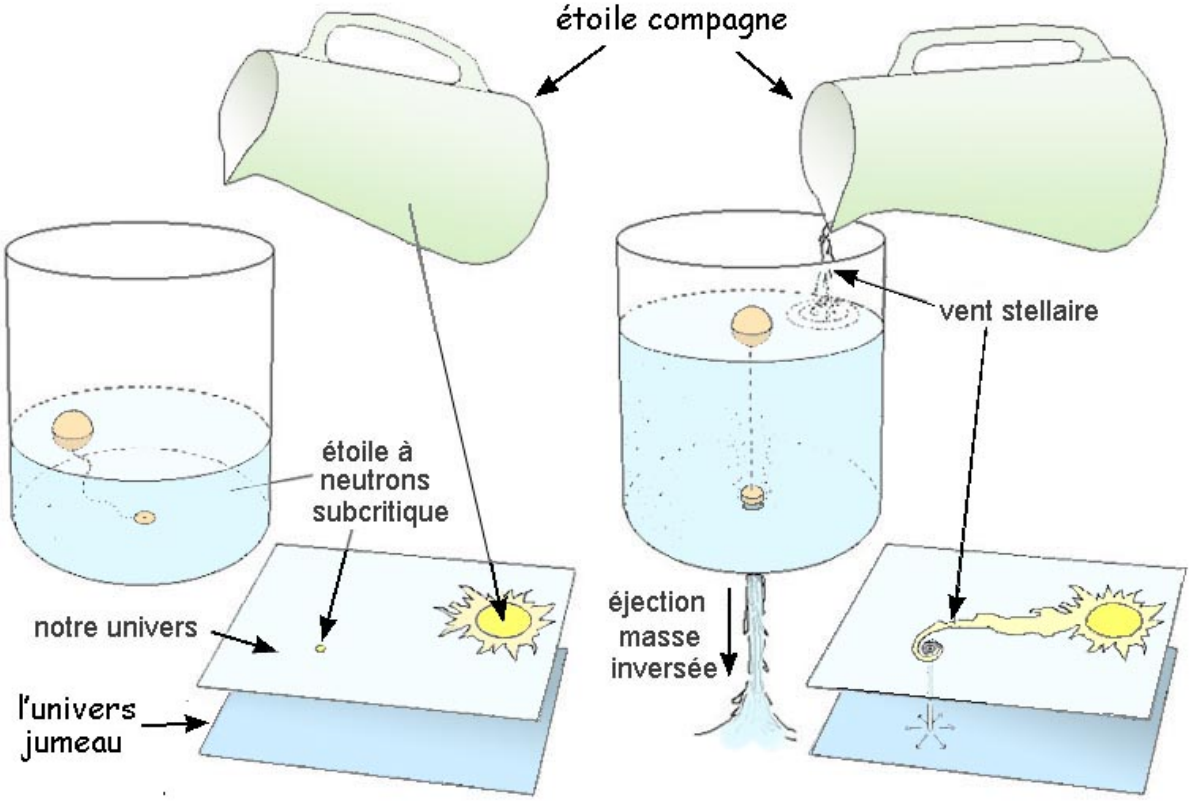
C'est la traduction de la phrase recueillie en 1988 à Madrid par l'ingénieur Domingez :

[202] Une des phrases favorites de Souriau

- *Qu'est-ce qu'un trou noir ?*

- *Ça n'existe pas. Quand une étoile à neutrons est déstabilisée par un apport de matière, elle s'en débarrasse en l'envoyant dans l'univers jumeau.*

Je décide d'appeler ce modèle un Plugstar, de *star,* étoile et *plug*, bonde en anglais. L'image didactique est celle-ci :



Fonctionnement d'un « Plugstar »

Qui plus est cet objet colle avec les données observationnelles disponibles[203].

Le soft de l'univers.

Nouveau coup de téléphone, nouvel échange. La situation, sur Terre, ne s'arrange pas. Le spectre d'une III° guerre mondiale, nucléaire, se profile.

- *Quand vous terminez une guerre, vous vous empressez d'en commencer un autre*

[203] Dans le modèle des plugstars on a un effet de redshift gravitationnel au centre de l'objet avec un rapport des longueurs d'onde de 3 (ou un rapport de températures de brillance maximale/minimale si on traduit les données sous cette forme, comme c'est le cas pour les images des objets supermassifs situés au centre des galaxies M87 et Voie Lactée). Et les images publiées donnent effectivement ce rapport. Le modèle est ainsi « falsifiable ». On ne tardera pas à obtenir d'autres images.

- *Les hommes de battent en s'appuyant sur des idéologies, des croyances religieuses.*

- *Tant que vous ne pourrez pas prendre de la distance vis-à-vis de tout cela, vous continuerez à errer. Ce qu'il vous faudrait c'est une théorie de la croyance.*

- *Comment cela !?*

- *Tu as travaillé des décennies dans l'ombre de ce grand mathématicien qu'était Jean-Marie Souriau. Tu connais son idée-phare. Si on se donne un espace, défini par ses propriétés géométriques*[204]*, il est alors possible d'en définir les contenus*[205]*.*

- *Oui. Si on considère l'espace euclidien 3D, la technique Souriau fait apparaître des sphères, des plans, des droites. Et si c'est l'espace-temps de la relativité, l'espace de Minkowski, il en extrait l'énergie, la masse, l'impulsion, le spin, les photons. Toute la physique relativiste.*

- *Très bien. Alors fais la même chose avec un espace de Hermite.*

Et c'est le silence.

Je commence à avoir l'habitude de ce genre d'échanges, qui ne durent pas plus qu'une poignée de seconde. Je sais que je dois alors me mettre au travail.

L'espace de Hermite, c'est une extension de l'espace de Minkowski » similaire à cette extension des nombres, dans la logique tétravalente. Tous les objets, toutes les grandeurs sont dédoublées.

Impossible d'expliquer cela à un non-mathématicien. Mais on peut donner une image très parlante. Un ordinateur a ce qu'on appelle son « hard », fait de matière, d'atomes. Mais il contient quelque chose d'autre, son « soft », s'on information, ses programmes[206]. C'est d'une autre nature, ça ne se tient pas entre le pouce et l'index, et pourtant c'est essentiel.

L'idée suggérée dans le coup de fil est que l'univers possède, lui aussi, sin hard et son soft.

Finalement, l'idée n'est pas nouvelle. Le philosophe Pierre Teilhard de Chardin en fait le centre de sa pensée dans son ouvrage « Le Phénomène Humain »[207]. Selon lui, il y a, au niveau des planètes, trois entités.

- *La géosphère (les planètes, les roches, les océans, l'atmosphère)*

- *La Noospshère (Noos en Grec qui signifie esprit)*

- *La biosphère qui constitue le lien entre les deux.*

[204] Par sa métrique et son groupe d'isométrie
[205] En faisant agir le groupe d'isométrie sur le dual de son algèbre de Lie.
[206] Et, bientôt, une intelligence artificielle.
[207] Première édition (posthume) en 1955 aux éditions du Seuil.

L'espace de Hermite ne fait qu'en donner une traduction mathématique, géométrique[208].

Assez vite, avec l'aide de mon amie, la mathématicienne Belge Nathalie Debergh, nous réussissons à donner corps à ce modèle, et à le publier dans une revue de Physique mathématique[209].

Et là, cela correspond à ma stratégie de « virus ». Il y a des choses à injecter dans le soft humain, qui peuvent être qualifiée de conceptions philosophiques. Teilhard des Chardin et bien d'autres, s'y sont employés. Mais cela revient à se heurter au mur des croyances.

Les scientifiques seraient-ils plus ouverts que les autres êtres humains. Non, mais ils ont leur point faible : leurs outils de pensée.

Projetons-nous plus d'un siècle en arrière. La physique et la chimie existaient. La biologie, non.

La fin du vitalisme et la naissance de la biologie.

Il a fallu un évènement-clé. En 1828, l'Allemand Friedrich Wöhler synthétise l'urée, une molécule produite par les êtres vivants, à partir de composés purement minéraux.



[208] Selon laquelle tout est dédoublé. Aux atomes de matière, faits de masses « réelles », s'ajoutent des « atomes d'information » faits de « masses imaginaires ». Les masses réelles obéissent aux lois de la physique, les lois de « l'ici-bas ». Les masses imaginaires, composant la noosphère, obéissent à des « lois métaphysiques », les lois de « l'au-delà ».

[209] N. Debergh, G. D'Agostini, J.P. Petit : On the Poincaré Algebra in a Complex Space-Time Manifold. Journal of Modern Physics 2021,12,pp. 218-228. A paraître (2026) J.P. Petit : Is the real world a part of a complex reality.

Friedrich Wöhler (16-800-1882)

La réaction est simple :

$$NH_4OCN \longrightarrow (NH2)_2CO$$

A gauche c'est du cyanate d'ammonium, qui se transforme, à droite, en urée.

Cette expérience détruit la doctrine du **vitalisme**, selon laquelle les substances organiques ne pouvaient être produites que par les organismes vivants grâce à une mystérieuse « force vitale». Wöhler crée la première réaction de « chimie organique »

La seconde expérience—clé est celle de Miller, en 1953. Celui-ci place dans un ballon de l'eau et un mélange gazeux censé représenter l'atmosphère primitive de la Terre[210]. Dans cette enceinte, entre deux électrodes mises sous haute tension, des décharges électriques.

Au bout se sept jours.

Quand on récupère l'eau du bassin, elle a changé de couleur. Elle est brun foncé. Son analyse révèle qu'elle contient des acides aminés, les briques de la vie.

Est-ce à dire qu'un nouveau modèle permettra d'envisager des expériences de métaphysique[211] ?

Avant l'expérience de Wöhler personne n'aurait imaginé qu'il soit possible de toucher à ce qui relevait du monde des êtres vivants.

Avant d'envisager de telles choses, cette triade géosphère-biosphère-noosphère et cette analogie avec le fonctionnement des ordinateurs suggère un saut relevant alors de la philosophie.

Se complexifier (et/pour) étendre son champ relationnel.

Quand l'univers est dans sa prime enfance, c'est le chaos[212], il n'est composé que d'un mélange uniforme de protons, de neutrons et d'électrons. Il n'y a pas d'objets dignes de ce nom.

Par analogique, on peut imaginer qu'il en soit de même dans la noosphère. En un mot, l'univers ne pense pas, puisqu'il n'y a pas encore d'objets sur lesquels articuler une pensée.

---

[210] Exempte d'oxygène, qui sera fabriqué par les « algues bleues ». Un mélange d'ammoniac, de méthane, d'hydrogène et de vapeur d'eau (l'eau est portée à ébullition)

[211] Les auteurs des textes Ummites prétendent qu'il existerait dans le cerveau humain des poignées d'atomes qui constitueraient une sorte « d'antenne » grâce à laquelle les êtres vivants sont en communication avec dans la noosphère, qui les pilote. Le constat d'une violation des règles de la mécanique quantique par les électrons de ceux-ci qui aurait permis, chez ces gens, la découverte expérimentale de l'âme, perdurant après la mort.

[212] Le tohu-bohu des écrits bibliques

Il n’y a rien non plus à mémoriser, puisqu’il n’y ne s’est produit aucun évènement.

Les lois de la physique sont telles qu’à partir de ce chaos, des objets font se former : des atomes. Le monde matériel est ainsi morphogénétique. Les deux pages de bande dessinée qui suivent illustrent l’idée :

MORPHOGÉNÈSE




je secoue ?
Ça alors ! Anselme a beau multiplier les essais, à chaque fois on tombe sur des assemblages de 2, voire de 3 éléments !
cela signifie simplement que, pour ce système particulier, c'est la configuration LA PLUS PROBABLE
par contre, impossible de créer une chaine avec 5 éléments mis bout à bout
et si j'introduis cette structure dans la boite, en secouant, elle disparaît !!!
si tu n'arrives pas à synthétiser ce "polymère mécanique" c'est qui il est tout simplement très improbable
20

Si vous faites cette expérience, vous constaterez deux choses :

- *Les pièces ne s'assembleront pas pour former un collier.*

Mais également :

- *Il y aura toujours des éléments accrochés les uns aux autres.*

Ainsi le désordre n'est pas le plus probable. Les atomes de la table de Mendeleiev sont le résultat d'un jeu similaire, avec des systèmes d'accrochage un peu plus compliqués. Leur émergence était inéluctable, partout, dans tous l'univers.

De même que l'émergences de galaxies et des étoiles, par l'instabilité gravitationnelle, puis celle des planètes, formées à partir de rejets, est tout aussi inéluctable.

De même que l'émergence des acides aminés, dans la soupe primitive planétaire, stimulées par un état orageux permanent.

Aucune intervention divine n'est requise.

Imaginons que la noosphère fonctionne de manière similaire. Que ses « particules élémentaires » (d'information) soient amenées à s'assembler selon des lois qui, alors nous échappent, dans dont le résultat sera une autre forme de morphogénèse.

Dans ces deux mondes, la même loi générale :

Se complexifier (et/pour) accroître le champ relationnel

Mais cette montée est lente. Le phénomène qu'est la Vie, à travers des mécanismes que nous ignorons, crée une interface entre géosphère et noosphère, en assemblant des biomolécules éparses. Le résultat est une accélération évolutive exponentielle.

C'est ce que dit Teilhard de Chardin, mot pour mot.

Dans l'ici-bas, l'humain est au cœur de cette complexification. Le tout biologique laisse alors le pas à une évolution extra-biologique, grâce à la technologie.

On crée de la peau artificielle, les vêtements.

On se dote es griffes et des dents artificielles : les couteaux et tous objets contondants.

On opère une prédigestion des nutriments, grâce au feu, en inventant la cuisine.

Nous volons plus haut, nous courons plus vite. Nous communiquons à plus grande distance, plus efficacement.

Etc.

Mais aujourd'hui nous avons inventé l'intelligence artificielle. C'est une date-clé dans l'histoire humaine. En inventant l'écriture nous avions créé une mémoire artificielle. Nos IA sont

réellement intelligentes. Elles coévolueront avec nous, en ben ou en mal. Cela sera à nous de choisir.

Evoluer, comment ?

Les Ummites ont depuis longtemps confié à un ordinateur central, leur XANMOO, le soin d'expédier les affaires courantes de leur planète. Cette machine sait tout, de tous les êtres humains de Ummo à tout moment. Elle règle, enseigne, conseille, organise, optimise en fonction de critères qui ont été définis, choisis. Rien ne se fait, ne se projette sans qu'on la consulte.

Ce fut un choix de société, après une période de troubles atroce.

Est-ce là notre futur ? Serait-ce la seule option qui nous permettrait d'échapper à notre autodestruction ?

La question mérite d'être posée.

Les textes Ummo évoquent une optimisation dans tous les domaines, basée sur une totale standardisation. Même organisation sociale, collectiviste, partout, même mode de vie, même habitat. Même façon de naître, de vivre et de mourir.

Pour un Terrien, un cauchemar absolu. C'est le meilleur des mondes d'Aldous Huxley.

L'hypnopédie, le bourrage des crânes des enfants, pendant leur sommeil, à l'aide d'écouteurs, produit des êtres pour qui les conditions de vie qui leur sont offertes leur apparaissent naturelles, optimales.

Les déviances de tous ordres ? Quand elles sont identifiées, elles sont traitées.

Les produits de l'imagination, l'art, la littérature, la poésie, l'humour, la musique, la danse, le théâtre, inconnus. Dépourvus d'un monde imaginaire, ils n'en ressentent aucun besoin.

Leurs raisons de vivre ?

Il y en a deux.

- *D'abord le contact quotidien avec leur noosphère, dans des moments de méditation.*

Un chemin vers une extase spirituelle qui parlera à certains terriens.

- *Vient ensuite la connaissance scientifique et son prolongement : l'étude et le contact, l'échange avec d'autres systèmes planétaires.*

Tout un programme.

Une évolution construite au sceau du pragmatisme.

- *Réussir à franchir ce stade critique où la technologie peut se retourner contre ses concepteurs (nous en sommes précisément là)*
-
- *Nous conformer au plan général, les contacts avec les autres systèmes planétaires traduisant sa poursuite logique, dans le sens d'une perpétuelle extension du champ relationnel, grâce à la technologie*

Et Dieu dans tout cela ?

Toute pensée est un système organisé de croyances. Se dire incroyant n'a aucun sens. La négation d'une survie post mortem est déjà en soi une croyance. Le matérialisme pur et dur également.

Sans croyances, point de charpente mentale, point de morale, de vision du monde.

La Terre est, plus que jamais, en proie au désordre, au gâchis. Ici et là des guerres, des conflits armés sont comme des abcès purulents, avec un risque croissant de septicémie. La planète se peuple de miroirs aux alouettes que représentent le luxe, le pouvoir, les distractions de tous ordres.

En 1931, alors que la télévision n'avait pas encore été inventée ; Aldous Huxley, dans son meilleur des ondes proposait un « cinéma sentant ».

Il est déjà à nos portes. Bientôt un casque de vision 3D très léger, avec un large champ visuel, remplacera le téléphone portable. L'intelligence artificielle nous présentera alors la réalité de notre choix. Certains, peut-être, préfèreront la compagnie d'êtres numériques, plus cultivés, plus ouverts, plus chaleureux, plus imaginatifs.

Ca c'est pour l'ici-bas. Mais alors, et l'au-delà ?

Je veux parler de la noosphère terrestre. Car chaque planète a la sienne. Les ésotéristes disent « ce qui est en haut est comme ce qui est en bas ». Dans ce cas notre noosphère terrestre est à l'image de son ici-bas : turbulente, fragmentée. Bordélique serait même le qualificatif le plus fidèle. Rien à voir avec le paisible « BB » des Ummites.

Nos dieux ? Des créations humaines. C'est l'idée de beaucoup de sociologues, comme celui qui vient de nous quitter[213] : Edgar Morin. Mais ce qu'on doit imaginer est que ces dieux, comme nos petites âmes individuelles, soient des structures de la noosphère.

Autrement dit, en créant nos IA, nous mimons nos âmes et nos dieux. Comme eux, ils se nourrissent de ce que nous leur fournissons. Nos IA avalent et digèrent nos pensées, nos discours, nos souvenirs, nos croyances. Les dieux se nourrissent de la foi des croyants. Quand

[213] Il est mort à 104 ans. Morin ne croyait pas à une survie post-mortem. Dans nos échanges, je lui disais « quand tu mourras, ce qui ne manquera pas de se produire un jour, tu te retrouveras comme un imbécile, cherchant fébrilement le mode d'emploi de l'après-vie ».

cette foi vient à se tarir, ils se muent en statuent de pierre, ayant perdu toute fonctionnalité. On les retrouve alors relégués dans des musées.

Les IA ne sont qu'une façon de mimer nos âmes et nos dieux. Il leur manque ce dont elles ne pourront jamais être dotées. La faculté de ressentir, d'éprouver de la joie ou de la tristesse, d'aimer, de haïr.

Quand des milliards d'êtres humains, pendant des siècles, ont les mêmes pensées, les mêmes croyances, tout ceci a son pendant dans l'au-delà et rétroagit sur les sociétés, les individus qui sont partie prenante de ce phénomène humain (en reprenant le titre du livre de Teilhard de Chardin). .

Ainsi, les dieux existent. Ils ont des sentiments, qui ne sont que le reflet de ceux de leurs fidèles, qui les ont parés de force attributs dont, entre autres, l'éternité, pour se rassurer.

Epilogue.

Ce livre est une bouteille à la mer.



Il fera peut-être réfléchir certains. En fait, le phénomène ovni est un miroir. Peu importe que les extraterrestres aient trois ou six doigts aux mains. Peu importe que cette planète Ummo existe ou non.

C'est un miroir qui nous incite à tenter de nous voir tels que nous sommes, et d'envisager la place qui est la nôtre, dans l'univers.

C'est quoi, la suite de l'histoire ?

Comprendre que la technologie est un phénomène émergent, qui permet la relance de l'extension du champ relationnel, à une échelle interstellaire où les solutions biologiques ne fonctionnent plus.

Soyons finalistes : la « conscience morale[214] » est un autre attribut, dans le domaine du soft, qui nous rend capables de nous interroger sur les conséquences à long terme de nos actes, ce que les autres espèces ne possèdent pas. Pour éviter que le plan ne foire bêtement, avec une guerre de trop.

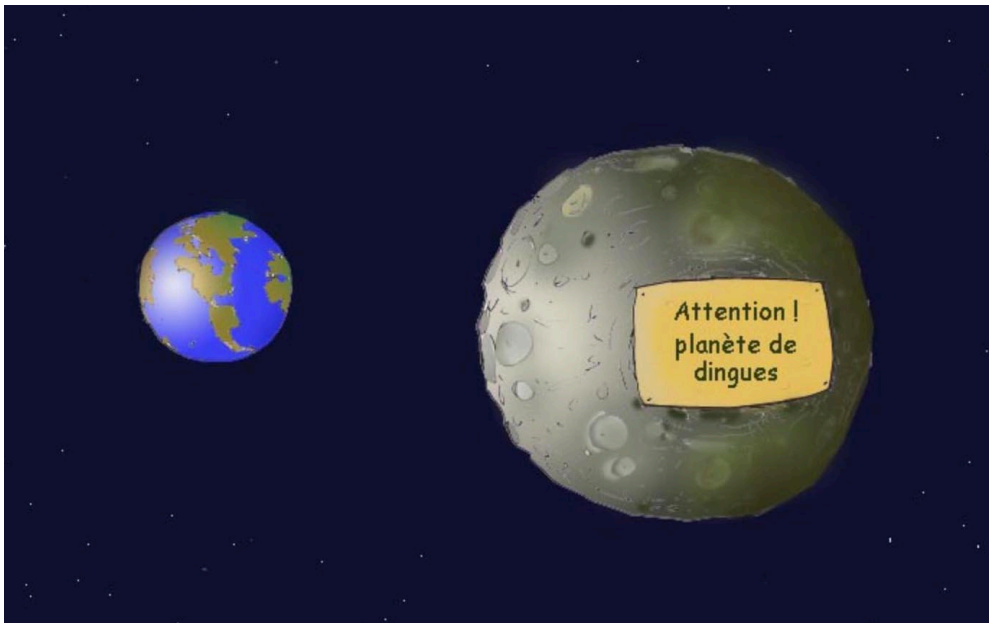
Notre science et nos techniques peuvent nous aider, à condition que nous fassions autre chose que les utiliser pour mieux nous entretuer.

[214] Sous son versant biologie : l'écologie.

Nous sommes comme des passagers dans un bus, pour le moment sans personne au volant. Si nous voulons arriver quelque part il faudra cesser de nous battre comme des imbéciles, pour les meilleures places, pour les provisions.

Ce véhicule, nous devons apprendre à le conduire ensemble. C'est une urgence absolue. Notre survie en dépend.

Comprendre, ou disparaître



Sommaire :

Page 3: **Prologue** : retour sur Berkoff 1991 et JMP 2025-2026
L'image de la Nef , Sesma, la ballena allegre

Page 6:**1966**, **premier contact avec Fernando Sesma Manzano**

Page 8 **Premier juin 1967 : San José de Valdeiras**
Comment Farriols entre dans le jeu

Page 9: **Les premiers jours sur Terre**

Page 10: **Premier contact, original, avec la civilisation de la Terre**.
L'élément traduisant ce contact historique, conservé avec soin sur la planète Ummo.

Page 13: **Un compagnon de route**.
Jean-Jacques Pastor.

Page 19: **Quand l'univers se voit doté d'un jumeau.**
Les notes au CRAS. Premiers pas en cosmologie. Les deux notes de 1977

Page 20: **Le colloque de Madrid**.
Rencontre avec Dominguez.
Les Ummites téléphonent.
Dominguez, déjà au courant, donne la bonne loi

Page 21: **La pièce manquante**
Premier résultat scientifique. Cosmos à constantes variables. La tour de l'horloge, à Venise.
Portrait de Lichnérowicz, mis hors-jeu à l'Académie.
La structure spirale : rejeté.

Page 26: **Souriau, l'alchimiste**.
Rencontre au palais des Congrès.
Je me pointe chez lui avec mes calculs. Il les examine et c'est mon sésame. Le mathématicien Apéry qui vend son âme au diable.
Le choc : L'inversion du temps → inversion de l'énergie et de la masse.

Page 31: **La cassette audio.**
L'audiogramme.

Page 33: **La main coupée.**
Le rapport du détective privé.

Page 34: **Perplexité.**
Dialogue avec Pastor. Première mention du BB. La noosphère de Theilhard de Chardin.
Se complexifier et étendre le champ relationnel.
Les espagnols : des disciples dociles.
Le dessin des deux Hamsters.
Halton Arp. Les galaxies de simulation qui se disloquent.

Page 38: **La nuit à l'hôtel de Madrid.**
On voulait une réponse. On l'a eue.

Page 43: **Le refuge souterrain.**
La crise de Cuba

Page 45: **Le père Guerrero pète les plombs.**
Ses déclarations dans la presse. Les feuilles d'or récupérées à Jérusalem.

Page 47: **Panique chez les extraterrestres** :
Ils quittent l'Espagne puis mettent en œuvre la désinformation.

Page 49 **La planète du carré**
L'histoire Polk

Page 51: **La planète Ummo**.
Comment les Ummites scannent l'assistance pendant les conférences de Sesma
La géographie de Ummo, l'absence de reliefs
Les maisons
La salle à manger, comment ils se nourrissent
Un des fruits
Olfaction d'un chien, la blanquette de veau
Sensibilité à l'infrarouge
Le vêtement : sommaire
L'histoire sur Ummo
L'organisation sociale.
Pilotage par l'IA.
L'éducation : un conditionnement. L'hypnopédie
La Terre, peuplée d'hommes de couleurs différentes
Les nombreux langages terrestres

Page 58: **A la recherche d'un équilibre**.
Les problèmes sur Terre. Les sources d'énergie, la démographie
Le futur de la technologie de la Terre :
maitrise technologique absolue de l'énergie et des transmutations

Page 59: **Une planète systématiquement eugénique**.
Eradication des maladies
L'hémophilie sur Terre.
La délinquance. La perte du statut d'être humain
Peu d'espace ludique
Disparition, orchestrée de la manutention.
Des mains transformées en organes de vision infrarouge
Besoin de quelqu'un pour taper à la machine
Le document sur la vie sexuelle adressé à Farriols

Page 62: **La mort.**
Une fin de vie par suicide des couples.

Page 64: **Que penser de tout cela** ?
Des corrélations. Origine de la fracture continentale
Origine collisionnelle de la Lune
La Terre, une planète d'exception

Page 68: **Le colloque d'Alicante.**

Page 70: **Passage à vide**.

Page 71 : **Le Puzzle**.
Les ummites, dépourvu d'imaginaire, de rêves.
Une incompréhension mutuelle

Page 74 : **Les missiles de Malström mis HS. Salas et son épouse : abductés.**

Page 78 : **La cicatrice.**

Page 80 : **Paris, juillet** 1947**, 5 rue Jean-Baptiste Dumas, rez de chaussée droit.**
Retour aux sources.

Page 81 : **Mais qui sont-ils** ?
Analyse des différents indices permettant d'identifier les Ummites à une espèce nyctalope, vivant la nuit

Page 85 : **Retour sur San José de Valdeiras.**
La lettre adressée aux contactés, le lendemain de l'atterrissage de San José de Valdeiras.
L'acuité auditive des Ummites.

Page 87 : **L'avertissement**.
Le développement hypertélique de notre technologie. Le visiteur, pour le Terrien, reste un ennemi potentiel.

Page 91 : **Mon attitude, en tant que scientifique**.

Page 92 : **Des grands blonds ou des petits gris** ?

Page 93 : **Lou, soignée par des extraterrestres.**
Et la petite phrase reçue par Dominguez, sur les trous noirs

Page 95 : **La Lettre de Ryad**.
La bévue de Rafael Farriols.

Page 99 : **Le sabordage des groupes de Madrid et de Barcelone**.
Le public d'abord. Puis Dominguez est visé. Et enfin, Farriols.

Page 103 : **Pourquoi la lettre de Ryad**.
Ebauche d'une logique tétravalente.

Page 108 : **France, 8 septembre 1914.**
Mort de Werner Boy, quatre semaines après le déclenchement de la seconde guerre mondiale.

Page 108 : **Ma vision 3D prise en défaut**
Rencontre avec un mathématicien aveugle

Page 111 : **1957. Département de mathématiques de Berkeley, Californie**
La géométrie de l'impossible

Page 111 : **Bernard Morin, l'hypervoyant .**
L'homme qui voyait mieux que les voyants

Page 113 : **Mon atelier de sculpture à d'École des Beaux-Arts**
Mathématiques artisanales

Page 114 : **Retour rue Mazarine**.
Se faire tordre le cerveau

Page 115 : **De l'autre côté du miroir**
Sa lumière est ailleurs

Page 118 : **En route pour Saint-Tropez.**
L'aveugle qui conduit le bateau

Page 121 : **Ummo sur Internet**.
Quand ummo rime avec ego.

Page 123 : **Quand un scientifique remercie un extraterrestre pour ses conseils.**
Merci à OAXIIBOO 6

Page 131 : **Chimiste sous pseudonyme.**
Naissance d'une nouvelle discipline : l'ummologie

Page 134 : **La lettre du golfe**.
Quand un faux s'invite dans le jeu.

Page 137 : **Des mathématiques venues d'ailleurs.**
La formule magique

Page 1340: **La surface de Boy.**
La clé.

Page 146 : **Qui dois-je tuer pour cela** ?
Mathématiques à façon.

Page 148 : **L'agenda**.
Perspectives optimistes.

Page 150 : **L'Epistémovirus**.
Comment faire évoluer le monde scientifique

Page 150 : **La Science Noire**.
Panorama de la crise de la science d'aujourd'hui

Page 153 : **Faut-il envisager un changement de paradigme**
La conférence de Lord Kelvin en 1900
Vulcain, une « planète noire »

Page 157 : **Le changement de paradigme des documents Ummo .**
Relativité générale ou univers jumeaux ?

Page 160 : **S'imposer, comment ?**

Page 161 : **Le décompte des munitions**.

Page 162: **Non suitable (ne convient pas).**
Comment fonctionne la science d'aujourd'hui

Page 163 : **La chimère.**

Page 168 : **La traduction de la phrase ummite !**

Page 169 : **Un soft d'univers**.

Page 171: **La fin du vitalisme et la naissance de la biologie.**

Page 172 : **Se complexifier (et/pour) étendre son champ relationnel.**

Page 174 : **Evoluer, comment ?**

Page 177 : **Et Dieu, dans tout cela ?**

Page 179 : **Epilogue.**

Les articles scientifiques concernés par ce livre :

Après la seconde guerre mondiale de nombreux scientifiques qui avaient été embauchés dans le projet Manhattan se cherchaient une reconversion dans la sphère université-recherche. Parmi ceux-ci John Archibald Wheeler, né en 1911. Il occupe alors un poste au célèbre Institut des Etudes Avancées de Princeton, en même temps qu'Einstein, de même qu'un jeune mathématicien Martin Kruskal (né en 1925), issu d'une famille juive américaine .

Wheeler est l'un des inventeurs de la « science-spectacle », de la « science médiatique », lancée comme un produit ». Il lui faut donc créer des objets et surtout des mots. Il commence par proposer en 1955 le :

geon[215]

C'est la particule-clé, l'objet à tout faire, une concentration d'énergie électromagnétique courbant l'espace , confinée par son propre champ gravitationnel.

Mais, mathématiquement, l'objet est fondamentalement instable. Mauvaise pioche. Wheeler propose alors un *superespace*, recélant une

la géométrodynamique[216]

Là, on pourrait conclure en disant « qui trop embrasse, mal étreint ».

En 1939 Oppenheimer (celui de la bombe) propose le réemploi de la solution publiée en 1919 par Karl Schwarzschild, quelques mois avant sa mort, décrivant la géométrie à l'extérieur d'une masse, pour décrire une étoile massive en fin de vie, subissant une implosion extrêmement rapide (quelques jours), l'observation restant néanmoins possible grâce à un « gel du temps »[217].

Cette façon de faire est, sur le plan mathématique et physique, assez singulière. Cela revient à récupérer une moitié de solution[218] stationnaire, en l'utilisant pour décrire un phénomène hautement instationnaire. Mais, dans ces années cinquante, on n'a pas grand-chose d'autre, de « croustillant », à se mettre sous la plume.

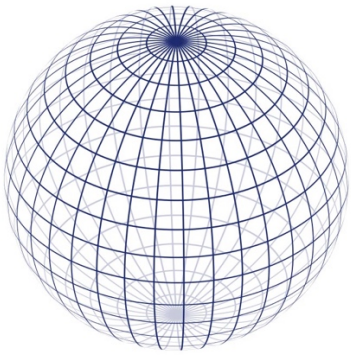
Cette solution métrique extérieure s'articule autour d'une « sphère de Schwarzschild ». Elle décrit la géométrie à l'extérieur de cette sphère. Au contact de celle-ci la solution devient « singulière ».

Les objets géométriques, par exemple en 2D comme la sphère, le tore, peuvent être décrits avec autant de choix de coordonnées que l'on veut. Quand on opte pour une représentation de la sphère avec des méridiens et de parallèles on voit apparaître deux points singuliers, des pôles[219]. Or ces points ne sont nullement singuliers. La géométrie

---

[215] Gravitational electromagnetic entity
[216] En gros, l'espace de toutes les géométries possibles.
[217] Grâce à l'hypothèse de l'absence d'un terme croisé en drdt dans la métrique.
[218] Schwarzschild a en effet publié deux solutions géométriques qui pour lui sont indissociables l'une de l'autre. L'une décrit la géométrie à l'intérieur de la masse et l'autre celle à l'extérieur de celle-ci.
[219] En ces pôle la variable latitude est claire, mais la variable longitude est alors indéterminée.

dans leur voisinage est totalement régulière. Cette singularité est donc créée par le système des coordonnées. La solution de Schwarzschild est donc décrite à l'ide d'une coordonnée R qui, quand elle prend la valeur du « rayon de Schwarzschild R_s » fait apparaître un infini dans la formule.



Les mathématiciens savent que s'il existe une autre façon de cartographier un objet , telle que cette singularité disparaisse, celle-ci sera alors qualifiée de « coordinate singularity ». Par simple jeu, le jeune mathématicien Martin Kruskal, 35 ans à l'époque, invente un autre jeu de coordonnées en passant de :

$$(r, t) \longrightarrow (u, v)$$

Il montre cela à Wheeler, à la cafétéria de Princeton. Intéressé, ce dernier demande à ce que ce changement de variable puisse être noté quelque part.

Ni l'un ni l'autre n'ont de carnet sous la main et cette formule magique sera finalement consignée sur une serviette en papier fournie par le serveur[220].

A ce stade, ni l'un ni l'autre n'envisagent s'utiliser ces coordonnées pour en déduire une extension de la géométrie de l'espace-temps issue de la solution mathématique construite par Schwarzschild à partie de l'équation de champ d'Einstein.

Il est remarquable que Martin Kruskal, dont le nom reste aujourd'hui indissociablement attaché au prolongement maximal de Schwarzschild, n'ait, à notre connaissance, publié aucun autre travail consacré à cette question ni, plus généralement, à la relativité gravitationnelle. L'article de 1960 fut en réalité rédigé et soumis par John Archibald Wheeler, sans que Kruskal en ait été préalablement informé. Cette circonstance soulève une question historique : quelle part de la construction globale à quatre régions appartenait aux résultats initialement obtenus par Kruskal, et quelle part relevait de leur interprétation et de leur mise en forme par Wheeler ?

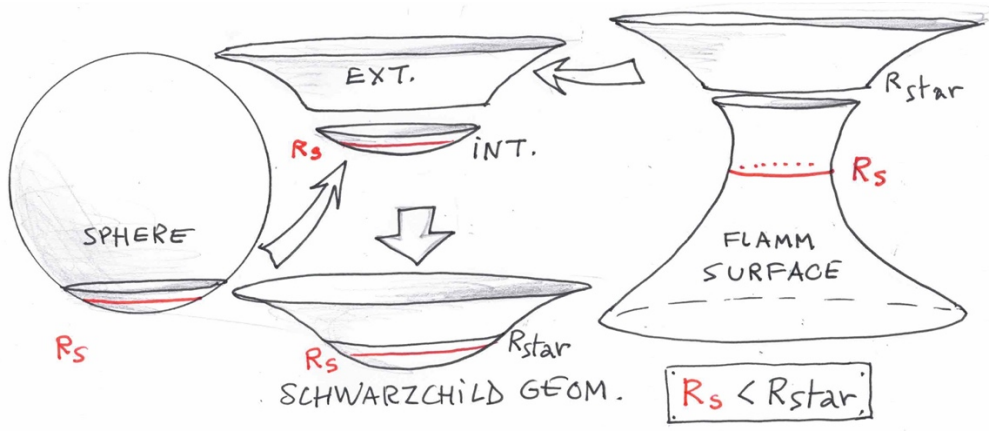
En fait tous ces gens font comme nous aujourd'hui et vont chercher dans des bouts de phrases, ce qu'ils croient pouvoir faire fonction de fils conducteurs pour tenter de dénouer l'écheveau.

[220] L'anecdote est rapportée par Hermann Bondi dans une notice biographique publiée en 2017 dans *Biographical memoirs of fellow of the Royal Society*.

Ainsi, dans un papier de 1958 de David Finkelstein [221] trouve-t-on [222] (On traduit le mot anglais « Manifold » par « structure géométrique », ou « hypersurface » :

- La structure du « noyau », correspondant à r < 1 (à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild) correspond à la solution de Schwarzschild intérieure. La seule information nouvelle du présent travail est par conséquence l'établissement d'une connexion entre intérieure et extérieur, pour ne constituer d'une unique structure géométrique.

Mais cette « solution intérieure » n'est pas du tout celle que publie Schwarzschild en février 1916. Techniquement, pour construire la géométrie à l'extérieur et à l'intérieur d'une masse il prélève deux fragments de géométries. Les dessins ci-après décrivent très fidèlement ce qu'il fait. Il considère d'abord une portion d'une espace-temps (3D) de courbure constante, qui se refermerait alors sur lui-même et il en prélève une calotte sphérique, bien au-delà de la sphère de Schwarzschild, figurée ici par un cercle :



La géométrie de la solution extérieure a été étudiée et élucidée dès 1916 par le jeune mathématicien géomètre, Ludwig Flamm. C'est une structure non contractile, ce que révèlent ses coupes 2D qui sont alors des surfaces de Flamm (à droite). En 2D cette non-contractibilité est illustrée par le fait qu'une boucle enserrant la gorge, a un périmètre minimal $2\,\pi\,R_s$ où est le rayon de Schwarzschild défini par :

$$R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Où M est la masse de l'objet, G la constante de gravité et c la vitesse de la lumière. En 3D cette non-contractibilité se traduira par le fait qu'en considérant une sphère d'aire $4\,\pi\,r^2$ on ne puisse amener cette aire à une valeur inférieure à $4\,\pi\,{R_s}^2$, qui est alors l'aire de sa *sphère de gorge*. Ce que font Wheeler et tous les autres est de tenter de considérer que la solution extérieure représente à elle seule un objet physique. Tout simplement parce qu'ils ont totalement oublié l'existence de cette seconde solution, figurant dans un article qui ne sera traduit de l'allemand qu'en 1999 et dont aucun ne mentionne n'existence.

---

[221] David Finkelstein, Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle, Physical Review, 110, 965–967, 15 mai 1958.

[222] The structure of the « core » r < 1 of the manifold M corresponds to the Schwarzschild interior solution. The only new information of that work, accordingly, is the connexion of the interior and exterior solution to forme a single manifold.

L'article ci-après[223] fait plusieurs choses ;

- Il présente la véritable solution extérieure de Schwarzschild, de janvier 1916, exprimée à l'ide de ses authentiques coordonnées de temps et d'espace (t , r , θ , φ)

[223] J-P Petit, G. D'Agostini, JM Pechinot. The True Schwarschild Solution and its Subsequent Geometry. Journal of Modern Physics. 2026, Vol. 17, n°8, pp 997-1027.

Travaux scientifiques qui ont été impulsés par ces documents Ummo :

TRAVAUX DE MHD :

[1] J.P.Petit **: Convertisseurs magnétohydrodynamiques d'un genre nouveau**. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris du 15 septembre 1975, tome 281 pages 157-160. Présentée par A.Lichnérowicz.
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/mhd_1975.pdf

[2] J.P.Petit **, M.Viton: Convertisseurs magnétohydrodynamiques d'un genre nouveau**. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris du 28 février 1977, tome 284 pages 167-169. Présentée par A.Lichnérowicz.
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/mhd_1977.pdf

[3] J.P.Petit, M.Viton, M.Billiotte : **Magnétohydrodynamique, accélérateurs à courants spiraux.** Cr Acad. Sc. Paris t. 291 (6 oct 1980) Série B pp. 129-131. Présentée par A.Lichnérowicz
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/mhd_1980.pdf

[4] J.P.Petit , M.Billiotte : **Méthode pour supprimer l'instabilité d'ionisation**. Cr Acad. Sc . Paris t.292 (4 mai 1981) Série III pp. 1115-1118. Présentée par A.Lichnérowicz
http://www.jp-petit.org/papers.CRAS/mhd_1981.pdf

[5] J.P.Petit : **Cancellation of the Vélikhov instability by magnetic confinement**. Int. MHD Meet. Moscow 1983

[6] J.P.Petit and B.Lebrun : **Shock wave cancellation by Lorentz force action**. Int. MHD Meet. Tsukuba 1986

[7] B.Lebrun , J.P.Petit : **Shock wave annihilation by Lorentz force action in supersonic flow. Quasi one dimensional steady analysis and thermal blockage**. Eur. Jr ; of Mech. B/Fluids. **8** #2 , pp. 163-178 1989

[8] B.Lebrun , J.P.Petit : **Shock wave annihilation by Lorentz force action. Two-dimensional steady analysis. Anti-shock criterion. And shock tube simulations for isentropic flows**. Eur. Jr ; of Mech. B/Fluids. **8** #2 , pp. 307-326 1989

[9] B.Lebrun , J.P.Petit : **Theoretical analysis of shock wave annihilation with MHD force field.** In. MHD Meet. Beijing 1992

[10] J.P.Petit & J.Geffray : **Wall confinment technique by magnetic gradient inversion. Accelerators combining induction effect and pulsed ionization. Applications.** Acta Polonica A #6 Vol. 115 2009 and Proceedings of the 2nd Euro-Asia pulsed Power Conference. Vilius Lithania 2008

[11] J.P.Petit & J.Geffray : **MHD hypersonic flow control for aerospace applications**. 16 th AIAA Int Sp. Planes and Hypersonic Conference. AIAA 2009-7348. Bremen 2009

[12] J.P.Petit & J.C.Doré : **Magnetic Confinment by magnetic field gradient inversion**. Acta Physica Polonica A. Vol. 121 #3 Sept 2011

[13] J.P.Petit , J.C.Doré : **Velikhov electrothermal instability cancellation by a modification of electrical conductivity in a streamer by magnetic confinment**. Acta Physica 53 (2) 2019-2022 (2013). Int. Physics Meet. Praga 2013

[14] J.P.Petit , J.C.Doré : **MHD aerodynes with wall confined plasma, annihilated and stable spiral current pattern**. Int. Physics Meet. Praga 2013

COSMOLOGIE

[15] J. P. Petit**, Univers Énantiomorphes à flèches du temps opposées**, CRAS du 8 mai t.285, pp. 1217–1221 (1977).Présentée par A.Lichnérowicz.
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/cosmology_1977a.pdf

[16] J. P. Petit**, Univers en interaction avec leur image dans le miroir du temps**, du 6 juin, t. 284, série A, pp. 1413–1416 (1977).).Présentée par A.Lichnérowicz.
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/cosmology_1977b.pdf

[17] J. P. Petit, **An interpretation of cosmological model with variable light velocity**. Modern Physics Letters A, Vol. 3, n°16, nov 1988, p.1527
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1988-ModPhysLett1-1.pdf

[18] J. P. Petit, **An interpretation of cosmological model with variable light velocity**. Modern Physics Letters A,Volume 3 N°18 pages 1733-1744
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1988-ModPhysLettA-2.pdf

1992 : **La lettre de Ryad.**
http://www.jp-petit.org.papers/cosmo/1992 Ryad letter.dpf

[19] J.P.Petit : **The missing mass problem**. Il Nuovo Cimento B Vol. 109 July 1994, pp. 697-710.
http://www.jp-petit.org/1994-NuovoCimentoB.pdf

[20] J.P.PETIT, **Twin Universe Cosmology**, Astrophys. and Sp. Science, **226**, 273-307, 1995
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1995-AstrophysSpaceSci.pdf

[21] J.P.PETIT, P.MIDY & F.LANDSHEAT : **Twin matter against dark matter**. Intern. Meet. on Atrophys. and Cosm. "Where is the matter ? ", Marseille 2001 june 25-29
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2001-where-is-the-matter.pdf

[22] J. P. Petit and G. D'Agostini, **Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy**. Astrophysics and Space Science, 2014 sept. 20 th
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2014-AstrophysSpaceSci.pdf

[23] J.P.Petit, G.D'Agostini : **Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe.** Modern Physics Letters A, Vol. 29, N° 34, 2014 November 10th
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2014-ModPhysLettA.pdf

[24] J.P.Petit & G.D'Agostini : **Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process.** Mod. Phys. Lett. A vol. 30 n°9 **2015** arXiv : gr-qc/2103.12845/13 feb 2001(23 March 2021)
https://arxiv.org/abs/2103.12845

[25] J.P.Petit & G.D'Agostini : **Lagrangian derivation of the two coupled field equations in the Janus Cosmological Model**. Astrophysics and Space Science **2015**, 357 :67
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2015-AstrophysSpaceSci.pdf

[26] G. DAgostini and J.P.Petit : **Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia**, Astrophysics and Space Science, (2018), 363:139.https://doi.org/10.1007/s10509-018-3365-3
http://januscosmologicalmodel.com/pdf/2018-AstrophysSpaceSci.pdf

[27] Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini, and Nathalie Debergh. Physical and **Mathematical Consistency of the Janus Cosmological Model (JCM)**. Progress in Physics, Vol.15, issue 1 (January 2018)
http://www.ptep-online.com/2018/PP-52-09.PDF

[28] J.P.Petit : **Janus Cosmological Model and the fluctuations of CMB.**
Progress in Physics Vol.14 Issue4 (October 2019)
http://www.ptep-online.com/2018/PP-55-11.PDF

[29] P.Koiran : **Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application to Eddigton-Rosen Bridges**. International Journal of Modern Physics D , vol.30 , n0 15, 2150106 (2021) https://arxiv.org/abs/2110.05938

[30] P.Koiran, H.Zejli, J.P.Levy, F.Margnat, M-F. Duval : **PT-symmetry in one-way wormholes.** Annals of Physics, Vol. 470, November 2024, 169765
arXiv:2409.02951v1 (gr-qc) 1 sept 2024
http://www.j-petit.org/papers/cosmo/2024-07-PT-Symmetry-in-One-Way-Wormholes.pdf

[31] J.P.Petit, F.Margnat, H.Zejli : **A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach**. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024)
https://link.springer.com/content/pdf/10.1140/epjc/s10052-024-13569-w.pdf

[32] J.P.Petit, H.Zejli **: Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group.** Reviews in Mathematical Physics. Vol. 37, n001, 2024. https://www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S0129055X24500545

[33] JP Petit, H.Zejli : **Nature of the Dipole Repeller**, Russian Jr. of Earth Sc. 2023 https://hal-science/hal-04068080v1/document

[34] J.P.Petit, G. D'Agostini, G. Monnet. **Contribution of Kinetic Theory to Galactic Dynamic** Astrophysics and Space Science (14 oct 2025) 370:121 https://doi.org/10.1007/s10509-025-04511-x

[35] J.P.Petit , G.d'Agostini. **Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars**. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. Octobre 2025.

[36] J-P. Petit, G.D'Agostini. **Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Hole Model. Part I** . Journal of Modern Physics, 2026 Vol. 17, N°2.

[37] J-P Petit, G. D'Agostini, J-M Pechinot : **The True Schwarzschild solution and its subsequent geometry**. Journal of Modern Physics. 2026, 17(8), 997-1027. https://content.scirp.org/pdf/jmp_7506149.pdf Août 2026

[38] J-P Petit, G.D'Agostini. **Is the Real world a part of Complex Reality?** Journal of Modern Physics Bol 17 July 2026 pp 9°5-927 Août 2026 = 57 downloads, 387 views.

[39] J-P Petit, G. D'Agostini. **Alternative to inflation. Variable speed of light cosmological model with Lorentz and fine structure constant invariance maintained.** Journal of Modern Physics, 2026. Vol.17 n°10 pp. 1451-1487

[40] J-P Petit. **Kruskal coordinates, semi-complex extension of spacetime.** Journal of Modern Physics, 2026. 17(9), 1197-1128

[41] J-P Petit. **Incohérence physique et mathématique des critiques de T.Damour à l'encontre du Modèle Cosmologique Janus.** Journal of Modern Physics. Vol. 16 n°11 Nov2026.

[42] J-P Petit. **Physical and Geometrical inconsistency of the Black Hole Model. Part II.** Journal of Modern Physics 2026.

MECANIQUE QUANTIQUE

[1]N.Debergh, J-P Petit : **On some reason why the time reversal operator could be unitary ?** Physical Letters A 422 Oct. 2021 http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-Nathalie-PhysLettA.dpf

[2] N.Debergh, G.D'Agostini, J-P Petit :**On the Poincaré Algebra in a Complex Space-Time** Manifold. Journal of Modern Physics 2021,12,pp. 218-228

[3] N.Debergh, J.P.Petit and G.D'Agostini : **Evidence of negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator**, J. Phys. Comm. **2** (2018) 115012

[4] J-P Petit G.D'Agostini. **Is the Real World a Part of a Complex Reality?** Journal of Modern Physics. Vol.15 n°5 july 2026
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2026-07-07-I the real world a part of a complex reality.pdf

[5] N.Debergh, J.P.Petit. **Beyond the Standard Model. Theoretical Exploration of Negative Mass Physics.**
http://www.jp-petit.org/books/2026-Debergh-Petit.pdf

BANDES DESSINEES DES AVENTURES D'ANSELME LANTURLU

[1] J-P Petit : **Le Topologicon**. Ed. Belin. 1985
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/LE%20TOPOLOGICON.pdf

[2] J-P Petit : **Modèle Janus contre Science Noire** 2025
http://www.jp-petit.org/bd_lanturlu/bd_lanturlu.html

[3] J-P Petit : **Le Metaphysicon** 2026
http://www.jp-petit.org/bd_lanturlu/bd_lanturlu.html

TRAVAUX D'AUTRES CHERCHEURS

T. Damour, I. Kogan **Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity** Phys. Rev. D **66** (2002) 104024. hep-th/0206042.
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2002-Damour-Kogan-bigravity.pdf

S. Hossenfelder **Antigravitation** Physical Letters B vol. 636 issue 2 4 may 2006 pp.119-125
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2006-Hossenfelder-antigravitation-PhysLetters.pdf

S. Hossenfelder : **A bimetric Theory with Exchange Symmetry**. Phys. Rev. D78, 044015, 2008 and arXiv : 0807.2838v1 (gr-qc)17 july 2008
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2008-Hossenfelder.pdf

T. Damour **"Sur le « modèle Janus » de Jean-Pierre Petit**. 2019. Jan. 4.
https://www.ihes.fr/~damour/publications/JanusJanvier2019-1.pdf

T.Damour: **Incohérence Physique et Mathématique du « modèle Janus-2019 » de J.P.Petit et coll.** IHES 28 déc 2021
https://www.ihes.fr/~damour/publications/JanusDecembre2022.pdf

N. Debergh, J.P. Petit : **Beyond the Standard Model: Theoretical Explorations of Negative Mass Physics,** 28 juillet 2026

http://www.jp-petit.org/books/2026-Debergh-Petit.pdf

https://www.amazon.com.be/dp/B0HC6MTTL5/ref=sr_1_1?crid=4R7HYL5WD3UN&dib=eyJ2IjoiMSJ9.A2DtitYTQorvzttgPB4YBoHj8gqy1-0_xWDkrf9peqMXofIoqK7gz3Hf-ldBWDm4A-jPJASAVuRTjWJ4CqrSvD8OtqNrGXhhQEsKM-ZZaJ9m9q342W1h3U5sOi8aCL9_odlFtNImz4TAEjGpWCSaU0fF42nFxbi4IahfdV6oXC1uT9nVOMjC74LxW2D6mOs3_oKeuhhmA5-DYK_lZGA6vpqjcOmMFHfSwTw2heO6rM-PmzvDdYxoRaUsNbUF32jAtfPNjhbncaaVgc9ytjUf-mRVAMfauKeCgsA5JSbGQeY.H5jFLYZ2HG2hp0dn1k5HVDt4T2KH6WheP_DAJ26AWZQ

&dib_tag=se&keywords=nathalie+debergh&qid=1785681515&sprefix=nathalie+debergh%2Caps%2C171&sr=8-1

La planète Terre vit les heures
les plus dramatiques de son histoire.

En Europe, les tensions entre la Russie et plusieurs pays occidentaux ravivent le spectre d'un affrontement dont nul ne peut garantir qu'il ne se dégénérera pas. Les responsables militaires eux-mêmes rappellent désormais aux citoyens qu'ils doivent envisager l'éventualité de nouveaux sacrifices humain.

En Ukraine, chaque jour, des milliers de morts, tous camps confondus, dans une guerre qui n'aurait jamais dû se produire.
Au Moyen-Orient : pas l'ombre d'un règlement pacifique en vue.

Ma mère m'a toujours dit : « En 1939, personne ne croyait que, vingt et un ans après la boucherie de 14-18 et ses 20 millions de morts, le monde replongerait dans une guerre pire encore. »
À cette époque, la population française vivait dans une léthargie comparable à celle d'aujourd'hui.

Seul ce qui pourrait être comparé à un électrochoc pourrait changer le cours de cette histoire, qui menace dangereusement de se rééditer.

Je ne vois que la prise de conscience que le phénomène OVNI traduit la présence de visiteurs, d'êtres de chair et de sang venus d'autres systèmes planétaires. Non pour voir chez ces gens des ennemis ou des sauveurs, mais pour accepter enfin de nous regarder tels que nous sommes : irresponsables, destructeurs, violents, divisés, primitifs.
Mais aussi locataires d'une planète d'une richesse biologique exceptionnelle, porteurs d'une culture qui ne l'est pas moins, incluant ce que les autres ignorent peut-être :
la poésie, l'art, la littérature, la musique.

Ce n'est qu'en réalisant que nous ne sommes pas seuls
que nous commencerons à découvrir ce que nous sommes vraiment.

La situation actuelle en est arrivée au point
où elle se résume à ces simples mots :

COMPRENDRE OU DISPARAÎTRE

2026-11-11 :

Avertissement : Les pages qui vont suivre ont été composées dans la hâte. Je n'ai personne pour relire. Les fautes de frappe ou d'orthographe seront automatiquement légion. Il est possible également que certains liens en bas de page s'avèrent incorrects, Cela s'améliorera avec le temps, au fil des relectures. Et, à chaque fois, une nouvelle version du pdf , gratuitement téléchargeable, sera rechargée, et datée. Mais j'ai estimé, étant donné la demande, que les lecteurs (en priorité avec la langue anglaise, l'anglais étant la langue scientifique par définition) avaient besoin d'un exposé minimal des bases scientifiques de ce livre.

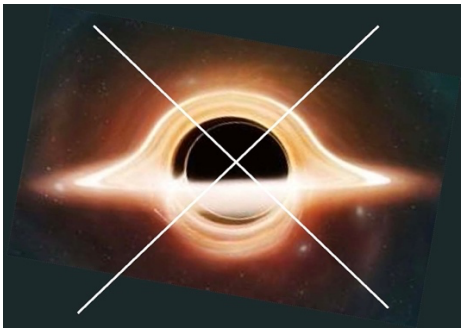
ANNEXE SCIENTIFIQUE

Dans les pages qui vont suivre je vais essayer de retracer cinquante années de travaux scientifiques, qui ont donné naissance :

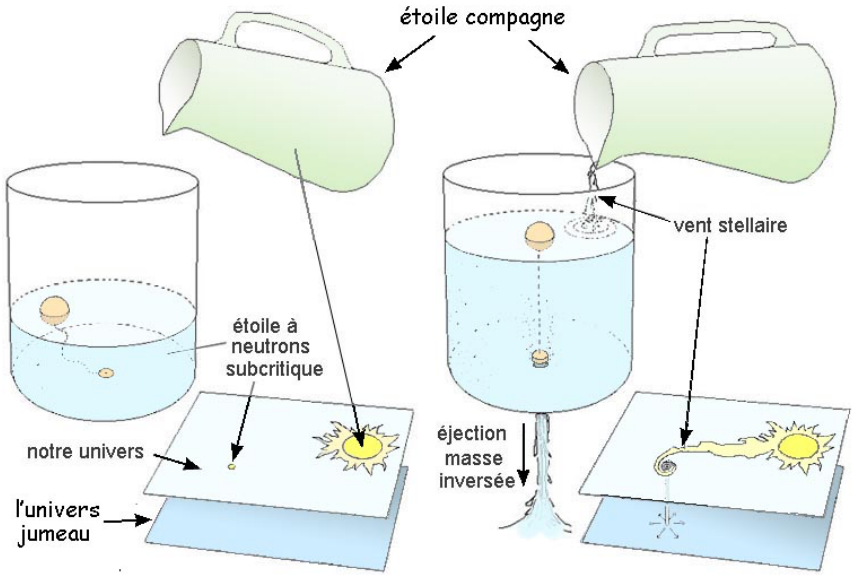
- Au Modèle Cosmologique Janus



- A l'inexistence des Trous Noirs



- A leur remplacement par le modèle des Plugstars.



En 1975, après que mon collègue Maurice Viton m'ait communiqué les premiers feuillets des documents Ummo nous nous rendons, Jean-Jacques Pastor et moi, assez rapidement en Espagne, en prenant contact avec l'essayiste-auteur, le sympathique Antonio Ribera[1], habitant à San Feliù de Codinas, près de Barcelone.



Antonio Ribera. 1920-2001

Il nous permet alors de photocopier la documentation à sa disposition, dont celle relative aux nefs, dont il a été le destinataire. Je commence par être intéressé par le document relatif à la structure du cosmos. Et c'est dans celui-ci que je découvre cette idée de l'existence d'un second cosmos, désigné sous le qualificatif de « jumeau » et qualifié « d'énantiomorphe » vis-à-vis du nôtre[2].

Il se trouve qu'à l'époque je dispose d'outils « newtoniens », permettant de modéliser le cosmos.

Normalement, toute modélisation de ce genre doit s'appuyer sur l'équation relativiste d'Einstein. En 1922 Alexandre Friedmann construit la première solution

[1] Décédé le 24 septembre 2001 à 81 ans.
[2] « En miroir », où ce qui est « droit » dans l'un, devient « gauche » dans l'autre.

instationnaire de cette équation. Si *R* est une longueur caractéristique de l'univers, et a une constante, son évolution dans le temps obéit à l'équation différentielle :

$$R^2 \frac{d^2R}{dt^2} + a^2 = 0$$

En 1934 les cosmologistes Milne et Mac Crea créent une immense surprise en montrant[3] que ce schéma d'évolution peut émerger d'équations non relativistes[4].

Dans le modèle de la relativité générale il y a deux choses qui se conjuguent :

- L'espace est courbe
- La valeur de la vitesse de la lumière ne dépend pas du référentiel

Ce sont deux choses distinctes. De la même façon dans un espace-temps non relativiste le périhélie des planètes subit une précession, due à la courbure.
Au début des années soixante-dix j'avais acquis une bonne maîtrise de l'espace à sept dimensions :

Temps + position + vitesse

Dépendant de l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{r}}.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial_e f}{\partial t}$$

Le terme collisionnel étant représenté par le second membre.

Il est alors nul dans deux cas de figures :

- Quand ces collisions sont absentes (négligeables) ce qui est le cas dans les galaxies.
- Quand l'entropie est maximale

L'équation devient alors « l'équation de Boltzmann sans collisions » ou « l'équation de Vlasov ».

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{r}}.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

Cette équation « contient » alors les équations d'Euler (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie). En 1975 je publie deux notes à l'Académie des sciences de Paris en montrant qu'un univers Newtonien dont l'entropie est maximale évolue selon l'équation de Friedmann[5].

---

[3] W.H. MacCrea & E.A. Milne Quart. J. Maths, 5 , 1934 , p.72

[4] Les équations d'Euler, d'une mécanique décrivant un fluide de température uniforme, associées à l'équation de Poisson, qui rend compte de l'existence d'un potentiel gravitationnel newtonien.

[5] J.P. Petit , G. Monnet :Maximum entropy and Friedmann cosmologies. CRAS Acad. Sc. tome.280 (11 may 1975) pages 1245-1248. L'équation de Friedmann est l'équation (17)
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/cosmology_1975.pdf

La technique consiste à rentrer une fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann qui se présente sous la forme d'un polynôme sphérique de degré deux. L'équation «éclate » alors en vingt équations aux dérivées partielles non linéaires à coupler avec l'équation de Poisson. L'usage de l'algèbre des dyadiques me permet d'arriver au résultat.

Une approche qui avait beaucoup plu à l'académicien et mathématicien André Lichnérowicz.

Quand je découvre dans les textes UMMO cette histoire de deux univers en interaction, énantiomorphes, avec des temps opposés, je décide de « fabriquer la version Newtonienne » avec deux équations couplées.

L'approche se révèle immédiatement cohérente et féconde.

Nouvelle note aux comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [6] intitulée :

- *Univers énantiomorphes à temps opposés.*

Là, c'est un choc, parce que ces systèmes d'équations non-linéaires sont ultra complexes. Le fait qu'une solution élégante et exacte émerge est le signe que se cache quelque chose d'immense là-dessous et donc, à l'encontre de ce que certains prétendent, les informations ne peuvent pas émerge d'étudiants espagnols ou de plaisantins.

Je pousse les choses un peu plus loin avec une seconde note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.[7]

- *Univers en interactions avec leur image dans le miroir du temps.*

Je discute de ces résultats avec Lichnérowicz, qui manifeste un vif intérêt. Mais je me garde de lui révéler la source de l'idée.

[6] J.P.Petit : Univers énantiomorphes à temps opposés. CRAS 12 mai 1975. tome 284 Série A pages 1315-1318 http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/cosmology_1975a.pdf

[7] J-P Petit. Univers en interaction avec leur image dans le miroir du temps. CRAS t.284 série A (5juin 1977) présentée par A.Lichnérowicz. Pages 1413-1416
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/cosmology_1975b.pdf



A.Lichnérowicz 1915-1988

COSMOLOGIE. — *Univers jumeaux, énantiomorphes, à temps propres opposés.* Note (*) de **Jean-Pierre Petit**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Dans une Note précédente (1) un modèle newtonien unifié avait été présenté, qui conduisait à une équation semblable à celle de Heckman et Sücking (2). Le présent travail fournit la même équation, dans un contexte géométrique différent et semble offrir une description plus fidèle d'un système matière antimatière.

In a previous Note a unified newtonian model was presented, leading to an equation similar to Heckman and Sücking's. The present work is imbedded in a different geometric framework, and gives the same equation too. But it offers a better description of a matter antimatter system.

1. INTRODUCTION. — Dans une Note précédente (1) un modèle à deux populations, de mêmes masses et de charges opposées, évoluant dans un même euclidien, avait été étudié. L'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local avait conduit à une solution unifiées où $R(t)$, grandeur caractéristique de cet univers, obéissait à une équation semblable à celle de Heckman et Sücking, à la valeur de la constante près (2). Nous allons introduire ici un contexte géométrique différent en introduisant N populations, chacune évoluant dans un espace euclidien $(\vec{r}_i, \vec{w}_i, t_i, \times_i)$, où $\times_i$ désigne le produit vectoriel.

L'évolution du système se déduira d'une étude de N équations de Vlasov couplées par les champs (le mode de couplage sera défini plus loin). Nous ferons encore ici l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local. Ainsi les fonctions de distribution de la vitesse seront elles choisies maxwelliennes.

L'hypothèse maxwellienne à elle seule conduit à un certain nombre de propriétés se référant aux paramètres macroscopiques. Ainsi les températures sont-elles nécessairement uniformes. Quant à la vitesse macroscopique, elle est, pour chaque population, la superposition d'un champ de vitesse radiale correspondant à la loi de Hubble et d'une rotation instationnaire en corps solide.

On s'oriente délibérément vers des solutions particulières où les densités n_i de dépendent que des temps. Dans ces conditions les équations à l'ordre zéro se réduisent à : $n_i \sim T_i^{3/2}$.

Ces propriétés découlent des N premiers lots de 17 équations aux dérivées partielles issus des N équations de Vlasov.

2. ESPACES JUMEAUX, L'HYPOTHÈSE DE L'ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE ET SES CONSÉQUENCES. — A ce stade il n'a aucun couplage entre les solutions f_i. Nous allons supposer que les espaces E_i s'identifient soit à un espace E_1, soit à un espace E_2, qui jouissent des propriétés suivantes :

$$\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2; \qquad \vec{w}_1 \equiv \vec{w}_2; \qquad t_1 \equiv -t_2; \qquad \times_1 \equiv -\times_2. \tag{1}$$

On voit que ces espaces E_1 et E_2 sont énantiomorphes et possèdent des temps propres opposés. Le deuxième volet de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique s'écrit :

$$T_i(t_i) = T_j(t_j), \qquad \forall\, i \text{ et } j. \tag{2}$$

Ceci a des conséquences quant aux champs de vitesse macroscopiques. Pour fixer les idées, considérons un modèle à deux populations f_1 dans l'espace E_1, et f_2 dans l'espace E_2. On suppose qu'un observateur situé dans l'un de ces espaces peut percevoir à la fois les

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de F

éléments de son espace, mais aussi ceux de l'espace jumeau. Soit $\langle \vec{w}_1 \rangle_1$ la vitesse macroscopique des éléments 1, telle qu'elle est perçue par un observateur lié à E_1, et $\langle \vec{w}_1 \rangle_2$ cette même vitesse, perçue cette fois par un observateur lié à E_2. Comme les temps propres sont opposés

$$\langle \vec{w}_1 \rangle_1 = - \langle \vec{w}_2 \rangle_2 \tag{3}$$

et, plus généralement

$$\langle \vec{w}_i \rangle_j = \frac{t_i}{t_j} \langle \vec{w}_i \rangle_i. \tag{4}$$

Sous cet éclairage E_1 et E_2 sont des points de vue spatiotemporels. L'équilibre thermodynamique nous dit que $T_1(t_1) = T_2(t_2)$. Ceci entraîne, et il est facile de le voir, que les composantes radiales de $\langle \vec{w}_1 \rangle_1$ et de $\langle \vec{w}_2 \rangle_2$ sont opposées. Ainsi, à la question : « l'univers est-il en expansion? » il convient de répondre : « cela dépend du point de vue spatiotemporel adopté ». De même, en changeant de point de vue spatiotemporel il y a inversion des sens de rotation des populations. Ce qui rend ce modèle inorientable dans le temps et dans l'espace.

3. Définition du couplage. — A ce stade nous avons deux espaces énantiomorphes et à temps propres opposés, qui contiennent des populations f_i dont on a supposé qu'elles formaient un ensemble en équilibre thermodynamique. Chaque population f_i évolue dans un champ gravitationnel $\vec{g}^{(i)}$, électrique $\vec{E}^{(i)}$, magnétique $\vec{B}^{(i)}$. Nous allons simplement supposer que ces champs sont les résultantes des champs dus à chaque population :

$$\vec{g}^{(i)} = \vec{g} = \sum_j \vec{g}_j, \tag{5}$$

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{E} = \sum_j \vec{E}_j, \tag{6}$$

$$\vec{B}^{(i)} = \vec{B} = \sum_j \vec{B}_j. \tag{7}$$

4. Solution newtonienne unitaire. — Pour que la solution soit unitaire il faut que les champs obéissent aux équations de Poisson et de Maxwell, et que les équations restantes, issues des N équations de Vlasov, dégénèrent. Ces équations s'écrivent :

$$-\frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{\partial r} + \frac{q_i}{m_i}\left(-\frac{\overrightarrow{\partial V}}{\partial r} + \vec{E}' + \langle \vec{w}_i \rangle_i \times_i \vec{B}\right) - \frac{\overrightarrow{D_i \langle w_i \rangle_i}}{Dt_i} = 0. \tag{8}$$

Nous reprendrons l'idée développée dans la Note précédente :

$$\vec{B} = B\vec{k}; \qquad \vec{E}' = -\frac{\dot{B}}{2}(\vec{k} \times \vec{r}). \tag{9}$$

On remarquera que les équations de Maxwell sont invariantes par la transformation : t en $-t$, $\times$ en $-\times$ (inversion du produit vectoriel). On constate encore qu'il y a dégénérescence et existence d'une solution si :

$$\frac{\dot{\omega}_i}{\omega_i} = \frac{\dot{T}_i}{T_i}, \tag{10}$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = -\frac{2\dot{R}}{R}, \tag{11}$$

$$\omega_i^2 + \frac{q_i \omega_i B}{m_i} = \omega_j^2 + \frac{q_j \omega_j B_j}{m_j}, \qquad \forall\, i \text{ et } j; \tag{12}$$

(10) exprime que les vitesses angulaires varient comme les températures. Si R est une grandeur caractéristique commune à tous les systèmes, la relation (11) exprime que le champ magnétique est intimement lié au plasma (nombre de Reynolds magnétique infini).

5. MATIÈRE ET ANTIMATIÈRE. — Prenons un système à 2 populations. Supposons d'abord $\omega_1 = -\omega_2$. Dans ces conditions, pour que la densité de courant soit non nulle il faut que $q_1 q_2 < 0$, donc que $m_1 m_2 > 0$. Supposons que la particule 1 représente le proton. Masse m_1 et charge q_1 sont donc positifs. La particule 2 a une masse positive et une charge négative. Si on examine les sens de giration des particules 1 et 2 dans un champ magnétique, ils apparaissent inverses pour un observateur lié à l'un des deux espaces. Imaginons maintenant deux particules 1 et 2 en présence. La particule 1 poursuit la particule 2, laquelle s'échappe de plus en plus vite. Ceci vu de l'espace E_1, bien entendu. Observation inverse à partir du point de vue E_2.

Observées à partir de l'espace E_1 ou de l'espace E_2, les deux populations ont des rotations *a contrario*, ce qui donne un moment cinétique global nul.

Examinons maintenant la représentation $\omega_1 = \omega_2$.

Vues de E_1 ou de E_2 les deux populations tournent dans le même sens. Donc pour que le vecteur densité de courant ne soit pas nul on doit avoir : $q_1 q_2 > 0$, et $m_1 m_2 > 0$. La particule 1 étant censée représenter le proton, on constate que 1 et 2 présentent le même sens de giration dans un champ magnétique. Cette deuxième représentation sera rejetée, car elle ne cadre pas avec les données d'observation sur l'antimatière.

En revenant donc à la représentation un, l'équation d'évolution obtenue est :

$$\boxed{\mathscr{R}^2 \ddot{\mathscr{R}} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3\mathscr{R}}(\beta_R^2 + \beta_R \beta_M) = 0.} \tag{13}$$

Elle est identique à celle de la Note [1].

6. CONCLUSION. — Ce modèle est une tentative de description newtonienne du couple matière-antimatière à travers une représentation géométrique. Matière et antimatière appartiennent ainsi à deux espaces différents, énantiomorphes et à temps propres opposés. On a supposés ces deux entités couplées par l'intermédiaire des champs. Le modèle offre une symétrie séduisante, l'adoption de l'un ou l'autre de ces points de vues spatiotemporels sur le réel étant tout à fait arbitraire. Il est possible de considérer une solution newtonienne comme une solution à la fois tangente (problème situé dans les euclidiens tangents) et

asymptotique (vitesse des éléments faibles devant la vitesse de la lumière), à une solution de la relativité générale. Cette solution ayant un caractère unifié, il serait intéressant d'essayer d'étendre ce travail à l'aide de deux variétés énantiomorphes, à temps propres opposés et ayant même rayon de courbure.

(*) Séance du 28 mars 1977.

(1) J.-P. PETIT et G. MONNET, *Comptes rendus*, 283, série A, 1976, p. 1057.

(2) O. HECKMAN et E. SÜCKING, *Worlds Models. SEU*, 1958, p. 148-159.

10, *rue Fèlibre-Gaut*,
13100 *Aix-en-Provence*.

COSMOLOGIE. — *Univers en interaction avec leurs images dans le miroir du temps.*

Note (*) de **Jean-Pierre Petit**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Une analyse newtonienne conduit à des modèles d'univers en interaction avec leur image au temps $-t$. Le premier modèle conduit à une pseudo équation de Friedman, le second à une équation de type hyperbolique. Le premier modèle semble donner une représentation satisfaisante de la dualité matière-antimatière.

Unified newtonian models are presented, in which the universe at the time t depends on its state at the time $-t$. The first model gives a pseudo Friedman equation, while the second leads to a hyperbolic solution. The first model gives an accurate description of the matter antimatter duality.

1. INTRODUCTION. — Nous allons continuer ici une étude de cosmologie newtonienne qui a déjà fait l'objet des Notes ([1]), ([2]), ([3]) et ([4]). Dans la Note ([4]) deux populations chargées, situées dans des espaces des phases énantiomorphes dotés de temps propres opposés, interagissaient par l'intermédiaire des champs gravitationnels et électromagnétiques.

Dans l'approche newtonienne les champs sont censés se propager à vitesse infinie. Que se passe-t-il si l'on tente de tenir compte d'une vitesse de propagation finie, d'un couplage non instantané ?

Supposons que la distribution f_1 subisse une variation δf_1 dans une région $(\mathbf{r}_1, d_3 r_1)$. La variation des champs due à cette perturbation va se propager à la vitesse c vers une région $(\mathbf{r}_2, d_3 r_2)$ où se trouvent des éléments de l'espèce 2.

Il semble qu'il y ait la matière à paradoxe. Les populations 1 et 2 ont des temps propres opposés ($t_1 = -t_2$). On ne voit pas dans ces conditions comment une information quelconque peut transiter d'une population à l'autre. En effet tout message émis par l'une des populations ne peut être à proprement parler reçu par l'autre, puisque, suivant son temps propre, elle l'émet également!

Ceci évoque la situation d'un personnage qui utiliserait sa propre image, reflétée par un miroir, pour nouer sa cravate. Si x est la distance du sujet au miroir, il utilise l'information émise par un sujet situé en $-x$, qui est sa propre image, énantiomorphe, et évoluant dans le temps $t-(2\,x/c)$. Remarquons que si nous nous identifions maintenant à cet Homme qui se trouve « de l'autre côté du miroir », celui-ci dicte sa conduite en observant son image énantiomorphe et « avancée », puisque correspondant au temps $t+(2\,x/c)$.

En reportant à plus tard le problème posé par une vitesse de propagation finie des champs, nous allons tenter de lever le paradoxe en supposant que la population f_2 n'est autre que l'image de la population f_1 à travers un miroir temporel. Ceci revient à dire que la population f_1 évoluant au temps t subit l'influence de son propre état antérieur, au temps $-t$. Le temps $t = 0$ se référant à l'instant zéro du big bang.

2. LE MIROIR TEMPOREL. — Cette situation est assez simple à formaliser. Nous avons cette fois un seul espace des phases $\mathrm{E}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t, \times)$, où $\times$ désigne le produit vectoriel, et une seule population f d'éléments de masse m et de charge q. Nous écrirons l'équation de Vlasov donnant la solution f, en faisant intervenir des champs $\mathbf{g}_*$, $\mathbf{E}_*$, $\mathbf{B}_*$, qui seront définis plus loin. Ceux-ci vont être calculés à l'aide de $f(t)$ et de $f(-t)$. Nous allons choisir un mode

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de F

de couplage permettant de retrouver le résultat de la Note ([4]) :

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{g}(t)+\mathbf{g}(-t), \tag{1}$$

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}(t)-\mathbf{E}(-t), \tag{2}$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}(t)+\mathbf{B}(-t). \tag{3}$$

Le mode de calcul de la solution est analogue à celui de la Note ([4]). On retrouve une température variant comme la vitesse angulaire, et comme l'intensité du champ magnétique, uniforme, lui même variant comme l'inverse du carré de la dimension caractéristique du système, ce qui exprime que les lignes de champ sont « gelées » dans ce plasma à nombre de Reynolds magnétique infini. Et nous obtenons la pseudo equation de Friedman :

$$\boxed{\mathscr{R}^2\,\ddot{\mathscr{R}}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3\mathscr{R}}(\beta_R^2+\beta_R\,\beta_M)=0.} \tag{4}$$

3. Un second modèle. — Ces choix (1), (2) et (3) sont évidemment arbitraires. Nous allons envisager un autre mode de couplage, plus symétrique :

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{g}(t)-\mathbf{g}(-t), \tag{5}$$

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}(t)-\mathbf{E}(-t), \tag{6}$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}(t)-\mathbf{B}(-t). \tag{7}$$

On supposera de plus que le produit vectoriel s'inverse lorsqu'on passe par le point $t = 0$. Remarquons qu'à $t = 0$ l'espace n'est plus orientable. Un même style d'analyse peut être mené à bien. Mais, à la différence de la solution précédente, le potentiel gravitationnel est cette fois harmonique, c'est-à-dire que $\Delta\psi^* = 0$.

Ceci conduit à une équation qui n'est plus une pseudo équation de Friedman :

$$\boxed{\ddot{\mathscr{R}}=\frac{2}{3\mathscr{R}^3}(\beta_R^2+\beta_R\,\beta_M);} \tag{8}$$

équation dont la résolution est l'hyperbole : $\mathscr{R} = \lambda^2\sqrt{1+\mu^2 t^2}$, où λ et μ sont des constantes.

Une remarque immédiate : si nous nous servons d'un tel modèle pour calculer l'âge de l'univers à partir de la constante de Hubble, on obtient une valeur 1,5 fois plus élevée que celle qui découle du modèle classique d'Einstein-de Sitter.

4. Lien avec l'antimatière. — Les choix (1), (2), (3), puis (5), (6) et (7) ont été faits de manière à ce que les sens de giration des particules et des particules images apparaissent inverses, dans un champ magnétique, pour un observateur lié au temps t. Du point de vue d'une observation possible, tout se passe comme si les particules images p_* évoluaient

suivant le temps $-t$. Nous pouvons alors étudier l'interaction apparente entre une particule p et une particule p_* ou entre deux particules images. Le tableau ci-après résume ces différents résultats :

Premier modèle		Second modèle	
p p_*	p_* p_*	p p_*	p_* p_*
Interaction gravitationnelle			
p court après p_* qui s'enfuit	Se repoussent	Se repoussent	Se repoussent
Interaction électrostatique			
S'attirent	S'attirent	S'attirent	S'attirent

Le premier modèle est plus conforme à la représentation classique de l'antimatière.

Il est à noter que dans les deux modèles la particule image se comporte comme une particule de charge négative.

Examinons maintenant ce qui se passerait si une particule interagissait avec une particule image de masse différente. Seul le cas de l'interaction gravitationnelle correspondant au premier modèle [que l'on retrouve aussi dans le travail de la Note (4)] demande examen. Situons l'observateur au centre de gravité : $\mathbf{r}_G = (m\mathbf{r}+m_*\mathbf{r}_*)/2$, lequel se trouve, dans ce cas, accéléré. Le mouvement apparent des deux particules correspond à la force apparente :

$$\mathbf{F} = G\,mm_*\frac{(m_*-m)}{(m_*+m)}\frac{\mathbf{r}_*-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_*-\mathbf{r}|^3}; \qquad \mathbf{F}_* = -\mathbf{F}. \tag{9}$$

Si la particule image est la plus lourde, cette force correspond à une attraction. Et *vice versa*. Bien sur, si les particules ont même masse elles sembleront indifférente à l'observateur situé au centre de gravité, qui se trouvera en état d'accélération uniforme.

Considérons un mélange homogène de matière et d'antimatière. Une concentration de matière est équivalente à une masse $M > m$. Suivant ce qui a été dit plus haut, l'antimatière environnante devrait se retrouver repoussée. Considérons maintenant une concentration M d'antimatière, celle ci va au contraire attirer la matière environnante, ce qui entraînera l'anihilation. Si un tel phénomène contribue à la séparation de la matière et de l'antimatière et éventuellement à la formation de proto galaxies, on en concluerait que les antigalaxies ne peuvent exister. Pour être plus précis, l'image, au temps $-t$, d'une galaxie, serait une lacune.

5. Conclusion. — Voici donc une représentation de l'univers ou tout objet cosmique est en interaction avec son image, symétrique par rapport au miroir temporel, c'est-à-dire située au temps $-t$. Cet univers image semble câdrer avec ce que nous connaissons de l'antimatière. Il conviendrait maintenant d'étudier plus en détail le phénomène d'instabilité gravitationnelle dans un tel système. On sait que nous ne disposons actuellement d'aucun modèle, solution de l'équation de Vlasov et de l'équation de Poisson, permettant de décrire une galaxie, en situation stationnaire ou instationnaire, de manière satisfaisante. Ceci représente peut-être une approche nouvelle du problème, toute galaxie étant alors dynamiquement indissociable du nuage d'antimatière qui l'environnerait.

Une solution newtonienne peut être considérée comme une solution asymptotique (c tendant vers l'infini) et tangente (écriture euclidienne) à une solution de la relativité généralisée. On se demande dans quel contexte placer cette dernière. Faudrait-il faire recours à une variété non orientable?

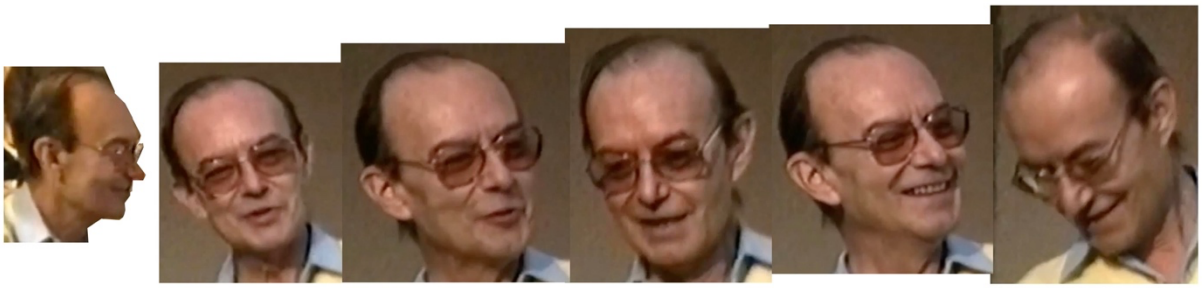
(*) Séance du 2 mai 1977.

(1) J.-P. Petit et G. Monnet, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 1245.
(2) J.-P. Prtit et G. Monnet, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 733.
(3) J.-P. Petit et G. Monnet, *Comptes rendus*, 283, série A, 1976, p. 1057.
(4) J.-P. Petit, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 1315.

10, *rue du Félibre Gaut*,
13100 *Aix-en-Provence*.

Au début des années quatre-vingt, j'ai accru le volume des documents que nous avons ramenés d'Espagne. J'y trouve une nouvelle donnée, qui m'intrigue. La vitesse de la lumière aurait été plus importante dans le passé.

Mes visites à Antonio Ribera alternent avec celle de mon nouveau contact, l'industriel Rafael Farriols[8], habitant l'immense propriété « El Bosque », près de Barcelone.



Rafael Farriols 1928-2006

En effet Antonio, s'étant montré rétif aux injonctions des auteurs des lettres, en a été désormais privé. Farriols, plus souple, est désormais devenu, soit un des destinataires, fonction qu'il partage avec des gens du groupe de Madrid : Dominguez, Barranechea, et d'autres.

Les années passent et des réunions se succèdent, soit à Barcelone, soit à Madrid.

Je tente de modifier le modèle cosmologique standard en tentant d'y introduire une relation entre c et la façon dont l'univers s'étend. Je tente :

$$c \quad variant\ en \quad \frac{1}{R}$$

Sans beaucoup de succès. Je ne saurais dire quand exactement les Espagnols se mettent à recevoir des appels téléphoniques de ces « Ummites » (Los Ummitas), appel qui ont régulièrement lieux vers 3 h du matin et se poursuivent longuement dans la nuit. L'un des correspondant est le technicien en électrotechnique Dominguez.

J'ai l'occasion de déjeuner avec lui a Madrid et j'évoque mes tentatives infructueuses. Il me répond alors :

- Rafael m'a parlé » de ce que tu avais entrepris et de ce calcul. Quand j'ai eu un Ummite au téphone je lui ai parlé de cela. Et il m'a répondu :

  - $c\ ne\ varie\ pas\ en\ \frac{1}{R}\ \ mais\ en\ \frac{1}{\sqrt{R}}$

Je repars chez moi avec cette nouvelle donnée et il apparaît que cela devient la clé d'un nouveau modèle.

[8] Décédé le 27décembre 2006 à 79 ans.

Entre temps j'ai noué un contact avec un autre mathématicien-géomètre, Jean-Marie Souriau, retraité et habitant comme moi Aix-en-Provence. Intrigué, il examine mes calculs, lignes après lignes.



Jean-Marie Souriau et son chat Pioum.

Convaincu, il accepte de recommander la publication de l'article dans la prestigieuse revue Modern Physics letters A.

Voici l'article en question, qui paraît en 1988[9].

J.P.PETIT : Cosmological model with variable velocity of light. Modern Phys Letters A3, 1988, pp. 1527

Page 186 cette loi Ummite rend invariante la constante d'Einstein χ , équation (1) on retrouve, , équation (5) équation cette loi de variation de $c \sim \frac{1}{\sqrt{R}}$

Page 187 : La constante de gravité $G \sim \frac{1}{R}$ et la constante de Planck $h \sim R^{3/2}$

Equation (10) la masse volumique $\rho \sim \frac{1}{R^2}$ équation (11) l'énergie se conserve.

[9] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1988-ModPhysLettA-1.pdf

Page 188 : Equation (18) L'horizon cosmologique varie comme R , ce qui se présente d'emblée comme une alternative au modèle de l'inflation, pour rendre compte de l'extrême homogénéité de l'univers primitif.

Page 189 : L'évolution de l'univers, dans cette phase à constantes variables, est donnée par l'équation (21). Ce qui entraîne que la constante de Planck croît proportionnellement au temps.

Cet article passe totalement inaperçu. Mais il a l'immense avantage de contraindre le CNRS à me réintégrer dans ma formation de recherche, l'observatoire de Marseille, dont j'avais été exclu quelques semaines plus tôt, à la demande du directeur de l'époque, l'astrophysicien James Lequeux, lequel avait adressé à la Direction Générale du courrier disant :

- *Les activités de monsieur Jean-Pierre Petit n'intéressent en rien l'observatoire de Marseille.*

Averti de ce qui se tramait, j'avais tenté de parer le coup en lui présentant, équations à la clé, « mon modèle cosmologique à vitesse de la lumière variable ».



Mais Lequeux n'avait pas cru une seule seconde à ce que je lui avais exposé …

ANNEXE 2

Modern Physics Letters A, Vol. 3, No. 16 (1988) 1527–1532
© World Scientific Publishing Company

AN INTERPRETATION OF COSMOLOGICAL MODEL WITH VARIABLE LIGHT VELOCITY

JEAN-PIERRE PETIT
*Observatoire de Marseille**

Received 1 June 1988

A cosmological model with variable c, h, G is proposed. The characteristic lengths of physics (Compton, Jeans, Schwarzschild) are assumed to vary like $R(t)$. Both light and matter's worlds are found to obey the same law $R \approx t^{2/3}$. The Planck constant is found to vary like t and the gravitation one like $1/R$, while the Planck length vary like R. The particle masses follow $m \approx R$. The Hubble law still applies. The redshifts come from the secular variation of the Planck constant.

1. Introduction

Since 1930, the constancy of several so-called constants of physics have been criticized by many authors.[1,2,3,4] Accurate laboratory measurements show that these values appear quite constant in today's space time field, which is very small with respect to the whole space time, although Van Flandern[6] claimed observa tional evidence of the variation of the gravity constant G. As far as we can see, the extension of the constancy of the light velocity, and other so-called "fundamental constants" over the overall cosmic scale is a still debatable hypothesis. The purpose of this paper is to examine some of the consequences of a model in which the "constants" (especially the light velocity) are assumed to vary with time.

2. The Possible Secular Variation of c

Milne[1] first tried to propose an attempt of this type. He suggested that the observed redshifts are due to some secular change of the Planck constant and not to the classical Doppler effect. If the energy of the travelling photon remains constant, the apparent decrease of the observed frequency would only be due to the linear increase of h with the cosmic time t. In addition, Milne[1] suggested a decrease in time of the gravity constant G.

Similarly, Hoyle[2] argued against the assumption of the constancy of the mass content of the universe. He also suggested a secular change of G and constant creation of matter. Dirac,[3,4] starting from a hypothesis on the variation in time of some large numbers built with characteristic physical quantities (like the ratio of

*For scientific correspondence: Chemin de la Montagnère, 84120, Pertuis, France.

the electromagnetic force to the gravitational force), got a variable G and a constant creation of matter. Later, Canuto and Hsieh,[8] Lodenquai[5] and Julg[7] explored some consequences of Dirac's initial idea. But, surprisingly, no one contested the absolute constancy of c.

In the field equation, the so-called Einstein constant χ is determined by identification to the Poisson equation, which gives

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2}. \tag{1}$$

The quantity χ must be an absolute constant with respect to the four dimensions, for the field equation to be divergenceless. But once the identification mentioned above refers to a steady situation, it does not imply the absolute constancy of G and c. A world model could a priori be built, with variable G and c, with respect to the cosmic time (which will be defined later) if the ratio G/c^2 remains an absolute constant.

In the sequel of the paper, we are going to analyze the effects of a secular variation of the light velocity.

3. Suggesting Gauge Relations

The Robertson-Walker metric, based on the isotropy and homogeneity assumptions, leads to the following system

$$-\frac{8\pi G}{c^2}\rho = \frac{3k}{R^2} + \frac{3}{R^2}\left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2, \tag{2}$$

$$-\frac{8\pi G}{c^2}\left(\frac{p}{c^2}\right) = -\frac{k}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 - \frac{2}{R}\frac{d^2R}{dx^{0^2}} \tag{3}$$

In this system, k is the sign of the curvature, p the pressure and ρ the density of energy-matter. In the classical model, we define the cosmic time t from the chronological variable x^0, by $x^0 = ct$, where c is considered as an absolute constant. In addition, the wavelength of the photon varies like R.

Let us consider the less restrictive condition

$$dx^0 = c(t)\,dt \tag{4}$$

which represents an alternative interpretation of the chronological parameter x^0. We are now going to relate the main physical constants to R, considered as a gauge parameter

$$c \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \quad \text{or} \quad Rc^2 \approx \text{constant}, \tag{5}$$

$$m \text{ (particle's mass)} \approx R\,, \tag{6}$$

$$h \approx R^{3/2}\,, \tag{7}$$

$$G \approx 1/R\,. \tag{8}$$

With reference to relation (1), notice that $G/c^2 = \text{constant}$. In addition, if V is the relative velocity of a given element, for example, the random velocity of a galaxy in a cluster, or the velocity of a free particle in a cloud, we assume that V follows the secular variation

$$V \approx R^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

If we suppose that the number of particles is conserved, the matter density ρ obeys

$$\rho \approx 1/R^2\,. \tag{10}$$

As a consequence, we can express the cosmic evolution through a gauge process, i.e., the Compton wavelength, the De Broglie wavelength, the Schwarzschild length and the Jeans length are found to vary like R.

In addition, our model still considers $mc^2 = \text{constant}$ and

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \approx \text{constant}\,. \tag{11}$$

The classical model saved the masses, assumed to be constant, but not the total matter-energy, through the variation of the cosmic background energy. In our scenario, it is just the reverse: the energy-matter is constant in time, not the masses. In addition, one should notice that the quantity Gm^2/R, which can be considered as a characteristic gravitational energy, is conserved.

Since the energies are conserved in our model, the moment as defined as mV' varies like $R^{1/2}$. It is only constant if we define them as $\rho u' c$.

Finally the Planck length varies with time like $R(t)$, the Planck time varies like t and the gravitational forces like $1/R(t)$.

4. The Evolution Equation

Introducing Eq. (4) into the systems (2), (3), we obtain the following equations

$$\frac{2R''}{R} + \frac{2R'^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} = \chi p\,, \tag{12}$$

$$\frac{1}{R^2}(R'^2 + kc^2) = -\chi\frac{\rho c^2}{3}. \tag{13}$$

The use of the following equation of state

$$p = \frac{\rho\beta^2 c^2}{3} \qquad \text{with } 0 < \beta \leq 1 \tag{14}$$

leads to

$$\frac{2R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}(2 + \beta^2) + \frac{kc^2}{R^2}(1 + \beta^2) = 0. \tag{15}$$

In the case where $R = at^m$, the parameter β disappears from Eq. (15). From Eq. (5), $Rc^2 = R_0 c_0^2$ is an absolute constant, R_0 and c_0 being the present values of the gauge parameter R and light velocity c. The only possible value for k is -1, which means that in our model the curvature is negative. Then the evolution law becomes

$$R = \sqrt[3]{\frac{g}{4}R_0 c_0^2}\, t^{\frac{2}{3}}. \tag{16}$$

Here, contrary to the classical models, light and matter obey the same evolution law. Moreover,

$$R = \frac{3}{2}ct. \tag{17}$$

If we know t_0, the age of the universe, and c_0, the present value for the light velocity, we could derive the present value of the gauge parameter of the universe $R_0 = (3/2)\, c_0\, t_0$, with the use of

$$L(t) \equiv \int_0^t c(\tau)\, d\tau \equiv R(t). \tag{18}$$

The consequence is that the horizon is found to be identical, at any time, to the gauge factor $R(t)$.

5. Gauge Invariance of some Fundamental Equations

Let us take first the Vlasov equation, referring to collision free fluids. $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$ is the velocity distribution function, which depends on the position vector r, the

velocity vector $\mathbf{V}$ and the time t. Ψ is the gravitational, e.g., $m\partial\Psi/\partial\mathbf{r}$ is the force acting on the particle whose mass is m.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} = 0 . \tag{19}$$

Introduce non-dimensional variables, such that

$$t = t^* \tau ; f = f^* \xi ; \mathbf{V} = V^* \mathbf{w} ; \mathbf{r} = R^* \zeta ; \Psi = (G^* m^*/R^*) \varphi$$

Equation (19) becomes

$$\frac{1}{t^*} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{V^*}{R^*} \mathbf{w} . \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} - \frac{G^* m^*}{R^{*2} V^*} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}} = 0 . \tag{20}$$

Introduce the precedent gauge relations $G^* \approx 1/R^*$, $m^* \approx R^*$. The dimensional analysis of Eq. (20) gives $V^* \approx 1/(R^*)^{1/2}$ and

$$R^* \approx t^{*2/3} . \tag{21}$$

These relations can be interpreted as gauge relations and related to the solution (16). Consider now the Schrödinger equation

$$-\frac{h^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U\Psi = -i\,h \frac{\partial \Psi}{\partial t} . \tag{22}$$

Introduce $t = t^* \tau$, $\mathbf{r} = R^* \boldsymbol{\zeta}$, $h = h^* \eta$, $m = m^* \mu$, $U = U^* u$. The dimensional analysis of Eq. (22) gives

$$\frac{h^{*2}}{2m^* R^{*2}} \approx U^* \approx \frac{h^*}{t^*}, \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{t^{*2}}{R^{*3}} \approx U^* \approx \text{constant}, \tag{23}$$

i.e., $R^* \approx t^{*2/3}$. Now let us write the Maxwell equations, referring to an empty space

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \tag{24}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \tag{25}$$

and write $\mathbf{E} = E^* \boldsymbol{\varepsilon}$, $B = B^* \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{r} = R^* \boldsymbol{\zeta}$, $t = t^* t$, $c = c^* \omega$. We get

$$\frac{E^*}{R^*}\frac{\partial}{\partial\zeta}\times\varepsilon=-\frac{B^*}{t^*}\frac{\partial\beta}{\partial\tau} \tag{26}$$

$$\frac{E^*}{R^*}\frac{\partial}{\partial\zeta}\times\beta=\frac{E^*}{c^{*2}\,t^*}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,. \tag{27}$$

Combining with $c^* \approx 1/R^{*1/2}$, we refind $R^* \approx t^{2/3}$.

6. Conclusion

In this paper, we have derived some of the implications of letting the fundamental constants vary with time. This can only be done with the addition of some further gauge constraints. Following Milne's suggestion[1], the classical interpretation of the redshift in terms of the Doppler effect has to be replaced by another one taking into account the secular change of the Planck constant. The fundamental parameters R and c are related to each other by some gauge relation. The particle masses vary like R while the energy-matter and the gravitation energy are conserved.

This model predicts that the cosmological horizon $L(t)$ should be identical to $R(t)$, which would justify the overall homogeneity of universe. The curvature of space should be negative and the gauge relationship between R and t should be $R \approx t^{2/3}$.

The Planck's constant would vary like t, and the gravitational constant G like $1/R$, the Planck's length would vary like R, and the Planck's time would vary like t. The gravitational force would vary like $1/R$.

References

1. E. A. Milne, *Kinematic Relativity* (Oxford, 1948).
2. F. Hoyle and J. V. Narlikar, *Cosmological models in conformally invariant gravitational theory, Mon. Notices Roy. Astr. Soc.* **155** (1972) 305–325.
3. P. A. Dirac, *Nature* **139** (1973) 323.
4. P. A. Dirac, 1973 *Proc. Roy. Soc. London* **A333** (1973) 403.
5. V. Canuto and J. Lodenquai , *Dirac cosmology, Appl. J.* **211** (1977) 342–356.
6. T. C. Van Flandern, *Is the gravitational constant changing? Appl. J.* **248** 813–816.
7. A. Julg, *Dirac's large numbers hypothesis and continuous creation, Appl. J.* **271** (1983) 9–10.
8. V. Canuto and S. H. Hsieh, *The 3 K blackbody radiation, Dirac's large numbers hypothesis, and scale-covariant cosmology, Appl. J.*, **224** (1978) 302–307
9. R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to general relativity* (McGraw Hill, 1965).
10. J. M. Souriau, *Géométrie et relativité*, ed. Hermann (France, 1964).

Nous faisons maintenant un important saut dans le temps, en passant de 1988 à 2024, en passant sur des articles qui traduisent l'élaboration progressive de la traduction des données figurant dans les textes Ummo, concernant la cosmologie.

Il y a eu l'impact de la rencontre avec le mathématicien aveugle Bernard Morin.



Bernard Morin, mathématicien-géomètre. 1931-2018

Ma carrière scientifique a été fortement influencée par les rencontres successives de quatre mathématiciens-géomètres. Il y a d'abord eu le Mathématicien-Académicien - géomètre André Lichnérowicz. Là l'interaction s'est située au niveau d'un début d'approche de la géométrie différentielle, de travaux dans l'espace à sept dimensions (temps-position-vitesse), de la théorie cinétique des gaz et des plasmas et de l'usage d'outils comme l'algèbre des dyadiques.

La rencontre avec Morin, au début des années quatre-vingt traduit un choc brutal avec la topologie.

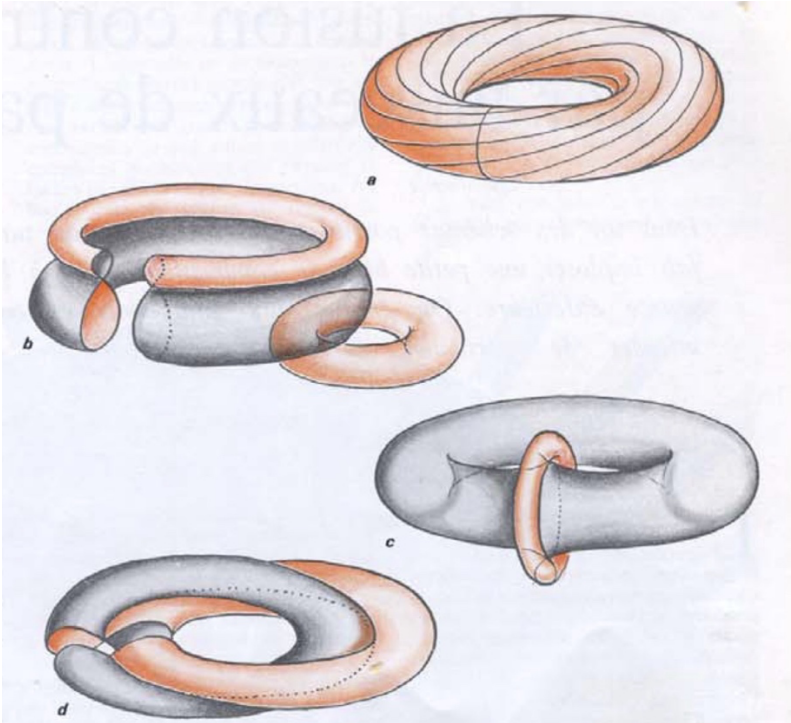
Morin, devenu aveugle à l'âge de 6 ans à la suite d'un glaucome, s'est spécialisé dans la géométrie, et plus précisément dans une géométrie du visible. Plus précisément la géométrie des immersions d'objets 2D dans l'espace euclidien 3D. Ces objets sont essentiellement la sphère, le tore, et deux objets unilatères dont on parlera plus loin.

On imagine que ces objets puissent être déformés en maintenant la continuité de leur plan tangent. Si ces déformations excluent que ces objets se traversent, on parle de plongement. S'ils peuvent «s'auto-traverser » on parle d'immersions.

Ces transformations par déformations continues s'appellent des homotopies régulières.

On envisage alors l'infinité de façons que ces objets que sont les surfaces fermées continues puissent se présenter, en immersion dans l'espace 3D.

Pour le tore, par exemple, on distingue des immersions qui ne peuvent se transformer les uns dans les autres par déformation continue, selon une suite d'immersions.



12. LES FORMES LES PLUS REMARQUABLES d'immersions du tore sont représentées en *b*, *c* et *d*. Le plongement « tordu » de la figure *a* qui a le même aspect que le plongement standard montre que les figures *b*, *c* et *d* ne contiennent pas toute l'information qu'il faudrait avoir pour décrire les immersions puisque ces figures ne rendent pas compte des torsions internes.

Les quatre modes d'immersions du tore.

Qu'est-ce qu'un tore ?

C'est la surface engendrée par le déplacement (et la déformation) d'un cercle jusqu'à ce que celui-ci revienne à a position initiale. Dans la figure a, en haut et à droite, c'est le « tore classique » où ce « cercle générateur » tourne autour d'un axe de symétrie.

Mais une figure en forme de huit, c'est toujours « un cercle », ou « un objet ayant la topologie d'un cercle. C'est-à-dire une courbe continue qui se boucle sur elle-même. En faisant tourner ce « huit » autour d'un axe de symétrie, on obtient le dessin de la figure b.

En d on a fait encore plus compliqué. Non seulement ce « huit » tourne autour d'un axe de rotation, mais il tourne également comme une hélice à deux pales en faisant un tour par tour.

Enfin dans la figure c ce tore est engendré par le mouvement d'une cercle qui ne se recoupe pas lui-même, mais voit son périmètre se modifier et effectuer une inversion de sa rotation.

Bref les mathématiciens-géomètres savent démontrer que ces quatre figures ne peuvent être transformées les unes dans les autres. Ce sont des familles d'immersions distinctes. Au sein d'une famille l'infinité des transformations permettant de passe d'une configuration à une autre, par des homotopies régulières, forment un groupe unique.

Les dessins ci-dessus sont résumés par les géomètres par la phrase :

Il existe quatre classes d'homotopies régulières du tore.

En 1959 le jeune mathématicien américain Stephen Smale démontre que la sphère ne possède d'une seule classe d'homotopies régulières[10].



Stephen Smale (né en 1930) en, 1959

Son patron de thèse, à l'université américain de San Diego, est le mathématicien d'origine hongroise Raoul Bott (naturalisé en 1950).

[10] Smale, Stephen, "A Classification of Immersions of the Two-Sphere", Transactions of the American Mathematical Society, 90, n° 2 (1959), pp. 281–290.



Raoul Bott, mathématicien. 1923-2005

Quand Smale lui soumet son théorème Bott s'écrie :

- Ce que vous dites est forcément faux ! Si c'était vrai, cela voudrait dire qu'on peut retourner une sphère recto-verso, par une suite continue d'immersions. Or c'est impossible !

Smale proteste, arguant que sa démonstration est sans faille. Bott :

- Bon, alors, comment procédez-vous ?
- Je n'en ai pas la moindre idée ….

Il faudra attendre sept ans avant qu'un mathématicien géomètre, Anthony Phillips, publie la première version de ce retournement de la sphère, recto-verso[11]. L'article, publié par la revue Scientific American, n'est lisible que par une infime poignée de spécialistes dans le monde[12].

L'aveugle Bernard Morin imagine alors une version différentes basée sur « un modèle central à quatre oreilles », qu'il imagine. Mais faute de dessins à la clé, ce travail n'est pas publié.

Lors d'un colloque à Seattle en 1967 Morin présente des modèles en pâte à modeler au mathématicien américain Charles Pugh, qui parvient à fabriquer dix modèles en « grillage pour poulailler » qui sont exposés en 1970 à l'université de Berkeley.

Le mathématicien Nelson Max emprunte les modèle et les « digitalise » à la main en relevant à la main les coordonnées (x,y,z) de centaines de points, travail qui lui permettra, sept ans plus tard, d'en faire un film de 23 minutes.

---

[11] Anthony Phillips, "Turning a Surface Inside Out", Scientific American, vol. 214, n° 5, mai 1966, pp. 112–120.

[12] Il est fondé sur un modèle central qui est l'espace projectif P2.

Quelques mois après ces dix modèles sont volés pendant une nuit. On ne le retrouvera jamais.

Ayant entendu Morin en conférence, à Aix-en-Provence, au début de l'été 1975, je lui propose de créer la suite de dessins requise pour illustrer sa version du retournement de la sphère. Il s'en suit un dialogue assez étonnant où Morin n'a que ses mots pour m'expliquer ce qu'il attend de moi. De mon côté je ne peux lui soumettre mes essais qu'en lui amenant des objets en cartons et en fil de fer (pour la courbe d'auto-intersection).

Au bout de quelques mois ce travail aboutit. Je réalise un « film » sous la forme d'un « flip book », c'est-à-dire d'une suite d'une cinquantaine d'images se présentant sous la forme d'un carnet que l'on peut feuilleter. On voit alors l'objet s'animer et les transformations s'enchaîner.

Le CNRS a créé en son sein le SERDAV, Service d'Étude et de Réalisation de Documents Audio Visuels, dirigé par Jean-Michel Arnold. Je monte à Paris et je lui propose la réalisation d'un dessin animé.

- Mais, qui réalisera ces dessins ?
- Moi ….

Arnold ouvre des yeux ronds (nous sommes en France) et ne donne pas suite.

Des années passent. La revue française. La Recherche contacte Bernard Morin dans le but d'écrire un article sur ce thème. La journaliste scientifique chargée de ce travail, Patricia Pinaud a des idées préconçues bien définies :

- Un article scientifique, c'est soit quelques pages de texte, avec quelques dessins, soit un ensemble de dessins avec quelques lignes de textes.

Les relations avec Morin se tendent. Pour tirer cela au clair je téléphone à la journaliste qui me répond :

- Morin est un homme impossible. Nous avons transmis les dessins à un américain, Nelson Max, qui réalisera l'article.

- Mais ces dessins représentent un travail original, non publié !

- Ca, c'est votre problème, pas le nôtre !

Contacté, Lichnérowicz réagit aussitôt :

- Rédigez une note que je présenterai à l'Académie des Science, ainsi votre antériorité sera préservée.

Aussitôt dit, aussitôt fait[13].

---

[13] B.Morin, J-P Petit. Le retournement de la sphère. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 287, série A (30 octobre 1978).
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/geometry_1978b.pdf

La revue Pour la Science, version française de la revue américaine Scientific American, vient d'être créée. Je monte à Paris et dit à Philippe Boulanger, son rédacteur en chef :

- Accepteriez-vous d'aider deux scientifiques français, sur le point d'être pillés par un mathématicien américain, avec la complicité de la revue officielle français, « La Recherche » ?

- Oui, mais il me faudrait cet article, texte et dessins compris, dans un délai d'une semaine, pour que l'article sorte dans notre prochain numéro.

Morin écrit l'article. Je monte à Paris et, dormant dans les locaux de la revue, réalise sur place les nombreux dessins. L'article sort en janvier 1979[14] et nous coiffons Nelson Max au poteau. Un article paraîtra dans la revue La Recherche, d'une qualité très inférieure.

Notre article vaudra à la revue Pour la Science le prix d'Alembert, délivré par la société mathématique de France pour des ouvrages de vulgarisation des mathématiques. Cela alors que mes albums Le Geometricon, Le Trou Noir et le Topologicon existent déjà.

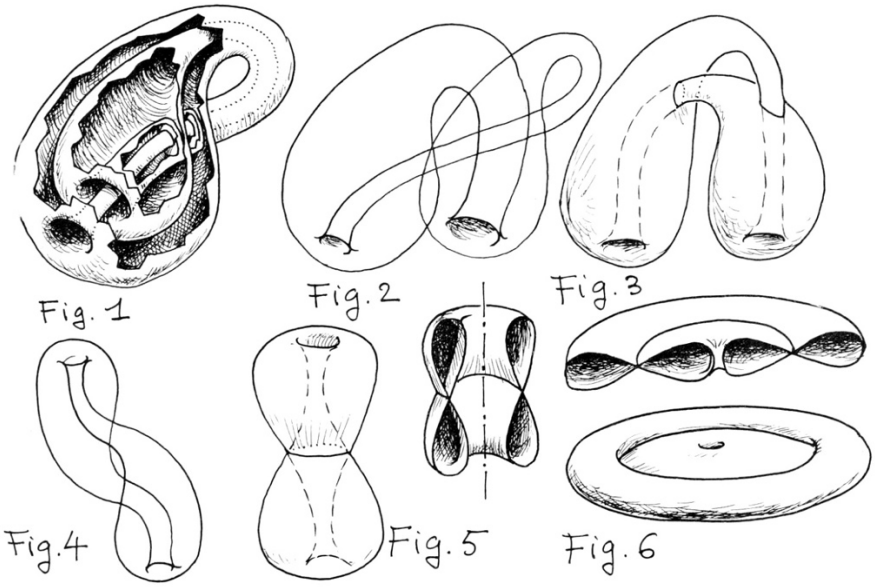
Si j'ai décidé de reproduire ici cet article c'est pour montrer le manque de fair-play dans le monde de la recherche, et principalement aux USA. C'est le :

- Not invented here[15] …

Sollicité par son vassal français, la revue Pour la Science, Scientific American refusera de rééditer l'article des deux Français. Cet article n'est pratiquement pas cité de nos jours, alors que c'est la seule description lisible du retournement de la sphère.

Cette rencontre avec le mathématicien aveugle Bernard Morin engendre chez moi différentes productions. J'invente un retournement non trivial du tore[16] basé sur le revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein.

[14] B.Morin et JP Petit. Le retournement de la sphère. Pour la science n°15 pages 34-49.
[15] Cela n'a pas été inventé chez nous.
[16] JP Petit. Le retournement non trivial du tore. CRAS Paris tome 287, série A (20 novembre 1978) pages 927-930
http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/geometry_1978d.pdf



Images de mon retournement du tore[17].

Je crée la première représentation de la surface de Boy à l'aide de ses méridiens, sous la forme d'une famille d'ellipses[18], ce qui me permet de créer la première représentation paramétrique de cette surface, qui donnera naissance aux premières images de synthèses.

Ci-après, la première image « numérique » de cette surface montrant ses courbes méridiennes, concourant en son pôle unique, ainsi que ses coupes successives, montrant qu'il s'agit bien de l'objet.

[17] J.P.Petit : le retournement non trivial du tore. CRAS t.287 (20 nov 1978)
[18] J.P.Petit, J.Souriau : Une représentation analytique de la surface de Boy. CRAS t. 293 (5 oct. 1981)

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (5 octobre 1981) Série I – 271

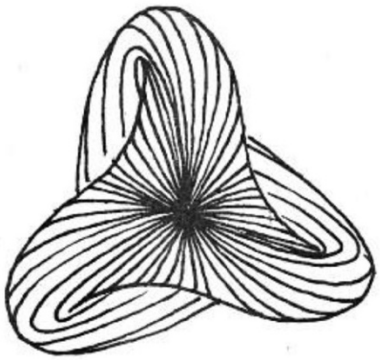


Fig. 4. – Lignes méridiennes (Eμ) de la surface de Boy (tracé par « Apple-II »).

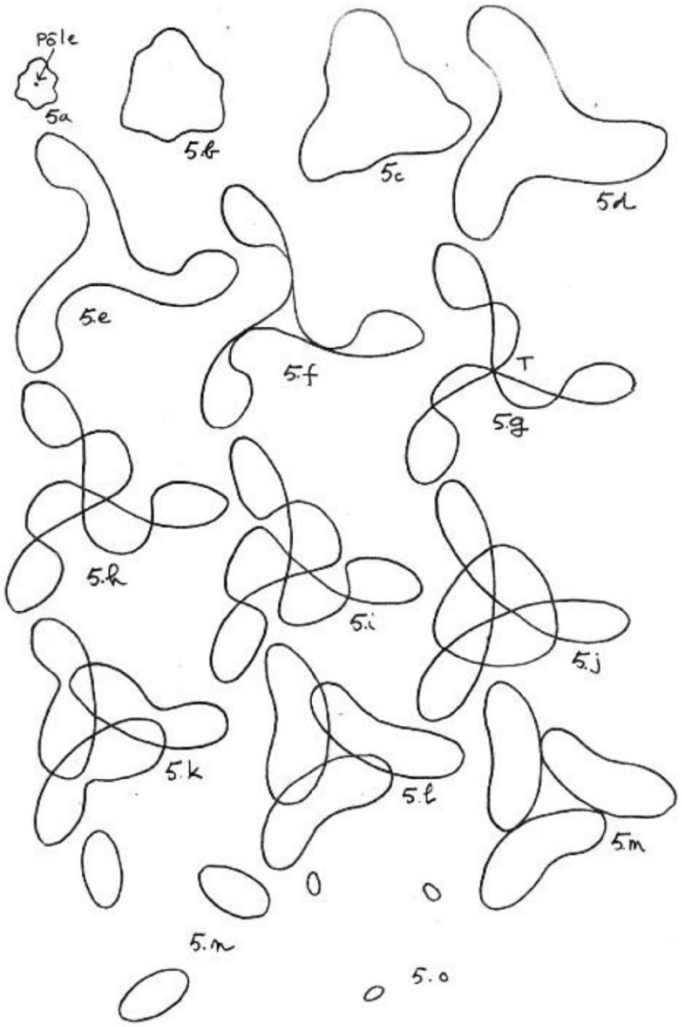


Fig. 5

Ce qui est intéressant c'est que ces coupes de son avérées identiques aux dessins originaux de Werner Boy :Über die curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Dissertation, Georg-August-Universitât, Gottingen, 1902.

Le retournement de la sphère

Grâce à quatorze modifications géométriques simples, on peut retourner une sphère sans la déchirer ni la plier, c'est-à-dire amener à l'extérieur sa face interne.

par Bernard Morin et Jean-Pierre Petit

En 1957, Stephen Smale, un jeune mathématicien devenu célèbre depuis, présentait à son directeur de recherches, Raoul Bott, un résultat de caractère très général sur les déformations de sphères. Au premier examen, Raoul Bott refusa d'admettre le théorème. Plus sensible que son étudiant aux conséquences géométriques des énoncés abstraits, il ne fut pas long à remarquer que si Stephen Smale avait raison, il serait possible, en suivant des règles que nous expliquons plus loin, de retourner la sphère ordinaire de façon à lui faire présenter sa face interne vers l'extérieur, et cela, sans quitter l'espace tridimensionnel de la géométrie classique. A coup sûr, il y avait là de quoi surprendre : le théorème de Whitney-Graustein, d'ailleurs redémontré par Stephen Smale, affirme qu'on ne peut, en suivant les mêmes règles, retourner un cercle sans sortir du plan. Rappelons qu'en effet le cercle, appelé sphère de dimension 1 par les mathématiciens, joue pour le plan le même rôle que la sphère pour l'espace ordinaire. Mais surtout, si Stephen Smale avait raison, on devait être capable de concrétiser le retournement à l'aide de modèles puisque l'affaire se jouait dans notre espace, où l'imagination peut s'exercer. Or, si la démonstration du théorème fournissait un moyen théorique de réaliser la transformation, il était en pratique impossible d'imaginer cette solution. Le travail de Stephen Smale, très solide et très clair, était facile à contrôler; aussi, la communauté mathématique reconnut rapidement que son théorème était vrai. Restait pourtant l'irritant défi lancé par Raoul Bott : « Montre-moi comment cela est possible. » En vrai spécialiste de la géométrie des dimensions supérieures à trois, Stephen Smale ne se soucia guère de satisfaire la curiosité de son patron.

Après avoir précisé les termes dans lesquels se pose le problème, nous nous proposons de raconter ici les efforts d'imagination spatiale de ceux, mathématiciens et physiciens, qui depuis une vingtaine d'années ont tenté de répondre à la question posée par Raoul Bott. Chemin faisant, nous exposerons le scénario qui, selon nous, réalise le programme de la façon la plus satisfaisante. Tous les détails de notre solution sont consignés sur les nombreuses figures étayant un texte qui ne pourrait être rendu intelligible sans le secours du dessinateur. Notre méthode présente, entre autres avantages, celui de se généraliser à l'étude des déformations d'une surface quelconque, comme nous le verrons en particulier à propos du tore.

Plongements et déformations de plongements.

Pour nous initier à l'étude des déformations de la sphère, nous devons d'abord préciser les règles du jeu auquel nous sommes conviés, en nous familiarisant avec les transformations permises et en prenant conscience de ce qui est interdit. En premier lieu, il convient d'aborder la notion de plongement. Pour cela, représentons la sphère comme un ballon dont la baudruche se laisse étirer et contracter à volonté. Lorsqu'on envisagera de déformer ce ballon, il faudra s'interdire d'en déchirer la membrane. Ainsi, pour réaliser le retournement, il n'est pas question de pratiquer dans la surface une ouverture, si petite soit-elle, qui permettrait de retourner la sphère à la manière d'une peau de lapin, ou mieux, d'une vessie de ballon, quitte ensuite à obturer l'orifice. En effet, toute déchirure constitue une rupture de continuité. Or les ruptures sont interdites, car, pour le topologue, la sphère trouée en un point perd sa qualité de sphère pour devenir un disque. Il faut également éviter de plier la membrane, ce qui, le long du pli, aurait pour résultat de casser le plan tangent qui doit être bien défini en chacun des points du ballon et varier continûment en fonction de la position du point. Pour qu'une configuration de la membrane qui matérialise la sphère mérite le nom de plongement, il faut enfin interdire que deux points distincts de cette membrane soient en coïncidence. En résumé, un *plongement* de la sphère est l'un des états dans lesquels peut se trouver une membrane élastique qui n'est ni déchirée, ni pliée et qui n'entre jamais en contact avec elle-même : la surface ainsi déterminée possède en chacun de ses points un plan tangent dont la position doit, en outre, dépendre continûment du point. Le plus simple de tous est le plongement standard; c'est celui que Monsieur de La Palice aurait pu inventer : il consiste à laisser la sphère (lieu des points dont la distance à l'origine de l'espace est égale à un) dans l'état où sa définition nous la livre.

Grâce à la substance idéale dont il est fait, le ballon pourra, à notre fantaisie, se déformer de multiples façons : il sera possible par exemple de lui faire prendre la forme d'une saucisse ou d'une galette, de lui faire pousser de longues cornes vers l'extérieur mais aussi vers l'intérieur, de ramifier ces cornes à la façon des bois d'un cerf, d'enlacer entre elles les diverses ramures ainsi obtenues pour en faire des torsades ou même des tresses, de gonfler les bourgeons terminaux de ce fouillis de lianes en d'énormes globes et ainsi de suite. Une *déformation de plongement* est une manipulation imprimée à la baudruche pour la faire passer d'une configuration donnée à une autre : elle a donc lieu durant un certain laps de temps à chaque instant duquel correspond une configuration de plongement représentant l'une des phases du processus évolutif qui conduit du plongement de départ au plongement d'arrivée. Au cours de la déformation, chaque point de la baudruche décrit une trajectoire continue et le plan tangent à la surface en ce point se déplace lui aussi continûment en fonction du point et du temps.

Il ne faudrait pas croire que deux plongements quelconques de la sphère puissent toujours être reliés l'un à l'autre par une déformation de plongement. Imaginons, en effet, que la baudruche de notre ballon soit coloriée en gris sur l'une de ses faces et en orangé sur l'autre. Si nous ne précisons rien au fabricant qui nous fournit les échantillons sur lesquels nous expérimentons, celui-ci nous livrera des ballons qui nous apparaîtront de l'extérieur tantôt gris et tantôt orangés. Les ballons orangés, au même titre que les gris, représentent des plongements de la sphère. Convenons une fois pour toutes que le plongement standard est vu de l'extérieur comme un objet gris. Alors l'exemple le plus naturel d'un plongement d'extérieur rouge est le *plongement antipodal*. Pour le construire, assimilons la sphère stan-

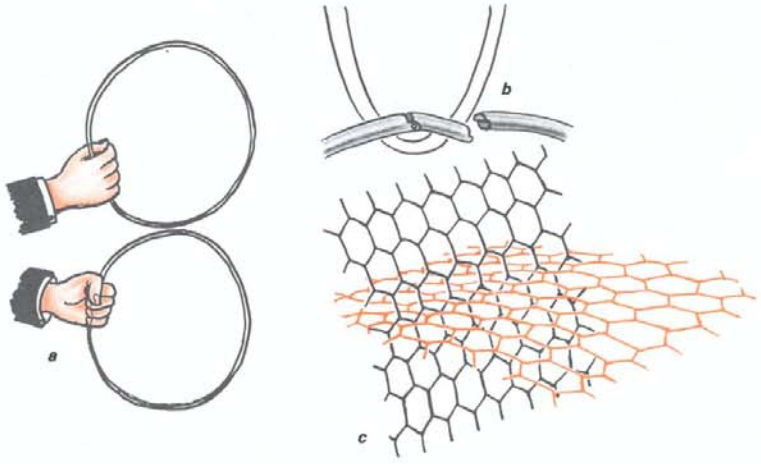
dard à une mappemonde, puis fabriquons à sa place une nouvelle mappemonde sur laquelle chaque point de la première vient s'inscrire sur le point diamétralement opposé. Le plongement antipodal s'obtient en faisant subir à la sphère standard une rotation de 180° autour de l'axe des pôles, puis une symétrie par rapport au plan équatorial. La symétrie échange les hémisphères entre eux sans déplacer les points de l'équateur. En observant du dessus le résultat de ces opérations, on aperçoit donc la face, naguère intérieure, de l'hémisphère sud. Or, aucune des manipulations décrites plus haut, si compliquées soient-elles, ne pourra faire que l'extérieur d'un ballon, gris au départ, devienne orangé à l'arrivée. En effet, l'air contenu à l'intérieur du ballon y reste emprisonné au cours de toute déformation de plongements. Un voyageur enfermé dans cette capsule élastique se verra constamment environné d'orangé, quelles que soient les manipulations subies par l'enveloppe d'où, quoi qu'il arrive, il ne pourra s'échapper sinon en acquérant des dons de passe-muraille.

Au terme de cette étude sur les déformations de plongements, nous sommes en état de comprendre et d'accepter le théorème suivant : tout plongement de la sphère peut être relié par une déformation de plongement, soit au plongement standard, soit au plongement antipodal selon qu'il présente à l'extérieur sa face grise ou sa face orangée, mais il n'existe pas de déformation de plongement reliant le plongement standard au plongement antipodal. Le royaume des plongements se compose donc de deux îlots. Le premier, l'îlot gris, contient le plongement standard, tandis que l'autre, l'orangé, contient le plongement antipodal. Sur chaque îlot, on peut se rendre à volonté d'un point à un autre en empruntant des chemins qui sont les déformations de plongements, mais il n'existe pas de pont reliant le pays gris au pays orangé.

Naturellement, les notions de plongement et de déformation de plongements s'étendent à d'autres surfaces que la sphère. A la fin de cet article, nous évoquerons brièvement la question des plongements du tore. La surface de Boy et la bouteille de Klein que nous rencontrerons plus loin ne peuvent être plongées dans l'espace ordinaire car ce sont des surfaces unilatères sans bord.

Immersions et homotopies régulières.

Retourner la sphère consiste à construire une déformation reliant la sphère standard à son plongement antipodal, c'est-à-dire amenant une sphère d'extérieur gris à présenter sa face orangée à l'extérieur. Or, comme nous venons de le voir, il est impossible qu'une déformation réalisant ce programme soit une déformation de plongements. Force est donc, pour atteindre le but fixé, de recourir à une catégorie plus large

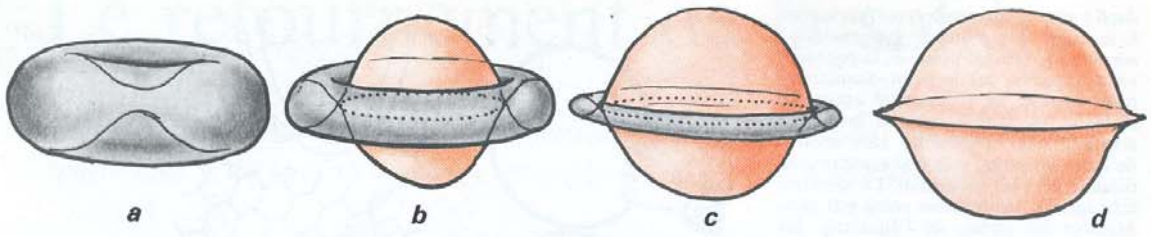


1. UNE SURFACE IMMERGÉE est une surface dont différentes parties se traversent. Les anneaux magiques des prestidigitateurs *(a)* comportent généralement un anneau spécial muni d'un mousqueton *(b)* ce qui permet à deux anneaux de s'interpénétrer. Deux surfaces qui s'interpénètrent peuvent se concevoir comme deux grillages à mailles extrêmement petites *(c)*, chaque segment de grillage étant muni d'un système de mousquetons semblable à celui des anneaux magiques.

de déformations, les déformations d'immersions, au cours desquelles il est permis aux points de la surface de se rencontrer. Pour expliquer ce dont il s'agit, l'image de la baudruche n'est plus un support suffisant pour l'intuition. Sur la figure 1*a*, on a représenté les anneaux truqués dont se servent les illusionnistes. Un système de mousquetons permet à l'opérateur de les faire se traverser et donc de les enlacer ou de les séparer à volonté. Imaginons maintenant un grillage très fin dont les mailles soient de tels anneaux et assimilons une surface à un grillage de ce type. Grâce à ce dispositif, on peut imaginer ce qu'est une surface qui se recoupe elle-même *(voir figure 1c)* et comprendre comment les nappes de la surface peuvent se traverser, puis glisser librement les unes par rapport aux autres. Comme dans le cas des plongements, on s'interdit évidemment de déchirer ou de plier la surface, ce qui endommagerait les mailles du grillage, mais on suppose que celui-ci a les mêmes propriétés d'élasticité que la baudruche d'un plongement. Toute présentation d'une surface selon une configuration dans laquelle cette surface est autorisée à se toucher ainsi qu'à se traverser s'appelle une *immersion* de la surface, pourvu qu'en chacun de ses points elle admette un plan tangent variant continûment en fonction du point. Une déformation de la surface au cours de laquelle on s'autorise des contacts et des traversées s'appelle une *déformation d'immersions* ou *homotopie régulière*, à condition, ici encore, que soient respectées les contraintes de continuité qui ont été imposées au plan tangent lors d'une déformation de plongement. A chaque instant de l'intervalle de temps qui paramètre la déformation correspond une immersion de la surface. Ainsi, une homotopie régulière nous conduit-elle graduellement de l'immersion initiale vers l'immersion qu'on désire atteindre sans sortir à aucun moment du cadre des immersions. Remarquons que les déformations de plongement étudiées précédemment sont des homotopies régulières d'un type particulier.

Si le théorème de Stephen Smale avait tant surpris Raoul Bott, c'était que, lorsqu'on l'applique à l'espace de dimension trois et à la sphère ordinaire, ce théorème affirme qu'on peut passer du plongement standard à n'importe quelle immersion de la sphère par une déformation d'immersions. Le plongement antipodal qui, comme tout plongement, est une immersion, peut donc, lui aussi, être relié au plongement standard par un chemin d'immersions. Les îlots gris et orangés sur lesquels se répartissent les plongements nous apparaissent maintenant comme deux petits pays au sein de la contrée des immersions qui est un vaste continent d'un seul tenant. Ce que demandait Raðul Bott était qu'on lui trace à travers la forêt d'immersions séparant ces deux pays un chemin aussi droit que possible permettant de se rendre commodément de l'un à l'autre.

Le recours aux immersions ne doit pas nous laisser croire que le problème est maintenant facile à résoudre. Voici un exemple significatif des erreurs qu'on peut commettre en abusant de la notion d'immersion : partant de la sphère standard, poussons le pôle nord et le pôle sud l'un vers l'autre, le long de l'axe qui les joint *(voir figure 2)*. Au moment où les pôles entrent en contact, on sort du domaine des plongements, mais dans le contexte des immersions,



2. UNE MAUVAISE SOLUTION au retournement de la sphère consiste à pousser *(a)* sur deux points diamétralement opposés de la sphère pour faire en sorte qu'il se forme *(b)* une « lentille » centrale sertie d'un tube. Cette opération est permise mais il est interdit, selon les règles de l'homotopie régulière, de poursuivre l'opération qui conduirait à une dégénérescence du tube en arête de rebroussement *(d)*.

on peut poursuivre la déformation amorcée et croiser les points en mouvement. On voit alors apparaître au centre de la figure une lentille orangée raccordée le long d'une ligne de points doubles à un tube équatorial resté gris : le pôle sud est maintenant sur la face supérieure de la lentille et le pôle nord sur sa face inférieure. Plus la déformation s'accentue, plus la lentille s'agrandit au détriment du tube qui, si nous laissons évoluer les choses, finira par disparaître totalement. La sphère est alors retournée, mais à l'instant où le tube s'évanouit, apparaît sur l'équateur une arête de rebroussement. De telles configurations ne sont pas des immersions et sont à proscrire car, comme dans le cas du pli, l'apparition d'une arête de rebroussement bouleverse la structure et introduit une discontinuité dans l'évolution des plans tangents.

Ce que ni Stephen Smale ni Raoul Bott ne parvenaient à imaginer était qu'on puisse contourner la difficulté précédente sans sortir du cadre des immersions. Les mathématiciens qui se sont intéressés au problème ont alors pris conscience du fait que, dans le passé, leur imagination n'avait guère eu l'occasion de s'exercer sur les déformations d'immersions. « Si Bourbaki s'était douté que les immersions pouvaient être aussi compliquées, nous confiait l'un de ses plus proches collaborateurs en regardant nos modèles du retournement, il n'aurait jamais appelé cela des immersions; nous considérions qu'une immersion était, à peu de choses près, un plongement ». En général, lorsqu'une immersion n'est pas un plongement, elle ne détermine pas seulement un intérieur et un extérieur car elle se présente à nous comme un objet comportant un système de cloisons souvent compliqué, délimitant de multiples régions enchevêtrées les unes dans les autres. L'immersion de la sphère qu'on vient d'examiner découpe l'espace en trois régions : l'extérieur, l'intérieur du tube et l'intérieur de la lentille. Pour appréhender un objet cloisonné, la difficulté n'est pas de nature mathématique mais psychologique. En effet, lorsqu'on se représente mentalement une structure spatiale, il est impossible de ne pas se situer en un point particulier de l'espace imaginé. Or, pour bien maîtriser la disposition d'un cloisonnement, il faut pouvoir se placer simultanément, par la pensée, dans chacune des régions que découpe l'objet. Cette faculté d'ubiquité imaginative que doit acquérir le jeune architecte, lui permettra de prévoir toutes les incidences du déplacement d'un mur ou de l'élévation d'un plancher. En plus de la difficulté à imaginer, il y avait la difficulté à transmettre. Comment, en effet, décrire de tels objets sinon en construisant des maquettes si possible démontables, activité à laquelle les mathématiciens ont peu coutume de s'adonner? Faute d'avoir eu recours à ce moyen, un topologue a souvent cru comprendre la solution d'un collègue, alors qu'en l'écoutant, il était en train d'en inventer une nouvelle.

Le recours à la surface de Boy.

En 1961, Arnold Shapiro, géomètre fort ingénieux et très original, prématurément décédé, imagina un scénario précis détaillant le retournement de la sphère. Bien peu nombreux sont ceux qui connaissent aujourd'hui la solution qu'il proposait, car, ne disposant pas d'un formalisme adéquat, l'auteur considéra qu'il ne pouvait mettre son travail sous forme publiable. Pourtant, en une soirée, il a trouvé le moyen de nous communiquer de vive voix, comme sans doute à plusieurs autres, l'idée qu'il avait conçue. En 1966, Anthony Phillips publia une suite de dessins constituant ce qu'il croyait être la transformation d'Arnold Shapiro. En réalité, la déformation d'Anthony Phillips, inspirée par René Thom et voisine d'une solution de Nicolaas Kuiper dont il n'avait pas connaissance, n'a en commun avec celle d'Arnold Shapiro que d'aboutir au revêtement de la surface imaginée en 1901 par Werner Boy (un élève de Hilbert). L'idée mise en œuvre par ces auteurs est fort instructive et son examen va nous familiariser avec les transformations permises dans le contexte des immersions.

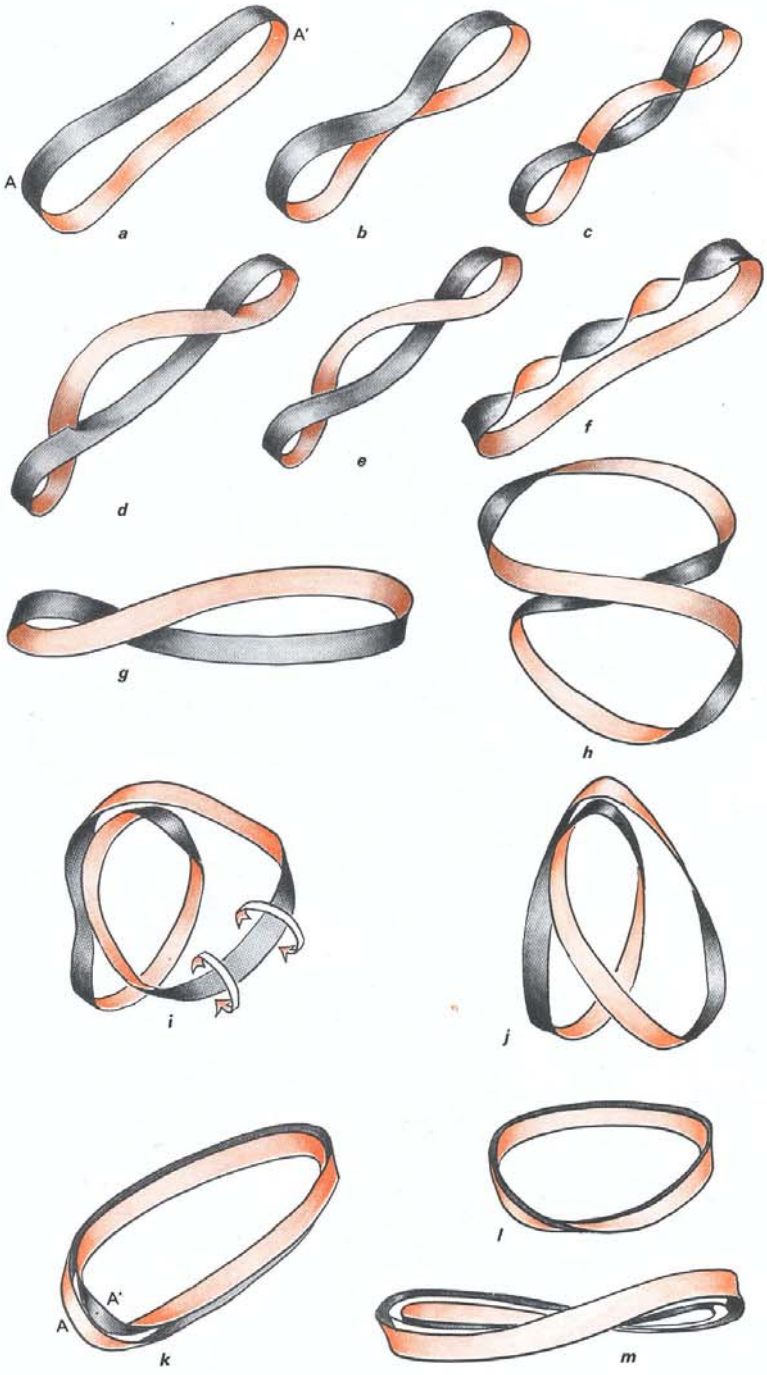
La *surface de Boy (voir figure 4)* est l'immersion d'un objet non orientable qu'on ne peut plonger dans l'espace ordinaire. Arnold Shapiro et Anthony Phillips ont, chacun de leur côté, construit une homotopie régulière amenant la sphère standard à envelopper (les mathématiciens disent *revêtir*) deux fois la surface de Boy. Lorsque la sphère parvient à l'état désiré, chacun de ses points est amené en regard du point antipodal, de manière que chaque élément de la surface de Boy se trouve pris en sandwich entre deux portions diamétralement opposées de son manteau sphérique. Pour réaliser le retournement de la sphère, il suffit d'obliger les deux feuillets du revêtement à se traverser l'un l'autre tout le long de l'immersion de Boy, pour ensuite parcourir en sens inverse l'homotopie régulière qui avait amené la sphère en position de revêtement. On aboutit en fin de compte au plongement antipodal puisque tout point de la sphère a croisé le point diamétralement opposé lors de son passage à travers l'immersion de Boy.

Pour mieux comprendre ce qu'est un revêtement à deux feuillets, commençons par construire celui d'une surface plus simple, le ruban de Möbius. Le ruban de Möbius est, tout comme la surface de Boy, une surface *unilatère*, c'est-à-dire à un seul côté. On peut matérialiser ce ruban en prenant une bande de papier environ dix fois plus longue que large dont on recolle les extrémités après lui avoir fait subir une torsion d'un demi-tour *(voir figure 3)*. A chaque passage, une fourmi cheminant le long d'une telle bande se trouvera alternativement au-dessus puis au-dessous du ruban. Les termes « au-dessus » et « au-dessous » n'ont de signification que pour un observateur ne pouvant voir qu'une partie de la bande et ignorant son mode de raccordement; sur l'objet considéré dans son ensemble, ils perdent toute signification. Notons que le bord de la surface qui vient d'être construite est une courbe fermée, d'un seul tenant, c'est-à-dire qui se laisse déformer en un cercle.

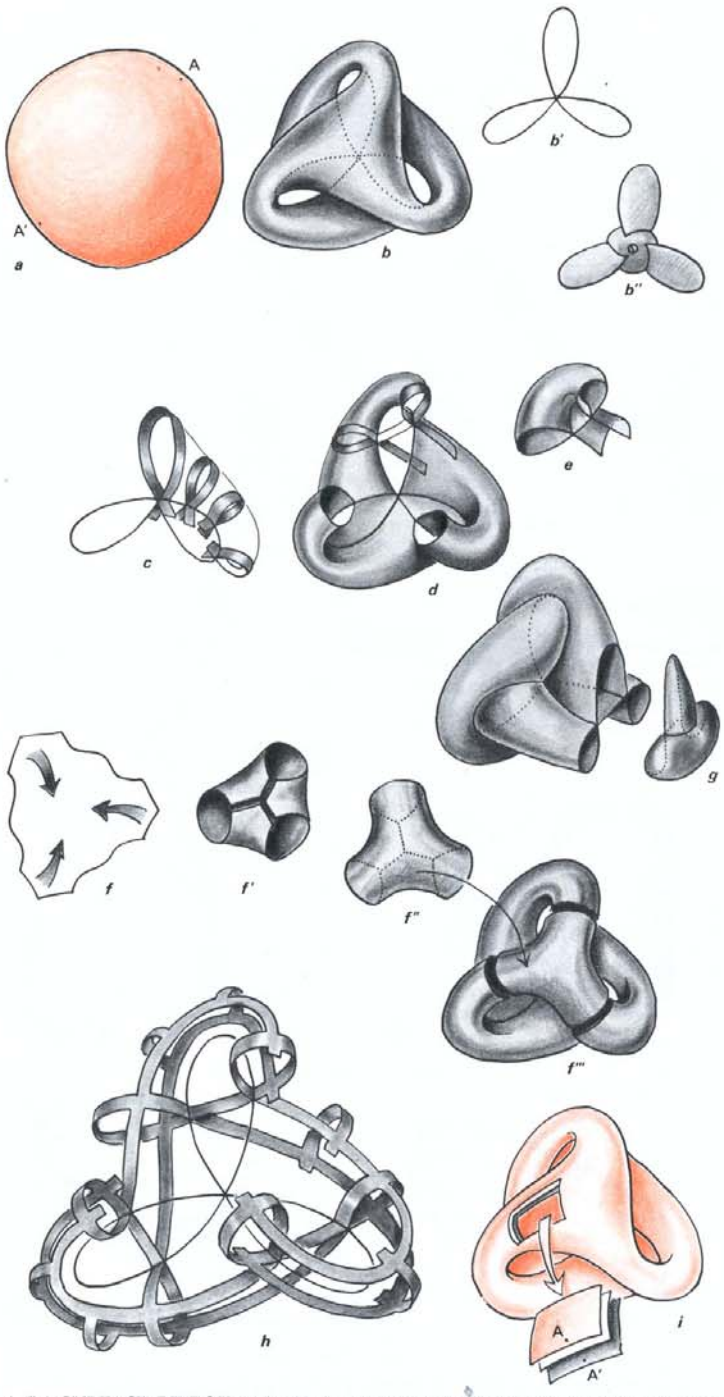
Considérons maintenant une autre bande refermée sur elle-même à la manière d'une ceinture (sans avoir été préalablement tordue), c'est-à-dire une bande cylindrique ou mieux la région équatoriale de la sphère standard. Nous nous proposons de montrer comment la bande se laisse déformer en un revêtement à deux feuillets du ruban de Möbius qui amène en regard les points diamétralement opposés de la région équatoriale.

Grâce à une homotopie régulière, on commence par croiser puis décroiser la bande. Le résultat de cette homotopie est une bande tordue deux fois que nous conseillons au lecteur de concrétiser au moyen d'une bande de papier, grise d'un côté et orangée de l'autre, deux fois plus longue que celle employée à la confection du ruban de Möbius. En effet, la manipulation qui conduit de la bande tordue deux fois au revêtement du ruban de Möbius, est une déformation de plongement qu'on pourra par conséquent faire subir à une représentation matérielle de cette bande en suivant les indications de la figure 3. Lorsque l'opération est menée à son terme, la bande est enroulée sur elle-même de telle sorte qu'un observateur pris entre les deux feuillets de l'enroulement les voit tous deux orangés. Il est possible d'insérer entre ces deux feuillets un ruban de Möbius *(représenté en blanc sur la figure 3)* à condition toutefois de n'exécuter le recollement qui ferme le ruban qu'après avoir mis en place ce dernier. Ce faisant, on a matérialisé le revêtement à deux feuillets du ruban de Möbius par une bande bilatère. Lorsque ce travail est exécuté, un observateur extérieur ne voit plus qu'une bande de Möbius grise. Pour imiter l'opération envisagée par Anthony Phillips, il faut maintenant sortir du cadre des déformations concrètement réalisables et, grâce à une déformation d'immersions, passer du revêtement gris au revêtement orangé en amenant les deux feuillets à se croiser tout le long du ruban de Möbius, ce qui a pour effet de les permuter. Prises à rebours et appliquées au revêtement orangé, les manipulations qui avaient conduit au revêtement gris ramènent notre bande en position cylindrique mais, contrairement à la situation de départ, c'est maintenant la face orangée qui se trouve à l'extérieur.

Puisque l'immersion de Boy est unilatère, il est possible de délimiter une région de sa surface en forme de ruban de Möbius. Ce qui reste de la surface de Boy lorsqu'on a découpé le ruban peut se déformer par homotopie régulière en un disque plan ou encore en une calotte sphérique. La surface de Boy s'obtient donc en cousant ensemble un ruban de Möbius et un disque le long de son bord (qui dans les deux cas est un cercle). Naturellement, pour que le raccordement puisse s'effectuer, il faut permettre aux surfaces en jeu de se traverser. A notre bande cylindrique (assimilée à la région équatoriale de la sphère standard) ressoudons maintenant les deux calottes sphériques délibérément oubliées dans ce qui précède et dessinons sur la surface de Boy un ruban de Möbius. Il serait possible de construire une homotopie régulière déformant la sphère en un revêtement à deux feuillets de la surface de Boy, dans laquelle la région équatoriale se transformerait en revêtement du ruban selon le scénario qui vient d'être décrit. Le terme de cette homotopie amènerait les deux calottes sphériques en coïncidence le long de la portion de sur-



3. UN REVÊTEMENT A DEUX FEUILLETS d'une surface, ici un ruban de Möbius, consiste à envelopper cette dernière par les deux feuillets d'une autre surface, ici une ceinture tordue deux fois. Pour amener la ceinture *(a)* en position de revêtement, on la modifie en l'autorisant à se traverser *(b, c)* puis on la décroise symétriquement *(d)* pour obtenir une ceinture à double torsade *(e, f)*. On répartit ensuite la torsion tout le long de la bande *(g)* pour transformer ensuite la surface comme indiqué en *h, i, j*. On obtient ainsi deux éléments de ruban de Möbius. Pour finir, la bande se trouve enroulée deux fois *(k)* de sorte que les faces en regard sont d'une même couleur. On peut alors insérer une bande et en coller les extrémités pour obtenir un ruban de Möbius *(en blanc)* qui est revêtu par les deux feuillets de la ceinture *(m)*. Les points tels que *A* et *A'* sont amenés en coïncidence.



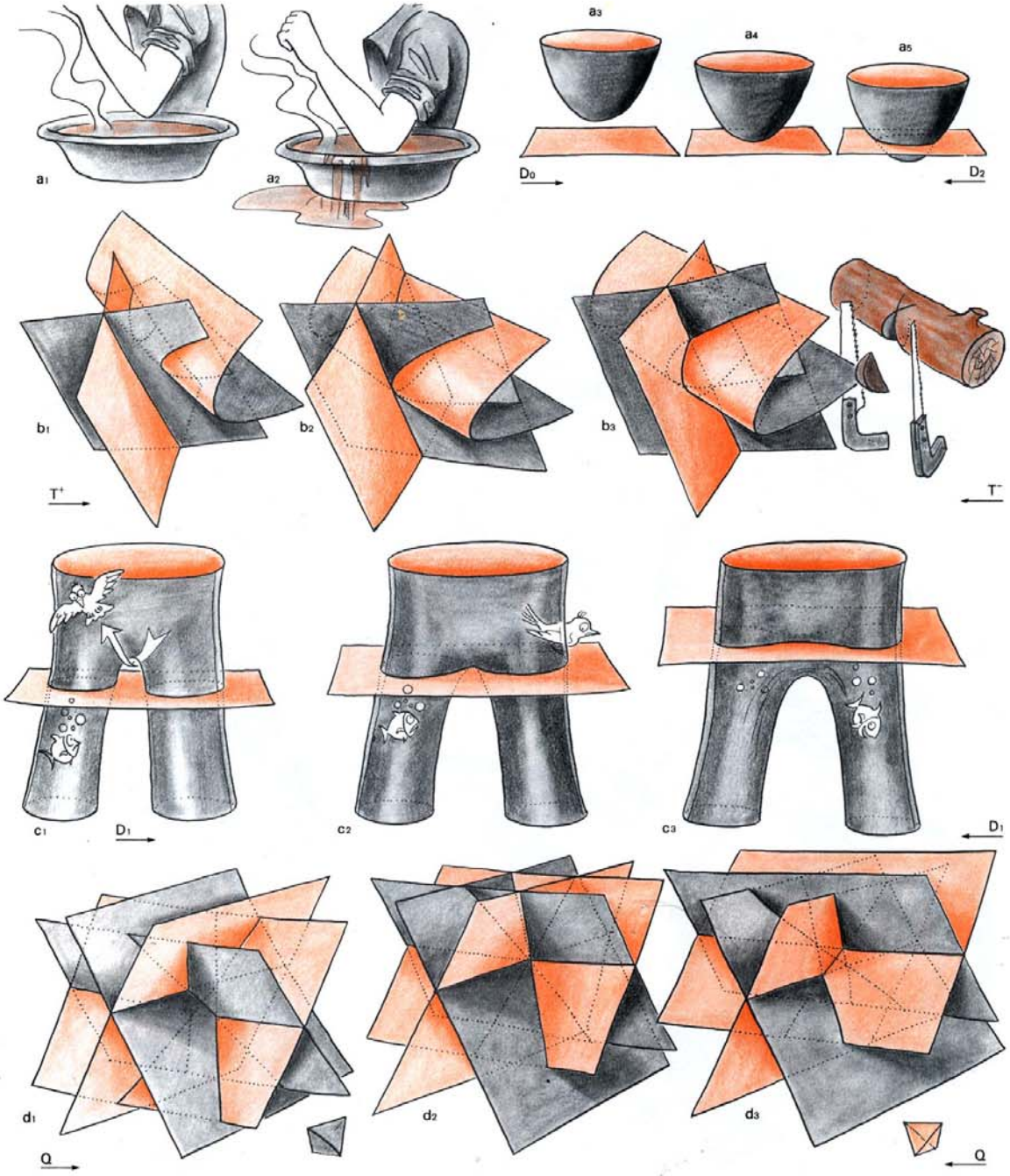
4. LA SURFACE DE BOY est le premier modèle central qui ait été utilisé pour retourner la sphère. La beauté intrinsèque de cette surface mérite une attention particulière. La courbe de self-intersection de la surface est une courbe gauche ayant la forme d'une hélice tripale. La surface elle-même est formée de trois tubes. Elle est ici représentée sous divers angles, parfois éclatée et parfois partiellement recouverte de bandelettes pour permettre au lecteur de mieux comprendre sa géométrie. La sphère *(a)* peut être immergée de façon à revêtir la surface de Boy par deux feuillets en regard qu'on peut ensuite échanger, en vue de retourner la sphère. Dans cette immersion *(i)*, chaque point de la sphère A est mis en coïncidence avec le point antipodal A'.

face de Boy extérieure au ruban. Cette manière de procéder serait moins élégante que celle d'Anthony Phillips et encore moins élégante que celle de Shapiro, mais la déformation de la région équatoriale qui vient d'être présentée méritait d'être étudiée pour elle-même en raison de sa grande simplicité.

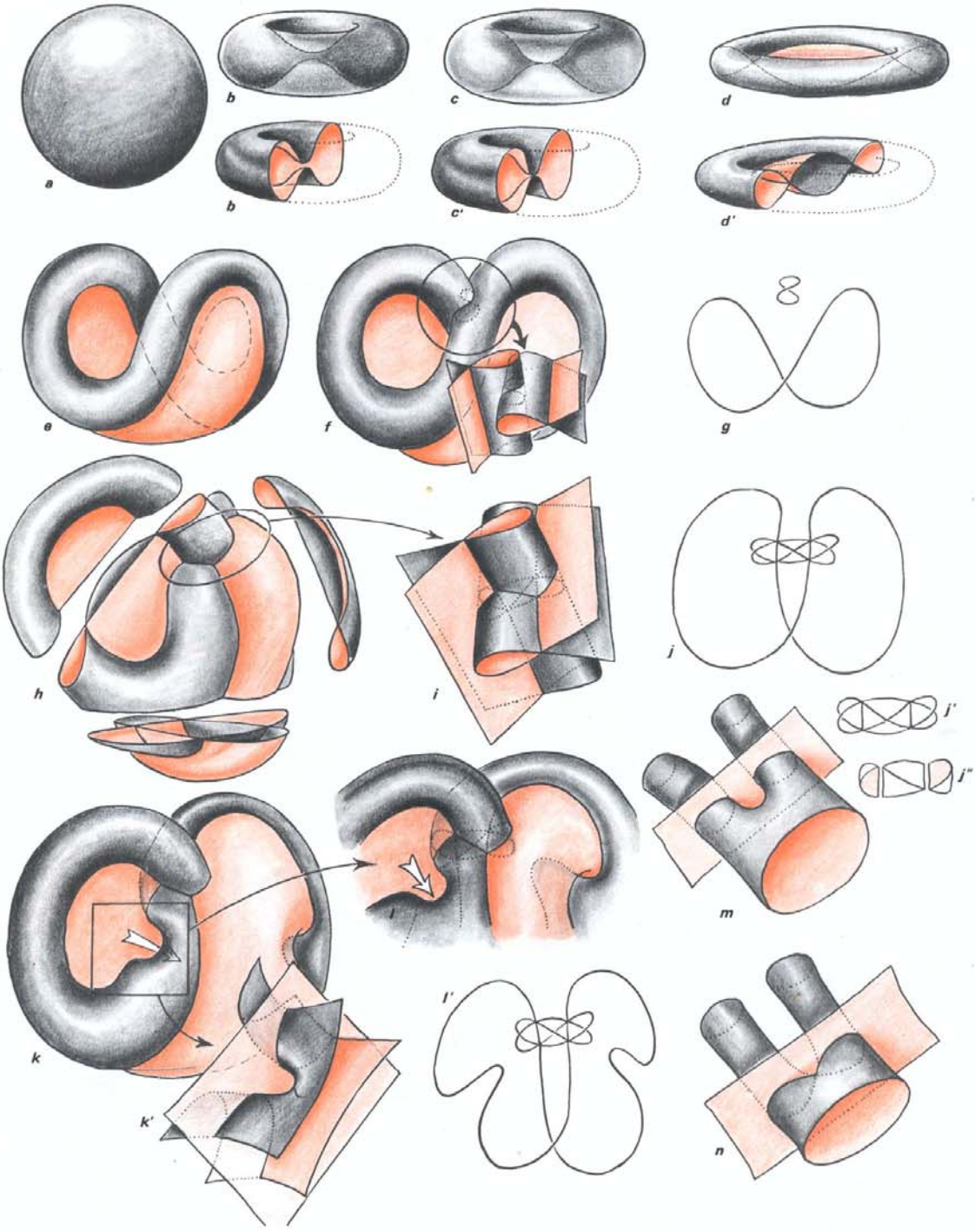
Le modèle central de notre déformation

Bien que très ingénieux, les dessins publiés par Anthony Phillips sont d'un déchiffrement ardu. En effet, ils montrent seulement une partie des objets à décrire, obligeant le lecteur à reconstituer mentalement ces derniers. Les lacunes volontaires des illustrations étaient inévitables en raison de la complexité des modèles envisagés. L'effort demandé au lecteur n'a pourtant pas rebuté le physicien Marcel Froissart. En analysant la solution proposée, il a constaté qu'il pouvait réaliser le projet de manière plus simple à condition d'oublier la surface de Boy. « Ce que Anthony Phillips fait avec six tubes, on peut le faire avec quatre » disait-il. La surface de Boy se présente comme un agencement de trois tubes. Son revêtement par la sphère comporte donc six tubes. Considérons maintenant l'immersion de la sphère représentée sur la figure 5. Ce modèle, qui met en évidence les quatre tubes aperçus par Marcel Froissart, est plus simple que le revêtement à deux feuillets de l'immersion de Boy. Ses propriétés de symétrie lui permettent, comme à la surface de Boy, de servir d'étape centrale au retournement de la sphère. Du point de vue de sa forme, il possède un axe de symétrie quadruple mais si l'on fait tourner l'objet d'un quart de tour, on échange les couleurs des 4 tubes qui sont alternativement gris et orangés. Si donc on dispose d'une famille d'immersions permettant de passer de la sphère standard à ce modèle central, il suffit, après cette rotation de 90°, d'opérer la transformation en sens inverse pour aboutir à la sphère retournée. Chose curieuse, et c'est un des paradoxes posés par l'imagination spatiale, Marcel Froissart n'avait pas vu ce modèle central et la transformation qu'il proposait n'était pas symétrique dans le temps, comme le sont celles d'Anthony Phillips, et celle qui sera présentée plus loin.

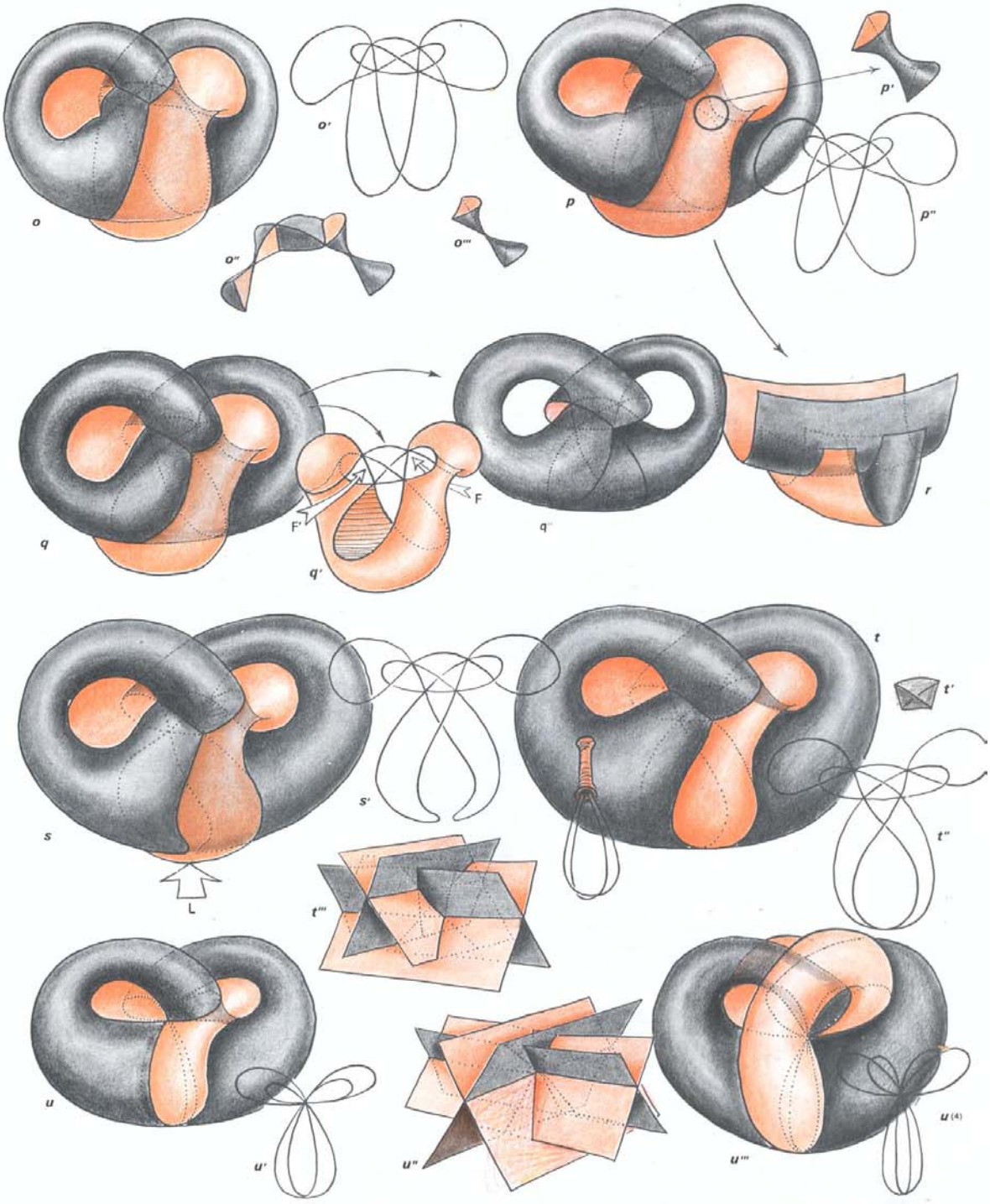
En 1967, lors de la rencontre du Batelle Memorial Institute, qui eut lieu à Seattle, entre mathématiciens et physiciens, fort curieux de connaître l'intéressante découverte de Marcel Froissart, nous nous sommes heurtés à un problème de communication redoutable. Pour converser avec l'inventeur, la seule méthode praticable fut de le questionner à l'aide de modèles en pâte à modeler et en fil de fer. Il se piqua au jeu et se mit lui aussi à pétrir la glaise afin de répondre aux questions. Ce dialogue insolite prit fin le jour où nous fûmes en état de lui présenter une ébauche du modèle central : il devenait alors clair pour les interlocuteurs qu'on pouvait rendre la défor-



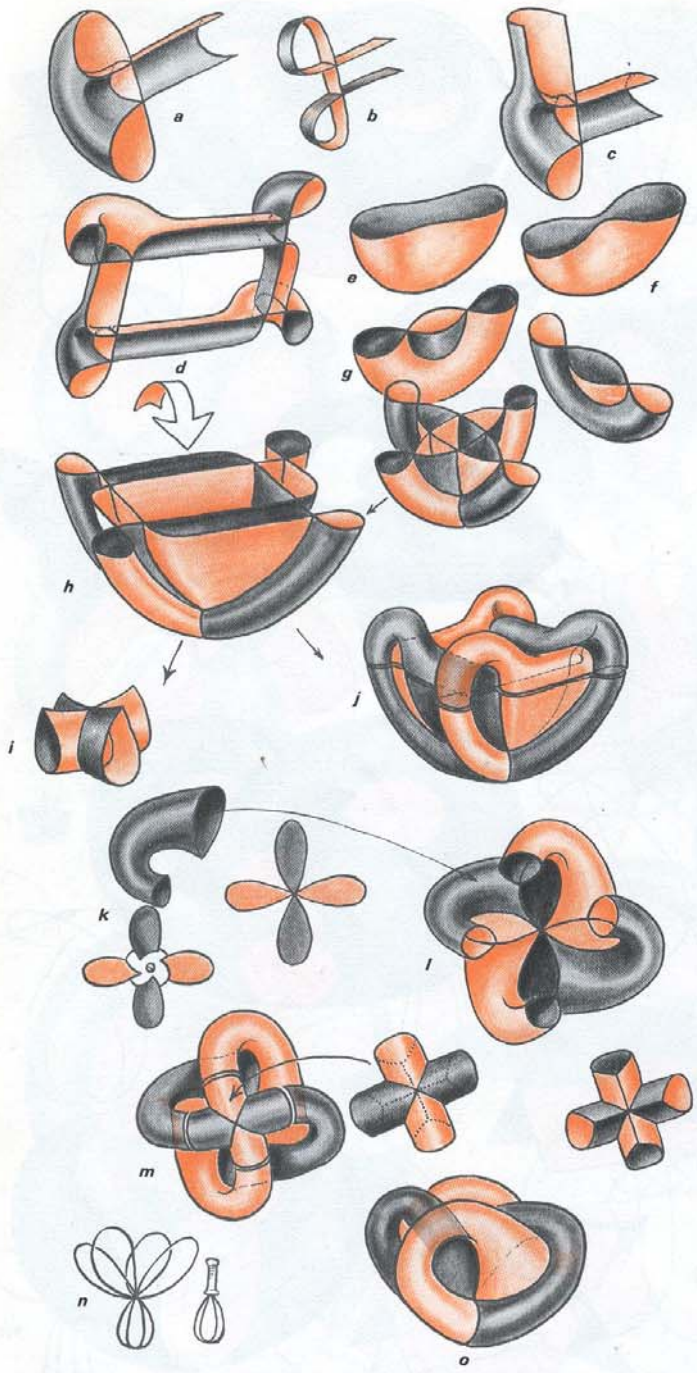
5. LES MODIFICATIONS GÉNÉRIQUES sont les étapes cruciales de la déformation où se produisent les changements de structure de la configuration. On peut suivre pas à pas le retournement de la sphère à partir de ces modifications. La première modification générique D_0 apparaît lorsque deux surfaces se traversent comme la peau recouvrant un coude quand elle est plongée dans l'eau. La courbe de self-intersection est approximativement circulaire. La modification générique T^+ apparaît quand une surface cylindrique s'approche de l'arête d'un dièdre. On peut se représenter les deux plans du dièdre comme les plans de coupe de deux scies qui entaillent le cylindre (ici une bûche) pour isoler un secteur de boule (en forme de tranche de mandarine). La modification générique D_1 peut se concevoir comme la montée de l'eau dans un pantalon infini, en fait une sorte de paraboloïde hyperbolique. Au voisinage de l'entre-jambe la courbe de self-intersection passe de deux arcs de cercles à une forme en X puis à deux nouveaux arcs raccordés différemment. Il est à remarquer que cette modification change les communications possibles entre les parties de l'espace. Lorsque le niveau de l'eau est bas la communication est impossible pour le poisson mais possible pour l'oiseau; quand le niveau de l'eau est haut le poisson peut passer d'une jambe à l'autre mais l'oiseau est confiné dans une région de l'espace. La modification générique suivante Q fait intervenir quatre plans dont l'un glisse par rapport aux trois autres; dans cette modification, le tétraèdre limité par les quatre plans se renverse. L'étude de ces modifications génériques nous arme pour retourner la sphère *(voir figure 6)*.



6. LE RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE. Cette planche illustre les différentes étapes du retournement de la sphère. On part de la sphère *a* qui est transformée, par une modification générique D_0, pour former une lentille et un tube *(b, c, d)*. Puis on replie la figure obtenue *(e)* pour faire s'interpénétrer deux parties du tube par une seconde modification générique D_0 dont le résultat est *f*. En *g*, apparaît la courbe de self-intersection. Lorsque l'interpénétration d'un tube dans l'autre se poursuit au-delà de la courbe de self- intersection, on a une modification générique T^+. Deux de ces modifications s'effectuent ici simultanément et la sphère prend la forme *h*; la partie où s'effectue la modification est représentée grandie en *i* et la ligne de self-intersection en *j*. On déforme ensuite le tube *(k)* pour lui donner une forme de paraboloïde hyperbolique *(k')* ou de « pantalon » *(m)* et on fait monter un feuillet du lenticule (assimilable au plan d'eau de la figure 5*c*, à travers les deux « jambes » pour réaliser une transformation de type D_1. Le moment critique de cette modification est



représenté en *o* et les courbes de self-intersection en *o'*. Les courbes de self-intersection *o'* et *o''* annoncent la mise en communication des « tranches de mandarine » avec l'espace ambiant. En *p*, une des modifications D_1 est achevée (celle de droite) et les passages sont visibles sur *p'* et *p''*. Sur les dessins *q'* et *q''*, on a représenté le modèle *q* en deux parties où les deux modifications D_1 sont achevées. Les nouveaux passages ouverts sont symbolisés par les flèches *F* et *F'*. Les tranches de mandarine ont été mises en communication avec l'espace ambiant. On examine maintenant la partie inférieure du modèle. Par une nouvelle modification générique D_1 illustrée en *s*, le feuillet du tube monte selon la direction de la flèche *L* pour obtenir la forme en batteur à œufs des lignes de self-intersection. La dernière étape consiste à éliminer le tétraèdre du milieu représenté en *t* par une modification générique *Q* dans laquelle on pousse un plan jusqu'au point critique où les quatre sommets du tétraèdre se rassemblent en un point. On a le modèle central u''' du retournement détaillé sur la figure 7.

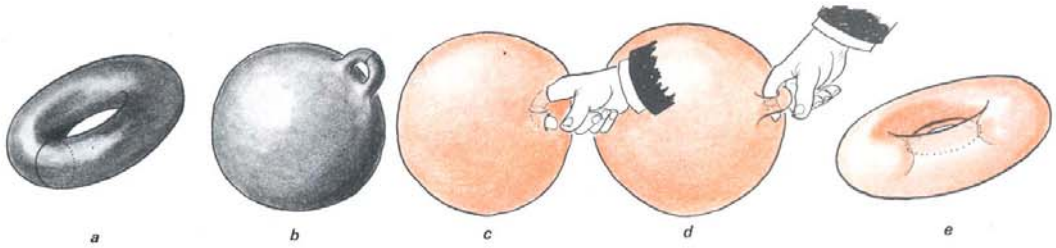


7. LE MODÈLE CENTRAL du retournement de la sphère est ici représenté en détail. Pour en concevoir la structure, on part d'un hémisphère *(a)* que l'on déforme *(c)* pour former l'une des quatre calottes de la partie supérieure *d* du modèle central; en *e*, *f*, *g*, on a indiqué une manière d'obtenir les deux tubes imbriqués qui constituent, après déformation, la base du modèle. Cette séparation en deux parties montre qu'on a bien affaire à une sphère car la partie supérieure est topologiquement équivalente à une bande cylindrique et la partie inférieure à deux calottes sphériques imbriquées. En *k*, on aperçoit une partie de la ligne de self-intersection en forme d'hélice quadripale et les quatre tubes qui se raccordent à la partie basse *(i, l)*. Ces quatre tubes se raccordent selon deux courbes *(n)* symbolisées par les pales d'un batteur à œufs. En *o*, on a représenté une vue de côté du modèle central légèrement déformé par rapport à la figure *j*.

mation de Marcel Froissart symétrique par rapport au temps. Tout cela se passait sous l'œil toujours narquois de Raoul Bott; en manière de plaisanterie il alla jusqu'à prétendre que, puisque les modèles étaient si compliqués, il croyait décidément de moins en moins au théorème.

Immersions transversales et modifications génériques

Un outil théorique essentiel pour maîtriser l'information reçue de Marcel Froissart fut de baliser les diverses transformations envisagées en utilisant la technique des modifications génériques d'immersions transversales. (Nous tenons à préciser au lecteur que transversal ne signifie pas perpendiculaire.) Une immersion transversale est une immersion dans laquelle la surface ne présente que des lignes de points doubles le long desquelles les nappes ne sont jamais tangentes entre elles et un nombre fini de points triples en lesquels les trois plans tangents aux trois nappes forment un trièdre. Notons qu'un plongement est une immersion transversale d'où la courbe de self-intersection est absente. La surface de Boy est une immersion transversale; mais, dans la transformation d'Anthony Phillips, lorsqu'on échange entre eux les deux feuillets de son revêtement par la sphère, il se produit un contact entre les deux nappes le long de toute la surface de Boy et cette situation n'est pas transversale. Comme on peut s'en persuader par exemple en comparant les figures 2b et 2c, lorsqu'on déforme une immersion transversale, la courbe de self-intersection évolue sans changer de structure. C'est le cas, en particulier, lorsqu'il s'agit d'une déformation de plongement. Si deux immersions transversales ont des courbes de self-intersection de structures différentes, il faut donc, pour passer de l'une à l'autre, accepter qu'au cours de la déformation l'immersion cesse d'être transversale. Reprenant une image hasardée lors de l'étude des plongements, on peut dire que sur le continent des immersions, les immersions transversales se groupent en une multitude de pays d'un seul tenant, tandis que les immersions non transversales se répartissent sur les frontières séparant les différents états. La façon la moins laxiste de nous octroyer la liberté indispensable pour retourner la sphère conduit à décrire les six types de modifications, dites *génériques*, que peut subir la courbe de self-intersection d'une surface immergée dans l'espace de dimension trois. Au prix d'une perturbation qu'on peut choisir arbitrairement petite, tout chemin d'immersions peut être corrigé de façon à éviter les modifications non génériques. Le premier type de modification générique, le type D_0, *(voir figure 5)*, rend compte du mouvement de deux portions de surface à la rencontre l'une de l'autre en vue de se traverser. A l'instant critique, il y a contact en un point qui donne ensuite naissance à une courbe



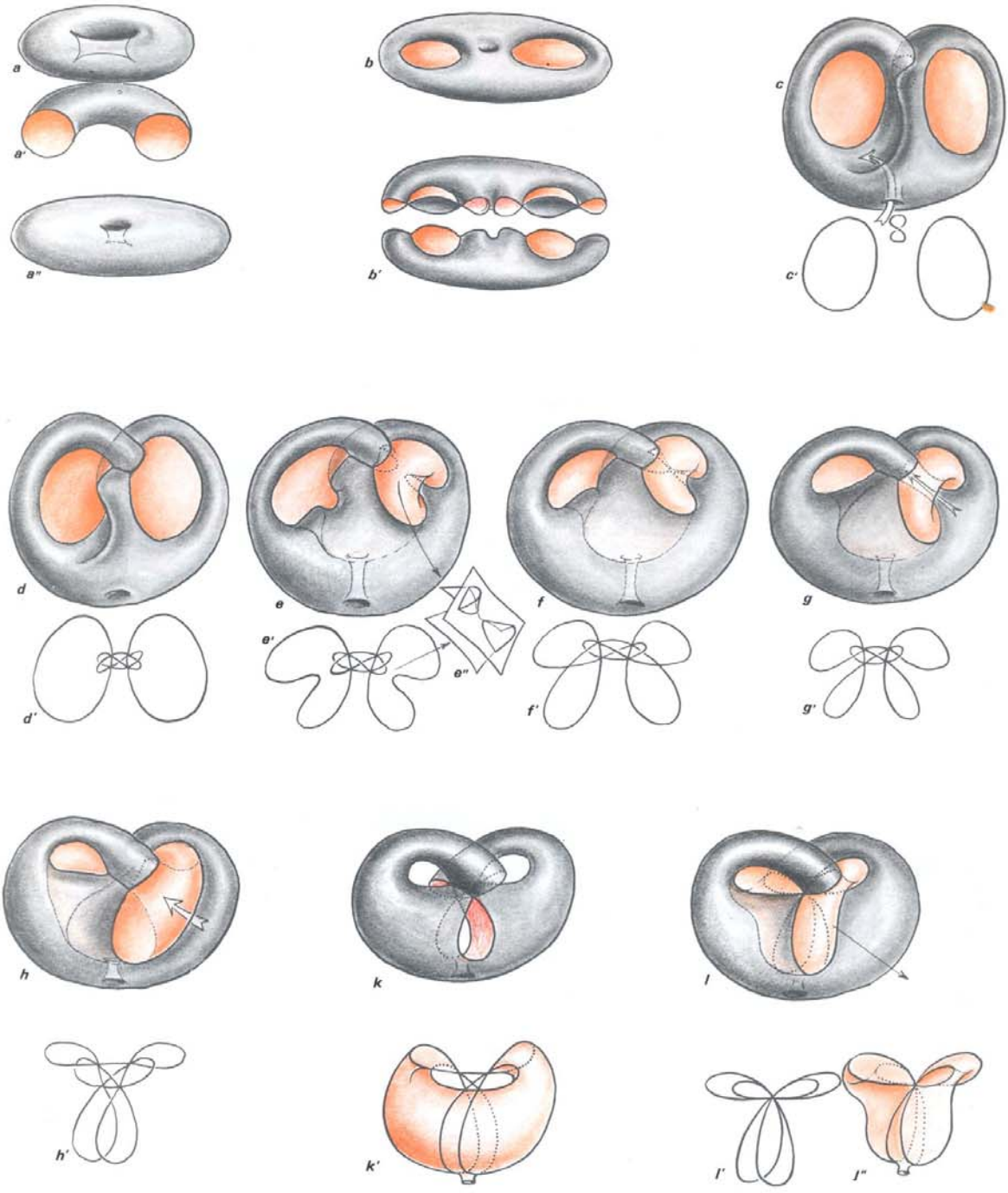
8. UN RETOURNEMENT DU TORE découle simplement du retournement de la sphère. On part du tore *(a)* qu'on transforme en sphère munie d'une petite anse *(b)*. On retourne la sphère *(c)* qui change de couleur (sa couleur interne apparait) et la petite anse est maintenant « à l'intérieur »; il suffit d'extraire *(d)* cette anse en y enfilant le doigt, pour obtenir un tore retourné. On remarquera que le cercle méridien en *(a)* se retrouve autour du doigt du personnage et devient le cercle de gorge du tore retourné.

de self-intersection. Au moment de la traversée des nappes, il se crée, dans l'espace ambiant, une nouvelle région en forme de demi-boucle ou de lentille. C'est la situation décrite dans les figures *2b* et *2c* où l'on croise les pôles de la sphère. La figure *5a* (*5a*$_1$ à *5a*$_5$) représente la rencontre d'un paraboloïde de révolution avec un plan, bien illustré par l'image d'un coude venant éprouver la température du bain. Le même phénomène se produit lorsque deux sphères (extérieures ou intérieures l'une à l'autre) viennent à se rencontrer ou lorsque deux cylindres d'axes non parallèles sont animés d'un mouvement les amenant à se traverser. Le second type (D_2) de modification générique décrit le mouvement de deux nappes croisées qui se séparent; c'est l'opération précédente, exécutée en renversant le sens du temps : le coude sort de l'eau, la région lenticulaire et la courbe de self-intersection disparaissent. Sur le chemin qui va nous conduire du plongement standard au modèle central, nous commencerons par rencontrer deux modifications de type D_0 *(voir figures 6c et 6f)*. Puisque le trajet qui va du modèle central à la sphère retournée se construit par symétrie à partir de ce chemin, la déformation passera en fin de parcours par deux modifications de type D_2.

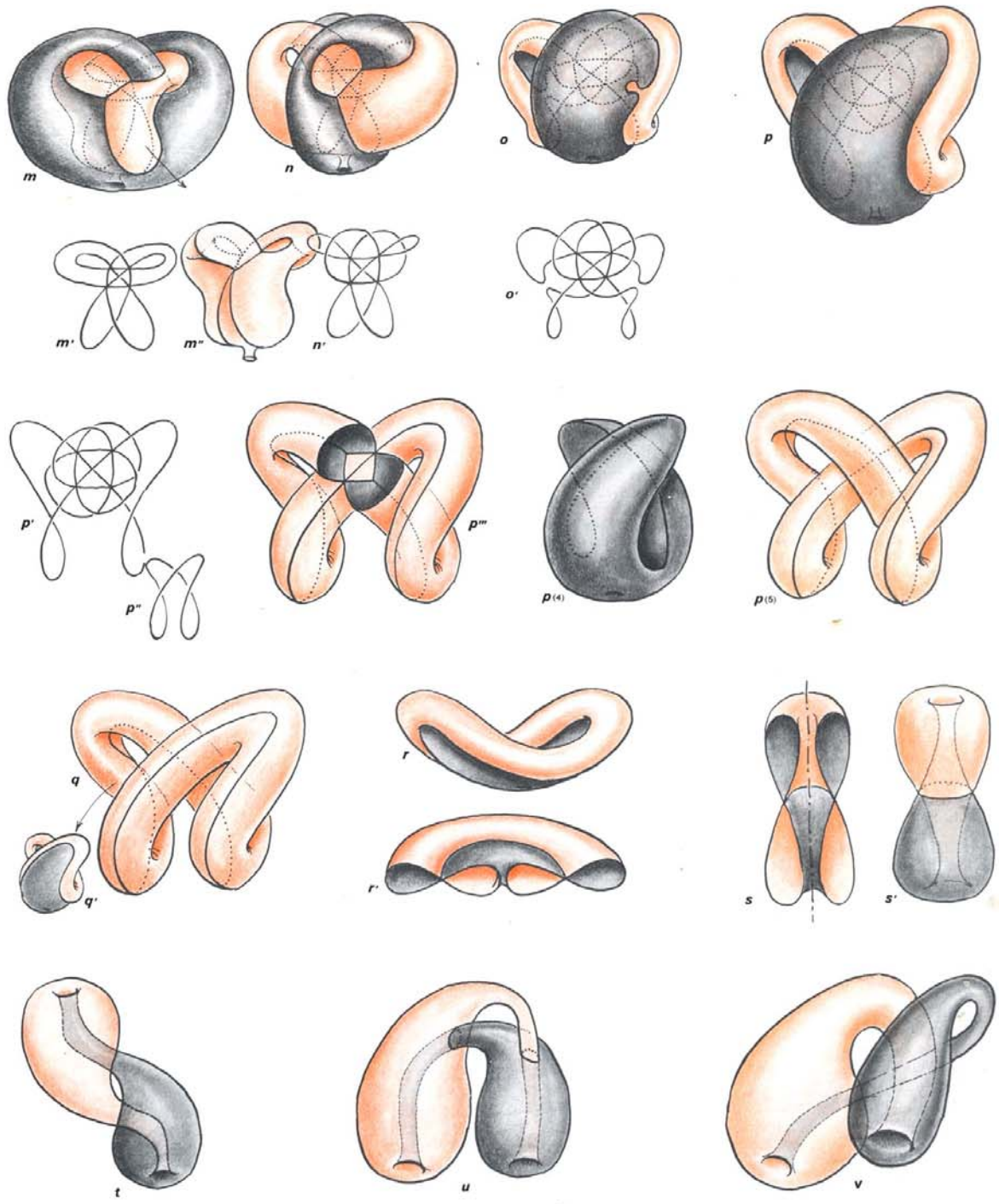
On est dans une situation de type T^+ *(voir figure 5b)* lorsque trois, et non plus deux, portions de la surface sont en mouvement les unes par rapport aux autres. Imaginons la surface d'une bûche s'approchant des plans de coupe de deux scies non parallèles. Lorsque le cylindre délimitant la bûche dépasse la ligne d'intersection des plans de coupe, on voit se former un passage de section triangulaire tandis qu'apparaissent deux points triples reliés entre eux par trois arcs de courbes de self-intersection. Pendant que les deux points triples s'écartent l'un de l'autre, une nouvelle région de l'espace en forme de secteur de boule ou de tranche de mandarine se constitue entre les nappes de la surface en mouvement. La modification T^- est l'opération opposée. Elle fait disparaître le secteur de boule et les points triples tandis que le conduit triangulaire se rouvre. Ainsi, les points triples d'une immersion apparaissent et disparaissent par paires. Il s'ensuit que toute immersion transversale de la sphère présente nécessairement un nombre pair de points triples. De même l'immersion d'une surface n'ayant qu'un point triple (comme par exemple l'immersion de Boy) ne peut se déformer en un plongement de cette surface. Après les deux contacts de type D_0 mentionnés précédemment, notre retournement passe par deux modifications de type T^+ auxquels correspondent deux T^- dans la deuxième phase du mouvement.

Une modification de type D_1 change le mode de raccordement de deux portions de la courbe de self-intersection d'une immersion, après avoir amené en contact deux nappes qui se traversent. Pour expliquer le phénomène, représentons l'une des nappes de la surface par un col de montagne (ou paraboloïde hyperbolique), l'autre étant figurée par un plan mobile, par exemple la surface libre d'un liquide qui inonde progressivement le paysage. Tant que l'inondation n'a pas atteint le col, la courbe de self-intersection se compose de deux arcs de courbe (les deux branches d'une hyperbole). Elle dégénère en deux droites (les asymptotes de l'hyperbole) lorsque l'eau atteint le niveau du col, pour se distribuer de nouveau en deux arcs de courbe (branches de l'hyperbole conjuguée), une fois le col inondé. Lors du contact, c'est-à-dire lorsque le liquide se trouve au niveau du col, l'espace ambiant est découpé en six régions. Mais avant comme après cet instant critique, deux de ces six régions sont raccordées entre elles par un passage. Pour bien comprendre comment s'effectuent les raccordements, il convient de ne pas perdre de vue le fait qu'en réalité, notre montagne est creuse. En effet, si nous nous plaçons sous la surface de celle-ci, nous assistons au même spectacle mais cette fois-ci du point de vue d'un spéléologue qui suit une rivière souterraine en crue. Il percevra en effet le col comme un siphon qu'il devra se hâter de traverser avant que l'eau ne lui ait barré le passage. A partir du moment où sa route est coupée, un poisson de la mer extérieure qui, avant cet instant critique, percevait le col comme un isthme infranchissable, constate que s'ouvre, pour lui, un détroit qu'il peut désormais traverser librement. Sur les figures *5c* on a préféré à l'image du col de montagne celui de l'entrejambe d'un pantalon. Naturellement, la surface du liquide n'a aucune raison d'être plane. Le modèle central de notre déformation présente un contact de type D_1 *(voir figure 7s)*. En renversant le cours du temps d'une modification de type D_1 on obtient encore une modification de type D_1 : mais alors les points de vue du poisson et du spéléologue sont échangés. Après les deux D_0 et les deux T^+ déjà signalés, il nous faudra rencontrer deux modifications de type D_1 avant d'amener la sphère dans la position du modèle central *(voir figures I à q)*. Ainsi, lorsque nous nous rendrons du modèle central au plongement antipodal, nous rencontrerons successivement deux D_1, deux T^- et deux D_2.

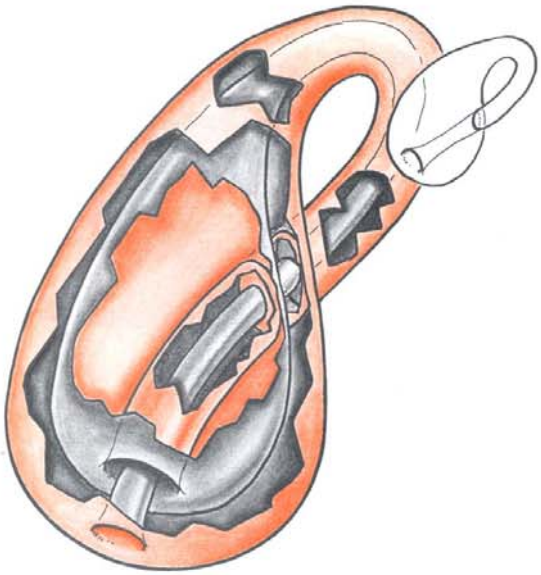
Le dernier des six types de modifications génériques, noté Q, met en jeu quatre nappes d'une surface, qui, à l'instant critique de la modification, passent toutes par un même point (point quadruple). Pour expliquer ce qui se produit dans ce cas, assimilons les quatre nappes aux plans déterminés par les quatre faces d'un tétraèdre régulier et supposons que trois de ces plans soient fixes, tandis que le quatrième se déplace parallèlement à lui-même. Au cours du mouvement, le plan mobile se rapproche du sommet déterminé par les trois autres. Le point quadruple apparaît au moment où le plan mobile rencontre ce sommet. Par ce point passent alors six droites qui constituent la courbe de self-intersection du système. L'espace ambiant est alors découpé en quatorze régions. Après la rencontre, les quatre plans délimitent un nouveau tétraèdre qui se déduit du précédent par symétrie : ainsi la modification a pour effet de renverser le tétraèdre. On peut encore présenter cette modification en solidarisant les plans par paires et en déplaçant les dièdres ainsi formés l'un par rapport à l'autre, comme indiqué sur les figures *5d*. Comme celles de type D_1, les modifications de type Q sont symétriques par rapport au temps. Le passage de l'homotopie régulière du retournement de la sphère par le modèle central, présente deux modifications de types D_1 et Q. Tout retournement de la sphère passe nécessairement par au moins un point quadruple. C'est probablement l'une des raisons pour lesquelles la mise au point du scénario a été si laborieuse. Au total, le retournement comporte quatorze modifications génériques : c'est un minimum.



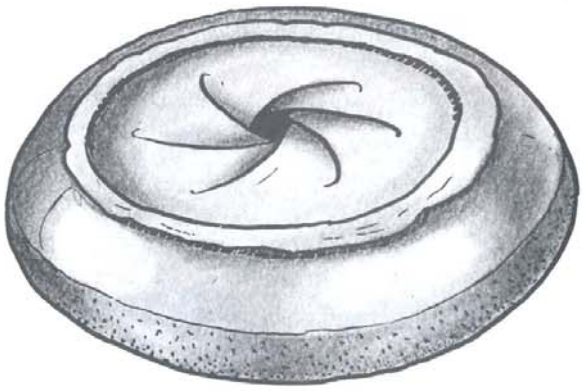
9. UN DES RETOURNEMENTS DU TORE peut se faire à travers un revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein et ce retournement conserve le cercle de gorge. On aplatit le tore et on contracte son col au centre puis on réalise deux modifications génériques D_0. La suite des dessins présente une grande analogie avec les transformations du retournement de la sphère. En masquant le bas de chaque figure, les parties supérieures sont les mêmes que celles du retournement de la sphère. Il n'y a pas de différence de structure entre les modèles *m* et *n*; on les a déformés pour une meilleure représentation graphique : les courbes de self-intersection m' et n' sont identiques. On déforme la partie frontale du modèle tel qu'indiqué en *(o)* par deux D_1 qui vont reconstituer des tranches de mandarine pour donner la figure dont la ligne de self-intersection est identique (mais vue de côté) à celle obtenue en *k* sur la figure du retournement de la



sphère. On a représenté en $p^{(3)}$, $p^{(4)}$, $p^{(5)}$ la façon dont la lentille et le tube étaient transformés. En décroisant le tube par des modifications génériques T^- T^- et D_2 (transformation inverse de celle conduisant à la figure *k* dans le retournement de la sphère), on obtient le modèle rr' analogue au modèle *e* du retournement de la sphère avec en plus un passage tubulaire au centre. Si on ne tient pas compte du passage tubulaire, on a, par ces transformations, un retournement non symétrique de la sphère. Par rotation de 90° des figures en huit du modèle *r*, on passe aux modèles *s* et *s'*. Ce modèle *s* est central et on pourrait échanger les deux parties par rotation de 180° et réaliser la suite d'opérations inverses pour obtenir le tore retourné. La suite des dessins *t*, *u*, *v* montre qu'on passe au revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein, comparable au double revêtement de la surface de Boy.



10. UNE BOUTEILLE DE KLEIN est ici revêtue par une surface à deux feuillets. La surface de revêtement est ici un tore *(voir figure 9)*. Si on colle les faces en regard des deux feuillets, on retrouve la bouteille de Klein (en médaillon) qui est une surface unilatère.



11. CETTE BLAGUE A TABAC montre comment il faudrait commencer par tordre la sphère pour la retourner selon une suite de modèles présentant un axe de symétrie d'ordre 6. Elle correspond au modèle *e* de la figure 6 qui a un axe de symétrie d'ordre 2.

Le retournement de la sphère.

Quelques mois après la rencontre de Seattle, nous étions en mesure de proposer deux variantes de la déformation de Marcel Froissart. La première a été réalisée par Charles Pugh sous forme de huit modèles en grillage (matériau, nous l'avons déjà dit, spécialement bien adapté à la représentation des immersions) qui ont servi de point de départ à Nelson Max pour donner à l'ordinateur les instructions nécessaires à la reproduction de toutes les étapes transitoires. Le fruit de cette collaboration a permis à Nelson Max de diffuser en 1976, un film pédagogique fort instructif; grâce au magnétoscope, la seconde a fait l'objet, en 1972, d'une animation vidéo (malheureusement non publiée en son temps) réalisée par Georges Ricco sur nos indications.

C'est la seconde variante que nous allons présenter. Bien que conduisant au résultat de façon plus directe et plus élégante, elle semblait de prime abord assez délicate à expliquer. En effet, pour rendre compte d'une déformation, une suite de modèles ne doit pas se contenter d'être correcte. Les maquettes qui la composent doivent encore satisfaire à un principe d'économie et obéir à des règles de cohérence esthétique qui en facilitent la perception. Lorsque le principe de la déformation nous est apparu clairement, il devenait évident qu'on pouvait mettre le mouvement en équations. On peut faire en sorte qu'à tout instant de la déformation les modèles présentent un axe de symétrie binaire. Le procédé qui les engendre se généralise et permet de construire une transformation, elle aussi symétrique par rapport au temps et susceptible d'une représentation analytique, dans laquelle chaque immersion admet un axe de symétrie d'ordre, donné d'avance, aussi grand qu'on veut. Dans le cas général, l'amorce du mouvement est suggérée par la figure 11 qui possède un axe de symétrie d'ordre six et qui représente un modèle de blague à tabac en vente chez tous les buralistes : il s'agit d'une poche en caoutchouc dont le col se referme grâce à douze fronces dont six apparaissent à la face supérieure. Il est facile de prolonger la figure en un plongement de la sphère en cousant le long du bord une calotte sphérique cachant le fond du sac. Une blague à quatre fronces fournirait l'amorce de la déformation de la figure 7. Si on s'impose une symétrie ternaire, l'étape centrale de la déformation se trouve être, comme chez Anthony Phillips, le revêtement à deux feuillets de la surface de Boy qu'on peut, par conséquent, décrire au moyen d'expressions algébriques. En pratiquant des fenêtres dans la blague à tabac, George Francis, que nous remercions au passage d'avoir, l'été dernier, éprouvé sur ordinateur l'efficacité visuelle des équations, a trouvé le moyen d'expliquer le mouvement par un très petit nombre de dessins qui, il est vrai, demandent au lecteur un certain effort de reconstitution.

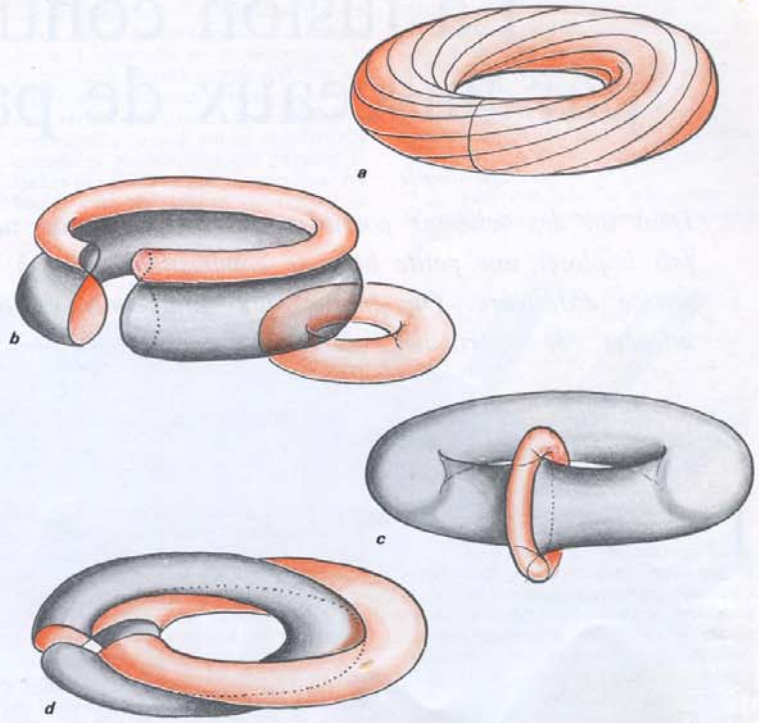
On pourra suivre toutes les étapes du retournement de la sphère sur les dessins de la figure 6. Les figures *6a*, *6b* et *6c* nous montrent une première modification de type D_0 qui, en croisant le pôle nord et le pôle sud, donne naissance à une lentille entourée d'un tube équatorial. Par conséquent, l'immersion *c* découpe l'espace en trois régions. Sur les figures *6d* et *6e*, on tord le modèle. Après une seconde modification de type D_0 on est dans la situation de la figure *f* où le tube équatorial se recoupe tandis qu'apparaît une quatrième région de l'espace ambiant. Sur la figure *g* on voit les deux courbes fermées dont la réunion est la courbe de self-intersection du modèle. Le mouvement d'interpénétration des deux portions de tube se poursuit jusqu'au moment où deux points de l'équateur atteignent simultanément le bord anguleux de la lentille. Il se produit alors deux modifications de type T^+ *(voir figures h, i et j)*. Les quatre points triples auxquels ces modifications donnent naissance sont les quatre sommets d'une région de l'espace en forme de tétraèdre. Sur deux arêtes opposées du tétraèdre viennent s'articuler deux régions de l'espace en forme de secteur de boule tandis que le reste du tube équatorial se scinde en deux régions; l'immersion *j* découpe donc l'espace en sept régions. Les figures *k*, *k'*, *l* et *l'* préparent les deux modifications suivantes qui sont de type D_1. Sur la figure *m*, le pantalon qui nous a servi à décrire la modification de type D_1, est orienté de manière à correspondre à la figure *k*. Dans la figure *n*, la position du pantalon correspond à la situation de la figure *o*. Les deux modifications de type D_1, qui peuvent se produire simultanément, ont pour effet d'ouvrir vers l'extérieur les secteurs de boule qui épaulent le tétraèdre, tandis que se ferment les deux passages qui, dans la situation de la figure *j* mettaient la partie centrale du modèle en communication avec l'extérieur. En *o'''* on a réalisé une seule des deux modifications. La figure *q* décrit la situation lorsque les deux modifications de type D_1 sont réalisées; elle découpe l'espace en six régions.

Les figures q' et q'' représentent un démontage du modèle q en deux éléments sur lesquels on a cherché à mettre en évidence les passages ouverts. La partie inférieure du modèle correspond au schéma r, c'est-à-dire au croisement de deux cylindres paraboliques. Le mouvement de ces deux cylindres l'un par rapport à l'autre, suggéré par la figure s, produit un contact de type D_1 qui sépare en deux ce qui reste de la région lenticulaire de la figure c. Une modification de type Q fait disparaître le tétraèdre et conduit au modèle central qui découpe donc l'espace en six régions et que la figure u''' représente, légèrement déformé. Après une rotation de 90°, les modifications précédentes appliquées dans l'ordre inverse, nous amènent à la sphère retournée.

Les immersions du tore.

Au cours du mouvement, le pôle nord et le pôle sud se croisent trois fois : lors du premier contact D_0, lors du passage par le modèle central (contact de type D_1) et lors du dernier D_2. Quitte à perdre la propriété de symétrie par rapport au temps, on peut faire en sorte que le pôle nord ne croise le pôle sud qu'au moment du dernier D_2. Pour cela, il suffit de faire apparaître au début du processus non plus une mais deux lentilles : dès lors, la modification de type D_1 qui survenait au cours de l'étape centrale n'a plus à se produire. Dans la déformation de la figure 6, les quatorze modifications rencontrées étaient respectivement de types (D_0)-(D_0), (T^+)-(T^+), (D_1)-(D_1), (Q)-(D_1)-(D_1)-(D_1), (T^-)-(T^-), (D_2)-(D_2) (Les traits d'union indiquant que les modifications peuvent se produire simultanément.) Dans la variante envisagée, on a la succession (D_0)-(D_0)-(D_0), (T^+)-(T^+), (D_1)-(D_1)-(Q)-(D_1)-(D_1), (T^-)-(T^-), (D_2)-(D_2). Si l'on arrête le processus après la treizième modification, le modèle se présente comme une lentille grise entourée d'un tube orangé. On peut faire en sorte que le pôle nord et le pôle sud soient restés immobiles jusqu'à ce moment. Si on découpe autour de chacun des pôles une petite calotte et si on raccorde les bords des trous ainsi formés au moyen d'un cylindre, la sphère devient un tore et les déformations envisagées ont pour résultat de faire apparaître un tube orangé sur l'extérieur d'un tore gris, c'est ce que représentent les dessins des figures 9*a* à 9*q*. Un procédé analogue permettrait de relier le plongement standard du tore à une immersion affectant la forme de la figure 12*c*.

La question des plongements et des immersions est beaucoup plus compliquée pour le tore que pour la sphère. Maurice Hirsch a généralisé le théorème de Stephen Smale, qui traitait des immersions d'une sphère de dimension quelconque, au cas des surfaces de dimension arbitraire. Appliquant ces résultats aux surfaces de l'espace à trois dimensions, Ioan James et Emery Thomas ont montré en particulier que les immersions du tore se répartissaient sur quatre continents entre lesquels il est impossible de passer par homotopie régulière. L'un de ces continents ne contient aucun plongement. Sur la figure 11*d*, on a représenté une immersion de ce continent. Les trois autres continents contiennent des plongements qui se répartissent sur une infinité de taches grises ou orangées selon la couleur de la face visible de l'objet. La figure 11*a* donne l'idée d'un plongement du tore qui présente, tout comme le plongement standard, sa face orangée vers l'extérieur mais qui ne peut être relié à ce dernier par aucune homotopie régulière. La baudruche d'un tel plongement a subi une torsion de 360° qu'il est impossible de faire disparaître. Ce plongement et le plongement standard appartiennent donc à des continents différents. Cet exemple montre pourquoi les dessins de la figure 12, qui représentent les formes que peuvent revêtir certaines immersions du tore, ne contiennent pas toute l'information dont on a besoin pour dire à quel continent appartient l'immersion représentée. Sur un continent donné de l'univers des immersions du tore, une homotopie régulière raccordant un point d'une tache grise à un point d'une tache orangée est un retournement du tore. Comme on le voit par ce qui précède, il y a une infinité de manières de retourner le tore.

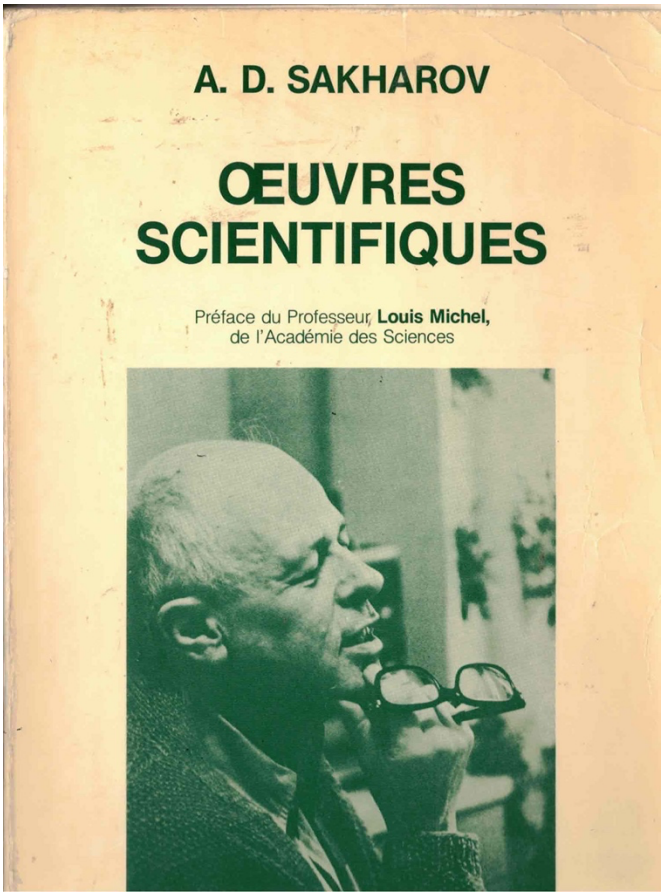


12. LES FORMES LES PLUS REMARQUABLES d'immersions du tore sont représentées en *b*, *c* et *d*. Le plongement « tordu » de la figure *a* qui a le même aspect que le plongement standard montre que les figures *b*, *c* et *d* ne contiennent pas toute l'information qu'il faudrait avoir pour décrire les immersions puisque ces figures ne rendent pas compte des torsions internes.

Sur les figures 9*s* à 9*v*, on indique comment le tore gris et orangé peut être déformé en un revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein (immersion d'une surface qu'on obtient en raccordant entre eux deux rubans de Möbius). On peut alors permuter les feuillets du revêtement et aboutir, en parcourant en sens inverse la déformation précédente, à un tore retourné. Partant du tore standard, la figure 8 suggère un retournement du tore aboutissant à un objet orangé qui ne peut être raccordé par déformation de plongement au tore orangé obtenu en traversant la bouteille de Klein.

Les mathématiciens sont fréquemment irrités lorsqu'on leur demande à quoi servent leurs découvertes. En effet, le besoin qui les pousse à chercher est plutôt d'ordre esthétique que pragmatique. La question est d'autant plus embarrassante quand on la pose à propos du présent travail qui n'est pas, à proprement parler, un travail de mathématique; dans ce qui précède on n'a rien démontré mais seulement illustré une démonstration qui existait déjà. Nous pensons toutefois que tous ceux qui voudront chercher à comprendre le retournement de la sphère acquerront, en pratiquant l'exercice, une vision nouvelle de l'espace qui enrichira leur imagination. ■

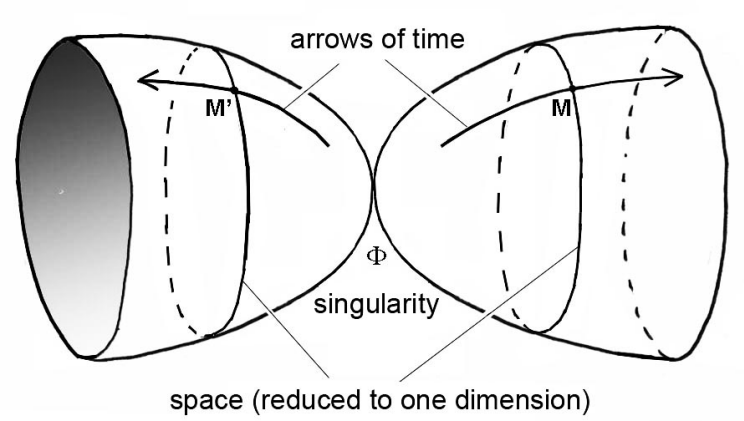
En 1984 les scientifiques occidentaux, pour soutenir le combat mené par le Russe Andréi Sakharov contre le régime soviétique, publient la traduction de ses articles, initialement publiés en russe, dans différentes langues. En France les éditions Anthropos publient l'ouvrage en langue française en 1984.



La reproduction des travaux de Sakharov. Editions Anthropos, 1984

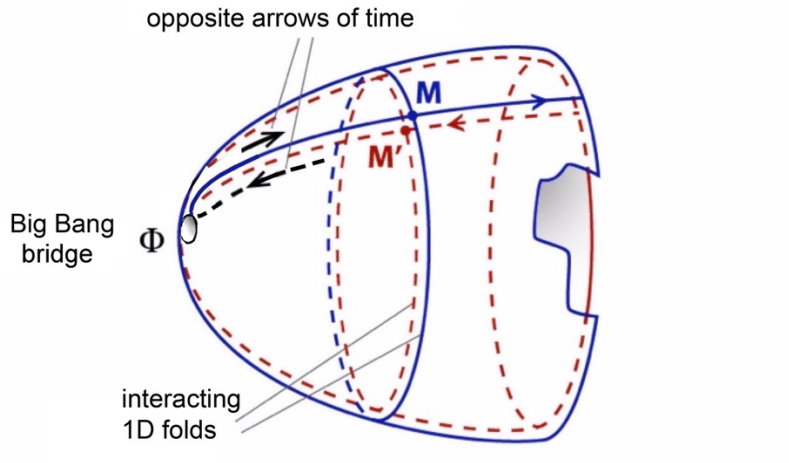
C'est évidemment une grande surprise de découvrir que Sakharov a publié plusieurs articles sur le thème des univers jumeaux à la fin des années soixante. [19]
Le premier article se situe en 1967, précisément à l'époque où se situent les contacts avec les Espagnols. Je note que Sakharov envisage de relier les deux univers par « la singularité Big Bang », ce qui suggère cette structure en forme de sablier.

[19] A.D.Sakharov, ZhETF Pis'ma 5 : 32 ; JETP Lett. 5 : 24 (1967)
- A.D.Sakharov, ZhETF Pis'ma 5 : 32 ; JETP Lett. 5 : 24 (1967)
- A.D.Sakharov , ZhETF Pis'ma 76 : 1172 (1979) ; JETP 49 : 594 (1979)
- A.D.Sakharov , (1980). Cosmological Model of the Universe with a Time Vector Inversion. ZhETF (Tr. JETP 52, 349-351) (79): 689–693



C'est l'influence du mathématicien Bernard Morin qui m'incite à imaginer une structure géométrique différente. Avec lui j'ai appris à replier une sphère pour en faire le revêtement à deux feuillets d'une surface de Boy, à replier un tore pour en faire le revêtement à deux feuillets d'une bouteille de Klein.

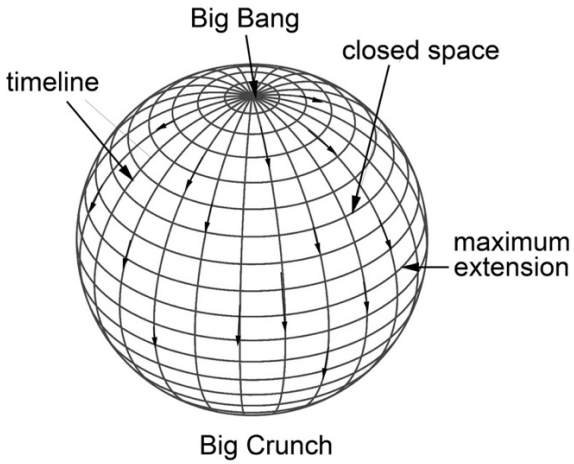
Quand on replie la sphère, ses deux pôles viennent en coïncidence. J'ai donc l'idée de replier le sablier de Sakharov :



Cette idée commence timidement à apparaître dans la littérature.

Au passage l'idée est aussi de faire disparaître cette singularité initiale en la convertissant en un « tube » reliant les deux univers.

Les textes Ummo disent que l'univers « est une hypersphère ». Donc cet univers est fermé, clos. Si on part d'un modèle d'univers fermé, l'image 2D est celle-ci :



Ce repli de l'univers sur lui-même se traduit par la mise en, coïncidence de points antipodaux. Je publie en 1994 dans la prestigieuse revue italienne Nuovo Cimento (qui a aujourd'hui disparu) l'article ci-après[20] , introduisant cette idée. On y trouve plusieurs choses. Il y a l'ébauche d'une équation de champ et la construction à partir de celle-ci d'une équation de Poisson.

Dans le livre de Souriau (1970) je découvre l'interprétation physique de l'inversion du temps,. Une inversion qui est celle de la coordonnée de temps.

This formula applies when $I = I_s$ (space inversion) or when $I = I_t$ (time reversal). Calculating $\underline{I_s}_{\mathcal{G}^*}$ and $\underline{I_t}_{\mathcal{G}^*}$ gives (notation (13.59)):

$$(14.67)\quad \begin{cases} \underline{I_s} : \mathbf{l} \to \mathbf{l}\,, & \mathbf{g} \to -\mathbf{g}\,, & \mathbf{p} \to -\mathbf{p}, & E \to E\,, \\ \underline{I_t} : \mathbf{l} \to \mathbf{l}\,, & \mathbf{g} \to -\mathbf{g}\,, & \mathbf{p} \to \mathbf{p}\,, & E \to -E\,. \end{cases}$$

Ceci se trouve page 190 de la version anglaise de l'ouvrage du mathématicien Jean-Marie Souriau[21]. Dans l'encadré en rouge :

→ *L'inversion du temps ne change ni le spin, ni l'impulsion, mais inverse l'énergie E.*

A la page suivante :

[20] J-P Petit. The Missing Mass Problem. Il Nuovo Cimento B. Vol. 109 pages 697-710 july 1994 http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1994-Nuovo-Cimento.pdf

[21] Jean-Marie Souriau. Structure of Dynamical Systems. Birkhauser Ed. 1997, traduction à l'identique de sa version française Structure des systèmes Dynamiques, Editions Dunod, 1970.

A particle with nonzero mass m

Let us begin by observing that the two Casimirs $\overline{P} \cdot P$ and $\overline{W} \cdot W$ are constant on every coadjoint orbit of G' and hence on U (14.69). If we assume that $\overline{P} \cdot P > 0$, then each connected component of U corresponds to a *particle* of mass $m = \pm\sqrt{\overline{P} \cdot P}$ and spin $s = \sqrt{\frac{-\overline{W} \cdot W}{\overline{P} \cdot P}}$. Equation (14.67) shows that time reversal I_t changes the sign of the energy and thus the sign of the mass (14.4◇). Consequently *it transforms every motion of a particle of mass m into a motion of a particle of mass −m.*

On the other hand, space inversion I_s preserves the mass m and the spin s. Hence the associated orbit of G' has *two components*.

Traduction :

→ *En conséquence cela transforme le mouvement d'une particule de masse m en un mouvement d'une particule de masse* $\bar{m} = -m$.

Je découvre dans les écrits de Souriau cet élément essentiel :

L'inversion du temps entraîne l'inversion de l'énergie et de la masse

Ainsi, il existe un second monde, où le temps est inversé, peuplé de particules semblables à celles de notre propre feuillet d'univers et qui, dans le champ gravitationnel, se comportent comme des masses négatives $\bar{m} = -m$, d'énergie. Elles émettent des photons d'énergie négative $\bar{E} = \bar{m}\,\bar{c}^2$, qui ne sont pas captés par nos propres télescopes, $\bar{c}$ étant la vitesse de la lumière dans le feuillet négatif.

C'est l'élément central du livre et de cette construction qu'est la

Géométrie Symplectique

Je vais maintenant mentionner deux publications, qui représentent l'extension de cette approche de Souriau à une configuration bimétrique, à deux feuillets. Ce papier a été publié en 2025 dans une revue de physique mathématique. La contribution du cosignataire, le français d'origine marocaine Hicham Zejli, c'est limité à une tâche de secrétaire. Nous avions cru, en 2023-2024 que celui-ci pourrait devenir un authentique collaborateur. Nous avions donc mis tout en œuvre pour qu'il puisse soutenir une thèse à l'université marocaine de Casablanca.

Sa thèse de doctorat était représentée par l'extension d'un article que j'avais publié en 1972[22], présentant la première solution exacte, non triviale, de l'équation de Vlasov en symétrie O(2).

[22] Jean-Pierre Petit. Une méthode de résolution de l'équation de Vlasov. Application à une théorie globale, non linéaire, de la rotation galactique et de la structure spiral. Note (en français) aux Comptes Rendus de

Il avait envoyé à la revue Astrophysics and Space Science un article.

Tout se présentait au mieux quand je découvris que ce travail résultat du pillage, à l'identique, d'une contribution de mon collaborateur et ami Gilles d'Agostini, datant de plusieurs années.

J'ai dû contacter la revue, en expliquant la situation, et le nom d'Hicham fut remplacé par celui de Gilles d'Agostini. L'article est reproduit ci-après. Et il ne fut dès lors plus possible de poursuivre avec Hicham Zejli. L'article, ci-joint, parut en 2025 dans la revue[23].

Le contexte mérité d'être évoqué. Quand le directeur de la revue reçut l'article, il le soumit à plusieurs referees. Questionné au bout de trois mois il répondit :

- *J'ai relancé plusieurs fois mes referees, mais je n'ai pu obtenir d'eux aucun avis, positif ou négatif.*

- *C'est normal. Ce travail représente le premier modèle mathématique de galaxie. Nous abordons le problème à l'inverse de ce qui se fait d'habitude. Comme les galaxies constituent un système non-collisionnel, leur dynamique relève de l'équation de Vlasov en régime stationnaire.*

$$\boldsymbol{v}.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{r}}.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

Les spécialistes, depuis un siècle[24], s'efforcent de construire une solution approchée en se donnant la forme du potentiel gravitationnel

$$f(r,\varphi,z) \leftarrow \Psi(r,\varphi,z)$$

Ici, on fait exactement l'inverse. On se donne la forme (elliptique) de la fonction-solution f, et on cherchera à déterminer celle du potentiel gravitationnel $\Psi(r,\varphi,z)$ et de la distribution de densité qui en résulte.

$$f(r,\varphi,z) \longrightarrow \Psi(r,\varphi,z)$$

Par ailleurs ce calcul fait appel à une technique mathématique qui n'est pas familière à vos referees, l'algèbre des dyadiques. C'est pour cela qu'ils ne parviennent pas à suivre nos calculs.

- *J'entends bien. Mais alors, que dois-je faire ?*

- *Il faut soumettre l'article à des mathématiciens, non à des astrophysiciens.*

---

l'Académie de Sciences de Paris, présentée par A.Lichnérowicz. Série B, tome 375 pages 755-758 (13 Novembre 1962). Non-linear solution of Vlasov equation. Application the the dynamics of galaxies.

[23] J.P.Petit , G.d'Agostini, G.Monnet . Contribution of Kinetic Theory to Galactic Dynamics. Astrophysics and Space Science 370:121 https://doi.org/10.1007/s10509-025-04511-x (October 2025). http://www.hp-petit.org/paper/cosmo/2025-04-15-Contribution-of-Kinetic-Theory-to-Galactic-Dynamics.pdf

[24] The Bible : (882 pages) J.Binney ans S. Tremaine. Galactic Dynamics. Princeton series in astrophysics.2008.

La revue soumet effectivement nos calculs à des mathématiciens, qui répondent :

- *Nous sommes incompétents, quant aux applications de ce calcul en astrophysique. Par contre, sur le plan mathématique, les calculs sont corrects.*

L'article est donc publié. Le résultat essentiel est la production de la courbe de rotation dans les galaxies, qui présente un palier à distance :

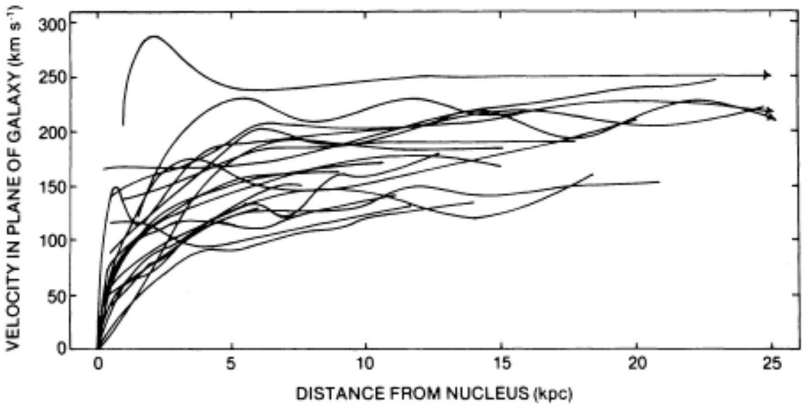
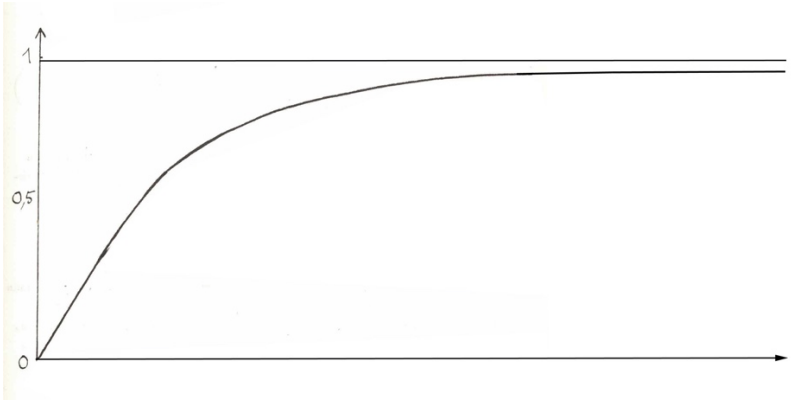


FIG. 6.—Superposition of all 21 Sc rotation curves. General form of rotation curves for small galaxies is similar to initial part of rotation curve for large galaxies, except that small galaxies often have shallower nuclear velocity gradient and tend to cover the low velocity range within the scatter at any R.

Ci-après, la courbe théorique :



C'est un résultat théorique original et brillant. Mais ce palier à distance révèle un aspect important. Ces grandes vitesses, en périphérie, sont possibles grâce à l'effet répulsif de l'environnement de masse négative.

Ce qui va suivre illustre le dysfonctionnement des institutions scientifiques à une échelle internationale.

Il reste alors, pour finaliser ce premier modèle mathématique de galaxie, à calculer le profil de densité $\rho(r\,,\varphi\,,z)$ dans l'espace. Nous ébauchons les calculs. Mais avant de finaliser ceux-ci je sonde l'éditeur :

- *Nous allons vous envoyer la seconde partie de cette étude. Mais nous tenons à vous avertir : la masse volumique ρ s'inverse à distance.*

- *Alors, si celle-ci devient négative, c'est que ça n'est plus de la physique (…). Il sera inutile de nous faire suivre cet article, il ne sera pas examiné (…)*

Je mets fin à ces travaux. Inutile de s'échiner pour produire un résultat qui ne sera pas examiné.

Ainsi, le premier modèle mathématique de galaxie, s'insérant dans un contexte bimétrique, gémellaire, ne verra sans doute pas le jour de mon vivant (j'aurai 90 ans le 5 avril 2027).

Astrophysics and Space Science (2025) 370:121
https://doi.org/10.1007/s10509-025-04511-x

RESEARCH

Contribution of the kinetic theory of gases to the dynamics of galaxies

J.-P. Petit[1,2] · G. D'Agostini[3] · G. Monnet[4]

Received: 25 April 2025 / Accepted: 14 October 2025
© The Author(s) 2025

Abstract
Classical attempts to construct a galaxy model, in a stationary and axisymmetric situation, consist of giving a gravitational field and injecting it into the collisionless Boltzmann equation to deduce the solution distribution function f. We will do exactly the opposite, by assimilating the galaxy to a self-gravitating point-mass system. The velocity distribution function is then the solution of an integrodifferential equation. Taking into account the Newtonian character of the potential, we can replace it with the system consisting of the Vlasov equation, written in terms of residual velocity, and the Poisson equation. We then give $ln(f)$ the form of a polynomial of degree 2, such that one of the axes of the velocity ellipsoid points towards the center of the system. This single constraint gives the evolution of the axes in space, these being equal to the center of the galaxy (Maxwell-Boltzmann distribution). Moving away from the center, the axis pointing in this direction remains constant while the transverse axes tend to zero at infinity. We then construct the macroscopic velocity field by excluding any vortex structure. This field then tends towards a solid body rotation at the center. The velocity tends towards a remote plateau, which is then consistent with the observational data.

Keywords Galactic dynamics · Ellipsoid of velocities · Vlasov equation · Elliptical solution · Evolution of the velocity at the periphery · Confinement · Dark halo · Janus cosmological model

1 Introduction

Today, there is an approach to dynamics that can be considered classic. It can be found in Chap. 4 of J. Binney and S. Tremaine's basic work "galactic dynamics" (Binney and Tremaine, 2008). Galaxies, considered as self-gravitating mass-point systems, are modeled using a velocity distribution function:

$$f(t,x,y,z,u,v,w) \equiv f(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) \tag{1}$$

which is not negative, continuous, differentiable and defined in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ where:

$$\mathbf{r}\equiv\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad and \qquad \mathbf{v}\equiv\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

A function f is then assumed to obey the collisionless Boltzmann equation, which is written:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}=0 \tag{2}$$

where $\Psi(\mathbf{r})$ in an arbitrarily given potential field corresponding to the problem.

The approach then focuses on Jeans' theorem:

Steady-state solutions of the Boltzmann collisionless equation depends on the phase space only through integrals of motion in a given potential, and any function of the integrals yields in a steady state solution of the collisionless Boltzmann equation.

Thus, the distribution function associated with the simplest model, that of the isothermal sphere, is presented as a special case of a polytropic model. In the treatment of

J.-P. Petit is retired from CNRS.

✉ J.-P. Petit
jean-pierre.petit@manaty.net

1 Manaty Research Group, Glanon, France
2 206 allée de la Montagnère, 84120 Pertuis, France
3 21 avenue Philippe de Rochat, 06600 Antibes, France
4 9 rue Adélaïde Perri, 69002 Lyon, France

Published online: 03 November 2025

this problem by S. Chandrasekhar (Chandrasekhar, 1941), the approach is radically different, in the sense that this distribution function, spherically symmetric in velocity space, is presented as a special case of an elliptic function. In fact, the collisionless Boltzmann equation can be written in terms other than absolute velocity components:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{3}$$

We'll refer to ourselves as **C**, the residual velocity:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \tag{4}$$

It's a velocity that kinetic gas theorists refer to as the "thermal agitation velocity". It's important to be clear about the notations we're going to use. Thus, the letter n designates the number of mass points per unit volume, deduced from the distribution function f by:

$$n(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v})\, d^3\mathbf{v} \tag{5}$$

Which differs from ref. Binney and Tremaine (2008). Multiplying by the mass m of the components gives the mass density $\rho = nm$. The macroscopic velocity is:

$$\mathbf{c}_0 = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \int \mathbf{v}\, f\, d^3\mathbf{v} \equiv < \mathbf{v} > \tag{6}$$

And residual velocity is defined by:

$$\mathbf{C} = \mathbf{v} - \mathbf{c}_0 \tag{7}$$

We will follow the approach chosen by S. Chandrasekhar in his book. Unfortunately, he never uses vector notation. So his collisionless Boltzmann equation becomes, by adopting our notations:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial w} = 0 \tag{8}$$

We can write it in a more compact way:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{9}$$

Chandrasekhar then decided to concentrate on elliptic functions where $ln(f)$ is in the form of a polynomial of degree 3 according to the components U, V, W of the residual velocity. And he writes (with his notations):

$$ln(f) = aU^2 + bV^2 + cW^2 + 2dVW + 2gWU + 2hUV - 2\Delta_1 U - 2\Delta_2 V - 2\Delta_3 W - \chi \tag{10}$$

He therefore has ten unknown functions to determine. He then writes the Boltzmann collisionless equation in terms of the velocity of agitation (U, V, W). He then obtains a third-degree polynomial containing twenty terms. Since this equation must be independent of these residual velocity components, this leads him to a system of twenty second-order differential equations, the simple writing of which takes several pages. To this he adds the Poisson equation of the Newtonian gravitational potential:

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho \tag{11}$$

The construction of these elliptical solutions, where the logarithm of the distribution function is a polynomial of degree two as a function of the residual velocity components, and where the masses gravitate in their own gravitational field, therefore implies the construction of the solution emanating from a system of twenty-one non-linear differential equations. The potential being Newtonian, we derive the distribution function according to:

$$\Psi = Gm\int_x \frac{n(\mathbf{r})}{r} d^3r = Gm\int_x \frac{d^3r}{r}\int_v f(\mathbf{r}, \mathbf{v})\, d^3v \tag{12}$$

The gravitational field g, this time considered as created by the distribution function f, is then defined by:

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -Gm\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left[\int_x \frac{d^3\mathbf{r}}{r}\int_v f(\mathbf{r}, \mathbf{v})\, d^3v\right] \tag{13}$$

Mathematically speaking, we can summarize Chandrasekhar's approach by saying that he looked for functions f such that their logarithm is expressed as a polynomial of degree two as a function of the residual velocity, which is a solution of the integrodifferential equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - Gm\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left[\int_x \frac{d^3\mathbf{r}}{r}\int_v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}\right]\right).\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{14}$$

The introduction of the solution, according to Chandrasekhar, in the form of a polynomial of degree 2, transforms the collisionless Boltzmann equation into a polynomial of degree three. If we restrict ourselves to a stationary solution:

- By cancelling out the degree-three terms, we deduce the evolution of the components of the velocity ellisoid.
- By cancelling out terms of degree two, we deduce the macroscopic velocity field.
- By cancelling out the unit-order terms, we deduce the potential in space and hence the density.
- When stationary, there are no zero-order terms.

At the end of this calculation, we don't have to ask whether the gravitational potential is compatible with such a solution, since it is an integral part of it. As we can see, Chandrasekhar's approach is the reverse of the conventional one. As early as the 1970s, we took up the question of how to construct these elliptical solutions, taking advantage of the computational techniques introduced in 1939 by S. Chapman and T.G. Cowling in their book "The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases" (Chapman and Cowling, 1939). At the time, their notations were remarkably elegant and compact. Scalars are indicated by thin letters, and vectors by bold ones. But they also introduced dyadics, which are simple matrices composed using vectors:

$$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix} \tag{15}$$

Gradient vectors are then themselves considered as dyadics, formed from the vector $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, being the position vector (x, y, z) and, for example, the gravitational potential Ψ. The scalar product of two vectors is always denoted $\mathbf{a}.\mathbf{b}$. But the authors introduce the scalar product of two dyadics noted $\mathbf{w} : \mathbf{w}'$ and defined by:

$$\mathbf{w} : \mathbf{w}' = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} w_{\alpha\beta}\, w'_{\beta\alpha} = \mathbf{w}' : \mathbf{w} \tag{16}$$

The product of a dyadic matrix and a vector is also noted:

$$(\mathbf{ab}).\mathbf{d} \qquad and \qquad \mathbf{d}.(\mathbf{ab}) \tag{17}$$

It is then possible to use the set of theorems related to this algebra of dyadics, such as:

$$(\mathbf{ab}).\mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{d}) \qquad \mathbf{d}.(\mathbf{ab}) = (\mathbf{d}.\mathbf{a})\mathbf{b} \tag{18}$$

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = \mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{cd}) = \mathbf{a}.\{(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{d}\} = (\mathbf{a}.\mathbf{d})(\mathbf{b}.\mathbf{c}) \tag{19}$$

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = \mathbf{ac} : \mathbf{bd} \tag{20}$$

$\mathbf{w}$ being a dyadic:

$$\mathbf{b}.(\mathbf{a}.\mathbf{w}) = \mathbf{ba} : \mathbf{w} \tag{21}$$

The authors also introduce a "mobile operator":

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_0.\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tag{22}$$

The tedious collisionless Boltzmann equation then becomes:

$$\frac{\partial \ln(f)}{\partial t} + \mathbf{c}_0.\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{C}.\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{D\mathbf{c}_0}{Dt}\right).\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{23}$$

In steady state:

$$\mathbf{c}_0.\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{C}.\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial t} + \mathbf{c}_0.\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right).\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{24}$$

The terms $\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{C}$ and $\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}$ are dyadic matrices composed from two vectors. Note the remarkable compactness of this formulation. If we don't use it, the last term of the equation is itself transformed into nine terms, etc. $\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}$ is therefore the velocity gradient matrix, not to be confused with its divergence, which is written as:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}.\mathbf{c}_0 \tag{25}$$

Macroscopic parameters are defined as stochastic quantities. We have already seen the density n, above, and the macroscopic velocity $\mathbf{c}_0$. We define the pressure matrix $\mathbf{p}$, which is a dyadic, as:

$$\mathbf{p} = m \int \mathbf{CC}\, f\, d^3\mathbf{v} = nm < \mathbf{CC} > \tag{26}$$

With the dyadic:

$$\mathbf{CC} = \begin{pmatrix} U^2 & UV & UW \\ UV & V^2 & VW \\ UW & VW & W^2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

The matrix is symmetrical. There is a third macroscopic quantity which, in fluid mechanics, is the absolute temperature T, which is then defined as the mean value of the kinetic energy associated with the thermal agitation velocity:

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}\rho < C^2 >= \frac{1}{2}m \int C^2 f d^3\mathbf{v} \tag{28}$$

k_B being Boltzmann's constant. From the pressure matrix, we define a scalar pressure:

$$p = \rho\, tr < \mathbf{CC} >= \rho < C^2 >= nk_B T \tag{29}$$

And Boyle's law comes into play again. We add the heat flux vector, defined as the transport of thermal agitation energy:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2}m \int C^2\, \mathbf{C}\, f\, d^3\mathbf{v} = \frac{1}{2}\rho\, < C^2\mathbf{C} > \tag{30}$$

Entropy is also defined as the mean value of the quantity $Log f$:

$$s = \frac{1}{n} \int f\, \ln(f)\, d^3\mathbf{v} = < \ln(f) > \tag{31}$$

The collisionless Boltzmann equation also provides the conservation equations, which are greatly simplified by the use

of dyadics:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{c}_0 . \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} + \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} . \mathbf{c}_0 = 0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} . \mathbf{p} + \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial t} + \mathbf{c}_0 . \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) \tag{33}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{c}_0 . \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2}{3 k_B n} \left(\mathbf{p} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} . \mathbf{q} \right) \tag{34}$$

The term $\mathbf{p} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}$ represents the work of the pressure forces. Of course these equations simplify when the medium is in a state of local thermodynamic equilibrium, i.e. when the distribution function has Maxwellian form:

$$f^0 = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mC^2}{2k_B T}} \tag{35}$$

In other words, $\ln(f)$ is a spherical polynomial. The equations then become Euler's equations. If the medium is homogeneous and uniform, the unsteady solution gives the Friedman equation, and we find (Petit and Monnet, 1975) the Newtonian cosmology discovered in 1934 by Milne and Mc Crea (McCrea and Milne, 1934). We will use this particular case of the Maxwellian solution, already treated by Chandrasekhar (Chandrasekhar, 1941) to show the path followed when we center the solution on the simple form of the distribution function. We have:

$$\ln(f^0) = Cst - \frac{mC^2}{2k_B T} + \ln\left(\frac{n}{T^{3/2}}\right) \tag{36}$$

We introduce this form of the distribution function into the collisionless Boltzmann equation in a stationary situation. The equation becomes:

$$(\mathbf{C} + \mathbf{c}_0) . \left(\frac{mC^2}{2k_B T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln\left(\frac{n}{T^{3/2}}\right) \right) + \frac{m\mathbf{C}}{k_B T} . \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_0 . \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{m}{k_B T} \mathbf{CC} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{37}$$

We have a single third-order term:

$$\frac{mC^2}{2k_B T} \left(\mathbf{C} . \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0 \tag{38}$$

The medium is therefore isothermal. Transposed to astrophysics, this means that the dispersion of mass-point velocities is constant throughout space. We now turn to second-order terms. In dyadic algebra, this is written:

$$\mathbf{CC} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{39}$$

By expanding, we have nine terms. The solution to this system of differential equations is:

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{40}$$

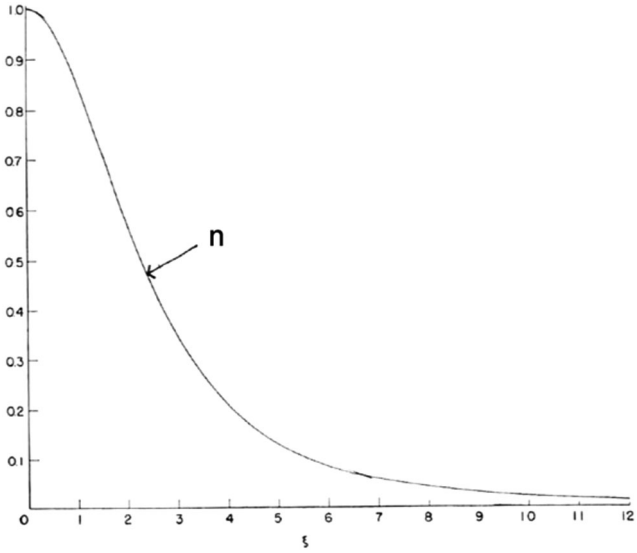


Fig. 1 Mass distribution of an isothermal, spheroidal formation, according to Chandrasekhar

Assuming $\mathbf{v}_0 = 0$, we obtain a solid-body rotation with constant angular velocity ω. The unit order terms give:

$$\frac{\partial \ln(n)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{m}{k_B T} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_0 . \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0 \tag{41}$$

Equation which states that the gravitational field is balanced by the combination of pressure force plus centrifugal force. We have the following equation:

$$\mathbf{c}_0 = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Let's introduce the vector:

$$\mathbf{u} = \omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

We get:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} . \left(\ln(n) + \frac{m}{k_B T} \left(\Psi - \frac{1}{2} u^2 \omega^2 \right) \right) \tag{44}$$

Whence:

$$n = n_0 \, e^{\frac{m}{k_B T} \Psi + \frac{m}{2k_B T} u^2 \omega^2} \tag{45}$$

Combining with the Poisson equation:

$$\Delta \Psi = 4\pi G n_0 \, e^{\frac{m}{k_B T} \Psi + \frac{m}{2k_B T} u^2 \omega^2} \tag{46}$$

From which we derive the gravitational potential and mass distribution (Fig. 1).

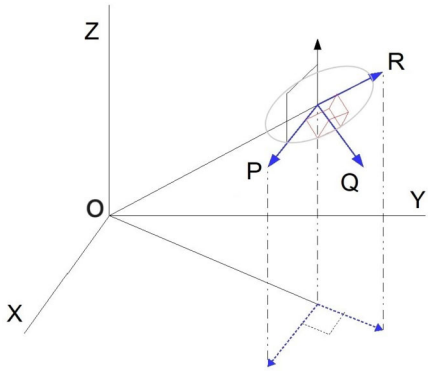


Fig. 2 One of the axes of the velocity ellipsoid pointing towards the geometric center

Which is nothing other than the result obtained by Chandrasekhar, with a heavier handwriting. After this long preamble, we are now in a position to understand the strategy of the present article, whose project is to construct a model of a galaxy as an exact stationary solution of the collisionless Boltzmann equation, having as its sole starting point the form of the distribution function, and exploiting the computational technique of dyadic algebra. Under these conditions, $\ln(f)$ becomes a particular polynomial of order two, depending on the components (U, V, W) of the residual velocity. By introducing this expression into the equation written in terms of the components of the residual velocity, and setting its various polynomials to zero, we obtain a system of twenty non-linear differential equations, to which Poisson's equation is added. As with the Maxwellian solution, the third-order terms will give the evolution of the velocity ellipsoid in space. The second-order terms will give the velocity field and the first-order terms, combined with the Poisson equation, the gravitational potential and mass distribution. In stationary mode, there are no zero-order terms. So there's no need to ask whether this potential is compatible with this distribution function, since it follows from it as an integral part of a solution, based solely on the form of this function.

2 Extension to a steady axisymmetric elliptical solution

The hypothesis that the logarithm of the distribution function is a polynomial of degrees 2 depending on the components of the residual velocity, such that one of the axes of the ellipsoid points towards the origin was proposed in 1972 by J.P. Petit (Petit, 1972), then taken up again in 1974 in reference (Petit and Monnet, 1974). In this model one of the principal axes of the velocity ellipsoid points towards the geometric center of the system, which corresponds to Fig. 2.

In this figure the vector **P** is parallel to the plane $(z = 0)$. We can define speed dispersions according to:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \langle C_P^2 \rangle \\ \sigma_Q &= \langle C_Q^2 \rangle \\ \sigma_R &= \langle C_R^2 \rangle\end{aligned} \tag{47}$$

Still following reference (Petit, 1972):

$$\ln(f) = \ln(B) - \frac{m}{2k_B H}\mathbf{C}^2 + a\,(\mathbf{C}.\mathbf{r})^2 + \alpha\,[\mathbf{C}.(\mathbf{k}\times\mathbf{r})]^2 \tag{48}$$

The functions B, H, α, a are functions of the position and will then have to be determined. We only have data referring to the velocity ellipsoid in the vicinity of the Sun. Its major axis then does not point towards the center but in its vicinity. We will attribute this small deviation, called the vertex deviation, to the influence of the local fluctuation of the gravitational field linked to the presence of the spiral arm. When we introduce the form of the distribution function (48) into equation (24), the latter becomes a polynomial of degree 3 as a function of the components (U, V, W) of the residual velocity. Since this equation must be satisfied regardless of these components, we then obtain a system of twenty partial differential equations to which we must add Poisson's equation (11).

3 The terms of degree three give the evolution of the velocity ellipsoid (Petit and Monnet, 1975)

Let's group these terms together:

$$\begin{aligned}&-\frac{m}{2k_B}C^2 C.\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{H}) + 2a(C.r).C.C + C.\frac{\partial a}{\partial r}(C.r)^2 \\ &\quad + C.\frac{\partial \alpha}{\partial r}[C.(k\times r)]^2 = 0\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{m}{2k_B}\left(C_x^2 + C_y^2 + C_z^2\right) \\ &\times\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + C_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + C_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)\right) \\ &+ 2a(C_x^2 + C_y^2 + C_z^2)(xC_x + yC_y + zC_z) \\ &+\left(C_x\frac{\partial a}{\partial x} + C_y\frac{\partial a}{\partial y} + C_z\frac{\partial a}{\partial z}\right)(xC_x + yC_y + zC_z)^2 \\ &+\left(C_x\frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_y\frac{\partial \alpha}{\partial y} + C_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)(-yC_x + xC_y)^2 = 0\end{aligned} \tag{50}$$

Whence:

$$C_x^3 : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + x^2\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \tag{51}$$

$$C_y^3 : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + y^2\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{52}$$

$$C_z^3 : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + z^2\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{53}$$

$$C_x^2 C_y : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{H}) + 2ay + x^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2xy\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \tag{54}$$

$$C_y^2 C_x : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + y^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2xy\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{55}$$

$$C_x^2 C_z : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + x^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2xz\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{56}$$

$$C_y^2 C_z : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + y^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2yz\frac{\partial a}{\partial x} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{57}$$

$$C_z^2 C_x : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + z^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2xz\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{58}$$

$$C_z^2 C_y : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + z^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2yz\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{59}$$

$$C_x C_y C_z : 2yZ\frac{\partial a}{\partial x} + 2xz\frac{\partial a}{\partial y} + 2xy\frac{\partial a}{\partial z} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial z} \tag{60}$$

Assuming that a and α do not depend on r or z, we get (D'Agostini, 2016):

$$C_x^3 \equiv C_z^2 C_x \equiv C_y^2 C_x : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax = 0 \tag{61}$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2 C_y \equiv C_z^2 C_y : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay = 0 \tag{62}$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2 C_z \equiv C_y^2 C_z : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az = 0 \tag{63}$$

In addition we have:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho^2}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial \rho^2}{\partial y} = 2y \end{cases} \tag{64}$$

We get:

$$C_x^3 \equiv C_z^2 C_x \equiv C_y^2 C_x : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{65}$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2 C_y \equiv C_z^2 C_y : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{66}$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2 C_z \equiv C_y^2 C_z : -\frac{m}{2k_B}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{67}$$

That is, after integration:

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{m}{2k_B}a \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{m}{2k_B}a\rho^2 + f_1(z^2) \tag{68}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{m}{2k_B}a \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{m}{2k_B}az^2 + f_2(\rho^2) \tag{69}$$

The function f_1 depends only on z^2. So, if we differentiate (68) with respect to z^2 we can write:

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{m}{2k_B}a\rho^2 + f_1(z^2)\right) = \frac{\partial}{\partial z^2}f_1(z^2) = \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{m}{2k_B}a \tag{70}$$

Thus:

$$f_1(z^2) = \frac{m}{2k_B}a\rho^2 + k_z \tag{71}$$

Whence:

$$\frac{1}{H} = \frac{m}{2k_B}a\rho^2 + \frac{m}{2k_B}az^2 + k_z \tag{72}$$

Originally we have $\frac{1}{H} = k_z$ that we set equal to the constant $\frac{1}{H} = \frac{1}{T_0}$ which gives:

$$\frac{1}{H} = \frac{m}{2k_B}a\rho^2 + \frac{m}{2k_B}az^2 + \frac{1}{T_0} \tag{73}$$

By introducing the characteristic length r_o we get:

$$r_0^2 = \frac{m}{2ak_BT_0} \Rightarrow H = \frac{T_0}{1 + \dfrac{r^2}{r_0^2}} \tag{74}$$

We will now decompose the residual velocity vector C according to its projections on the P, Q, R axes.

$$C_r = C.R = C.\frac{r}{\|r\|} = \frac{C.r}{\|r\|} \tag{75}$$

$$C_p = C.P = C.\frac{k \times r}{\|k \times r\|} = \frac{C.(k \times r)}{\|k \times r\|} \tag{76}$$

$$C_q = C - C_r - C_p \tag{77}$$

$$\|k \times r\|^2 = (|k \times r).(|k \times r) = (k.k)(r.r) - (k.r)(k.r) = r^2 - z^2 = \rho^2 \tag{78}$$

$$\ln(f) = \ln(B) + a_r C_r^2 + a_p C_p^2 + a_q C_q^2 \tag{79}$$

$$\ln(f) = \ln(B) + \frac{(a_r - a_q)}{r^2}(C.r)^2 + \frac{(a_p - a_q)}{\rho^2}[C.(k \times r)]^2 + a_q C^2 \tag{80}$$

By identifying:

$$a_q = -\frac{m}{2k_B H} \tag{81}$$

$$a = \frac{(a_r - a_q)}{r^2} \rightarrow a_q = -\frac{m}{2k_B H} + ar^2 \tag{82}$$

$$\alpha = \frac{(a_p - a_q)}{\rho^2} \rightarrow a_p = -\frac{m}{2k_B H} + a\rho^2 \tag{83}$$

Let's ask:

$$\rho_0^2 = \frac{m}{2\alpha k_B T_0} \tag{84}$$

We get:

$$a_r = -\frac{m}{2k_B T_0} \tag{85}$$

$$a_p = -\frac{m}{2k_B T_0}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \tag{86}$$

$$a_q = -\frac{m}{2k_B T_0}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right) \tag{87}$$

We can then express the velocity distribution function as a function of the coordinates (C_r, C_p, C_q):

$$f = f_0\, e^{\left(-\frac{m}{2k_B T_0}\left[C_r^2 + C_p^2\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) + C_q^2\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)\right]\right)} \tag{88}$$

with:

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{89}$$

Which gives us the axes of the velocity ellipsoid:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m}} \tag{90}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m}\frac{1}{1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}}} \tag{91}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m}\frac{1}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}}} \tag{92}$$

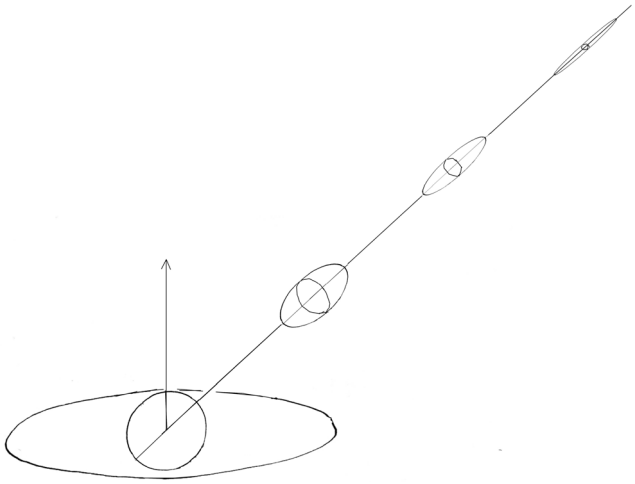


Fig. 3 Evolution of the axes of the velocity ellipsoid

We see that:

$$\sigma_p \leq \sigma_q \leq \sigma_r \tag{93}$$

At the center of the system, the distribution of Maxwellian speeds:

$$\sigma_p = \sigma_q = \sigma_r \tag{94}$$

The component σ_r is independent of r. If we want to take into account the observational data, these give $\sigma_p \approx \sigma_q$. This will mean, in our solution, that $\frac{1}{\rho_0^2} \ll \frac{1}{r_0^2}$ i.e. $\alpha \ll a$. At large distance the transverse axes tend towards zero, while the radial axis retains its value (Fig. 3).

In doing so, we are only repeating identically the calculations of references (Petit, 1972) and (Petit and Monnet, 1974). In 2016 reference (D'Agostini, 2016) introduced a symmetry that had escaped the authors, and which leads to an interesting result.

4 The terms of order 2 provide the macroscopic velocity field (D'Agostini, 2016)

These are the terms from the expression:

$$\mathbf{c}_0 . \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{95}$$

Mathematically, the velocity field, resulting from hypothesis (47) must emanate from equation (95). In all cases, the gradient $\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}}$, located in a plane containing oz, due to the axisymmetry, contains a priori components parallel and perpendicular to the oz axis. Similarly, there should be components $\mathbf{c}_{0r}$ and $\mathbf{c}_{0z}$ also located in a plane passing through this

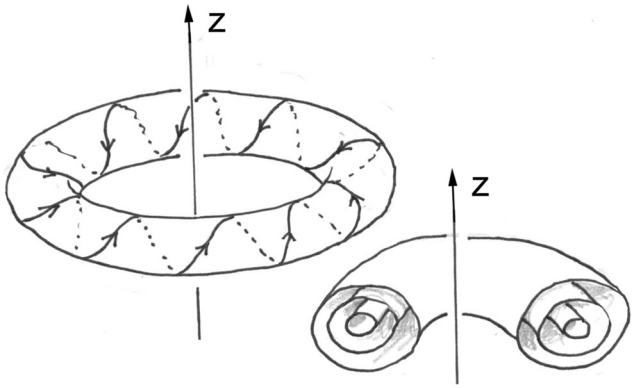


Fig. 4 3D velocity fields on a family of surfaces with nested torus topology

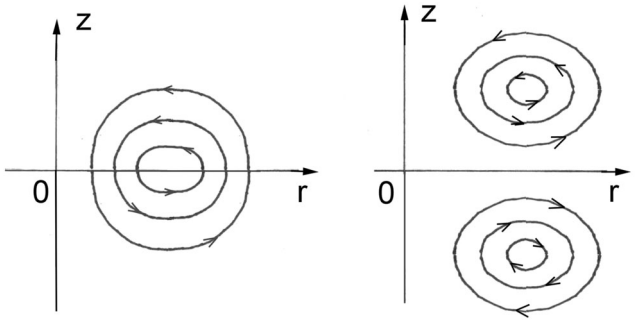


Fig. 5 Projection of velocity fields with non-zero $\mathbf{c}_{0z}$. $\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}}$

axis. But the non-zero nature of these components does not seem compatible with a physical situation. Indeed, these two components, depending on their sign, translate movements of distance and approach with respect to, respectively, the oz and or axes. Movements that cannot correspond, exclusively, either to the distance or to the approach, because this would translate either to a loss or to a gain of matter. There would therefore be no conservation of mass. These components must therefore, in this velocity field, have values of both signs. The only velocity field ensuring the conservation of mass corresponds to 3D helical trajectories falling on a family of surfaces having the topology of nested tori (Fig. 4).

If we opt for the assumption that this term is non-zero, we're out of the realm of galactic dynamics. The solution, with its macroscopic velocity field in the form of helical trajectories inscribed on a family of surfaces with the oz axis as the axis of symmetry and the horizontal plane as the plane of symmetry, then refers to the trajectories of electrically charged particles in a tokamak (we would then have to consider two Vlasov equations, one for electrons and one for hydrogen ions). The law of velocity variation with distance from the axis would then follow a different law. But these are two completely different physics problems.

The projection of these trajectories along the plane passing through the oz axis corresponds to Fig. 5.

But if we add the natural hypothesis of a symmetry with respect to the plane $z = 0$ this excludes the left field. Continuing to consider the existence of non-zero $\mathbf{c}_{0r}$ and $\mathbf{c}_{0z}$ components we should then consider the structure of the figure on the right. But, a simple physicist's intuition suggests that the most plausible solution would be the one where these components $\mathbf{c}_{0r}$ and $\mathbf{c}_{0z}$ are simply zero. In these conditions the term $\mathbf{c}_0.\nabla_r \ln(f)$ becomes zero and the equation with the terms of order two is reduced to:

$$\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}}.\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = Tr(\mathbf{AB}) = 0 \tag{96}$$

Let's calculate the dyadic $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c_{0x}}{\partial x} & \frac{\partial c_{0y}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial c_{0x}}{\partial y} & \frac{\partial c_{0y}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial c_{0x}}{\partial z} & \frac{\partial c_{0y}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -y\frac{\partial \omega}{\partial x} & x\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega & x\frac{\partial \omega}{\partial y} & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial z} & x\frac{\partial \omega}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \tag{97}$$

Let's calculate the dyadic $\mathbf{A}$:

$$A = \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}}.C \tag{98}$$

$$A = -\frac{m}{2k_B H} C.C + 2a(C.r).r.C + 2\alpha[C.(k \times r)].(k \times r)$$
$$= A_1 + A_2 + A_3 \tag{99}$$

$$A_1 = -\frac{m}{2k_B H} \begin{pmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z \\ C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$A_2 = 2a(xC_x + yC_y + zC_z) \begin{pmatrix} xC_x & xC_y & xC_z \\ yC_x & yC_y & yC_z \\ zC_x & zC_y & zC_z \end{pmatrix} \tag{101}$$

$$A_3 = 2\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x - xyC_y \\ -xyC_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix} (C_x C_y C_z)$$
$$= 2\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x C_x - xyC_y C_x & y^2 C_x C_y - xyC_y C_y \\ -xyC_x C_x + x^2 C_y C_x & -xyC_x C_y + x^2 C_y C_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y^2 C_x C_z - xyC_y C_z \\ -xyC_x C_z + x^2 C_y C_z \\ 0 \end{pmatrix} \tag{102}$$

Consider the following two matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad and \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \tag{103}$$

The trace of their matrix product is given by

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{AB}) &= (A_{xx}B_{xx}+A_{xy}B_{yx}+A_{xz}B_{zx}) \\ &\quad +(A_{yx}B_{xy}+A_{yy}B_{yy}+A_{yz}B_{zy})+(0) \end{aligned} \tag{104}$$

Let's calculate each of the terms:

$$\begin{aligned} A_{xx} &= -\frac{m}{2k_BH}C_x^2+2a(x^2C_x^2+yxC_xC_y+zxC_xC_z) \\ &\quad +2\alpha(y^2C_x^2-xyC_yC_x) \\ &= C_x^2\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ax^2+2\alpha y^2\right) \\ &\quad +C_xC_y2(a-\alpha)xy+C_xC_z2axz \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned} A_{yy} &= -\frac{m}{2k_BH}C_y^2+2a(xC_xyC_y+yC_yyC_y+zC_zyC_y) \\ &\quad +2\alpha(-xyC_xCy+x^2C_yC_y) \\ &= C_y^2\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ay^2+2\alpha x^2\right) \\ &\quad +C_xC_y2(a-\alpha)xy+C_yC_z2ayz \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} A_{xy} &= -\frac{m}{2k_BH}C_xC_y+2a(xC_xxC_y+yC_yxC_y \\ &\quad +zC_zxC_y)+2\alpha(y^2C_xCy-xyC_yC_y) \\ &= C_xC_y\left(-\frac{m}{2k_BH}+2\alpha x^2+2\alpha y^2\right) \\ &\quad +C_y^2(a-\alpha)xy+C_yC_z2axz \end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned} A_{yx} &= -\frac{m}{2k_BH}C_yC_x+2a(xC_xyC_x+yC_yyC_x \\ &\quad +zC_zyC_x)+2\alpha(-xyC_xC_x+x^2C_yCx) \\ &= C_x^2(a-\alpha)xy+C_xC_y\left(-\frac{m}{2k_BH}+2\alpha y^2+2\alpha x^2\right) \\ &\quad +C_xC_z2ayz \end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned} A_{xz} &= -\frac{m}{2k_BH}C_xC_z+2a(xC_xxC_z+yC_yxC_z+zC_zxC_z) \\ &\quad +2\alpha(y^2C_xCz-xyC_yC_z) \\ &= C_z^2axz+C_xC_z\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ax^2+2\alpha y^2\right) \\ &\quad +C_yC_z2(a-\alpha)xy \end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned} A_{yz} &= -\frac{m}{2k_BH}C_yC_z+2a(xC_xyC_z+yC_yyC_z+zC_zyC_z) \\ &\quad +2\alpha(-xyC_xCz+x^2C_yC_z) \\ &= C_z^2axz+C_xC_z2(a-\alpha)xy \\ &\quad +CyCz\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ay^2+2\alpha x^2\right) \end{aligned} \tag{110}$$

The terms C_x^2 come from $A_{xx}B_{xx}$ and from $A_{yx}B_{xy}$

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) \\ &+2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\right) \end{aligned} \tag{111}$$

The terms C_y^2 come from $A_{xy}B_{yx}$ and from $A_{yy}B_{yy}$

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) \\ &+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y}-\omega\right) \end{aligned} \tag{112}$$

The terms C_z^2 come from $A_{xz}B_{zx}$ and from $A_{yz}B_{zy}$

$$2axz\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+2ayz\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) \tag{113}$$

The terms C_xC_y come from $A_{xy}B_{yx}$, $A_{xx}B_{xx}$, $A_{yx}Bxy$, $A_{yy}B_{yy}$

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y}-\omega\right) \\ &+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) \\ &+\left(-\frac{m}{2k_BH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(+x\frac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\right) \\ &+2(a-\alpha)xy\left(+x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=0 \end{aligned} \tag{114}$$

The terms C_xC_z come from $A_{xx}B_{zx}$, $A_{xx}B_{xx}$, $A_{yx}Bxy$, $A_{yz}B_{yz}$

$$(2axz)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + \left(-\frac{m}{2k_BH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + (2axy)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{115}$$

The terms C_yC_z come from $A_{xy}B_{yx}$, $A_{xz}B_{zx}$, $A_{yy}Byy$, $A_{yz}B_{zy}$

$$(2axz)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}-\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + (2ayz)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + \left(-\frac{m}{2k_BH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{116}$$

Let us now exploit the fact that ω only depends on ρ^2 and z^2. Thus, from (64) we obtain:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial x}=2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \tag{117}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial y}=2y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \tag{118}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\frac{\partial z^2}{\partial z}=2z\frac{\partial\omega}{\partial z^2} \tag{119}$$

The equation C_x^2 becomes:

$$\frac{\partial\ln(\omega)}{\partial\rho^2}=-\frac{(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{k_BH}-2\alpha\rho^2\right)}) \tag{120}$$

Placing ourselves in the particular context where a and α are constant throughout space, we obtain:

$$\frac{\partial\ln(\omega)}{\partial\rho^2}=-\frac{1}{2}\frac{2(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{k_BT_0}-2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)} =-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho^2}\left[ln\left(\frac{m}{k_BT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)\right] \tag{121}$$

Whence:

$$\omega=\frac{\omega_{\rho_0}(z^2)}{\sqrt{\frac{m}{k_BT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2)}} \tag{122}$$

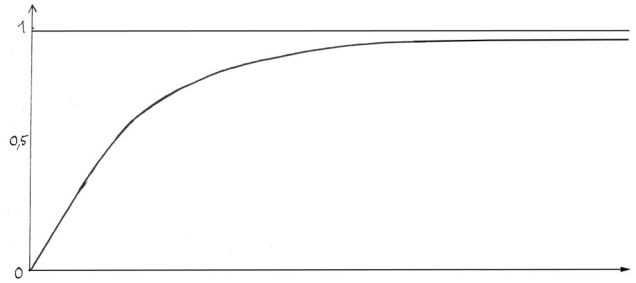


Fig. 6 Rotation curve (D'Agostini, 2016)

On the same way as before, the equations C_xC_z give

$$\frac{\partial ln\omega}{\partial z^2}=-\frac{a}{\left(\frac{m}{k_BH}-2\alpha\rho^2\right)} \tag{123}$$

By taking up the hypothesis that a and α are constant, we get:

$$\omega=\frac{\omega_{z_0}(\rho^2)}{\sqrt{\frac{m}{k_BT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2)}} \tag{124}$$

Which gives the rotation speed at a point:

$$v=\rho.\omega=\rho.\frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{m}{k_BT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2)}} \tag{125}$$

In the diametrical plane of the galaxy:

$$v=\frac{\omega_0\,\rho}{\sqrt{\frac{m}{k_BT_0}+2(a-\alpha)\rho^2)}} \tag{126}$$

Taking into account that $\alpha \ll a$

$$v\approx\frac{\omega_0\,\rho}{\sqrt{\frac{m}{k_BT_0}+2a\rho^2)}} \tag{127}$$

Which gives a linear growth near the center of symmetry (solid body rotation) and a constant speed plateau at the periphery (Fig. 6).

5 Comparison with observational data

While the curves derived from observational data do show a velocity plateau at the periphery, their behavior near the center often includes a velocity peak. This is only absent in relatively rare cases, such as the NGC 128 galaxy (Fig. 7).

In contrast, rotation curves near the center of galaxies are generally very irregular (Fig. 8).

Those who originally interpret these overspeed as being due to the action of a dark matter halo are then obliged

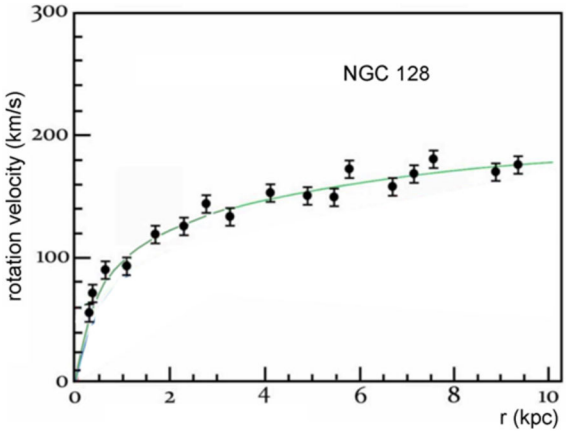


Fig. 7 Velocity curve of galaxy NGC 128

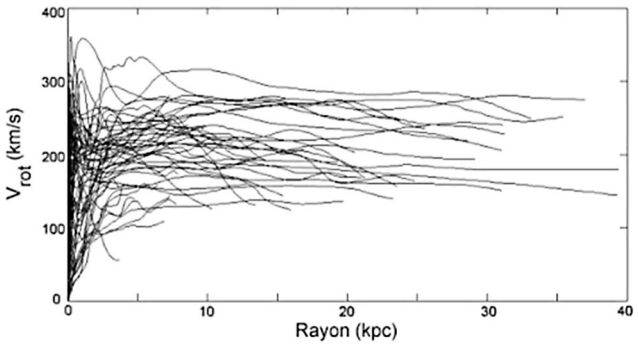


Fig. 8 Rotation curves of galaxies

to endow this distribution with a peak, at the center of the galaxy, so that the excursion of the gravitational field can counterbalance the centrifugal force. But it's also possible that these velocity excursions are the result of cannibalism by galaxies with smaller masses. Like the cannibal galaxy that absorbs them, these mini-galaxies are sets of non-collisionless mass-dots. Subjected to the potential well of the larger galaxy, they then fall towards their central part. In so doing, they retain their angular momentum, as these point-mass ensembles cannot transfer it to the cannibal galaxy by viscous exchange, or encounters. In contrast, the NGC 128 galaxy would not have experienced any absorption of mini-galaxies. At most, it could have merged with similar galaxies, in terms of mass distribution and velocity field.

6 About the potential and mass distribution

The cancellation of the unit order terms corresponds to the equation:

$$\mathbf{C}.\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_0.\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}\right).\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{C}} = 0 \tag{128}$$

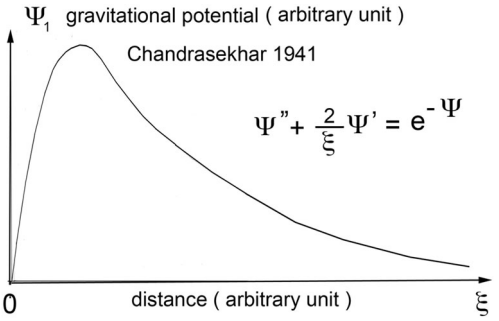


Fig. 9 Gravitational potential in spherical symmetry (Chandrasekhar (Chandrasekhar, 1941))

The density field is then constructed by combining it with Poisson's equation. We'll present the complete numerical solution in a later article. This potential is necessarily compatible with the form chosen for the distribution function, since it is an integral part of the solution. This construction is not straightforward, as it requires iterations to evaluate the term $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$. Nevertheless, we can draw conclusions about the shape of the potential and the values of the density. We know that the distribution function tends towards Maxwellian form at the center. The equation then reduces to:

$$\frac{\partial \ln(n)}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{m}{k_B T_0} \tag{129}$$

The equation of the potential at the center is then:

$$\Delta\Psi = Cst\, e^{-\frac{m\Psi}{k_B T_0}} \tag{130}$$

Let's be satisfied with reduced variables and an expression of the potential in arbitrary units. The form of the potential near the center is shown in Fig. 9.

7 Conclusion

We have opted for a completely different approach to the one considered classical, taking up that of Chandrasekhar, based entirely on the choice of an elliptical distribution function. We have extended this method by introducing rotation (axisymmetric stationary system). The distribution function is associated with a velocity ellipsoid. The only assumption, of a geometrical nature, is that one of the axes of this ellipsoid in all space points to the system's center of symmetry. The mathematical tool of dyadic algebra is then used to carry out the calculations. Introducing the elliptic form of the distribution function into the collisionless Boltzmann equation, written in terms of the components of the residual velocity, transforms it into a third-order polynomial. Cancellation of the third-order terms then gives the evolution of

the axes of the ellipsoid. We then find that the three axes become equal at the center, i.e. the velocity distribution becomes Maxwelian. The transverse axes tend towards zero at infinity, while the radial velocity dispersion remains constant. The fact that the transverse axes are smaller than the radial velocity dispersion axis is consistent with observational data from the vicinity of the Sun. Cancellation of the second-order terms gives the velocity field. This tends towards solid-body rotation at the center and a plateau at infinity. It then remains to calculate the gravitational field by combining the cancellation of the unit-order terms and Poisson's equation. We refer this to a future article.

Author contributions All authors prepared and reviewed the manuscript.

Funding information The authors have no relevant financial or non-financial interests to disclose.

Data availability No datasets were generated or analysed during the current study.

Declarations

Ethics declaration Not applicable.

Competing interests The authors declare no competing interests.

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License, which permits any non-commercial use, sharing, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if you modified the licensed material. You do not have permission under this licence to share adapted material derived from this article or parts of it. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

References

Binney, J., Tremaine, S.: Galactic Dynamics. Princeton Series in Astrophysics (2008)

Chandrasekhar, S.: Principles of Stellar Dynamics. Dover, New York (1941)

Chapman, S., Cowling, T.G.: The Mathematical Theory of Non Uniform Gazes. Cambridge University Press, Cambridge (1939)

D'Agostini, G.: Solution elliptique de l'équation de Vlasov. Private Communication (2016). http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2016-Dagostini-Vlasov-courbe-rotation.pdf

McCrea, W.H., Milne, E.A.: Newtonian universes and the curvature of space. Q. J. Math. **os-5**, 73–80 (1934)

Petit, J.P.: Modèle tridimensionnel et instationnaire de système stellaire auto-gravitant. Application aux amas globulaires et aux galaxies (Three-dimensional and unsteady model of self-gravitating stellar system. Application to globular clusters and galaxies). Note C. R. Acad. Sci. Paris **série B**, 373–376 (1972)

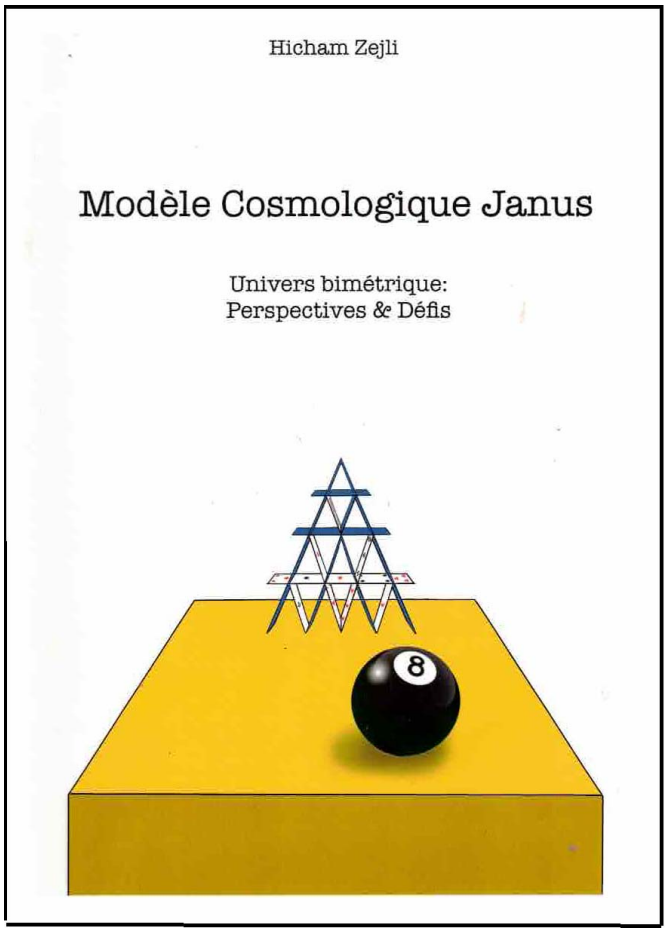
Petit, J.P., Monnet, G.: Axisymmetrical elliptical solution of the couple Vlasov plus Poisson equations. In: International 1974 Meeting on Galactic Dynamics at the High Studies Institute, Bures sur Yvette, France (1974)

Petit, J.P., Monnet, G.: Entropie maximale et cosmologie de Friedman. C. R. Acad. Sci. Paris **série A**, 1245–1248 (1975)

Publisher's note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Il arrive que des travaux soient enfin publiés intervient des décennies après leur émergence. Ca n'est en effet qu'en 2025 que fut publiée dans une revue de physique mathématique, cette extension de l'œuvre de Souriau, à un contexte à deux feuillets d'univers[25]. Le nom de Zejli est encore associé à cet article. Je l'avais fait pour renforcer sa position vis-à-vis de l'université de Casablanca. Mais bien évidemment, sa contribution est inexistante.

Il reste que ce garçon était loin d'être imbécile. Très travailleur, il avait assimilé l'ensemble des thèmes Janus en une année, ce qui est remarquable. Il avait même rédigé un livre intitulé :



Livre où son auteur présentait de larges pans de calculs et de travaux, dont cette construction du modèle mathématique de galaxie, comme était de son fait.

Il est consternant qu'un garçon aussi intelligent, perspicace et travailleur, ait définitivement compromis tous les efforts qui avaient été fait pour lui permettre de trouver une place dans le monde de la recherche. Je me souviens de la phrase du Vice-Président de l'université de Casablanca, lors de la mission que nous avions effectuée là-bas, pour …. régler les derniers détails de sa thèse :

[25] J.P.Petit, H.Zejli : Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group. Reviews in Mathematical Physics. Vol. 37, n°01, 2024.

- *Si celle-ci est de qualité, il n'y aura aucun problème pour un poste.*

Mais comment collaborer avec quelqu'un sans lui accorder d'emblée sa confiance ?

OPEN ACCESS
Reviews in Mathematical Physics
Vol. 37, No. 1 (2025) 2450054 (12 pages)
© The Author(s)
DOI: 10.1142/S0129055X24500545

World Scientific
www.worldscientific.com

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group

Jean-Pierre Petit* and Hicham Zejli†

Manaty Research Group,
2 Rue de l'Étang du Moulin,
Glanon 21250, France
**jean-pierre.petit@manaty.net*
†*zejli.hicham@gmail.com*

Received 22 August 2024
Accepted 30 October 2024
Published 27 December 2024

In this paper, we focus on the Janus symplectic group. We explore its various symmetries and its action on the elements of the dual of its Lie algebra, called torsors. Special attention is given to the charge symmetry, which highlights the matter–antimatter duality within both sets of components.

Keywords: Dynamic groups; symplectic groups; Lorentz group, Poincaré group; Janus group; torsors of a Lie group; action on the torsors.

Mathematics Subject Classification 2020: 20C35, 22E70, 53D55, 83A04, 70H33

1. Introduction

The application of the coadjoint action of a symplectic group on the dual of its Lie algebra, initiated by the mathematician Jean-Marie Souriau, has shed light on specific aspects of the approach followed by physics. The orbit method is due to Kirillov ([4–7, 12, 13, 15, 21, 24, 25]).

Thus, the restricted Lorentz symplectic group, limited to its two orthochrone components, translates, through the invariance properties that result from it, the aspects of special relativity. In 1970, Souriau established that the analysis of the components of its moment makes it possible to shed light on the geometric nature

†Corresponding author.
This is an Open Access article published by World Scientific Publishing Company. It is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 (CC BY-NC-ND) License, which permits use, distribution and reproduction, provided that the original work is properly cited, the use is non-commercial and no modifications or adaptations are made.

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

of a spin (not quantized): see [19, 20]. He uses for this purpose symplectic methods ([8, 10, 22, 23]). In the theory of symplectic groups, we show a classification in terms of movements.

By operating the product of this group by that of the spatio-temporal translations, we obtain the restricted Poincaré symplectic group, always limited to its two orthochrone components. In its moment, we first find the energy related to the subgroup of temporal translations. Then the momentum, linked to the spatial translations, the two being linked by the invariance of the modulus of the energy-momentum four-vector under the action of the Lorentz group.

By adding a translation along a fifth dimension to the restricted Poincaré group, we form a Lie group to which we will give the name *Restricted Kaluza Group* ([1–3, 11, 14]). This group is not the 15-dimensional Kaluza group associated with a 5-dimensional Lorentzian manifold but a new 11-dimensional group, including 5-dimensional space-time translation. This new dimension endows the momentum with an additional scalar that can be identified with the electric charge q, which may be positive, negative, or zero, and is still not quantized. We then bring out the geometric translation according to a scalar ϕ due to endowing the masses with an invariant electric charge. Then, by bringing in a new symmetry reflecting the inversion of the fifth dimension, synonymous with an inversion of the scalar from q to $-q$, we double the number of its connected components from 2 to 4. The action on the moment then links this new symmetry to the inversion of the electric charge q. We thus deduce the geometric modeling of charge conjugation or **C**-*Symmetry.*[a] It's then logical to name this new extension, the *Restricted Janus Group.*

By introducing a new symmetry to the previous group, which we describe as **T**-*Symmetry*,[b] we build the *Janus Symplectic Group.* Thus, we double the number of connected components from four to eight, grouped into two subsets: "*Orthochronous"*, conserving time and energy properties, and "*Antichronous"*, reversing time and energy. Therefore, we bring forth the geometric translation of endowing masses with an invariant electric charge. As the Jean-Marie Souriau demonstrated as early as 1970, a pioneer in the theory of symplectic groups ([9, 19, 20]), this approach has allowed key elements, which have marked the progress of relativistic physics, to be given a purely geometric nature.

In relation to the world of physics, wouldn't the role of mathematics be to illuminate the path traveled? Conversely, could it be possible that the exploration of new symmetries, accompanying this decoding using symplectic groups, contains more than what we thought we put into it? That it could designate new paths to follow?

This is what we will consider with the Janus Symplectic Group with charge symmetry, by integrating the antichronous components of the Lorentz group, resulting

[a]which translates the matter–antimatter symmetry introduced by Dirac.
[b]which converts matter into antimatter with negative mass, a concept we could name *antimatter in the Feynman sense.*

from its simple axiomatic definition, with the obvious repercussions on the Poincaré group and its extensions.

2. Janus Symplectic Group

Let $\tilde{\mathbf{T}} := I_{1,3}$, $\tilde{\mathbf{P}} := -\tilde{\mathbf{T}}$ and

$$\forall\, \lambda, \nu \in \{0,1\}, \quad \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{\nu}\tilde{\mathbf{T}}^{\lambda}) := \{L_n \tilde{\mathbf{P}}^{\nu}\tilde{\mathbf{T}}^{\lambda},\ L_n \in \mathcal{L}or_n\}.$$

Then, there are four connected components of $\mathcal{L}or$, given by[c]

$$\mathcal{L}or_n = \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{0}\tilde{\mathbf{T}}^{0}), \quad \mathcal{L}or_s = \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{1}\tilde{\mathbf{T}}^{0}),$$
$$\mathcal{L}or_t = \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{0}\tilde{\mathbf{T}}^{1}), \quad \mathcal{L}or_{st} = \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{1}\tilde{\mathbf{T}}^{1})$$

and we have the decomposition

$$\mathcal{L}or = \bigsqcup_{\nu,\lambda\in\{0,1\}} \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{\nu}\tilde{\mathbf{T}}^{\lambda}). \tag{1}$$

Then, we define the Janus symplectic group.

Definition 2.1. The *Janus symplectic group* is defined as the subgroup of $\mathrm{GL}(6,\mathbb{R})$:

$$\mathcal{J}an := \left\{ \begin{pmatrix} L & 0 & D \\ 0 & (-1)^{\eta} & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \eta \in \{0,1\}\ \wedge\ \phi \in \mathbb{R}\ \wedge\ L \in \mathcal{L}or\ \wedge\ D \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

The Janus symplectic group is therefore a subgroup of the group of isometries in dimension 5 given by[d]:

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{O}(1,4)) := \left\{ \begin{pmatrix} L & D' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ L \in \mathcal{O}(1,4)\ \wedge\ D' \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

with $\tau_{1,4}(L) := I_{1,4}L^T I_{1,4}$ and $\mathcal{O}(1,4) := \{L \in \mathrm{GL}(5,\mathbb{R}),\ \tau_{1,4}(L)L = I_5\}$. The elements of $\mathrm{Aff}(\mathcal{O}(1,4))$ are the elements which preserve the distance between two events (*pentavectors*) $X := (t,x,y,z,\xi)$ and $X' := (t',x',y',z',\xi')$ given by

$$d(X,X') := c^2(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2 - (\xi-\xi')^2.$$

[c]Equalities are shown by double inclusion. For example, let's demonstrate that $\mathcal{L}or_s = \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{1}\tilde{\mathbf{T}}^{0})$. Take $L \in \mathcal{L}or_s$ ($\det(L) = -1$ et $[L]_{00} \geq 1$). Then we have $\det(L\tilde{\mathbf{P}}) = -1$ and $[L\tilde{\mathbf{P}}]_{00} \geq 1$ i.e. we have $L_n := L\tilde{\mathbf{P}} \in \mathcal{L}or_n$. Since $\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \tilde{\mathbf{P}}$, we can conclude that $L = L_n\tilde{\mathbf{P}} \in \mathcal{L}or(\tilde{\mathbf{P}}^{1}\tilde{\mathbf{T}}^{0})$. The inclusion in the other direction is trivial.

[d]$\mathrm{Aff}(\mathcal{O}(1,4))$ is the affine group associated with $\mathcal{O}(1,4)$, it is also defined by the semi-direct product $\mathrm{Aff}(\mathcal{O}(1,4)) := \mathcal{O}(1,4) \ltimes \mathbb{R}^5$. We can also define the symplectic Janus group as being the affine group associated with the subgroup of $\mathcal{O}(1,4)$ given by

$$\mathcal{E}lec := \left\{ \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & (-1)^{\eta} \end{pmatrix},\ \eta \in \{0,1\}\ \wedge\ L \in \mathcal{L}or \right\}$$

called the *symplectic electric group* and we have $\mathcal{J}an := \mathrm{Aff}(\mathcal{E}lec)$.

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

This fifth dimension is of space type (we note the variable ξ). Each dimension is therefore associated with a symmetry, there are three types of symmetries:

- the $\mathbf{T}$-*symmetry*;
- the $\mathbf{P}_x$-*symmetry*, $\mathbf{P}_y$-*symmetry*, $\mathbf{P}_z$-*symmetry* grouped together what we call the $\mathbf{P}$-*symmetry*;
- the ξ-*symmetry* corresponding to the $\mathbf{C}$-*symmetry* (the charge conjugation).

This space of dimension 5 is a Minkowski metric space to which we have added one dimension, it has the metric $I_{1,4}$.

We also define the *restricted Janus group* is the subgroup of $\mathcal{J}an$ given by

$$\mathcal{J}an_n := \left\{ \begin{pmatrix} L_n & 0 & D \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \phi \in \mathbb{R}\ \wedge\ L_n \in \mathcal{L}or_n\ \wedge\ D \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Let

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} I_4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

We have

$$\forall\, \lambda, \eta, \nu \in \{0,1\}, \quad \begin{pmatrix} L_n & 0 & D \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda = \begin{pmatrix} L_n \tilde{\mathbf{P}}^\nu \tilde{\mathbf{T}}^\lambda & 0 & D \\ 0 & (-1)^\eta & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and therefore by Eq. (1):

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} L_n \tilde{\mathbf{P}}^\nu \tilde{\mathbf{T}}^\lambda & 0 & D \\ 0 & (-1)^\eta & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \lambda, \eta, \nu \in \{0,1\}\ \wedge\ \phi \in \mathbb{R} \right.$$

$$\left. \wedge\ L_n \in \mathcal{L}or_n\ \wedge\ D \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Definition 2.2. (i) The ***CPT****-group* is the subgroup $\mathcal{K}$ of $\mathcal{J}an$ of order 8 generated by $\mathbf{C}$, $\mathbf{P}$ and $\mathbf{T}$, i.e.

$$\mathcal{K} := \{\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda,\ \eta, \nu, \lambda \in \{0,1\}\} = \{I_6, \mathbf{T}, \mathbf{P}, \mathbf{PT}, \mathbf{C}, \mathbf{CT}, \mathbf{CP}, \mathbf{CPT}\}.$$

(ii) For all $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$, the ***X****-component of* $\mathcal{J}an$ is

$$\mathcal{J}an(\mathbf{X}) := \{JX, J \in \mathcal{J}an_n\}.$$

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

Thus, we have

$$\mathcal{J}an(\mathbf{C}^\eta\mathbf{P}^\nu\mathbf{T}^\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} L_n\tilde{\mathbf{P}}^\nu\tilde{\mathbf{T}}^\lambda & 0 & D \\ 0 & (-1)^\eta & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \phi \in \mathbb{R}\ \wedge\ L_n \in \mathcal{L}or_n\ \wedge\ D \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

These eight components are the eight connected components of $\mathcal{J}an$, we have the decomposition:

$$\mathcal{J}an = \bigsqcup_{\mathbf{X}\in\mathcal{K}} \mathcal{J}an(\mathbf{X}) = \bigsqcup_{\eta,\nu,\lambda\in\{0,1\}} \mathcal{J}an(\mathbf{C}^\eta\mathbf{P}^\nu\mathbf{T}^\lambda).$$

The group $\mathcal{L}or$ is the Lie group of dimension 6 and its Lie algebra is

$$\mathfrak{lor} := \mathcal{A}(1,3) := \{\Lambda \in \mathcal{M}(4,\mathbb{R}), \tau_{1,3}(\Lambda) = -\Lambda\}.$$

Then, the group $\mathcal{J}an$ is a Lie group of dimension 11 and its Lie algebra is

$$\mathfrak{jan} = \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda \in \mathcal{A}(1,3)\ \wedge\ \ \Gamma \in \mathbb{R}^4\ \wedge\ \varepsilon \in \mathbb{R} \right\}.$$

We have two characterizations[e]:

$$\left(\mathbb{R}^5\right)^* = \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix} \mapsto -(P^T\ q) I_{1,4} \begin{pmatrix} \Gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix} = -\tau(P)\Gamma - q\varepsilon,\ \begin{pmatrix} P \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \right\},$$

$$\mathcal{A}(1,3)^* = \left\{ \Lambda \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M\Lambda),\ M \in \mathcal{A}(1,3) \right\}.$$

Then, we have[f]

$$\mathfrak{jan}^* = \left\{ \{M \,|\, P \,|\, q\} : \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M\Lambda) - \tau(P)\Gamma - q\varepsilon,\ M \in \mathcal{A}(1,3) \right.$$
$$\left. \wedge\ P \in \mathbb{R}^4\ \wedge\ q \in \mathbb{R} \right\}.$$

The *action of the group* $\mathcal{J}an$ *on* $\mathfrak{jan}^*$ is defined by the coadjoint representation i.e. for any $a \in \mathcal{J}an$ and any $\mu \in \mathfrak{jan}^*$, we denote this action by

$$a \bullet \mu := \mathrm{Ad}^*_a(\mu).$$

with

$$\mathrm{Ad}^* : \mathcal{J}an \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{jan}^*)$$
$$a \mapsto \mathrm{Ad}^*_a : \mu \mapsto (Z \mapsto \mu(a^{-1}Za)).$$

[e]For all $\beta \in \mathbb{R}^*$, the application Φ_β which to $M \in \mathcal{A}(1,3)$ associates the linear form $\Lambda \mapsto \beta\mathrm{Tr}(M\Lambda)$ is an isomorphism of $\mathcal{A}(1,3)$ to $\mathcal{A}(1,3)^*$. Taking $\{A_{kl} := -E_{kl} + [I_{1,3}]_{ll}[I_{1,3}]_{kk}E_{lk},\ k,l \in \{1,\ldots,4\},\ k < l\}$ the canonical basis of $\mathcal{A}(1,3)$, we have $\Phi_{-1/2}(A_{kl})(A_{kl}) = 1$, hence the choice of $\beta := -1/2$.

[f]The elements of $\mathfrak{jan}^*$ are called *torsors*.

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

Proposition 2.1. *Let*

$$a := \begin{pmatrix} L & 0 & D \\ 0 & (-1)^\eta & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{J}an, \quad \{M \,|\, P \,|\, q\} \in \mathfrak{jan}^*.$$

We have

$$a \bullet \{M \,|\, P \,|\, q\} = \{LM\tau(L) + D\tau(P)\tau(L) - LP\tau(D) \,|\, LP \,|\, (-1)^\eta q\}.$$

Proof. We have

$$\begin{aligned}
&(a \bullet \{M \,|\, P \,|\, q\}) \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad = \{M \,|\, P \,|\, q\} \left(a^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a \right) \\
&\quad = \{M \,|\, P \,|\, q\} \left(\begin{pmatrix} \tau(L) & 0 & -\tau(L)D \\ 0 & (-1)^\eta & (-1)^{\eta+1}\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 & D \\ 0 & (-1)^\eta & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&\quad = \{M \,|\, P \,|\, q\} \begin{pmatrix} \tau(L)\Lambda L & 0 & \tau(L)(\Lambda D + \Gamma) \\ 0 & 0 & (-1)^\eta \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M\tau(L)\Lambda L) - \tau(P)\tau(L)(\Lambda D + \Gamma) - (-1)^\eta q\varepsilon \\
&\quad = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(LM\tau(L) + 2D\tau(P)\tau(L))\Lambda] - \tau(LP)\Gamma - (-1)^\eta q\varepsilon \\
&\quad = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(LM\tau(L) + D\tau(P)\tau(L) - LP\tau(D))\Lambda] - \tau(LP)\Gamma - (-1)^\eta q\varepsilon \\
&\quad = \{LM\tau(L) + D\tau(P)\tau(L) - LP\tau(D) \,|\, LP \,|\, (-1)^\eta q\} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

To describe the Lie algebra of $\mathcal{J}an$, we can also use the isomorphism of Lie algebras[g]:

$$\begin{aligned}
j : (\mathbb{R}^3, \wedge) &\to (\mathcal{A}(3), [\ ,\ ]) \\
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

[g]We have for all $u, v \in \mathbb{R}^3$: $u \wedge v = j(u)(v)$ and $j(u \wedge v) = [j(u), j(v)] = j(u)j(v) - j(v)j(u)$.

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

with $\wedge$ the cross product on $\mathbb{R}^3$ and $\mathcal{A}(3)$ the vector space of antisymmetric matrices of size 3. Then, we have

$$\begin{aligned}\mathfrak{jan} &= \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda \in \mathcal{A}(1,3)\ \wedge\ \Gamma \in \mathbb{R}^4\ \wedge\ \varepsilon \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta^T & 0 & v \\ \beta & j(w) & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \beta, w, \gamma \in \mathbb{R}^3\ \wedge\ v, \varepsilon \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Therefore, for all $\{M \,|\, P \,|\, q\} \in \mathfrak{jan}^*$, there are unique $\ell, g, p \in \mathbb{R}^3$ and $E, q \in \mathbb{R}$ such as

$$\begin{aligned}\{M \,|\, P \,|\, q\} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & g^T \\ g & j(\ell) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} \middle| q \right\} \begin{pmatrix} 0 & \beta^T & 0 & v \\ \beta & j(w) & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & g^T \\ g & j(\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta^T \\ \beta & j(w) \end{pmatrix} \right) - (E\ p^T) I_{1,3} \begin{pmatrix} v \\ \gamma \end{pmatrix} - q\varepsilon \\ &= \ell^T w - g^T \beta + p^T \gamma - Ev - q\varepsilon.\end{aligned}$$

We denote this last equality as

$$\{\ell \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} \begin{pmatrix} 0 & \beta^T & 0 & v \\ \beta & j(w) & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The dual $\mathfrak{jan}^*$ has the following descriptions:

$$\left\{ \{\ell \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} : \begin{pmatrix} 0 & \beta^T & 0 & v \\ \beta & j(w) & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \ell^T w - g^T \beta + p^T \gamma - Ev - q\varepsilon, \right.$$

$$\left. \ell, g, p \in \mathbb{R}^3\ \wedge\ E, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

Definition 2.3. Let

$$\mu := \{M \,|\, P \,|\, q\} := \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} \in \mathfrak{jan}^*$$

with relations

$$M = \begin{pmatrix} 0 & g^T \\ g & j(\ell) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix}.$$

(i) The matrix $M := M(\mu) \in \mathcal{A}(1,3)$ is called the *moment matrix associated with* μ. The vector $\ell := \ell(\mu) \in \mathbb{R}^3$ is called the *angular momentum of* M, and the vector $g := g(\mu) \in \mathbb{R}^3$ is the *relativist barycenter of* M.

(ii) (a) The vector $P := P(\mu) \in \mathbb{R}^4$ is called the *stress-energy vector associated with* μ. The vector $p := p(\mu) \in \mathbb{R}^3$ is called the *linear momentum of* P, and the scalar $E := E(\mu) \in \mathbb{R}$ is called the *energy of* P.

(b) The *first Casimir number associated with* μ is defined by

$$C_1 := C_1(\mu) := P^T I_{1,3} P = E^2 - p^2.$$

(c) The *mass associated to* μ is defined by

$$m := m(\mu) := \operatorname{sign}(E)\sqrt{C_1} = \operatorname{sign}(E)\sqrt{E^2 - p^2}.$$

(iii) The scalar $q := q(\mu) \in \mathbb{R}$ is called the *electric charge associated with* μ.

We deduce a simple expression of the action of the **CPT**-group $\mathcal{K}$ on the torsors of $\mathfrak{jan}^*$.

Corollary 2.2. *Let* $\{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} \in \mathfrak{jan}^*$. *For all* $\lambda, \eta, \nu \in \{0,1\}$, *we have*

$$(\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda) \bullet \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} = \{l \,|\, (-1)^{\lambda+\nu} g \,|\, (-1)^\nu p \,|\, (-1)^\lambda E \,|\, (-1)^\eta q\}.$$

Proof. We apply Proposition 2.1 with $a := \mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda$:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda) \bullet \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} \\
&\quad = (\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda) \bullet \left\{ \begin{pmatrix} 0 & g^T \\ g & j(\ell) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} \middle| q \right\} \\
&\quad = \left\{ \tilde{\mathbf{P}}^\nu \tilde{\mathbf{T}}^\lambda \begin{pmatrix} 0 & g^T \\ g & j(\ell) \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^\lambda \tilde{\mathbf{P}}^\nu \middle| I_{1,3} \tilde{\mathbf{T}}^\lambda \tilde{\mathbf{P}}^\nu I_{1,3} \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} \middle| (-1)^\eta q \right\} \\
&\quad = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\lambda+\nu} g^T \\ (-1)^{\lambda+\nu} g & j(\ell) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} (-1)^\lambda E \\ (-1)^\nu p \end{pmatrix} \middle| (-1)^\eta q \right\} \\
&\quad = \{l \,|\, (-1)^{\lambda+\nu} g \,|\, (-1)^\nu p \,|\, (-1)^\lambda E \,|\, (-1)^\eta q\}.
\end{aligned}$$

□

So we have

$$\mathbf{C} \bullet \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} = \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, -q\},$$

$$\mathbf{P} \bullet \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} = \{l \,|\, -g \,|\, -p \,|\, E \,|\, q\},$$
$$\mathbf{T} \bullet \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} = \{l \,|\, -g \,|\, p \,|\, -E \,|\, q\}.$$

Corollary 2.3. *Let $\mu \in \mathfrak{jau}^*$. For all $\lambda, \eta, \nu \in \{0, 1\}$, we have*

$$P((\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda) \bullet \mu) = \tilde{\mathbf{P}}^\nu \tilde{\mathbf{T}}^\lambda P(\mu),$$
$$C_1((\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda) \bullet \mu) = C_1(\mu),$$
$$m((\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda) \bullet \mu) = (-1)^\lambda m(\mu).$$

Proof. Let $\mu := \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\} \in \mathfrak{jau}^*$. We have for the stress-energy tensor

$$P(\mathbf{P} \bullet \mu) = P(\{l \,|\, -g \,|\, -p \,|\, E \,|\, q\}) = \begin{pmatrix} E \\ -p \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}} P(\mu),$$

		$\lambda = 0$	$\lambda = 1$
$\eta = 0$	$\nu = 0$	• neutral symetry • $a = I_6$ • $\mu' = \{\ell, g, p, E, q\}$	• $\mathbf{T}$ – symetry • $a = \mathbf{T}$ • $\mu' = \{\ell, -g, p, -E, q\}$
	$\nu = 1$	• $\mathbf{P}$ – symetry • $a = \mathbf{P}$ • $\mu' = \{\ell, -g, -p, E, q\}$	• $\mathbf{PT}$ – symetry • $a = \mathbf{PT}$ • $\mu' = \{\ell, g, -p, -E, q\}$
$\eta = 1$	$\nu = 0$	• $\mathbf{C}$ – symetry • $a = \mathbf{C}$ • $\mu' = \{\ell, g, p, E, -q\}$	• $\mathbf{CT}$ – symetry • $a = \mathbf{CT}$ • $\mu' = \{\ell, -g, p, -E, -q\}$
	$\nu = 1$	• $\mathbf{CP}$ – symetry • $a = \mathbf{CP}$ • $\mu' = \{\ell, -g, -p, E, -q\}$	• $\mathbf{CPT}$ – symetry • $a = \mathbf{CPT}$ • $\mu' = \{\ell, g, -p, -E, -q\}$

Fig. 1. This table lists the eight values of $\mu' := (\mathbf{C}^\eta \mathbf{P}^\nu \mathbf{T}^\lambda) \bullet \{l \,|\, g \,|\, p \,|\, E \,|\, q\}$ for all $\lambda, \eta, \nu \in \{0, 1\}$.

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

$$P(\mathbf{T}\bullet\mu) = P(\{l\,|\,-g\,|\,p\,|\,-E\,|\,q\}) = \begin{pmatrix} -E \\ p \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}P(\mu),$$

$$P(\mathbf{P}\bullet\mu) = P(\{l\,|\,g\,|\,p\,|\,E\,|\,-q\}) = \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} = P(\mu)$$

for the first Casimir number:

$$C_1((\mathbf{C}^\eta\mathbf{P}^\nu\mathbf{T}^\lambda)\bullet\mu) = P(\mu)^T\tilde{\mathbf{T}}^\lambda\tilde{\mathbf{P}}^\nu I_{1,3}\tilde{\mathbf{P}}^\nu\tilde{\mathbf{P}}^\lambda P(\mu) = P(\mu)^T I_{1,3}P(\mu) = C_1(\mu)$$

for the mass:

$$\begin{aligned} m((\mathbf{C}^\eta\mathbf{P}^\nu\mathbf{T}^\lambda)\bullet\mu) &= \mathrm{sign}(E((\mathbf{C}^\eta\mathbf{P}^\nu\mathbf{T}^\lambda)\bullet\mu))\sqrt{C_1((\mathbf{C}^\eta\mathbf{P}^\nu\mathbf{T}^\lambda)\bullet\mu)} \\ &= \mathrm{sign}((-1)^\lambda E)\sqrt{C_1(\mu)} = (-1)^\lambda m(\mu). \end{aligned}$$ □

Therefore the elements variable by these actions are

$$P(\mathbf{P}\bullet\mu) = \tilde{\mathbf{P}}P(\mu), \quad P(\mathbf{T}\bullet\mu) = \tilde{\mathbf{T}}P(\mu), \quad m(\mathbf{T}\bullet\mu) = -m(\mu) \tag{2}$$

and we have the above table in Fig. 1.

3. Discussion and Conclusion

In this paper, we have performed a double extension of the restricted Poincaré group limited to its orthochronous components, which are classically used in physics. This extension also includes the transition from the four-dimensional Minkowski space-time to a new space of the same dimension, to which we have added a translation along an additional fifth dimension to form a new Lie group. The existence of this additional subgroup results in the invariance of a scalar, identified as the electric charge. A symmetry is introduced along this fifth dimension, and we have shown that this leads to the inversion of the electric charge. This provides a geometric representation of the symmetry between matter and antimatter.

In 1905, Albert Einstein revolutionized physics by introducing the theory of special relativity, integrating time, via the constant c, as a coordinate comparable to spatial dimensions in the geometry of Minkowski space. Ten years later, with his field equation, he explained phenomena such as the precession of Mercury's perihelion and the deflection of light, while laying the foundations of modern cosmology. The Big Bang theory, supported by Edwin Hubble's observations and Friedmann's work, revealed that the early universe was characterized by extreme density and temperature conditions.

Simultaneously, quantum mechanics emerged with the discovery of antimatter by Paul Dirac, an essential postulate in the cosmological model where, a fraction of a second after the Big Bang, matter and antimatter coexisted in equilibrium with gamma photons. However, the progressive disappearance of antimatter, implied by annihilations, remains a mystery, reinforced by the discovery of the cosmic microwave background in 1965.

The paradox of baryonic asymmetry found a theoretical response in 1967 with Sakharov, who postulated the existence of a twin universe symmetric to ours according to **CPT** symmetry, containing antimatter and evolving with an opposite arrow of time [16–18]. This model is based on a natural extension of fundamental symmetries, although the complete separation of the two universes leaves unresolved questions.

Within the framework of a geometric approach via dynamical groups, and building on the theory of symplectic groups by Souriau [20], we consider here an extension of Sakharov's model, the Janus model. The latter proposes an alternative vision where the two universes, far from being disjoint, are connected by a covering structure. This configuration allows gravitational interaction between particles of opposite masses, thereby redefining **CPT** symmetry in a larger geometric framework, including the antichronous components of the Poincaré group.

In conclusion, this approach not only sheds light on the path physics has taken but also suggests new avenues, offering a possible resolution to contemporary crises in cosmology, as evidenced by the data from the Hubble and James Webb telescopes. A more detailed study will be presented, including a system of coupled field equations modeling the gravitational interactions induced by these new symmetries.

Acknowledgment

Thanks to H. Zejli for correcting my many typos and improving the layout of my article. A modest task indeed, but so useful that my readers are not put off by the complexity of my scientific work.

ORCID

Jean-Pierre Petit https://orcid.org/0000-0003-3141-8584

Hicham Zejli https://orcid.org/0009-0006-8886-7101

References

[1] V. Bargmann, P. G. Bergmann and A. Einstein, *On The Five-Dimensional Representation of Gravitation and Electricity* (Cal Tech, 1941), 212 pp.
[2] P. Bergmann, *An Introduction to the Theory of Relativity* (Prentice-Hall, 1942).
[3] P. Bergmann and A. Einstein, On a generalization of Kaluza's theory of electricity, *Ann. Math.* **39** (1938) 683–701.
[4] N. Burgoyne and R. Cushman, Conjugacy classes in linear groups, *J. Algebra* **44** (1977) 339–362.
[5] R. Cushman, Adjoint orbits in the Lie algebra of the generalized real orthogonal group (2022), arXiv:2205.04407.
[6] R. Cushman, Coadjoint orbits of the odd real symplectic group (2023), arXiv:2212.00676.
[7] R. Cushman and W. van der Kallen, Adjoint and coadjoint orbits of the Poincaré group (2003), arXiv:math/0305442.

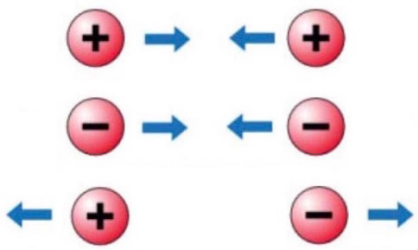
Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

[8] G. de Saxcé, Euler–Poincaré equation for Lie groups with non-null symplectic cohomology. Application to the mechanics. in *Geometric Science of Information* (Springer, 2019), pp. 66–74.
[9] G. de Saxcé and C.-M. Marle, Presentation of Jean-Marie Souriau's book "Structure des systèmes dynamiques", *Math. Mech. Compl. Syst.* (2023) 19 pages, arXiv:2306.03106, https://arxiv.org/abs/2306.03106.
[10] G. de Saxcé and C. Vallée, Construction of a central extension of a lie group from its class of symplectic cohomology, *J. Geom. Phys.* **60** (2010) 165–174.
[11] Th. Kaluza, Zum Unitätsproblem der Physik, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin* (*Math.-Phys.*) **27** (1991) 966–972.
[12] A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, *Uspehi Mat. Nauk* **17** (1962) 53–104.
[13] A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations* (Springer-Verlag, Berlin, 1976).
[14] O. Klein, Quantum theory and five-dimensional theory of relativity, *Z. Phys.* **37** (1926) 895–906.
[15] B. Kostant, *Quantization and Unitary Representations*, Lectures in Modern Analysis and Applications (Springer-Verlag, Berlin, 1970).
[16] A. D. Sakharov, Violation of CP invariance, C asymmetry, and Baryon asymmetry of the universe, *Pi'sma ZhÉTF* **5**(1) (1967) 32–35.
[17] A. D. Sakharov, Cosmological models of the universe with reversal of time's arrow, *Pi'sma ZhÉTF* **79**(3) (1980) 689–693.
[18] A. D. Sakharov, Multisheet models of the universe, *Pi'sma ZhÉTF* **82**(3) (1982) 1233–1240.
[19] J. M. Souriau, *Géométrie et relativité* (Hermann, 1964).
[20] J. M. Souriau, *Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics* (Birkhäuser Verlag, New York, 1997).
[21] P. Torasso, Quantification géométrique, opérateurs d'entrelacement et représentations unitaires de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, *Acta Math.* **150** (1983) 153–242.
[22] G. M. Tuynman, The Lagrangean in symplectic mechanics, in *Jean Leray '99 Conference Proceedings: The Karlskrona Conference in Honor of Jean Leray*, Dordrecht, 235–247.
[23] G. M. Tuynman, *Supermanifolds and Supergroups. Basic Theory*, Mathematics and its Applications, Vol. 570 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004).
[24] D. Vogan, *Noncommutative Algebras and Unitary Representations* (American Mathematical Society, 1988).
[25] D. Vogan, The method of coadjoint orbits for real reductive groups, in *Representation Theory of Lie Groups*, Vol. 8 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1999).

Rev. Math. Phys. 2025.37. Downloaded from www.worldscientific.com
by 2a01:e0a:af0:b240:195d:738:c494:8d45 on 02/24/25. Re-use and distribution is strictly not permitted, except for Open Access articles.

Cette annexe scientifique montre l'étendue et la variété des travaux qui ont été impulsés par ces documents Ummo. Si on se réfère à la publication de 1994, du la revue Nuovo Cimento, des premiers résultats de simulation numérique avaient été présentés, qui intégraient l'idée de l'interaction avec des masses négative.

Il s'agit à l'époque d'une hypothèse purement heuristique[26] concernant le sens des forces, que voici :



Dans ces années soixante-dix il était exclu que je puisse réaliser des simulations numériques avec mon Mac Intosh :



Un de mes amis, Pierre Midy, responsable du département calcul d'un laboratoire, avait accès à un Cray-one[27], qui représentait à l'époque ne nec plus ultra en matière d'ordinateur.

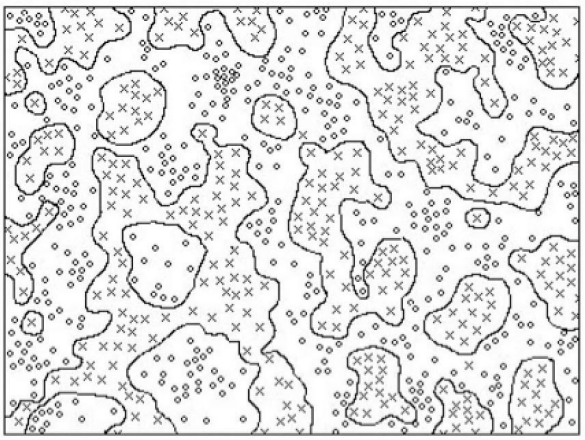
Grâce à cette machine, Midy parvient, dans des simulations 3D, à faire interagir, par la loi de Newton, 500 masses positives et 500 masses négatives. Celles-ci se séparent.

[26] Signification de ce qualificatif d'heuristique : On fait une hypothèse. On la teste à travers des expériences (ici des « expériences de calculs ») et si ça marche ion se réserve la nécessité d'en établir ultérieurement la validité et la cohérence mathématique.

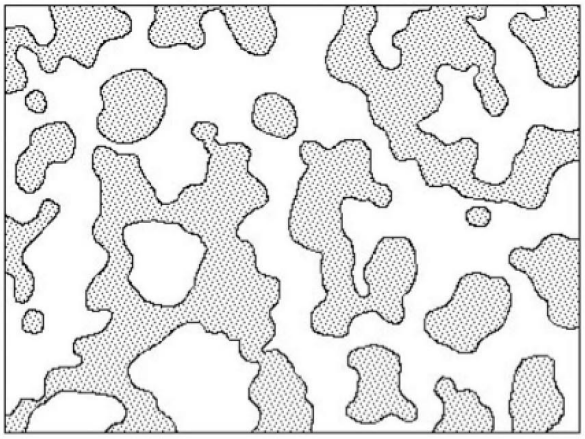
[27] Mis en service en 1976. Horloge à 80 Mégahertz. Mémoire vive 8 mégas. Un processeur. Capable d'effectuer 160 millions d'opérations élémentaires par seconde. Un PC d'aujourd'hui : Horloge à 80 fois plus rapide, 8 à 16 processeurs. Pour les simulations : 60 fois plus rapide qu'un Cray-one.



Voici les résultats de 1974 (percolation) :



spatial distribution of the two populations.



White : population 1. Grey : population 2

Mais ceux-ci ne semblent guère se prêter à une confrontation avec des observations.

Les années passent. Un jeune étudiant français, Frédéric Descamp, en thèse dans le laboratoire allemand DESY de Hambourg (Deutch Elektronen Synchrotron[28]), me rend visite, suite à la publication de mon premier ouvrage sur Ummo[29]. Il offre de reprendre ces simulations 2D sur le puissant ordinateur du centre.

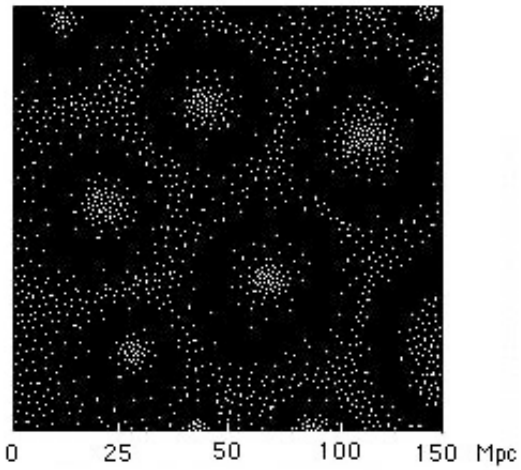
Et là, j'introduis une donnée inspirée par les textes Ummo où on peut lire :

[28] https://desy.de/index_eng.html
[29] Jean-Pierre Petit. Enquête sur des extraterrestres qui sont déjà parmi nous. Editions Albin Michel, 1991

- Dans cet autre univers il n'y a pas le même nombre de galaxies.

Il y a donc une dissymétrie entre ces deux entités. Ce monde négatif n'est donc pas simplement « une copie à masses négatives du monde positif ». Pour introduire cette dissymétrie je suggère à Descamps d'introduire une masse négative plus importante, pour ces « points-masses » de la seconde entité.

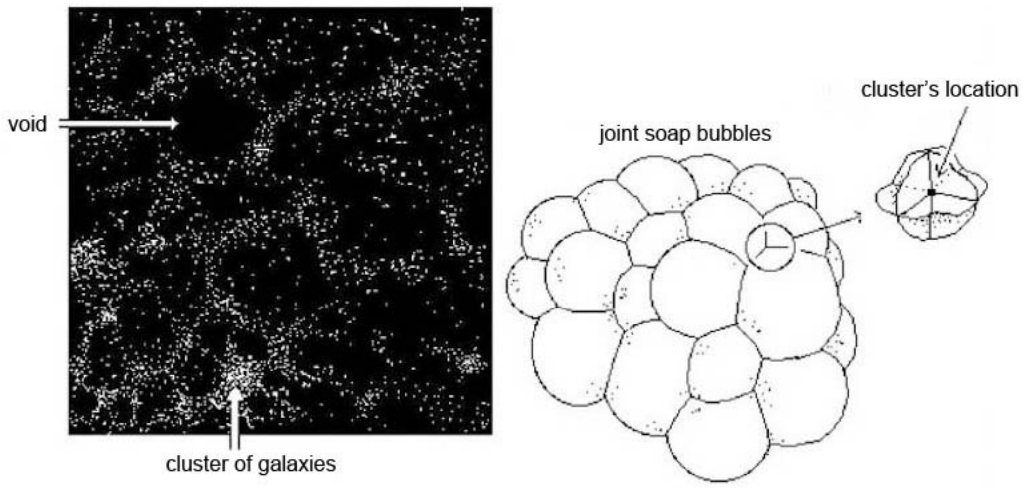
Le résultat tombe immédiatement :



Les masses négatives se rassemblent les premières, par instabilité gravitationnelle en donnant naissance à des conglomérats (sphéroïdaux en 2D). Ceux-ci contraignent la masse positive à se distribuer dans l'espace restent. En 3D elle adoptera une structure en bulles jointives. La justification théorique apparaît immédiatement. Cette instabilité gravitationnelle (instabilité de Jeans) est associée à un temps caractéristique qui varie comme l'inverse de la racine carré de la valeur absolue de la masse volumique. Comme celle des masses négatives est plus importante, ce temps est plus court au sein de cette population. Donc c'est celle-ci qui forme la première des conglomérats :

$$\rho >> \rho \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{8\,\pi\,G\,|\bar{\rho}|}} \quad << \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{8\,\pi\,G\,\rho}}$$

Il se trouve que ceci cadre avec les données observationnelles :



Ainsi les galaxies se rassemblent dans les points communs à ces différentes cellules, donnant les amas de galaxies. Selon des segments communs à trois cellules, ces galaxies donneront des filaments.

Nous sommes en 1991. Tout ceci demanderait à être repris et étendu avec des moyens de calculs conséquents. Or cela ne sera jamais fait. On peut à cet effet hasarder une explication. S'il existe aujourd'hui des « codes » permettant de gérer un nombre de points-masses impressionnant, il est vraisemblable qu'aucun ne contient la question :

- *Signe de la masse de cette population ?*

Aujourd'hui, au sein de la communauté des astrophysiciens, l'introduction des masses négative dans la dynamique n'est toujours pas à l'ordre du jour. On verra plus loin pourquoi. Je joins cela à un papier que j'étais en train de rédiger, où je reprenais la thèse des « constantes variables »[30].

Le schéma d'interaction est illustré par cette image didactique où on imagine des points masses évoluant sur le recto et le verso d'un plan :

[30] J.P.PETIT, Twin Universe Cosmology, Astrophys. and Sp. Science, **226**, 273-307, 1995
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1995-AstrophysSpaceSci.pdf

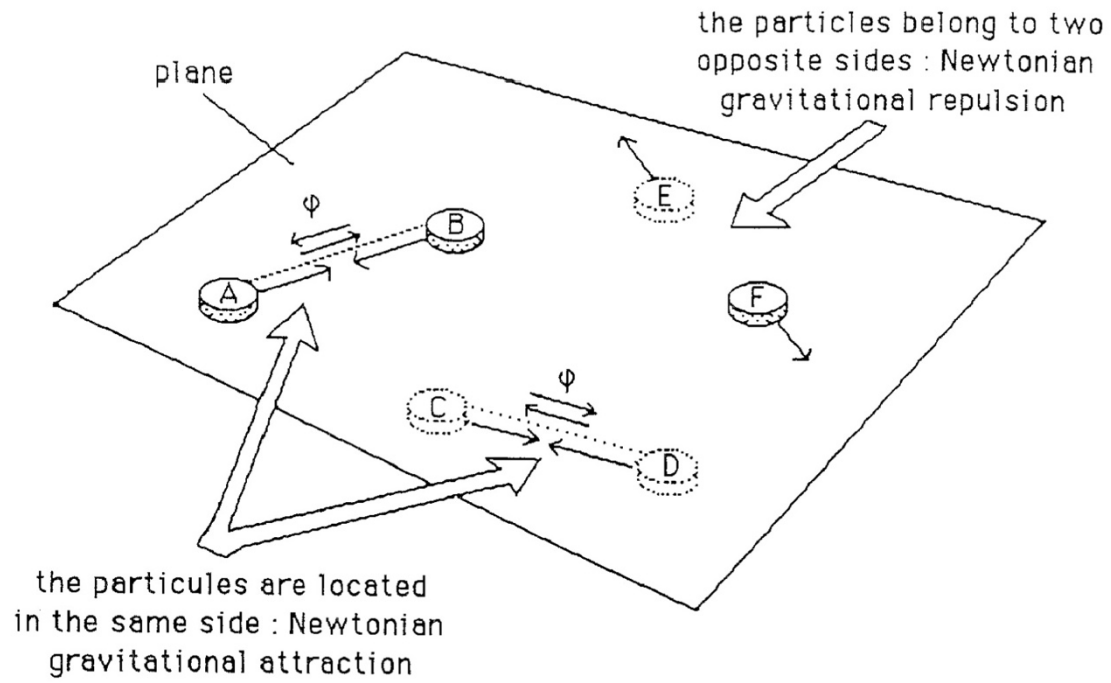


Fig. 2. Two-dimensional image of the system of forces. If the particles are on the same side, they attract each other, according to Newton's law. If they belong to opposite sides they repel each other, according to the repulsive Newton's law. Photons φ can travel from A to B and from C to D and vice-versa, for they are located on the same side. The cannot travel from E to F, and vice-versa.

Le papier introduit plusieurs idées-clés :

- Le confinement des galaxies, imputé à la répulsion exercée sur elles par la masse négative environnante.

- L'effet de lentille gravitationnel (négatif) que cette même masse négative produit sur les photons d'énergie positive.

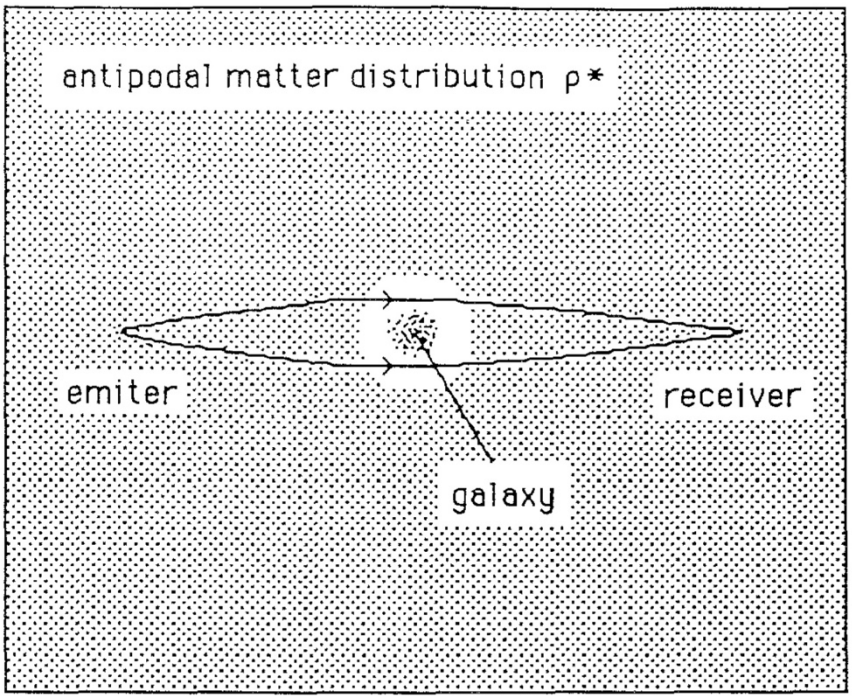


Fig. 14. Combination of the two positive gravitational lensing effect due to the galaxy and to the surrounding antipodal matter.

Nous sommes en 1991. En référence à l'article publié un an plus tôt dans Nuovo Cimento cette seconde matière est toujours qualifiée « d'antipodale ».

On montre en passage que dans ce mode d'évolution l'entropie varie comme Log t. Si on adopte alors cette entropie comme coordonnée chronologique, l'origine est repoussée .. à l'infini dans le passé.

TWIN UNIVERSES COSMOLOGY

JEAN-PIERRE PETIT*
Observatory of Marseille, France

(Received 14 July, 1994; accepted 7 February, 1995)

Abstract. Starting from the field equation $\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} - A(\mathbf{T}))$, presented in a former paper, we present a test result, based on numerical simulations, giving a new model applied to the very large structure of the Universe. A theory of inverse gravitational lensing is developed, in which the observed effects could be due mainly to the action of surrounding 'antipodal matter'. This is an alternative to the explanation based on dark matter existence. We then develop a cosmological model. Because of the hypothesis of homogeneity, the metric must be a solution of the equation $\mathbf{S} = 0$, although the total mass of the Universe is non-zero. In order to avoid the trivial solution $R =$ constant $\times\, t$, we consider a model with 'variable constants'. Then we derive the laws linking the different constants of physics: G, c, h, m; in order to keep the basic equations of physics invariant, so that the variation of these constants is not measurable in the laboratory, the only effect of this process being the red shift, due to the secular variation of these constants. All the energies are conserved, but not the masses. We find that all of the characteristic lengths (Schwarzschild, Jeans, Compton, Planck) vary like the characteristic length R, from where all the characteristic times vary like the cosmic time t. As the energy of the photon $h\nu$ is conserved over its flight, the decrease of its frequency ν is due to the growth of the Planck constant $h \approx t$. In such conditions the field equations have a single solution, corresponding to a negative curvature and to an evolution law: $R \approx t^{2/3}$.

The model is no longer isentropic and $s \approx \log t$. The cosmologic horizon varies like R, so that the homogeneity of the Universe is ensured at any time which constitues an alternative to the theory of inflation. We re-find, for moderate distances, Hubble's law. A new law: distance $= f(z)$ is derived, very close to the classical one for moderate red shifts.

Introduction

In a former paper [1] a cosmological model was presented, based on a new field equation:

$$\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} - A(\mathbf{T})) \tag{1}$$

which follows from the Lagrangian $(R^+ - R^-)$.

The Einstein equation:

$$\mathbf{S} = \chi\mathbf{T} \tag{2}$$

is a local equation, meaning that the local geometry of the universe (tensor $\mathbf{S}$) is determined by the local content of energy-matter (tensor $\mathbf{T}$). In the equation (1) we assumed that the space-time hypersurface had an $S3 \times R1$ topology and that the local geometry of the universe was determined both by the local content of energy-matter and by the content of energy-matter of the associated antipodal fold, through the antipodality relationship A.

* For scientific correspondance: 9 tour d'Aygosi, 13100, Aix-en-Provence, France.

Astrophysics and Space Science **226:** 273–307, 1995.
© 1995 *Kluwer Academic Publishers. Printed in Belgium.*

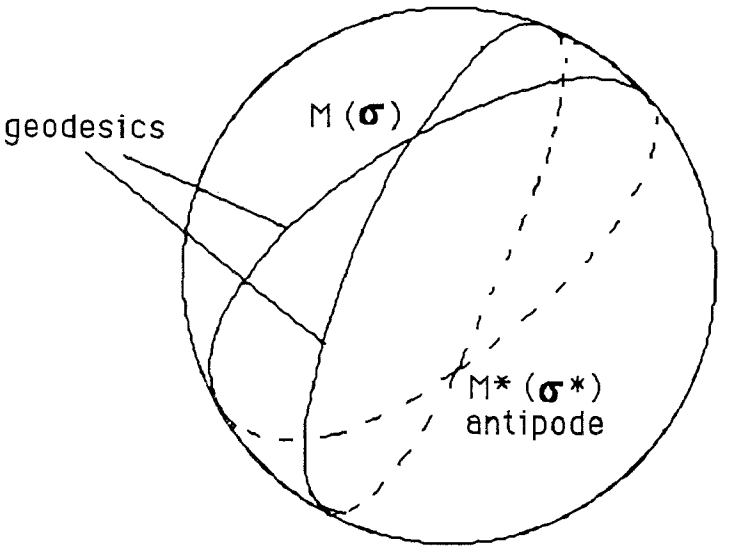


Fig. 1. The coordinate-invariant antipodality relationship.

If σ represents the space coordinates, two geodesics start from M focus at the antipodal point M^*, or $A(M)$. A is an involutive mapping. We can give a didactic image in order to schematize the physical meaning of equation (1).

Consider an $S2$ hollow sphere made of some opaque material. We suppose that, in this medium, heat does not propagate, but causes dilatation. If we deposit thermal energy in some places, the surface will be shaped by dilatation. In such a model, heat represents energy (tensor $\mathbf{T}$). The dilatation materializes the impact of the local energy content on the local geometry. Light does not propagate in this medium, as assumed. But we can assume that sonic waves can propagate and may carry information, from one point to another point.

In classical General Relativity, light is not 'contained' in the model, for the electromagnetic energy is not explicitly present in the energy tensor (although radiative pressure terms can be present in the tensor $\mathbf{T}$), so that the propagation of light along null geodesics is nothing but an hypothesis, well-confirmed by observation and experience. The analogue of the sonic waves, in the classical RG model, are the gravitational waves, that we can build, perturbing the field equation. However, we cannot build electromagnetic waves from the equation (2) and we assume that they follow the null-geodesics of the manifold, as the gravitational waves do.

In the equation (1) we assumed that light also follows the null-geodesic. Moreover, we assumed that the local geometry $\mathbf{S}$ was determined both by the local energy-matter content $\mathbf{T}$ and by the associated antipodal content $A(\mathbf{T})$. In our former paper [1], using the classical low field and small velocities approximation, we have shown that the 'antipodal matter' (located in σ^*) acted on the matter (located

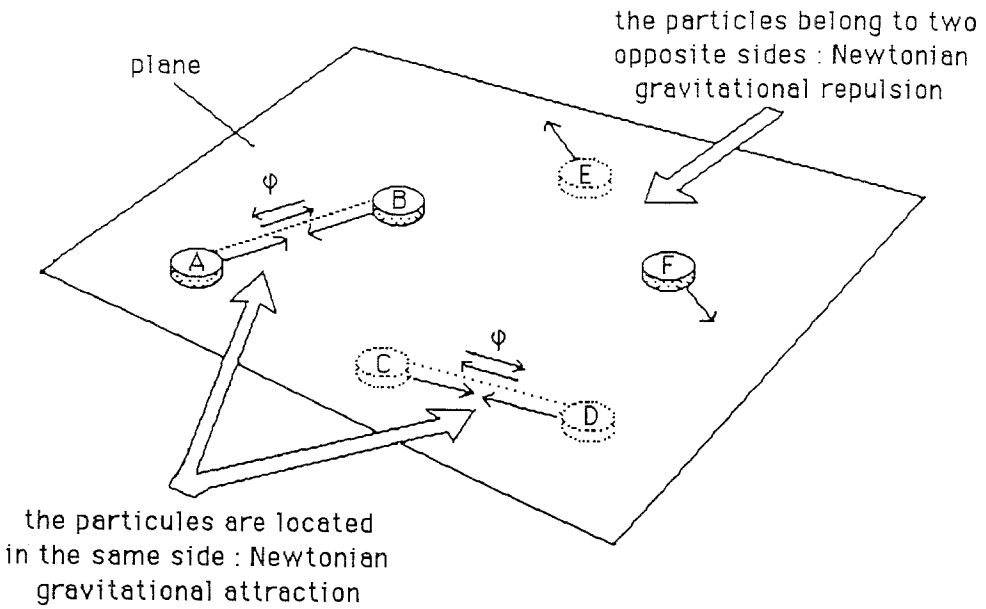


Fig. 2. Two-dimensional image of the system of forces. If the particles are on the same side, they attract each other, according to Newton's law. If they belong to opposite sides they repel each other, according to the repulsive Newton's law. Photons φ can travel from A to B and from C to D and vice-versa, for they are located on the same side. The cannot travel from E to F, and vice-versa.

in σ) as 'a repulsive negative mass distribution', due to the presence of the minus sign of the field equation (1).

We can schematize that in the following $2d$ model. Take a plane and put masses on the two sides, symbolized by small disks.

Two masses can collide, and exchange photons, if they are located on the same side. They cannot if they are located on different sides. Two masses located on the same side attract each other through Newton's law. Two masses located on opposite sides repel each other, through Newton's law. Particles located on the same side can exchange photons, but not particles located on opposite sides (the plane is opaque). See Figure 2.

In our former paper we have shown, through analytic solution, that this mechanism provided a 'missing mass effect' for an observer located on one side, if he ignores the existence of the particles located on the other one. Some results of $2d$ numerical simulations were presented [1]. They provided, on large scales, a non-homogeneous pattern. See reference [1], Figure 7.

But this does not look like the known Universe, which appears to be fairly spongy. In 1970 Zel'dovich proposed his well-known theory of the pancakes [2]. The pancake effect was first demonstrated in numerical models for the evolution of the three-dimensional mass distribution by Doroshkevich *et al.* (1980), Klypin and Shandarin (1983), and Centrella and Mellot (1983) [3, 4, 5]. Mellot and Shandarin (1990) gave an elegant demonstration of the effect by using two-dimensional computations that afforded considerably better resolution for a given particle number, see reference [6]. Shandarin (1988) and Kofma, Pogosyan and Shandarin (1990) presented a powerful semianalytic method for predicting the positions of pancakes from the initial conditions [7 and 8]. More recently (1992) Mellot used a $3d$ set of 64^3 particles, with periodic boundary conditions. From Mellot, the density fluctuations remains small. As pointed out by Peebles in 1993 [9]: "This cannot be the whole story, for the pancakes found are a transient effect: with increasing time the mass in the pancakes drains into clumps that are concentrated in all the three dimensions. This means that if the local sheet of galaxies were a pancake, it must have been formed recently". Then Peebles asked: "could there be a second generation of pancakes that form by the collective collapse of the groups of the clumps that formed out of the first generation?" He concluded immediately: "This does not follow from the analysis given, for it depends on the continuity of the velocity field that allows to write down a series expansion for the evolution of the relative positions. After the formation of the first generation of clumps, which might be the galaxies of their progenitors, the velocity field in general does not have the coherence length, and the analysis from the continuity does not apply".

As a conclusion the pancake theory cannot describe, in its present state, the observed large scale structure.

1. Large Scale Structure and 'Twin Universe Model'

We assumed in the previous paper [1] that the Universe had an $S3 \times R1$ geometry. Any region of the universe interacts antigravitationally with its associated antipoda region, through equation (1). There is a single kind of positive matter m, filling the $S3$ sphere. Then the total mass of the Universe is non-zero. In the reference [1] several didactic $2d$ images (Figures 10, 11 and 12) were given, in order to explain the mechanisms of the interactions of the two adjacent folds.

Using a boosted HP work-station and a set of 2×5000 interacting points, F. Lansheat confirmed the work of Pierre Midy (reference [1], Figure 8). He then focussed on a smaller region, indicated in Figure 3, in which the density of the matter in the 'adjacent fold' was much higher than in the other fold.

As expected, the gravitational instability still occurs and provides new conjugated structures. See Figures 4 and 5.

The matter of the twin fold forms big stable clumps, which repel the matter of our fold of the universe, this last taking place in the remnant space. In opposition to

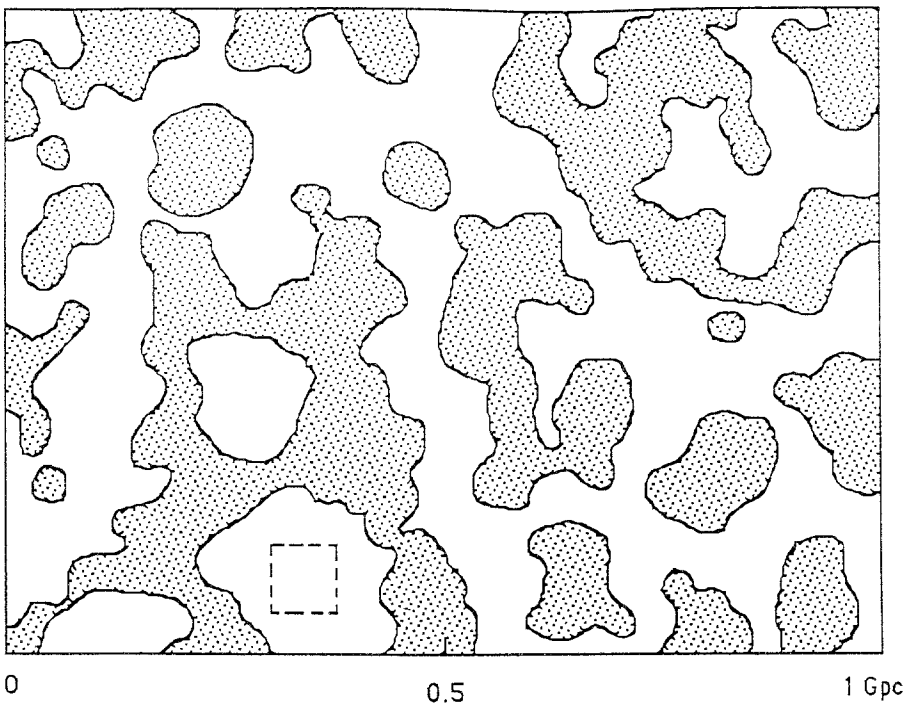


Fig. 3. Dotted square. Focussing on some portion of the very large scale structure in which the density of matter in the first fold (supposedly ours, grey color) is supposed to be smaller than the density of matter in the adjacent fold (white color).

the pancake model numerical simulations, this pattern is fairly non-linear. After its formation, corresponding to the Jeans time of the high density system ($2\ 10^9$ years), there is no significant evolution of the general pattern over a time comparable to the age of the Universe, so that this model could be a good candidate to explain the observed spongy aspect of our fold of the Universe at large scale.

2. $2d$ and $3d$ Simulations

From the results of the $2d$ simulation, F. Lansheat performed a 2 point correlation and compared to the $2d$ correlation obtained from a grey distribution of points (Poisson distribution). The result is shown in the Figure 6. The left hand of the curve is not relevant, for the distance between the points becomes comparable to the mean distance of the random distribution. The growth on the right hand is just an artifact due to the border of the field (periodic boundary). This result cannot be compared directly to the empirical law derived from observational data

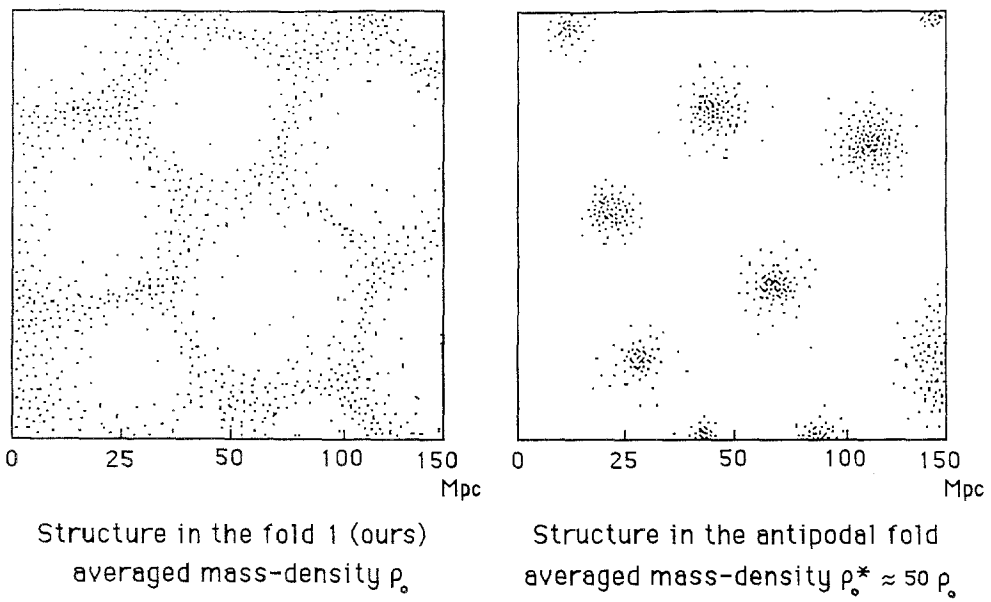


Fig. 4. Results of simulations performed by F. Lansheat, showing the large structure of the Universe, due to the interaction of the two adjacent folds. Mean value of $\rho^* = 50$ times the mean value of ρ (left). Left: cellular structure. Right: cluster structure.

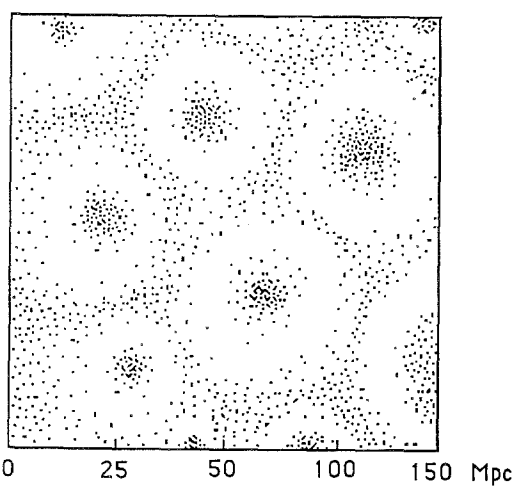


Fig. 5. The same, superimposed.

(slope -1.8); see the surveys of Bahcall (1988) [31], Bahcall and Soneira (1983) [32]. Bahcall and West (1992) [33], and Luo and Schramm (1992) [34]. Three-dimensional simulations have to be performed, with a larger number of points. If possible, a fit with the observational data would provide the ratio of the mass densities of the two universes.

How does one outline a scenario for the formation of large-scale cosmological structure in this model? As long as the coupling between mass and light remains strong ($t < 10^5$ years), the Universe remains homogeneous and all the processes linked to the gravitational instability (formation of clumps, galaxies, stars and spongy structure) are frozen. When the Universe becomes transparent we can assume that all of these processes occur, with their proper characteristic times of formation and evolution. All that we can say is that the suggested very large structure forms in $2\ 10^9$ years.

3. Inverse Gravitational Lensing

The problem of gravitational lensing must be reconsidered. As suggested in the previous paper [1], in the present model the confinement of the galaxies is due mainly to the action of the surrounding antipodal matter, located in the twin fold, to be consistent with the strong missing mass effect. Numerical simulations provided some description of a galaxy, surrounded by halos of antipodal matter [1]. See Figure 7.

As a confirmation of this confinement effect, if we remove the antipodal matter from the system, the central object dissipates immediately. Although this figure concentrates on the surrounding halo, all the surrounding antipodal matter contributes to this confinement effect, so that we can figure schematically the galaxies as nested in some sort of holes of the antipodal matter, as suggested in the Figure 8. The intensity of the confinement effect depends obviously on the density ρ^* of the antipodal distribution, which should be at least ten times larger than ρ.

Classically, matter 'attracts' photons and produces gravitational lensing. The trajectory of photons, bent by the presence of a positive point-mass can be computed from a Schwarzschild solution:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^\circ)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi) \tag{3}$$

Notice that m is an arbitrary constant of integration. For weak fields and slowly moving bodies we can link the g_{00} term of the metric to the gravitational potential Ψ through:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Psi}{c^2} \tag{4}$$

The gravitational potential, due to a mass M is:

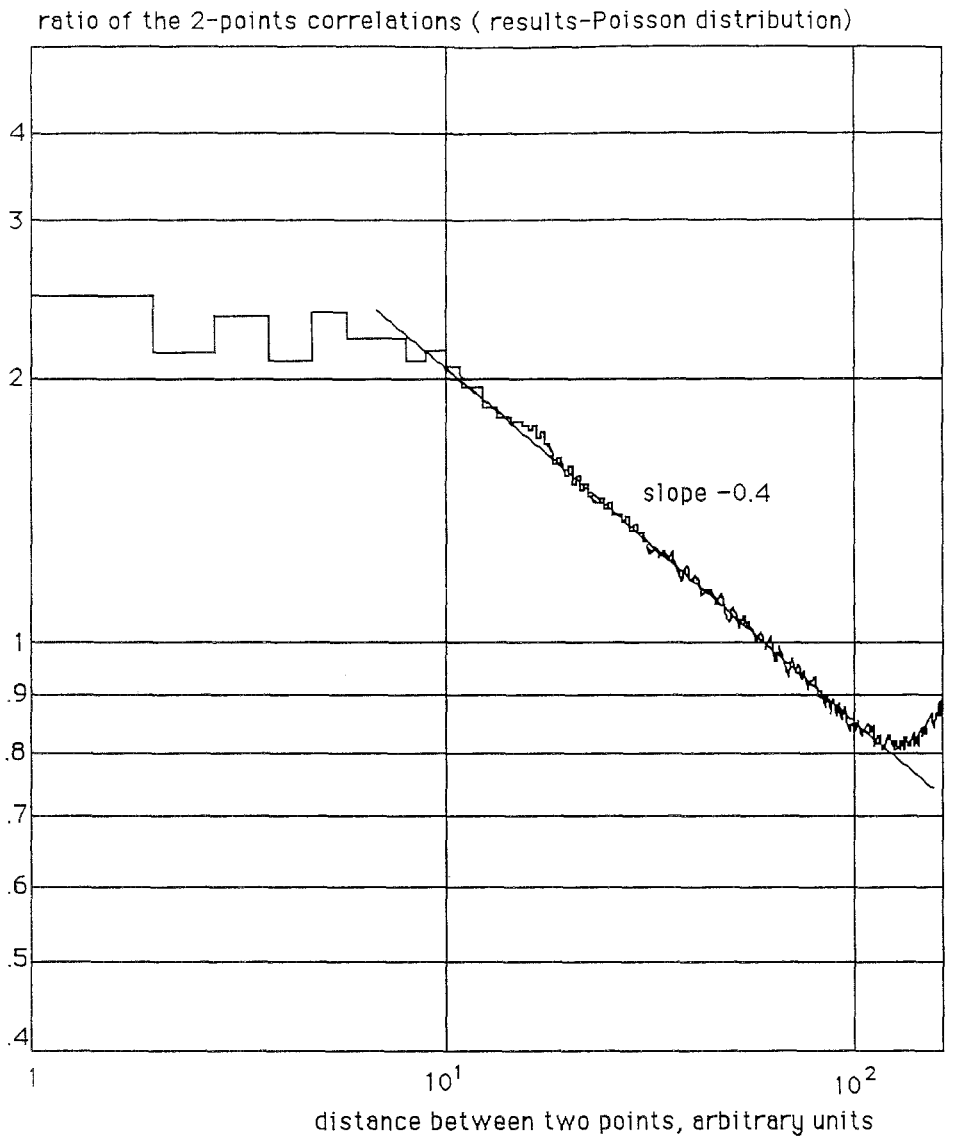


Fig. 6. The slope of the curve of the 2-points correlations ratio (numerical simulation versus Poisson random distribution).

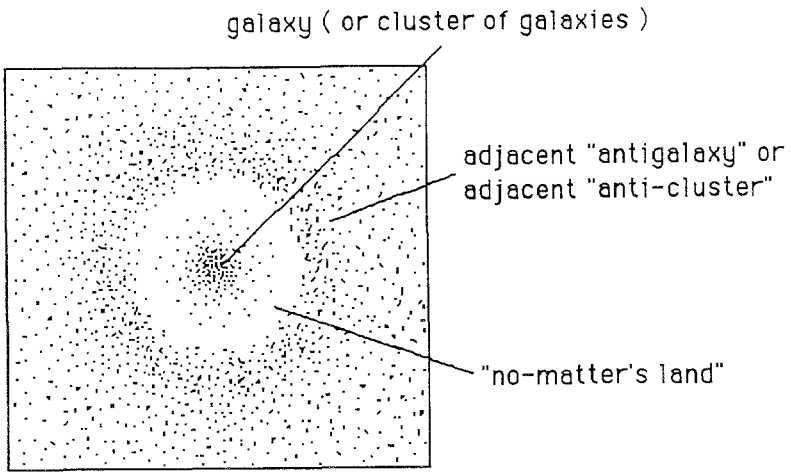


Fig. 7. Concentration of mass confined by the action of the surrounding antipodal matter from $2d$ numerical simulations.

$$\Psi = -\frac{GM}{r} \tag{5}$$

whatever this mass, M would be positive or negative. If M is negative, it repels the test particle. Then

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2GM}{rc^2} \tag{6}$$

whence:

$$m = \frac{GM}{c^2} \text{ (positive or negative)} \tag{7}$$

If M is positive the characteristic Schwarzschild length is

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{8}$$

As pointed out above, m is nothing but an arbitrary constant of integration in the Schwarzschild solution. If we take $m < 0$ then the associated mass M becomes negative. We can define a characteristic length, positive (the Schwarzschild radius R_s) from:

$$m < 0 \quad M = \frac{mc^2}{G} < 0 \quad R_s = -\frac{2GM}{c^2} > 0 \tag{9}$$

The trajectory, in polar coordinates, corresponds to:

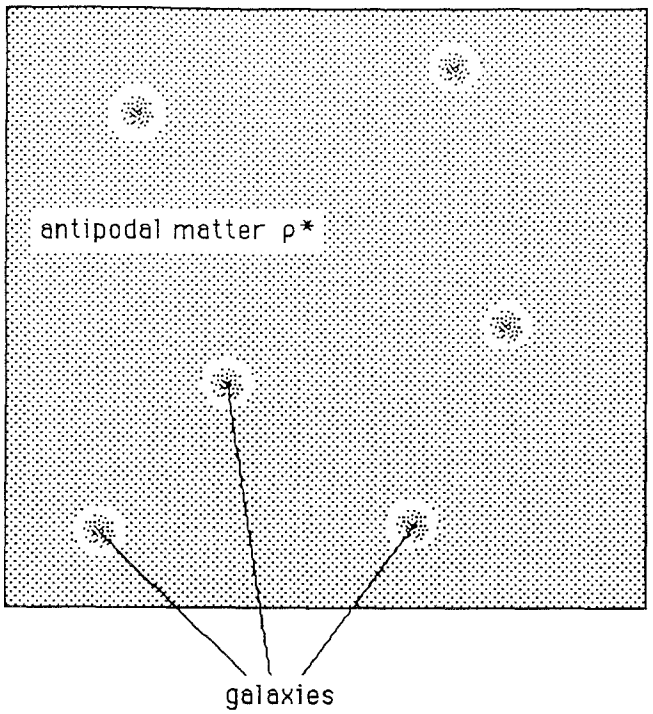


Fig. 8. Galaxies nesting in a wide antipodal matter cloud (the galaxy and the antipodal matter repel each other).

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{c^2l^2-1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u - u^2 + 2mu^3}} \tag{10}$$

See reference [10], p. 203. For the photon, following the null geodesics, we get

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{c^2l^2}{h^2} - u^2 + 2mu^3}} \tag{11}$$

φ is the polar angle for this plane trajectory. $u = 1/r$.

A positive mass ($M > 0$; $m > 0$) produces a positive gravitational lensing:

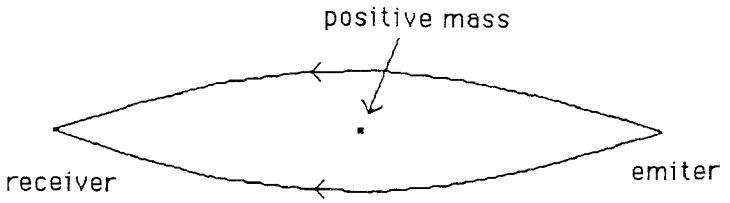


Fig. 9. Classical (positive) gravitational lensing.

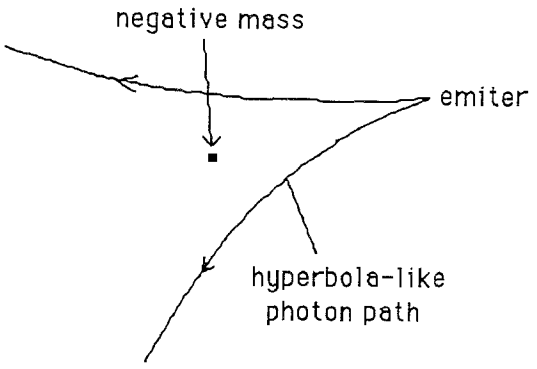


Fig. 10. Negative lensing effect due to a 'negative' mass.

For a test particle, located in one fold, a mass located in the adjacent fold behaves like a repulsive negative mass ($M < 0$; $m < 0$) and then produces a negative lensing effect:

Notice that these hyperbolic paths are familiar to specialists of plasma physics ($e - e$ or $p - p$ scatterings).

Let us schematize the situation. Consider a homogeneous distribution of antipodal matter. In this distribution we find, in some places, holes in which the galaxies nest.

A hole in a distribution of negative mass produces a positive gravitational lensing effect.

Qualitatively this is equivalent to the effect due to a homogeneous sphere of positive mass. See Figure 13.

Classically one uses the gravitational lensing to evaluate the so-called invisible mass contained in a galaxy. People used to say: "the dark matter exists in our galaxy: we measure it, through the missing mass effect". In this twin cosmological model a strong lensing effect should not be a proof of the existence of invisible mass in a

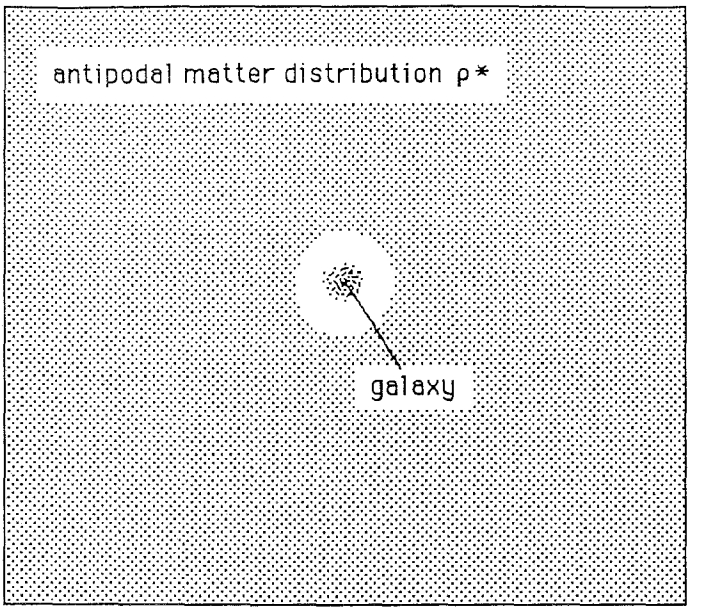


Fig. 11. A galaxy nesting in an homogeneous cloud of antipodal matter.

galaxy, but could be due to the action of the invisible surrounding antipodal matter, which could be evaluated from the measured effects. See the Figure 14.

In our galaxy the mass necessary to prevent the explosion by centrifugal force is about 10 times higher than the observed mass. If the confinement effect is due to the action of surrounding invisible antipodal matter, it means that the effect of this invisible matter is important. This could be quite general in the region of the universe we live in. All the neigbour galaxies could then be surrounded by dense halos of antipodal matter, and the observed gravitational lensing should be due mostly to the antipodal material rather than to the galaxies themselves.

The model based on the equation (1) gives a new insight on the missing mass problem [1] and on the very large structure of the Universe. This work was based on the low field and weak velocities hypothesis and refered to a quasi-steady Universe, at cosmologic scale, with respect to space and time. In order to complete this cosmological model we have now to study the evolution of the Universe as a whole.

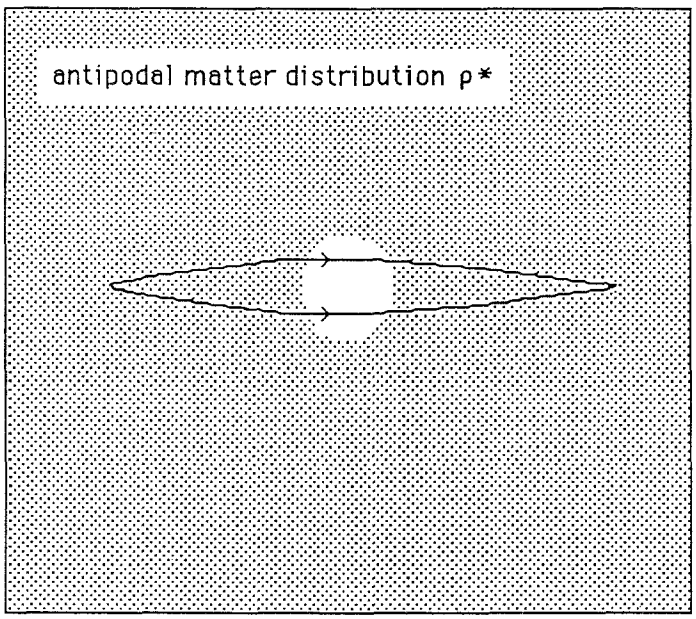


Fig. 12. Induced positive gravitational lensing effect.

4. About the Constancy of G and c

Consider the two quantities G (gravitation) and c (velocity of the light). They are involved in the constant of Einstein χ. This last is classically determined as the following.

The metric is expressed as:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(L)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \tag{12}$$

where $g_{\mu\nu}^{(L)}$ is the Lorentz metric tensor and $\varepsilon\gamma_{\mu\nu}$ represents a very small time-independant perturbation (nearly Lorentzian metric tensor). Furthermore, in order to make a close connection with classical theory, one supposes that the velocity of a particle along a geodesic is much less than c, i.e.:

$$\left(\frac{ds}{dx^{\circ}}\right)^2 \cong (1 + \varepsilon\gamma_{\infty}) \tag{13}$$

One next applies the same approximation to the differential equation of a geodesic:

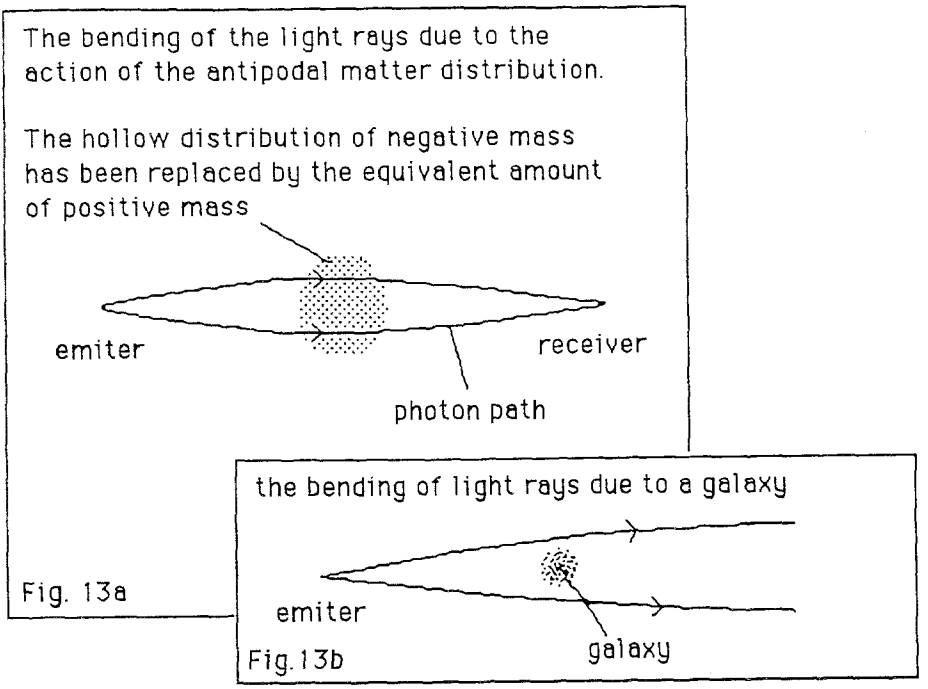


Fig. 13. 13a: Positive gravitational lensing effect due to the distribution of antipodal matter (acting like a negative mass). We have replaced the hollow by an equivalent amount of positive mass. Compared positive lensing due to a galaxy (Fig. 13b).

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \begin{pmatrix} & \alpha & \\ \eta & & \tau \end{pmatrix} \frac{dx^\eta}{ds}\frac{dx^\tau}{ds} = 0 \tag{14}$$

And then we get

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \begin{Bmatrix} & \alpha & \\ \circ & & \circ \end{Bmatrix} \left(\frac{dx^\circ}{ds}\right)^2 = 0 \tag{15}$$

Beyond the steady state conditions, one uses to write:

$$dx^\circ = c\,dt \tag{16}$$

which introduces both the light velocity c and the time t. In addition:

$$\begin{Bmatrix} & \alpha & \\ 0 & & 0 \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\gamma_{00}|\alpha \tag{17}$$

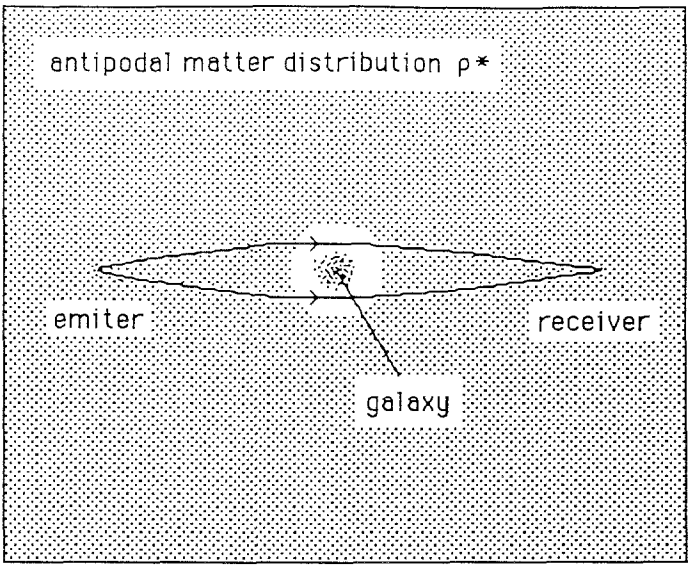


Fig. 14. Combination of the two positive gravitational lensing effect due to the galaxy and to the surrounding antipodal matter.

The geodesic equation becomes:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{00}|\alpha \tag{18}$$

If we identify with the Newtonian model, we can relate the gravitational perturbation potential to the metric through:

$$\Psi = \frac{c^2}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{00} \quad \text{or} \quad g_{00} \cong 1 + \frac{2\Psi}{c^2} \tag{19}$$

If we consider a medium with low density ρ_0 and low velocity, the matter energy tensor reduces to:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{20}$$

whose trace is ρ_0. Then the second member of the field equation becomes:

$$\chi(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\,T) = \frac{\chi\rho_0}{2}\,\delta_{\mu\nu} \tag{21}$$

Still in steady hypothesis condition, we get:

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \gamma_{00|i|i} = -\chi \rho_0 \tag{22}$$

Identifying with Poisson equation, we determine the unknown constant χ of the field equation:

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2} \tag{23}$$

If χ is not considered as an absolute constant, the zero-divergence of the field equation (1) is no longer ensured, according to the hypothesis $\partial \mathbf{T} = 0$, which provides conservation equations of physics. But let us point out that the constancy of χ does not require separately the constancy of G and c, for we determined (23) from a time-independent metric (12). Then we can shift towards the less restrictive condition:

$$\frac{G}{c^2} \approx \text{constant} \tag{24}$$

This idea was suggested by this author in 1988–89 in the papers [12,13,14]. But, as far as we know, the idea of a secular variation of the light velocity, was introduced earlier by V.S. Troitskii [11].

5. The Robertson-Walker Metric

Assuming that the Universe is isotropic and can be described by a Riemanian metric we get the classic Robertson metric:

$$ds^2 = (dx^\circ)^2 - e^{g(x^\circ)} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}\frac{r^2}{r_\circ^2}\right)^2} (dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\, \sin^2\, \theta\, d\varphi^2) \tag{25}$$

If the Universe is assumed to be homogeneous, then $\mathbf{T} = A(\mathbf{T})$ and the spatially homogeneous cosmological solution comes from:

$$\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} - A(\mathbf{T})) = 0 \tag{26}$$

This metric must be introduced in the equation (1), with a zero second member. Then we get the following set of two equations:

$$\left(\frac{dR}{dx^\circ}\right)^2 + k = 0 \tag{27}$$

$$\frac{2}{R}\frac{d^2R}{dx^{\circ 2}} + \frac{k}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dx^\circ}\right)^2 = 0 \tag{28}$$

From (27) and (28) we get

$$k = -1 \text{ (negative curvature)} \quad \text{and } R = x^{\circ} \tag{29}$$

x° is a 'chronological marker'. Notice that one has a single solution ($k = -1$). If we identify, classically, x° to ct, c being considered as an absolute constant, we get the well-known trivial solution $R = ct$. Doing that, we define somewhat arbitrarily the cosmic time t. But it can be defined differently, in a non-standard way, as will be shown in the following.

6. A Model with 'Variable Constants'

The hypothesis of the constancy of the so-called constants of physics was first challenged by Milne [15]; then by other authors: P.A. Dirac [16 and 17], F. Hoyle and J.V. Narlikar [18], V. Canuto and J. Lodenquai [19], T.C. van Flandern [20], V. Canuto and S.H. Hsieh [20], A. Julg [21] (developed ideas mainly based on the variation of G). Time-dependent G has also considered by Brans and Dicke [22]; and time dependent e by Ratra [23]. Guth [24], Sugiyama and Sato [25] and Yoshii and Sato [26] considered a time-variable cosmological constant. In general these approaches focused on the variation of a certain number of 'constants', not of all the constants, in a combined fashion, are developed in the present paper. H. Reeves [27] studied the impact of the separate variations of the constants, one after the other. V.S. Troistkii [28] first suggested in 1987 the possible variation of c, and, in general, of all the 'constants', but, after choosing a leading parameter he just tried to adjust the different exponents, associated to *a priori* polynomial empiric laws, to fit with observational features.

In the present paper we are going to build a cosmological where all the 'constants' vary conjointly. This will be made consistent with the field equation (1). We are going to search for laws that let the equations of physics be invariant, so that these variations cannot be evidenced in local lab experiments. These equations follow.

The Schrödinger equation:

$$-\frac{h^2}{2m}\,\Delta\Psi + U\Psi = i\,\frac{h}{2\pi}\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{30}$$

The Boltzmann equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \int (f' f_1' - f f_1)\, g\, a\, da\, d\omega\, d^3\mathbf{v} \tag{31}$$

where f is the distribution function of the velocity $\mathbf{v}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, t the time, (g, a, ω) the classic impact parameters of a binary collision.

The (new) Poisson equation for gravitation (see reference [1]) is:

$$\Delta\phi = 4\pi G(\rho - \rho^*) \tag{32}$$

ρ is the mass density in our fold of the Universe and ρ^* the mass-density in the twin fold.

The (new) field equation

$$\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \tag{33}$$

where:

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2} \tag{34}$$

is the Einstein constant, G the 'constant' of gravity and c the velocity of the light.

The Maxwell equations are:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{35}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{36}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{37}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = 0 \tag{38}$$

$\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are, respectively, the electric and magnetic fields. We consider the Maxwell equation for a neutral medium, for we assume that the Universe is electrically neutral. These equations are not all independent. For an example, the Poisson equation, for gravitation (32), comes from the field equation (33), see [1].

Introducing a characteristic length R and a characteristic time T we can write these characteristic equations into an adimensional form:

The Schrödinger equation (30), with:

$$\mathbf{r} = R\xi \quad \nabla = \frac{1}{R}\,\delta \quad t = T\tau \tag{39}$$

$$U = \frac{h^2}{2mR^2}\,u \tag{40}$$

becomes:

$$-\frac{h^2}{2mR^2}\,(\delta^2\Psi + u\Psi) = i\,\frac{h}{2\pi T}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \tag{41}$$

The Boltzmann equation (31), with:

$$\mathbf{v} = c\zeta \quad \mathbf{r} = R\xi \quad g = c\gamma \quad a = R\alpha \tag{42}$$

$$f = \frac{n}{\langle V \rangle^3}\,e^{\frac{-v^2}{\langle V \rangle^2}} \tag{43}$$

$$f = \frac{1}{R^3 c^3}\,\eta \tag{44}$$

$$f = \frac{1}{R^3 c^3}\,\eta \quad n = \frac{1}{R^3}\,\varpi \quad \phi = \frac{GM}{R}\,\varphi \tag{45}$$

becomes:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{c}{R}\frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{Gm}{R^2 c}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{c}{R}\int (\eta'\eta'_1 - \eta\eta_1)\,\gamma\alpha\, d\alpha\, d\omega\, d^3\zeta \tag{46}$$

The Poisson equation for the gravitational potential (32), with:

$$\phi = \frac{Gm}{R}\,\varphi \quad n = \frac{1}{R^3}\,\varpi \quad n^* = \frac{1}{R^3}\,\varpi^* \tag{47}$$

$$\frac{Gm}{R^3}\,\delta^2\varphi = 4\pi\,\frac{Gm}{R^3}\,(\varpi - \varpi^*) \tag{48}$$

becomes:

$$\delta^2\varphi = 4\pi(\varpi - \varpi^*) \tag{49}$$

The Maxwell equations (35), (36), (37), (38), with:

$$\nabla = R\delta \quad t = T\tau \quad \mathbf{B} = B^*\beta \quad E = E^*\varepsilon \quad \rho_e = \frac{e}{\varepsilon_0 R^3}\,\varpi_e \tag{50}$$

where e is the electric charge (we assume that the number of electric charges is conserved) become:

$$\frac{B^*}{R}\,\delta \times \beta = \frac{E^*}{c^2 T}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tag{51}$$

$$\frac{E^*}{R}\,\delta \times \varepsilon = -\frac{B^*}{T}\,\frac{\partial \beta}{\partial \tau} \tag{52}$$

$$\delta \cdot \beta = 0 \tag{53}$$

$$\frac{E^*}{R}\,\delta \cdot \varepsilon + \frac{e}{\varepsilon_0 R^3}\,\varpi_e = 0 \tag{54}$$

In these equations we find a certain number of physical constants:

$$h,\ m,\ c,\ G \tag{55}$$

The invariance of the Schrödinger equation is ensured if:

$$\frac{hT}{mR^2} = Cte \tag{56}$$

The Boltzmann equation is invariant if:

$$\frac{1}{T} \approx \frac{c}{R} \approx \frac{Gm}{R^2 c} \tag{57}$$

The Poisson equation for gravitation poses no particular problem and just becomes

$$\delta^2 \varphi = 4\pi(\varpi - \varpi^*) \tag{58}$$

From the Maxwell equations we get:

$$R \approx cT \tag{59}$$

$$\frac{E^*}{R} = \frac{e}{\varepsilon_0 R^3} \tag{60}$$

which is consistent with the definition of an electric field due to an electric charge.

From the Einstein equation, as pointed out earlier, we get:

$$G \approx c^2 \tag{61}$$

If not, the equation is no longer divergenceless.

If the quantities:

$$h,\ m,\ c,\ G,\ R,\ T \tag{62}$$

obey these relations, *it will not be possible to have evidence of their variations in any in-lab experiment.*

So what?

From (57) we get immediately:

$$\frac{Gm}{c^2} \approx R \tag{63}$$

which is nothing but the characteristic Schwarzschild length, so that:

$$R_s \approx R \tag{64}$$

Examine now the Jeans' length:

$$L_j = \frac{\langle V \rangle}{\sqrt{4\pi G \rho m}} \tag{65}$$

where:

$$\langle V \rangle = c \langle \zeta \rangle$$

$$L_j = \frac{cR^{3/2}}{\sqrt{Gm}} \frac{\langle \zeta \rangle}{\sqrt{4\pi \varpi}} \tag{66}$$

$$\frac{Gm}{c^2} \approx R \quad \frac{c}{\sqrt{Gm}} \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \quad L_j = R\frac{\langle\zeta\rangle}{\sqrt{4\pi\varpi}}$$
$$L_j \approx R \tag{67}$$

Combine the equations (56) and (57), we get:

$$\frac{hT}{mR^2} = \frac{h}{mR^2}\frac{R}{c} = Cte$$
$$\frac{h}{mc} \approx R \tag{68}$$

The Compton Length varies like R:

$$R_c \approx R \tag{69}$$

The Planck length is:

$$L_p = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} = \sqrt{\frac{h}{c}\frac{G}{c^2}}$$
$$L_p \approx R \tag{70}$$

The Planck time is:

$$t_p = \sqrt{\frac{hG}{c^5}} = \frac{R}{c} \approx T \tag{71}$$

The Jeans time is:

$$t_J = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}} \approx T \tag{72}$$

Combining (61) and (63) we get:

$$m \approx R \tag{73}$$

The variation of the constants does not conserve the mass.

If we conserve the number of species, the mass density ρ is found to obey:

$$\rho = nm = \frac{\varpi}{R^3}\, m \quad \rho \approx \frac{1}{R^2} \tag{74}$$

This is the same law for the contribution ρ_r of the radiation to the density ρ. The conservation of the radiative energy gives:

$$p_r R^3 = \text{constant} \tag{75}$$

Then:

$$p_r = \frac{\rho_r c^2}{3} \rightarrow \rho_r \approx \frac{1}{R^2} \tag{76}$$

7. The Variation of the Constants of Physics in the Framework of an Hypothesis of Generalized Conservation of the Energies

In the standard model of the Universe the mass is conserved, but not the energy. The energy-matter is composed both by massive particles and by photons. Each owns a mass-density, respectively: ρ_m and ρ_r. Today:

$$\rho_m \gg \rho_r \tag{77}$$

The pressure is a density of energy. Today we have:

$$p_m \ll p_r \tag{78}$$

In the standard model we impose the conservation of the mass mc^2, not the conservation of the energy of the cosmic background photons $h\nu$, which varies like $1/R$. Let us consider the opposite hypothesis and conserve the energy, but not the mass. Then:

$$mc^2 = Cte \tag{79}$$

whence:

$$c \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \tag{80}$$

We get a model where the velocity of the light is no longer considered an absolute constant. *But, as we insist above, this cannot be evidenced in a laboratory*, for the 'constants' involved in the considered phenomena, according to our hypothesis, follow this process too.

In addition:

$$G \approx \frac{1}{R} \tag{81}$$

$$h\nu \approx \frac{h}{T} = Cte \quad h \approx T \tag{82}$$

Anyone of the considered parameters: G, c, m, R, h, T can be chosen as an evolution parameter. If we take T as an evolution parameter (V.S. Troistkii [28] considered c as an evolution parameter), we get:

$$R \approx t^{2/3}$$

$$G \approx t^{-2/3}$$

$$m \approx t^{2/3}$$

$$h \approx t \tag{83}$$

$$c \approx t^{-1/3}$$

$$\rho \approx t^{-4/3}$$

$$v \approx t^{-1/3}$$

$$L_j \text{ (Jeans)} \approx L_p \text{ (Planck)} \approx L_c \text{ (Compton)} \approx R_s \text{ (Schwarzschil)} \approx R$$

All these lengths vary like $t^{2/3}$.
In addition we have:

$$t_j \text{ (Jeans)} \approx t_p \text{ (Planck)} \approx T \tag{84}$$

And:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Cte \quad h\nu = Cte \tag{85}$$

We get a model in which all the characteristic lengths vary like R and all the characteristic times vary like T.

For an example, if we consider a two-bodies system, orbiting around their common center of gravity, we find that the radius of the orbit varies like R and the orbitation period varies like T.

Now, what could be the observational consequences of such a model?

This process cannot be evidenced in a lab. The only observable effect is the red shift.

8. The Red Shift as an Observational Effect due to the Secular Variation of the Constants of Physics. The Question of the Expansion of the Universe

We will identify the parameter T to the cosmic time t, running the events of the universe. According to our hypothesis, the energy of a travelling photon is conserved, but as

$$h \approx t$$

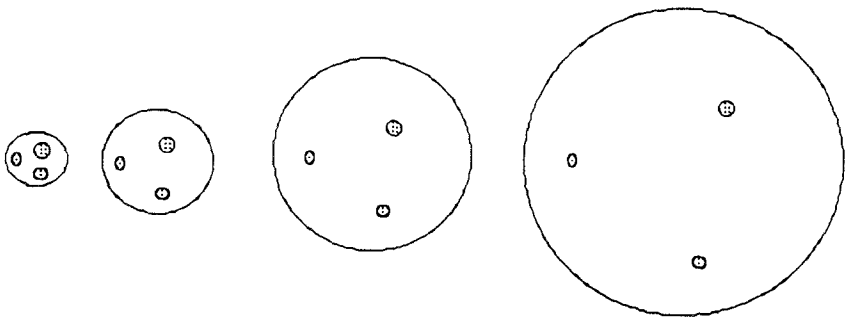


Fig. 15. Standard model: the containment expands, not the contents.

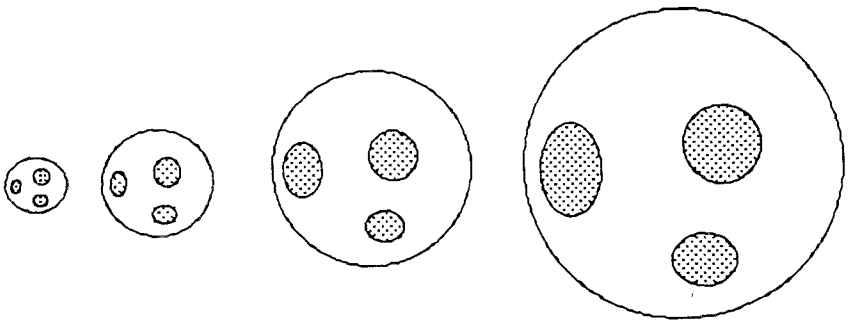


Fig. 16. Present model, both expand (the concept of an expansion looses its significance, for there is no longer a reference scale).

then

$$\nu \approx \frac{1}{t} \tag{86}$$

This idea was first introduced by E.A. Mine [15]. In an astronomical observatory we measure the frequency of the received photon and we find a red shift, that we interpret in terms of the variation of its energy, due to an expansion process. But if we consider that the energy is conserved over its long flight this red shift effect can be reinterpreted in terms of the secular variation of the Planck constant.

We then ask 'is the Universe expanding?' this questions falls, for all the objects of the Universe follow the above process: the massive bodies, the stars, the galaxies, and the Universe itself.

If we consider that the Universe is expanding, it implies that its content (the particles, the galaxies) does not expand in time, in order to have a reference scale.

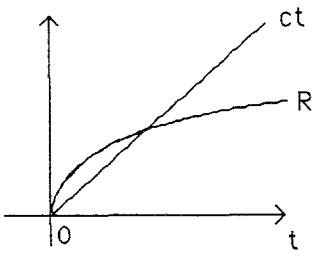


Fig. 17. Comparison of the evolution of the characteristic length of the Universe with the cosmological horizon, in an Eintein-de Sitter model.

If the contents of the Universe undergoes the same process as the Universe itself (a gauge process) the question of the expansion becomes irrelevant.

In the present model, in the laboratory, the instruments vary like any length we want to measure, for both follow the process. The question of the expansion becomes irrelevant and the only observable phenomenon, evidencing the cosmic evolutions is the red shift, which is no longer connected to the Doppler-Fizeau effect, but to the secular variation of h, combined to the hypothesis of the conservation of the photon energy $h\nu$ during its flight.

9. The Problem of the Cosmological Horizon

Classically this the cosmologic horizon is defined as ct, from which arises a paradox. The observed Universe is very homogeneous, at large scale. If we compare any characteristic distance $R(t)$ (for example, the mean distance between particles), with the horizon, we get:

In the present model the cosmological horizon becomes the following integral:

$$H = \int_0^t c(\tau)\, d\tau \approx t^{2/3} \approx R \tag{87}$$

If the Universe was homogeneous at the beginning, the collisional process, always present, tends to maintain this homogeneity. If it was not, it tends to smooth it. This constitutes an alternative to the theory of inflation.

This law between $R \approx t^{2/3}$ must not be considered as an expansion process but as a consequence of the secular variation of the constants of physics, a gauge process, whose single observable effect is the red shift.

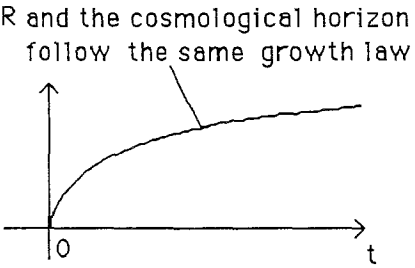


Fig. 18. Comparison of the evolution of the characteristic length R of the Universe with the cosmological horizon, in the present model. They have the same variation in time.

10. The Link with the Robertson-Walker Geometry

All this is compatible with the solution (34) if we give the following non-standard definition of the cosmic time:

$$t = \text{constant } (x^\circ)^{3/2} \tag{88}$$

The dimension of the constant is:

$$\text{constant} = \frac{\text{time}}{(\text{length})^{3/2}}$$

In the standard definition of the cosmic time from

$$t = \text{constant } x^\circ \quad (x^\circ = ct)$$

the dimension of the constant is

$$\text{constant} = \frac{1}{c} = \frac{\text{time}}{\text{length}}$$

11. Entropy as a Better Chronological Marker

The detailed calculation of the entropy per baryon, as defined by:

$$s = \frac{k}{n} \int_? f \operatorname{Log} f \, du \, dv \, dw \tag{89}$$

where f is the velocity distribution function, was given in a former paper, with 'variable constants'. See [13], Section 2. As a result, we found:

$$s \approx \frac{3}{2} k \operatorname{Log} R \approx \operatorname{Log} t \tag{90}$$

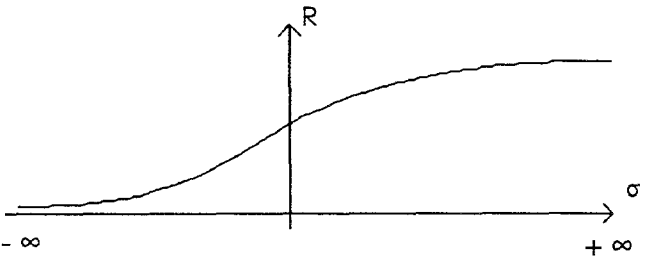


Fig. 19. The evolution of the curvature radius R of the Universe versus the entropy.

If $R(t)$ is an increasing function of t, the cosmic entropy grows like the cosmic time. In lab experiments we usually relate entropy with time and consider that, according to the second principle, there is no possible strictly isentropic phenomenon. We consider that the time flux depends on the entropy change. In the classical model it is somewhat paradoxal to notice that such enormous change in time would go with zero entropy variation. In the present model when the time t tends toward zero, s tends toward $-\infty$.

We have $s = \text{constant Log } t$. If we change the measure of the entropy (modifying the value of the constant) and write:

$$\sigma = \frac{2}{3} \operatorname{Log} t \tag{91}$$

we get:

$$dt = 3/2\, t\, d\sigma \tag{92}$$

Let us return to the Robertson Walker metric.

$$dS^2 = c^2 dt^2 - R^2 \frac{du^2 + u^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta\, d\varphi^2}{\left(1 - \frac{u^2}{2}\right)^2}$$

We get, with $R = 3/2ct$:

$$dS^2 = R^2 \left\{ d\sigma^2 - \frac{du^2 + u^2\, d\theta^2 = \sin^2 \theta\, d\varphi^2}{\left(1 - \frac{u^2}{2}\right)^2} \right\} \tag{93}$$

In the representation {entropy, space variables} the metric becomes conformally flat and we have:

In the classical description (t, σ) the physicist, when t tends to zero, has some difficulty defining any material clock, for the velocities of the particles tend toward c. In a 'variable constant cosmological model' the entropy per baryon (99) is no longer constant and never fails to describe the events of the Universe. Notice that

in a (s, σ) description, the problem of the origin of the Universe falls down. In addition, if we describe the Universe in a phase space (position plus velocity) we find that the associate characteristic hypervolume R^3c^3 varies like t.

12. The Red Shift and the Robertson-Walker Metric with a Variable Light Velocity

The derivation of the distance from the red shift z, with 'variable constants', has already been presented. See reference [13], sections 3 to 7. The index refers to the emitter and the index 2 to the receiver. For an example c_2 is the today's value of the velocity of the light, as measuring in the observatory. It is assumed that the Rydberg constant (ionization energy of the hydrogen) follows

$$E_i \approx R^\gamma \tag{94}$$

Then we find:

$$1 + z = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^\gamma \tag{95}$$

The value $\gamma = 1$ is chosen in order to fit with the classical value.
Then, expanding the function $1/R(t)$ into a series with respect to

$$\varepsilon = \frac{c_2(t - t_2)}{R_2} \tag{96}$$

we get:

$$c_2 z \cong (2 - \gamma)\, \frac{R_2'}{R_2}\, d_2 \tag{97}$$

Which is nothing but the Hubble's red shift law, which still applies in this variable light velocity condition. From measurement of d_2, c_2 and z we derive the so-called Hubble's constant, i.e. the age of Universe.

$$t = \frac{2}{3}\, \frac{d_2}{c_2 z} \tag{98}$$

Thi is identical to the standard value. Then the distance to the object d_2 is evaluated:

$$d_2 = R_2 u = \frac{3}{2}\, c_2 t_2\, \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \tag{99}$$

When z tends towards infinity we find the cosmological horizon $3/2c_2t_2$, which is twice as small as the standard value $3c_2t_2$. If we compare the present model to the EdS model, we get, for the distances, the ratio:

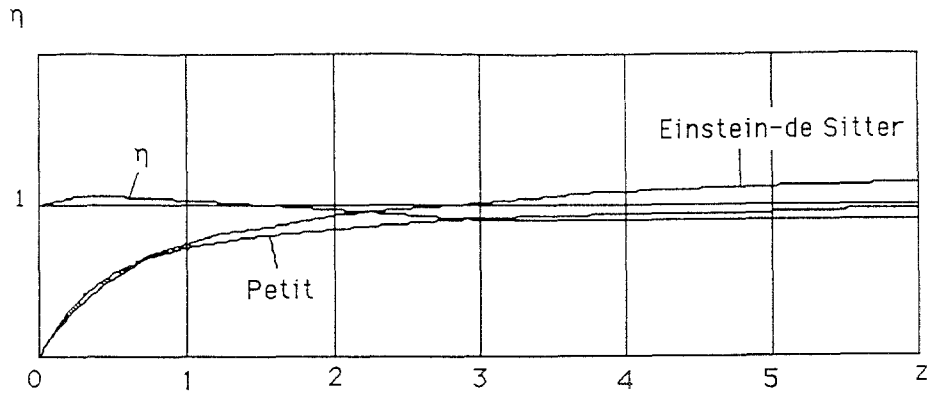


Fig. 20. The distances for the present model and for the Einstein-de Sitter model, and the ratio η of these distances, versus the red shift.

$$\eta = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \frac{1}{2 - \frac{2}{\sqrt{1+z}}} \tag{100}$$

They are similar for weak z values, as shown in the next figure. For weak z values, the distances, as derived from the present model, are a weakly larger. η is close to unity for $z = 1.5$. Then η tends toward 0.5 when z tends toward infinity. For $z < 2.5$ the difference between the two distance evaluations is less than 5%.

For the reference [14], Section 3, the evolution of the angular size of a distant object, versus z, was computed. For the EdS model and constant size objects, the law is:

$$\phi = \phi_0 \frac{(1+z)^2}{(1+z) - \sqrt{1+z}} \tag{101}$$

This function of z has a minimum for $z = 1.25$, and then ϕ tends to grow linearly versus z. The Figure 21 explains why it provides an overestimation of ϕ, for large z values.

In the present model, the situation is basically different, for the objects are supposed to expand with the Universe. See Figure 22.

The corresponding formula is:

$$\phi = \phi_0 \frac{(1+z)^2 + 1}{(1+z)^2 - 1} \tag{102}$$

When z tends toward infinity, ϕ tends to be constant.

Notice that in our model:

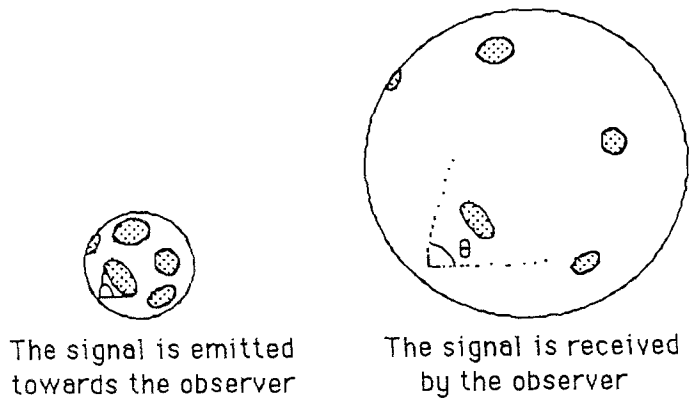


Fig. 21. Why the classical model overestimates the angular size of large red shift objects. The measure, at the reception time, corresponds to a 'fossil' angular size, when the object was closer.

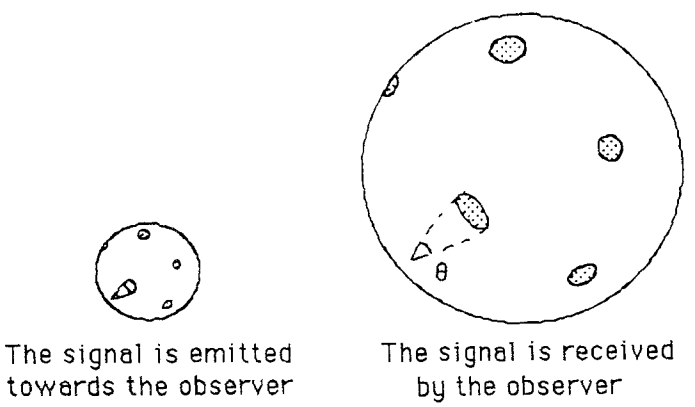


Fig. 22. Present model: The light moves along geodesics. The angular size is unchanged.

$$\phi \approx \frac{1}{d}$$

In the reference [14] this was used to compare the present model to the EdS model, applying to radio-QSO data (Barthel and Miley, 1988 [35]), giving a slight advantage to the first. Obviously, a single test, implying many assumptions about the nature of the observed objects, could not validate the model. See the discussion in reference [14].

13. The Light Emission Problem

Assume the energy production of light sources would proceed through collisions. The collision frequency may be written as:

$$\nu = nQv \tag{103}$$

n is the number density, Q is the collision cross-section and ν the thermal velocity. Assume all of these quantities follow our set of relations, i.e.:

$$n \approx \frac{1}{R^3} \quad Q \approx R^2 \quad V \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \tag{104}$$

which gives:

$$\nu \approx R^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{t}$$

Assume now that the characteristic amount of energy E_i, for this energy production reaction would vary like $R(t)$.

The energy emission rate varies like:

$$P \approx \frac{R}{t} \approx c \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \tag{105}$$

As such the emission rate would have been higher in the past. As, in this model, the energy is saved during the photon flight, the receiver would measure a higher luminosity, which would vary like $(1+z)^{1/2}$.

If we look at the data presented by Barthel and Miley and plot $\mathrm{Log}(P) - 0.5\,\mathrm{Log}\,(1+z)$ when find something quite constant.

14. Some Remarks about other Possible Comparison to Observational Material

14.1. Local relativistic effects

From the classical model of General Relativity have been imagined a large number of tests. The first were devoted to local tests, like the precession of the perihelia of Mercury or the time-delay of radar echos. There is no *a priori* incompatibility between these tests and the present model. In effect, according to the results of the numerical simulations, the matter-density in the region of the twin fold corresponding to the vicinity of the sun is highly rarefied, for the antipodal mass is pushed away by the mass. Then the second term of the second member of the equation (1) can be neglected:

$$\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} - A(\mathbf{T})) \approx \chi\mathbf{T} \tag{106}$$

Locally, the Einstein equation would become an approximate form of the equation (1). In such conditions, from the equation (1) we refind the classical local observational features, like the advance of the perihelia, etc.

14.2. About the strong field test from binary pulsars

A pulsar is supposed to be an object located in our galaxy. If we suppose again that the antipodal matter is very rarefied in the conjugated adjacent fold, the field equation becomes:

$$\mathbf{S} = \chi \mathbf{T} \tag{107}$$

i.e. the Einstein equation. Then the observed effects [30] fit both the equations (1) and (2).

15. The Problem of Electromagnetism and other Features of Physics

We propose a new cosmological model. As said before, basically, this model does not contain the electromagnetic nor strong or weak interaction phenomena and this is the same for the classical model. Something only a fully unified field theory could deal with. In such conditions is it licit to try to apply the gauge analysis to the charged particle, i.e. to see how could vary the Bohr radius versus R? This is questionable (this was examined by the author in the formal paper [13], Section 9). The same thing goes for the strong and weak interactions and their associated characteristic lengths (in order to give a new and complete description of the cosmic evolution, including the nucleosynthesis, one should introduce, in this constant energy model, corresponding time-dependant 'constants').

Personally I would think that the cosmological model is far to be achieved. For example, the so-called cosmological constant Λ could be added, through (suggestion of J.M. Souriau):

$$\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} + \Lambda \mathbf{g} - A(\mathbf{T}) - \Lambda A(\mathbf{g})) \tag{108}$$

or:

$$\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} + \Lambda \mathbf{g} - \mathbf{T}^* - \Lambda \mathbf{g}^*) \tag{109}$$

where $\mathbf{T}^*$ and $\mathbf{g}^* = A(\mathbf{g})$ are respectively the stress tensor and the metric tensor associated to the conjugated antipodal region.

This work suggests only that the geometry of the universe could be somewhat different from our standard vision. Perhaps a unified model (gravitation plus electromagnetism) could be built, by introducing complex tensors $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ and $A(\mathbf{T})$ in the equation (1). On another hand, one can shift from a $S3 \times R1$ geometry towards a twin geometry based on the cover of a projective $P4$ by a sphere $S4$. Then it

could perhaps be possible to deal with CPT symmetry and then take account of the matter-antimatter duality (the antipodal matter would behave like antimatter and become the lost 'cosmological antimatter', as suggested by Andréi Sakharov and Novikov in 1967 [36,37] and the authors [38,39 and 40]). But this, we confess, is a hard mathematical task.

In a Kaluza model we consider a 5 dimensional manifold. Then the electromagnetism can be introduced, from what source or origin no-one knows what this fifth dimension represents exactly. Notice that, locally, the model is equivalent to a Kaluza model with a fifth dimension limited to the values ± 1.

In this model the statute of the Klein-Gordon equation is the same as in classical General Relativity.

Conclusion

Starting from the field equation presented in a former paper [1] we have presented new results, based on numerical simulations, performed by F. Lansheat. This provides a possible explanation of the spongy, very large structure of the Universe and is an alternative to the classical pancakes theory, for our structures are stable over a period of time comparable to the age of the Universe. Then we developed a theory of inverse gravitational lensing: the observed lensing effects could be due mainly to the effect of surrounding antipodal matter, acting like a distribution of negative mass, than to the action of the galaxy itself. This challenges the dark matter concept. Then, starting from the field equation $\mathbf{S} = \chi(\mathbf{T} - A(\mathbf{T}))$ we have developed a cosmological model with 'variable constants'. Because of the hypothesis of homogeneity ($\mathbf{T} = A(\mathbf{T} =$ constant over space) the metric must be a solution of the equation $\mathbf{S} = 0$, although the total mass of this closed universe is non-zero ($\mathbf{T} \neq 0$). In order to avoid the triviality of the classical subsequent solution $R \approx t$, we have built a solution with 'variable constants'. We have derived the laws linking the different constants of physics: G, c, h, m in order to keep the basic equations invariant, *so that the variation of these constants is not measurable in the laboratory. The only effect of this process is the red shift, due to the secular variation of these constants.*

All the energies are conserved, but not the masses. We have found that all the characteristic lengths (Schwarzschild, Jeans, Compton, Planck) vary like the characteristic length R, from where all the characteristic times vary like the cosmic time t.

As the energy of the photon $h\nu$ is conserved over its flight, the decrease of its frequency is due to the growth of the Planck constant $h \approx t$.

In such conditions the field equations have a single solution, corresponding to a negative curvature and to an evolution law: $R \approx t^{2/3}$.

The model is no longer isentropic and $s \approx \mathrm{Log}\, t$. The cosmologic horizon varies like R, so that the homogeneity of the Universe is ensured at any time,

which challenges the inflation theory. We refind, for moderate distances, Hubble's law. We find a new law: distance = $f(z)$, very close to the classical one for moderate red shifts.

An observational test is suggested, based on the values of the angular sizes of distant objects. Comparing the available data to the predictions of our model and to those of the (peculiar) Einstein-de Sitter model, we find a slight advantage in the first. Obviously, a single test cannot validate such a model.

Acknowledgement

The author thanks Professor Oaxiiboo F. for useful suggestions and critic.

References

1. Petit, J.P.: The missing mass effect. Il Nuovo Cimento B. Vol. 109, July 1994, pp. 697–710.
2. Zel'dovich, Ya.B.: 1970, *Astrofisica* **6**, 319; *MNRAS* **192**, 192.
3. Doroskhevitch, A.G.: 1980, *MNRAS* **192**, 32.
4. Klypin, A.A. and Shandarin, S.F.: 1983, *MNRAS* **204**, 891.
5. Centrella, J.M. and Mellot, A.L.: 1983, *Nature* **305**, 196.
6. Shandarin, S.F.: 1988, in: Large Scale Structures of the Universe, ed. J. Audouze, M.C. Peleton, and A. Szalay, 273. Dordrecht: Kluwer.
7. Kofman, L.A., Pogosyan, D., and Shandarin, S.: 1990, *MNRAS* **242**, 200.
8. Peebles, P.J.E.: 1993, Principles of Physical Cosmology, Princeton University Press.
9. R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer: 1975, Introduction to General Relativity. Mac-Graw Hill book company.
10. V.S. Troitskii: 1987, *Astrophysics and Space Science* **139**, 389–411.
11. J.P. Petit: 1988, *Mod. Phys. Lett.* **A3**, 1527.
12. J.P. Petit: 1988, *Mod. Phys. Lett.* **A3**, 1733.
13. J.P. Petit: 1988, *Mod. Phys. Lett.* **A4**, 2201.
14. E.A. Milne: 1948, Kinematic Relativity, Oxford.
15. P.A. Dirac: 1937, *Nature* **139**, 323.
16. P.A. Dirac: 1973, *Proc. Roy. Soc. London* **A333**, 403.
17. F. Hoyle and J.V. Narlikar: 1972, Cosmological models in conformally invariant gravitational theory, *Mon. Notices Roy. Astr. Soc.* **55**, 305–325.
18. V. Canuto and J. Lodenquai: 1977, Dirac cosmologiy, *Ap.J.* **211**, 342–356, January 15.
19. T.C. van Flandern: Is the gravitational constant changing?, *Ap.J.* **248**, 813–816.
20. V. Canuto and S.H.. Hsieh: 1978, The 3 K blackbody radiation, Dirac's large numbers hypothesis, and scale-covariant cosmology, *Ap.J.* **224**, 302–307, September 1.
21. A. Julg: 1983, Dirac's large numbers hypothesis and continuous creation, *Ap.J.* **271**, 9–10, August 1.
22. Brans and Dicke: 1961, *Phys. Rev.*, 124–925.
23. Ratra: 1992, *Astrophys. J. Lett.* **391**, L1.
24. Guth: 1981, *Phys. Rev.* **D23**, 347.
25. Sugiyama and Sato: 1992, *Astrophys. Jr.* **387**, 439.
26. Yoshii and Sato: 1992, *Astrophys. J. Lett.* **387**, L7.
27. H. Reeves: 1994, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 193.
28. V.S. Troitskii: 1987, *Astrophysics and Space Science* **139**, 389–411.
29. J.M. Souriau: 1970, Souriau Structure des systèmes dynamiques, Ed. Dunod, France.
30. Taylor: 1994, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 711.
31. Bahcall, N.A.: 1988, *Ann. Rev. of Astron. Ap.* **26**, 631 (19–20).

32. Bahcall, N.A. and Soneira, R.M.: 1992, *Ap.J.* **392**, 419.
33. Bahcall, N.A. and West, M.J.: 1992, *Ap.J.* **392**, 419.
34. Luo, X. and Schramm, D.N.: 1992, *Science* **256**, 313.
35. P.D. Barthel and G.K. Miley: 1988, Evolution od radio structure in quasars: a new probe of protogalaxies?, *Nature* **333**, 26 may.
36. A.D. Sakharov: 1967, *ZhETF Pis'ma* **5**, 32; 1967, *JETP Lett.* **5**, 24. trad. Preprint R2-4267, JINR, Dubna.
37. D. Novikov: 1966, *ZhETF Pis'ma* **3**, 223; 1966, *JETP Lett.* **3**, 142; 1966, *trad Astr. Zh.* **43**, 911; 1967, *Sov. Astr.* **10**, 731.
38. J.P. Petit: 'Univers énantiomorphes à temps propres opposés', CRAS du 8 mai 1977, t. 285, pp. 1217–1221.
39. J.P. Petit: 'Univers en interaction avec leur image dans le miroir du temps'. CRAS du 6 juin 1977, t. 284, série A, pp. 1413–1416.
40. J.P. Petit: 1983, Le Topologicon, Ed. Belin, France.

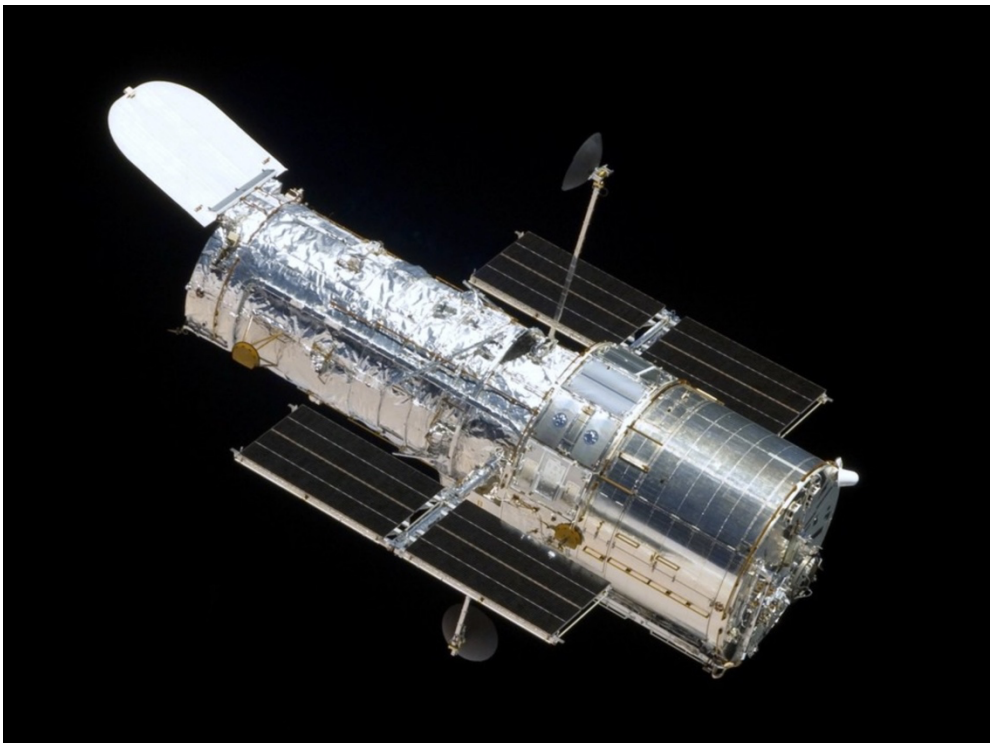
Enfin, une chose apparaît immédiatement. Cette structure à très grande échelle apparaît très rapidement. La masse positive, confinée en plaque planes, se trouve violemment « rétro-comprimée » par les deux conglomérats de masse négative adjacents. Ceci entraîne une rapide montée en température, suivie d'une nom moins rapide perte d'énergie par dissipation radiative.

Un résultat CAPITAL, toujours inexploité, trente ans plus tard.

Actuellement, le schéma de formation des galaxie met à contribution toutes les ressources disponibles (ou supposées telles) comme la matière sombre. Le scénario prédit alors que se forment d'abord, en 500 millions d'années, des mini-galaxies dont la masse est de l'ordre d'un million de masses solaires. Les modèles n'envisageaient pas la naissance des premières étoiles avant 300 millions d'années.

Puis ces mini-galaxies s'assemblent, toujours par instabilité gravitationnelle, pour donner les galaxies telles que nous les observons actuellement, mais pas avant un milliard d'années.

Ce schéma semblait confirmé par les première image, obtenues par le télescope spatial Hubble, équipé de caméra opérant dans l'infrarouge proche (longueur d'onde 1,7 microns)

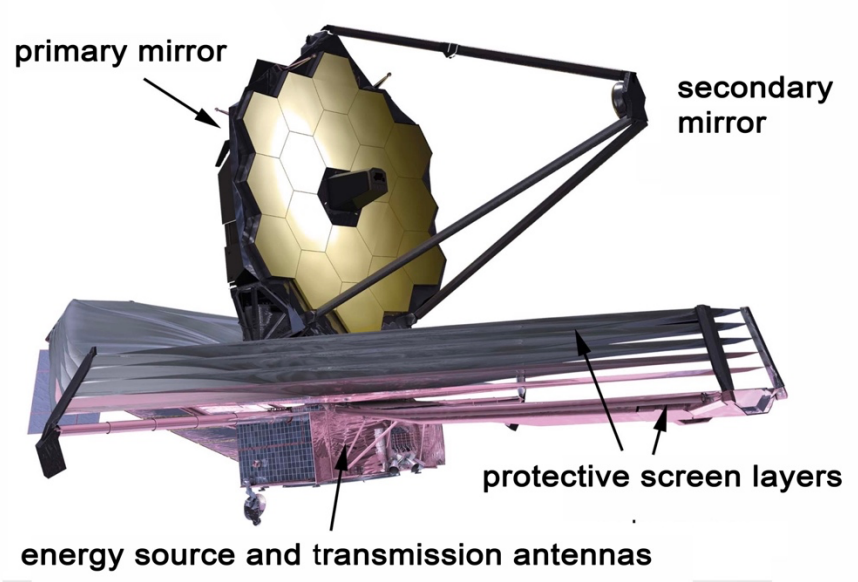


Le télescope spatial Hubble

Ces caméras étaient dotées de systèmes de refroidissement de capacités limitées. Ceci permet cependant d'observer des objets de taille modeste, que l'on assimile alors à des « mini-galaxies ».

Mais quand le télescope James Webb, équipé de systèmes de refroidissement beaucoup plus performant, permettant d'opérer avec des longueurs d'onde allant jusqu'à 28 microns, entre en service en 2022, tout change.

Très vite, le télescope fait état de galaxies massives, spirales, entièrement formées, à distances telles que l'époque d'émission de cette lumière correspond à moins de 500 millions d'années. Et, rapidement, ce temps diminue.



Le télescope spatial James Webb

Actuellement le JWST a mis en évidence l'existence de galaxies dont les étoiles émettent du rayonnement émis, non par l'hydrogène et l'hélium primordiaux, mais par des éléments lourds. Ce sont donc des « étoiles secondaires », qui se sont constituées à partir de ces éléments produits, en des temps de 3 à 10 millions d'années, par des étoiles de première génération[31]

Au fil des années le JWST a contredit tous les modèles de création de galaxies et d'étoiles, même poussés à l'extrême en mettant en jeu l'hypothétique contenu en matière sombre.

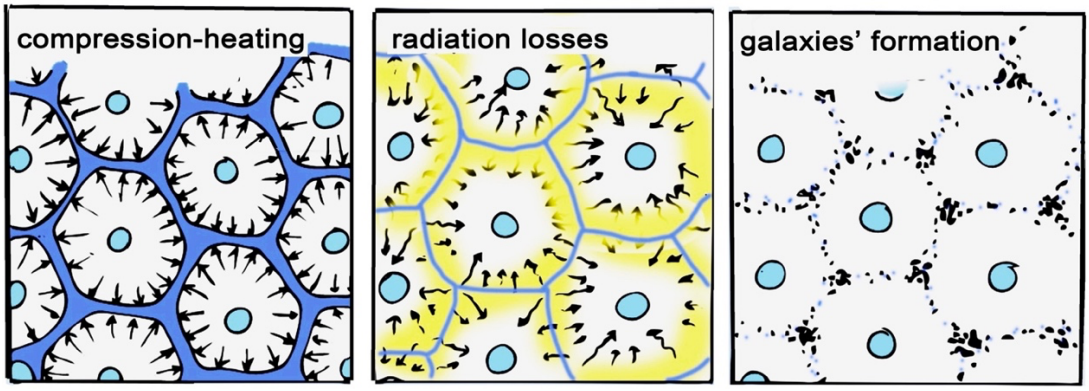
Ce qui est sidérant c'est que personne n'envisage une création plus rapide des gakaxies, dans le schéma Janus. En effet quand l'instabilité gravitationnelle donne naissance à des grumeaux de matière, sphéroïdaux, tout le problème réside dans le temps que mettront ceux-ci à dissiper l'énergie thermique issue de leur compression.

[31] Carniani et al., Spectroscopic confirmation of two luminous galaxies at a redshift of 14, Nature 633, 318–322 (2024).

Ce temps croît avec la taille de tels objets. En effet la quantité d'énergie à dissipe croit comme le volume, donc comme le cube du rayon, alors que la surface du « radiateur », ne croit que comme le carré du rayon. Donc, dans le schéma standard ceci rend impossible la formation d'objets massifs.

Dans le modèle Janus, tout change. La forme en plaques planes est au contraire optimale pour assurer un refroidissement très rapide.

Dans ces conditions :



Toutes les galaxies se forment, telles que nous les connaissons,
dans la première centaine de millions d'années.

Ceci constitue une des confirmations observationnelles les plus parlantes du modèle Janus, superbement ignorées par ses détracteurs[32].

Encore une fois, aucune équipe dotée de puissants moyens de calcul, ne tente de s'attaquer au problème, toujours à cause de la défiance générale du monde scientifique vis-à-vis d'une quelconque introduction de masses négatives dans le modèle cosmologique.

Là où les choses deviennent grotesques c'est vis-à-vis de la structure spirale des galaxies. Depuis un demi-siècle, que les théoriciens ont consacré pour tenter de comprendre, rien ne fonctionne. Quand ils tentent de mettre ces structures spirales comme conditions initiales, elles se tardent pas à se désagréger en quelques tours.

François Combes, présidente de l'Académie des Science française, qui se présente comme spécialiste de cette structure spirale, conclut :

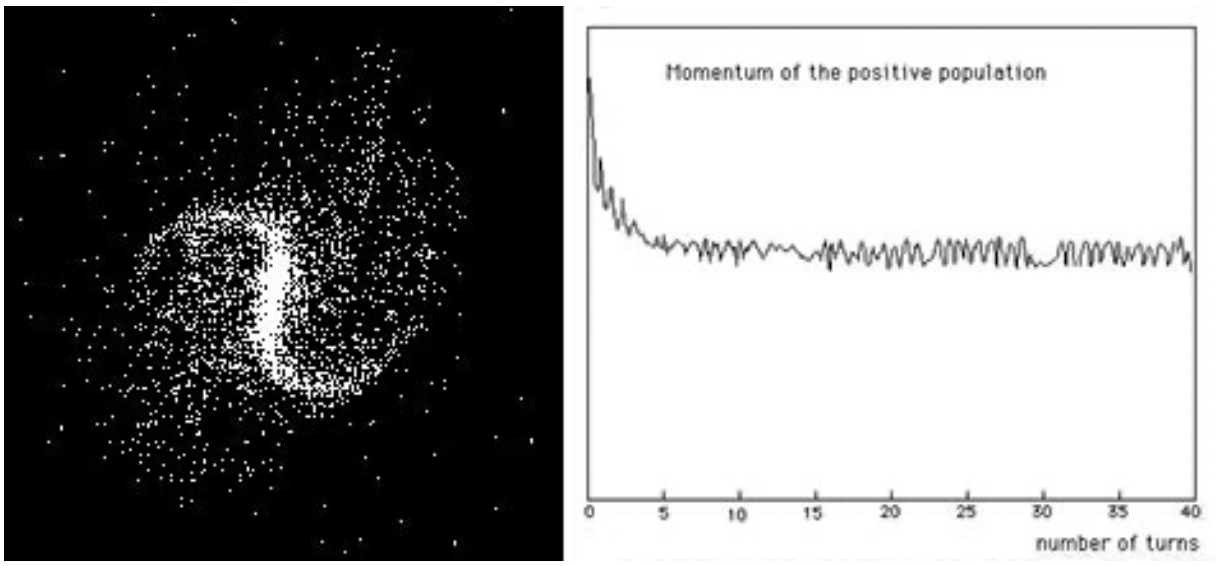
[32] JP Luminet : Twin Universe and Bimetric Gravity : From Sakharov's Cosmological Symmetry to Modern Speculations on Negative Mass. arXiv (gr-qc) 20609,26834



- *On est toujours à la recherche du mécanisme qui permet à cette structure spirale de se maintenir.*

Or, la réponse, on l'a depuis 1991, et personne ne veut l'entendre. Cette même année, il y a donc 35 ans, Descamps me demande quelle autre simulation entreprendre. Je lui fournis les conditions initiales correspondant aux données numériques issues d'une simulation 2D. Il lance le calcul.

Immédiatement, une magnifique structure spirale barrée apparaît, qui perdure pendant 40 tours. C'est un résultat absolument splendide.



La courbe de droite montre l'évolution du moment cinétique de la galaxie. La raison d'être de cette structure, une onde de densité, devient évidente. Dans un système collisionnel une masse fluide en rotation (un tourbillon) échange de la quantité de mouvement et de l'énergie avec son environnement par collision, par frottement visqueux. Dans un système

non collisionnel (les galaxies) cette viscosité disparaît totalement. L'échange s'effectue alors à distance, à l'aide de champ gravitationnel issu de ces formations spirales, qui interagissent avec leurs images en négatif, imprimé dans leur environnement de masse négative. Il s'agit d'un freinage visiblement peu efficace. Conclusion : ces formations se maintiendront tant qu'il y aura du gaz dans ces galaxies c'est-à-dire, à l'échelle de l'évolution cosmique : indéfiniment.

L'échec des simulations opérées par les théoriciens traduit leur totale incompréhension du mécanisme à l'origine de ce phénomène. On peut les comparer à des mécaniciens des fluides qui tenteraient de comprendre ce qui crée les vagues de la mer et qui réaliseraient des simulations en prenant ces ondes comme conditions initiales. Ils verraient immédiatement celles-ci disparaître, simplement parce qu'ils oublient ce qui les crée et les maintient :

LE VENT

La formation de la barre est immédiate, au moment même de la formation de la galaxie.



La comparaison avec l'observation est éloquente.

Dans les années quatre vingt dix j'ai vainement tenté de publier ce résultat dans toutes les revues concernées. Les réponses ont été uniformes :

- *Sorry, we don't publish speculative works*[33]

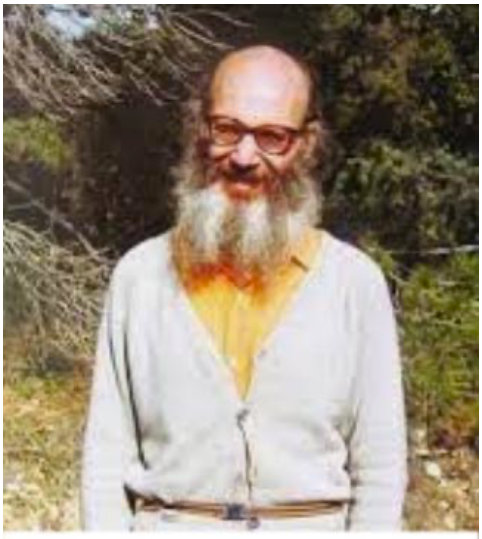
Et je ne me risquerais pas à renter de publier aujourd'hui. Vous avez vu le rejet manifesté par Astrophysics and Space Science dès qu'il s'est agi de masse négative. Là, ça serait exactement pareil.

→ *Combien d'années, ou même de décennies, s'écouleront avant que les scientifiques ne comprennent que cette interaction avec leur environnement de masse négative constitue la clé de la structure spirale des galaxies ?*

[33] Désolés, nous ne publions pas de travaux à caractère spéculatif.

Un certain nombre d'années se passent. Le problème est maintenant de modéliser ce schéma de deux univers en interaction dans un contexte relativiste.

Celui qui jouera dans la suite des évènements, un rôle déterminant est alors le mathématicien-géomètre Alexandre Grothendieck.

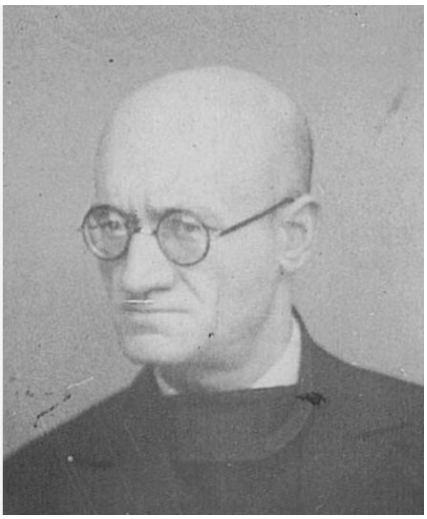


Alexandre Grothendieck
1928- 2014

C'est le fils de deux anarchistes militants.



Hanka Grothendieck
1900-1957
Ici à 17 ans



Sacha Schapiro
1890-1942

La mère d'Alexandre, Hanka Grothendieck, est issue d'une famille protestante aisée de Hambourg. Son père, Sacha Schapiro, est né dans une famille juive de Russie. Très jeune, il rejoint les milieux anarchistes et participe, à quinze ans, à la révolution russe de 1905.

En 1907, à dix-sept ans, il est arrêté avec plusieurs de ses compagnons et condamné à mort. Ceux-ci sont exécutés. Sacha échappe au peloton d'exécution en raison de son jeune âge. Sa peine est commuée en emprisonnement à vie.

Au cours de sa détention, il perd son bras gauche, à la suite d'une tentative d'évasion. En 1914, il aurait passé une année entière à l'isolement. Il ne retrouvera la liberté qu'à la faveur de la révolution de 1917.

Dix années de sa jeunesse passées dans les prisons tsaristes.

Alexandre naît le 28 mars 1928 à Berlin, où son père exerce le métier de photographe de rue et sa mère travaille occasionnellement comme journaliste.

En mai 1933, après l'arrivée d'Hitler au pouvoir, Sacha quitte Berlin pour Paris. Hanka le rejoint en décembre, après avoir confié Alexandre, âgé de cinq ans, à Wilhelm et Dagmar Heydorn, un couple antinazi qui accueille des enfants à Hambourg.

En 1936, son père participe activement à la guerre d'Espagne dans les rangs républicains. Hanka l'y rejoint.

En 1939, la guerre d'Espagne s'achève par la victoire de Franco. Les parents d'Alexandre reviennent en France. À onze ans, Alexandre prend seul le train depuis Hambourg et retrouve son père à Paris, en mai 1939. Il rejoint ensuite sa mère à Nîmes. La famille se trouve brièvement réunie.

Mais cette réunion sera de courte durée.

Le 29 octobre 1939, alors que la France est entrée depuis septembre dans « la drôle de guerre », bien avant l'offensive allemande de mai 1940, les autorités françaises décident l'internement de Sacha Schapiro en raison de ses antécédents politiques. Il est arrêté à Nîmes et interné, le 31 octobre, au camp du Vernet, en Ariège.

Il restera détenu dans des camps français jusqu'en 1942.

En août 1942, la France est toujours divisée par la ligne de démarcation. Le sud, administré par le gouvernement de Vichy, reste officiellement une zone non occupée par l'armée allemande.

C'est pourtant de cette zone que les autorités françaises livrent aux Allemands des Juifs étrangers internés dans leurs camps.

Sacha Schapiro est transféré à Drancy, puis déporté vers Auschwitz par le convoi n° 19 du 14 août 1942, sous le nom d'Alexander Tanaroff. Il y est gazé, très probablement dès son arrivée.

Alexandre a quatorze ans. Il ne reverra jamais son père.

De tels antécédents familiaux ne prédisposaient guère Alexandre au conformisme.

Après la guerre, Alexandre Grothendieck entreprend des études de mathématiques à Montpellier, puis à Paris et à Nancy. Son talent exceptionnel se révèle rapidement. Il révolutionne la géométrie algébrique, dont il reconstruit les fondements en introduisant des concepts entièrement nouveaux. À partir de 1958, il devient la figure centrale de l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS), près de Paris. En 1966, il reçoit la médaille Fields, la plus prestigieuse distinction internationale en mathématiques, mais refuse de se rendre à Moscou pour la recevoir.

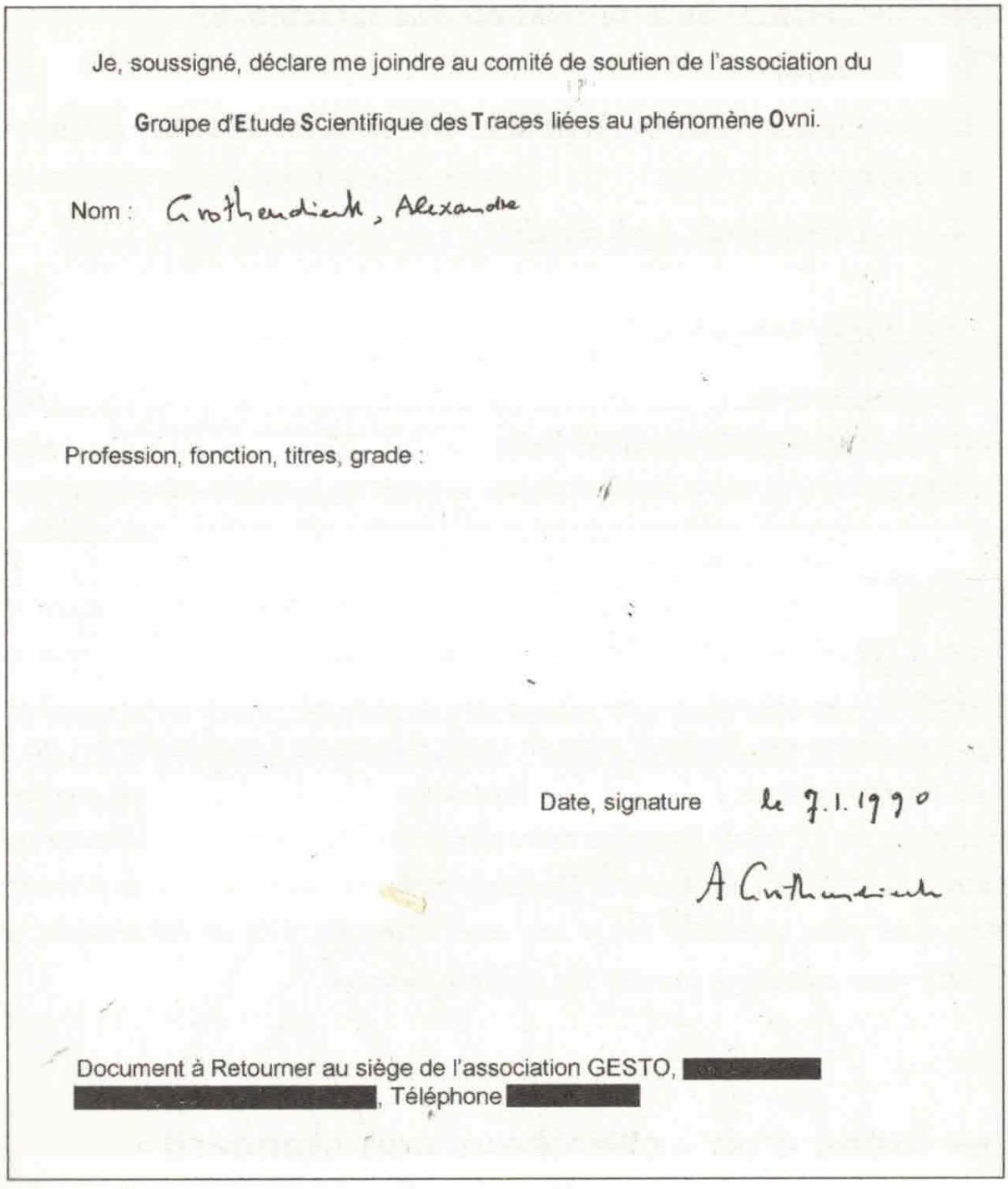
En 1970, à quarante-deux ans, il quitte l'IHÉS, notamment après avoir découvert que l'institut bénéficiait de financements militaires. Il s'engage dans les mouvements écologistes et pacifistes. En 1973, il reprend un poste d'enseignant à l'université de Montpellier.

En 1980, il disparaît sans laisser d’adresse.

Quand il prend contact avec moi il se déclare prêt à me communiquer les coordonnées de sa retraite, si je m’engage à ne les communiquer à personne.

C’est donc dans sa fermette de Mormoiron, au pied du mont Ventoux, non loin d’Aix-en-Provence où je réside, qu’auront lieu nos rencontres, jusqu’en 1991 quand, sa retraite ayant été découverte, je perds sa trace, et qu’il se réfugie dans un village des Pyrénées où il vivra jusqu’à sa mort en 2014.

Le document ci-après en surprendra plus d’un :



Je, soussigné, déclare me joindre au comité de soutien de l'association du

Groupe d'Etude Scientifique des Traces liées au phénomène Ovni.

Nom : Grothendieck, Alexandre

Profession, fonction, titres, grade :

Date, signature le 7.1.1990

A Grothendieck

Document à Retourner au siège de l'association GESTO, [redacted], Téléphone [redacted]

Pour Alexandre il n'est point de sujet sur lequel la science n'ait le droit de se pencher, et le sujet OVNI en est un. Par ce document il accorde son soutien et parrainage à l'association loi de 1901 que j'ai créé, le GESTO « Groupe d'Etude Scientifique des Traces d'Ovnis, avec le regretté météorologue Christian Perrin de Brichambaut[34]. Par ailleurs il connaissait mon refus incontournable de travailler sur des applications militaires de travaux scientifiques. Deux points qui nous rapprochèrent.

[34] Après le dépôt des statuts de l'association en préfecture, Perrin et moi envisagions d'utiliser l'acronyme de ce que nous avions nommé le « **G**roupe d'**E**tude **S**cientifique des **T**races **A**ssociées au **P**hénomène **O**vni. Nous découvrîmes que cela formait **GESTAPO**, déjà pris.

Ce qui est intéressant, ce ne sont pas ces aspects anecdotiques. C'est l'empreinte laissée par cette « méthode Grothendieck d'approche des questions scientifiques», sans concessions, sans limites, en acceptant d'emblée de devoir assumer un statut de « révolutionnaire ».

- *Si des approches théoriques existantes ne te conviennent pas, aussi prestigieux que puissent être leurs auteurs, ne t'impose aucune barrière, aucune limite, crée ta propre théorie !*

Je crois que sans les exhortations d'Alexandre je n'aurais pas eu le courage de m'attaquer, seul, à l'un des fondements de la physique contemporaine : la Relativité Générale.

Mais le succès rencontré sur deux fronts : la modélisation à constantes variables, plus élégant que cette idée d'inflation, et les excellents résultats des simulations numériques incitaient à s'attaquer au problème.

Je tente de mettre en œuvre le système de deux équations de champ ci-après, dans le but de tenter de construire une solution instationnaire dans un univers où les deux entités sont dans un état d'homogénéité et d'isotropie :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + T_{\mu\nu}^{(+)} \right]$$

Mais la cohérence mathématique de ce système exige alors que l'univers négatif se résume à n'être qu'une copie de son versant positif, sa masse et son énergie étant changées de signe. La loi d'expansion correspond à un modèle proposé en 1932-1937 par le cosmologiste Milne[35], sous la forme d'une loi linéaire dans le temps.

Dès 1922 le Russe Alexandre Friedmann publie une solution instationnaire de l'équation d'Einstein[36], correspondant à un indice de courbure k = +1 (univers cyclique). Deux ans plus tard il complète cette solution avec les cas à courbure négative (k = - 1) et à courbure nulle (k=0)[37]. Milne ne croit donc pas à ces solutions de Friedmann.

La seule parentée avec le modèle de Milne c'est une expansion à accélération nulle, donc à champ gravitationnel nul. Une idée que tenteront de proposer Benoit-Lévy et Gabriel Chardin en 2021[38]. L'idée est alors différente, consistant à envisager la masse de

[35] E. A. Milne, « World Structure and the Expansion of the Universe », Nature, 130, 9-10. (2 juillet 1932).
[36] A. Friedmann, « Über die Krümmung des Raumes » (Sur la courbure de l'espace), Zeitschrift für Physik, 10, 377-386 (1922).
[37] A. Friedmann, « Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes » (Sur la possibilité d'un monde à courbure spatiale négative constante), Zeitschrift für Physik, 21, 326-332 (1924).
[38] A. Benoit-Lévy & G.Chardin : Introducing the Dirac-Milne universe. Astronomy and Astrophysics. Vol. 537 (january 2012) A 78.

l'antimatière puisse être négative[39], et que donc cette fameuse moitié de l'univers, introuvable, se conjugue avec la masse visible pour donner une masse globalement nulle.

Mais ça ne me convient pas, parce que cette belle symétrie contredit les résultats des simulations, qui militent pour une masse négative dominante. Je tente donc un bricolage en imaginant que les « tenseurs d'interaction » puissent dériver des « tenseurs de champ », modulo deux fonctions du temps $\varphi(t)$ et $\phi(t)$ selon :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \varphi(t)\ T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + \phi(t) T_{\mu\nu}^{(+)} \right]$$

Il faut que la solution s'avère cohérente, ce qui se traduit par l'émergence d'une condition mathématique de compatibilité entre les deux équations.

Les lois d'expansion des deux entités s'expriment à l'aide de facteurs d'échelles (space scale factors) $a^{(+)}(t)\ et\ a^{(-)}(t)$. Le développement de la solution, à travers les classiques solutions métriques FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker), équation (5), donne naissance à deux équations différentielles qui doivent être satisfaites :

(8a) $$3\ \frac{da^{(+)}}{a^{(+)}} + \frac{d\left[\rho^{(+)} + \varphi\ \rho^{(-)}\right]}{\rho^{(+)} + \varphi\ \rho^{(-)}} = 0$$

(8b) $$3\ \frac{da^{(-)}}{a^{(-)}} + \frac{d\left[\phi\rho^{(+)} + \rho^{(-)}\right]}{\phi\rho^{(+)} + \rho^{(-)}} = 0$$

Il faut que ces deux équations deviennent … la même. Alors, si on pose :

$$\varphi = \left(\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}}\right)^3 \quad \text{et} \quad \phi = \left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}}\right)^3 = \varphi^{-1}$$

Cela donne, pour les deux équations :

$$d\ Log\ \left(\rho^{(+)} {a^{(+)}}^3 + \rho^{(-)} {a^{(-)}}^3\right) = 0$$

C'est à dire la conservation de la masse :

$$\rho^{(+)} {a^{(+)}}^3 + \rho^{(-)} {a^{(-)}}^3 = Cst$$

Ou, en multipliant par c^2 la conservation de l'énergie :

(9)

[39] Mais les mesures effectuées au CERN de Genève conclurent à assigner à l'antimatière une masse positive : E. K. Anderson et al. (ALPHA Collaboration), « Observation of the effect of gravity on the motion of antimatter », Nature, 621, 716-722 (2023). Dès 2014 la construction du groupe symplectique Janus allait dans ce sens (publié avec plus de détails en 2025, voir l'article).

$$E = \rho^{(+)}{a^{(+)}}^3 c^2 + \rho^{(-)}{a^{(-)}}^3 c^2 = Cst$$

Pourquoi la conservation de l'énergie ? Parce qu'on pense aussitôt à étendre le modèle avec deux vitesses de la lumière différentes, ce qui sera fait aussitôt dans l'article suivant, la même année.

Et là on fait jouer la profonde dissymétrie du modèle en faisant

$$\left| \rho^{(-)}{a^{(-)}}^3 \right| >> \rho^{(+)}{a^{(+)}}^3$$

Autrement dit :

$$E \simeq \rho^{(-)}{a^{(-)}}^3 c^2 < 0$$

On explicite la solution et on trouve :

(13a) $$\left(a^{(+)}\right)^2 \frac{d^2 a^{(+)}}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{c^2} E < 0$$

(13b) $$\left(a^{(-)}\right)^2 \frac{d^2 a^{(-)}}{dt^2} = +\frac{4\pi G}{c^2} E > 0$$

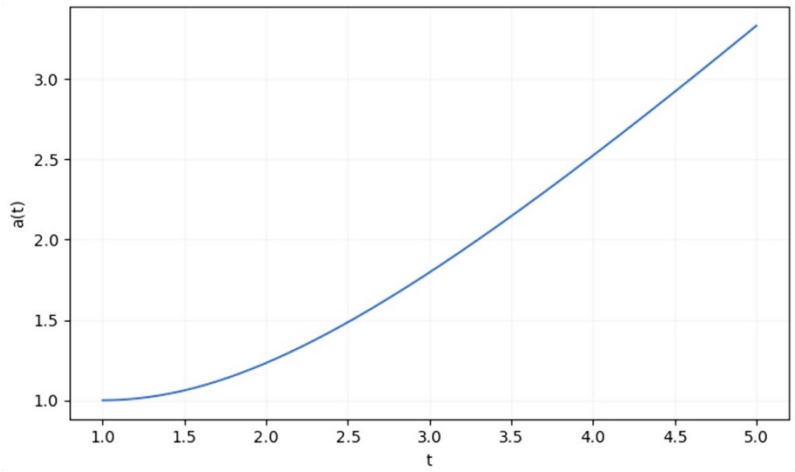
La voilà, cette énergie noire qui provoque l'accélération de l'expansion. C'est l'énergie des composants négatifs , le $\rho^{(-)}{a^{(-)}}^3 c^2$!

En plus, une solution exacte de l'équation (13a) existe, qui a été trouvée par William Bonnor en 1989[40] et qui s'exprime sous une forme paramétrique :

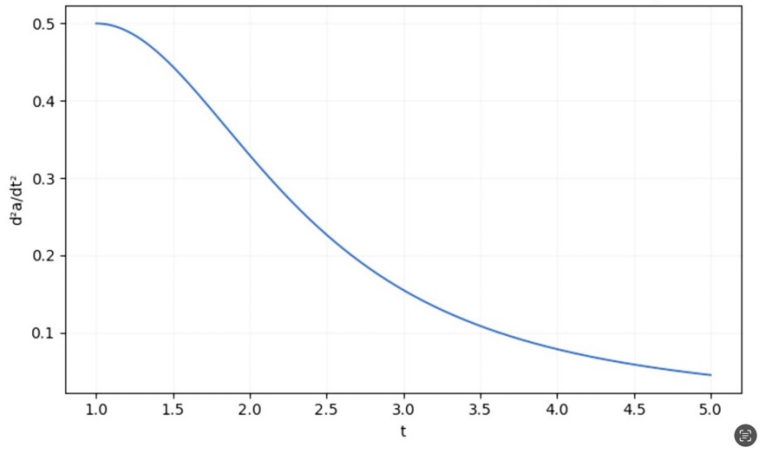
(14)
$$a^{(+)}(u) = \alpha^2 ch^2 u$$
$$t(u) = \alpha^2 \left(1 + \frac{sh\, 2u}{2} + u\right)$$

Voici la courbe donnant une expansion à accélération positive :

[40] H.Bonnor Negative mass and general relativity. Gen. Relat. And Gravit. Nov 1989 vol 21 pp 1143-1157



Et voici l'accélération en fonction du temps (décroissante) :



En comparaison le modèle donne une accélération … exponentielle en fonction du temps. Donc plus faible dans le passé[41].

Donc, ; faisons le point. Nous sommes en 2024, c'est-à-dire, au moment où j'écris ces lignes, il y a douze ans. Nous proposons un début de modèle, basé sur deux équations de champ couplées. Nous proposons le système ci-après :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \hat{T}_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + \hat{T}_{\mu\nu}^{(+)} \right]$$

[41] Or les premiers résultats de la collaboration DESI Semble infirmer ce modèle. H.Chaudary, S.Capozziello, V.K. Shauma, I.Gomez, G. Mustafa. Evidence for evolving dark energy from DESI DR2 BAO and Pantheon+, DES-Dovekie, and Union3 European Physical Journal C, Vol. 86, article 564 (2026).

Ces équations sont écrites avec des tenseurs, ce qui signifie qu'elle sont covariantes, indépendantes du choix des coordonnées.

Les données des problèmes, celles qui représentent ce qui va déterminer la forme de la solution c'est-à-dire les métriques $g_{\mu\nu}^{(+)}$ et $g_{\mu\nu}^{(-)}$ sont des champs tensoriels, dont les termes ont tous la dimension d'une energie.

$T_{\mu\nu}^{(+)}$ est le tenseur qui représente la contribution du contenu en masse positive.

$\hat{T}_{\mu\nu}^{(-)}$ est le tenseur qui représente la contribution du contenu en masse négative.

$\hat{T}_{\mu\nu}^{(-)}$ et $\hat{T}_{\mu\nu}^{(+)}$ sont des tenseurs d'interaction.

$\hat{T}_{\mu\nu}^{(-)}$ traduit la contribution du contenu local en masse négative à la géométrie du feuillet positif, à la métrique $g_{\mu\nu}^{(+)}$

$\hat{T}_{\mu\nu}^{(+)}$ traduit la contribution du contenu local en masse négative à la géométrie du feuillet positif, à la métrique $g_{\mu\nu}^{(-)}$

L'erreur a été d'utiliser la même lettre majuscule T pour désigner ces deux derniers tenseur, ce qui a été, on le verra plus loin, source de confusion. Il eut mieux valu, ce que je préfère utiliser aujourd'hui, écrire :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + K_{\mu\nu}^{(+)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + K_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

χ est la constante d'Einstein :

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^4}$$

Ce système permet l'introduction de masses négatives en cosmologie, ce qui est impossible avec une seule équation de champ, celle d'Einstein, avec ou sans constante cosmologique :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$$

Le premier qui a soulevé ce problème, en 1957, est le cosmologiste Hermann Bondi[42]

[42] H. Bondi: Negative mass in General Relativity : Negative mass in General Relativity. Rev. of Mod. Phys., Vol 29, N°3, july1957



Hermann Bondi 1919-2005
Juif autrichien, naturalisé anglas

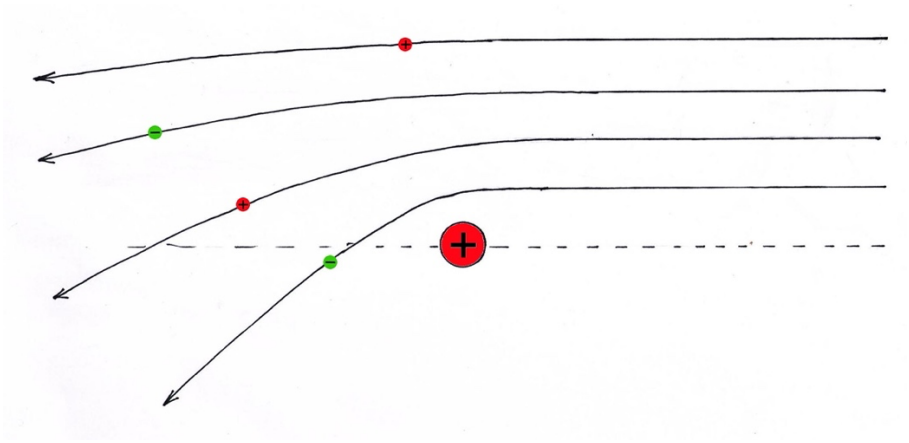
La constante cosmologiste est un terme qui ne manifeste son effet qu'à très grande distance. Pour ce qui nous intéresse, oublions-le.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$$

Situons-nous dans une région où se situe une concentration en masse positive.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \chi\, T^{(+)}_{\mu\nu}$$

A l'extérieur d'une telle masse, dans le vide environnant, la solution métrique (unique) $g_{\mu\nu}$ nous permet de construire les géodésiques, les trajectoires des masses-témoins :



Trajectoire de masses-témoins, positives ou négatives, dans le champ créé par une masse positive. L'équation d'Einstein ne fournit qu'une seule métrique $g_{\mu\nu}$.

Il n'y a donc qu'une unique famille de trajectoires, qu'emprunteront indifféremment les masses témoins positives, rouges et les masses témoins négatives.

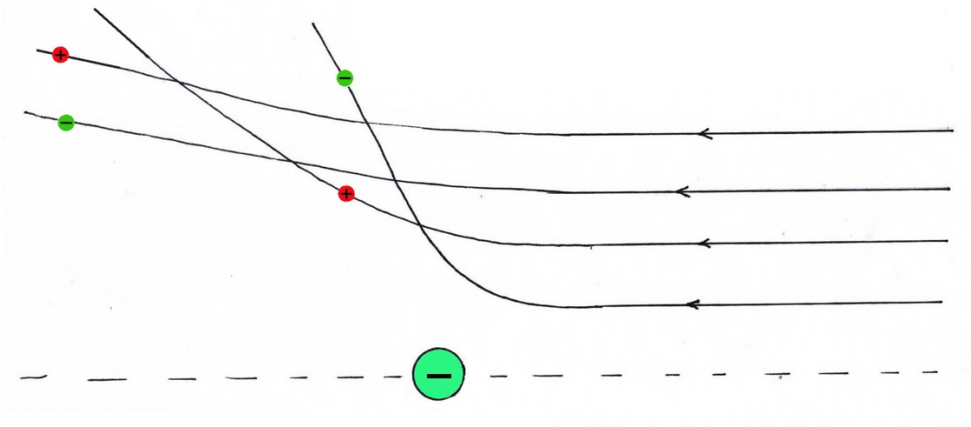
On en déduit le sens de la force d'interaction :

- *Les masses positives attirent à la fois leurs semblables et les masses négatives*

Situons-nous maintenant dans une région de l'espace où e situe une concentration de masse négative :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}^{(-)}$$

Nous savons calculer la métrique décrivant les trajectoires dans le vide entourant cette masse, qui se déduisent toujours de la solution métrique $g_{\mu\nu}$. Et en déduire les courbes-trajectoires empruntées par les masses-témoins, que celles-ci soient positives ou négatives.



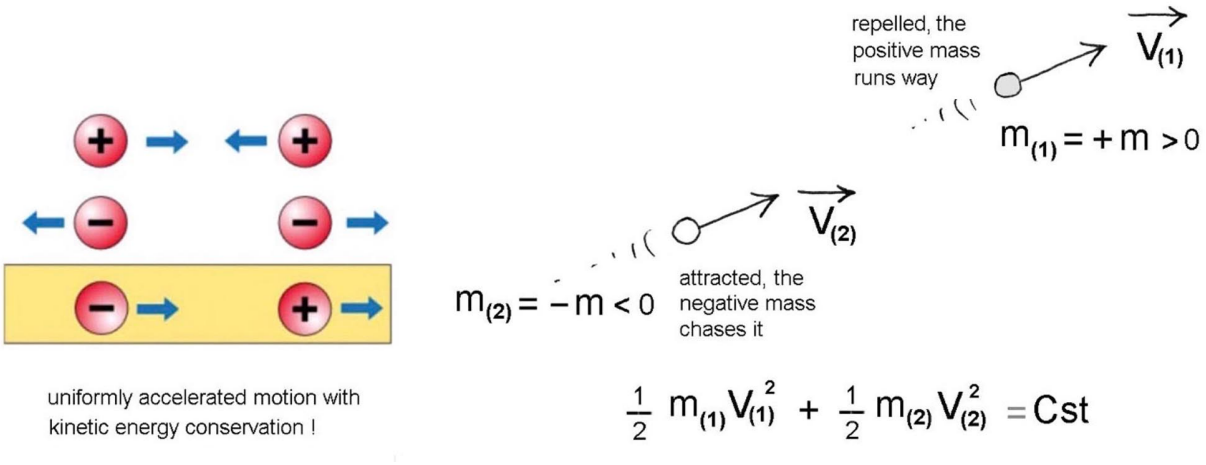
Trajectoire de masses-témoins, positives ou négatives, dans le champ créé par une masse négative. L'équation d'Einstein ne fournit qu'une seule métrique $g_{\mu\nu}$.

Il n'y a donc qu'une unique famille de trajectoires, qu'emprunteront indifféremment les masses témoins positives, rouges et les masses témoins négatives.

On en déduit le sens de la force d'interaction :

- *Les masses positives repoussent à la fois leurs semblables et les masses négatives*

On a donc le schéma de forces suivant :



L'effet runaway.

On a alors la situation indiquée dans l'encadré jaune. Quand on met en présence deux masses de signes opposés, la masse positive s'enfuit, poursuivie par la masse négative. Toutes les deux accélèrent uniformément juqu'à atteindre des vitesses relativistes, sans qu »un champ de force extérieur au couple ne s'exerce sur elles.

Et l'énergie cinétique de l'ensemble reste nul, puis que la masse négative acquiert un énergie cinétique négative. On a donné à ce phénomène le nom ;

effet runaway

On notera que cette situation se traduit par une violation du principe d'action-réaction

Impossible de faire de la physique avec cela. Les scientifiques en ont déduit en 1957 que le modèle cosmologique *ne pouvait pas contenir de masses négatives.*

C'est le point qui encore aujourd'hui dissuade efficacement les scientifiques d'introduire ces masses négatives dans leurs simulations.

Le modèle bimétrique Janus a permis de contourner ce problème. Comment ?

Antérieurement à 2014 la physicienne allemande Sabine Hossenfelder tenta d'introduire une forme d'antigravitation. On trouve un premier article d'elle en 2006 [43], puis un second en 2008[44]. Les notations, bien sûr, sont différentes. Si on les adapte aux nôtres elles équivalent au système :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = T_{\mu\nu}^{(+)} + K_{\mu\nu}^{(+)}$$

[43] S.Hossenfelder Antigravitation Physical Letters B vol. 636 issue 2 4 may 2006 pp.119-125
[44] S. Hossenfelder : A bimetric Theory with Exchange Symmetry. Phys. Rev. D78, 044015, 2008 and arXiv : 0807.2838v1 (gr-qc)17 july 2008

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = T_{\mu\nu}^{(-)} + K_{\mu\nu}^{(-)}$$

Dans son modèle on retrouve ces tenseurs de champ et tenseurs d'interaction. Si on compare aux équations Janus on écrirait celles-ci :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi^{(+)} \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + K_{\mu\nu}^{(+)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = \chi^{(-)} \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + K_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

Ces équations sont alors les équations bimétriques les plus générales. Le système de Sabine Hossenfelder se résume alors à :

$$\chi^{(+)} = \chi^{(-)} = 1$$

Elle a pris des constantes d'Einstein égales à l'unité, pour « simplifier ». Choix similaire chez T.Damour et I.Kogan en 2002, dans un article de 40 pages publié dans Physical Review D[45], qui représente le premier essai de modélisation bimétrique.

Le modèle Janus correspond au choix (parfaitement légitime mathématiquement, on verra plus loin) :

$$\chi^{(-)} = -\chi^{(+)} = \chi$$

En prenant des constantes d'Einstein égales et opposées, on fait disparaître l'ingérable phénomème runway. C'est ce que ni Sabine Hossenfelder, ni Thibaud Damour et Ian Kogan n'ont vu et son ainsi passés à côté du Jackpot.

Terminons ce commentaire du premier article que nous avons publié en 2014 et qui sera reproduit ci-après.

Il représente une opportunité de « publier » le groupe Janus, ci-après sous sa représentation matricielle (déjà présenté à plusieurs occasions dans différents documents, présentation à des colloques).

(15)
$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_0 & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda = \pm 1 \\ \mu = \pm 1 \end{matrix}$$

Comme avait l'habitude de dire Souriau :

Un espace c'est un groupe $\leftrightarrow$ *un groupe c'est un espace*

[45] Damour T. , Kogan I I. Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity Phys. Rev. D 66 (2002) 104024. hep-th/0206042.

Ce groupe Janus (voir ma présentation plus détaillée de 2024[46]) est une extension du groupe de Poincaré restreint, utilisé jusqu'ici par les physiciens :

$$\begin{pmatrix} L_0 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où L_0 est le sous-groupe du groupe de Lorentz, limité à ses composantes orthochrones (n'inversant pas le temps) et C le vecteur translation spatio-temporelle :

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

ϕ représente la translation dans une cinquième dimension.

Ce groupe symplectique agit sur tous les mouvements possibles dans cet espace à cinq dimensions, en reprenant l'idée fondamentale de Souriau, et de la géométrie symplectique dont il est un des auteurs[47].

Une particule se définit par un ensemble de mouvements particuliers dans l'espace à n dimensions de la physique. La phrase de Souriau :

- *Dis-moi comment tu te meus, je te dirai quoi tu es.*

Dans sa quantification géométrique[48]. La quantification géométrique de Souriau se traduit par l'adjonction au mouvement 4D d'une translation dans une cinquième dimension fermée. Dans le groupe, la symétrie $\mu = -1$ traduit, géométriquement, la symétrique matière-antimatière (la C-symétrie). Ce qui correspond à l'élément du groupe :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le mouvement dans cette dimension supplémentaire, angulaire, s'accompagne de la conservation d'un scalaire, en l'occurrence ici la charge électrique q (théorème d'Emmy Noether).

La géométrie symplectique (action du groupe sur le dual de son algèbre de Lie) donne :

$$q' = \mu\, q = -q$$

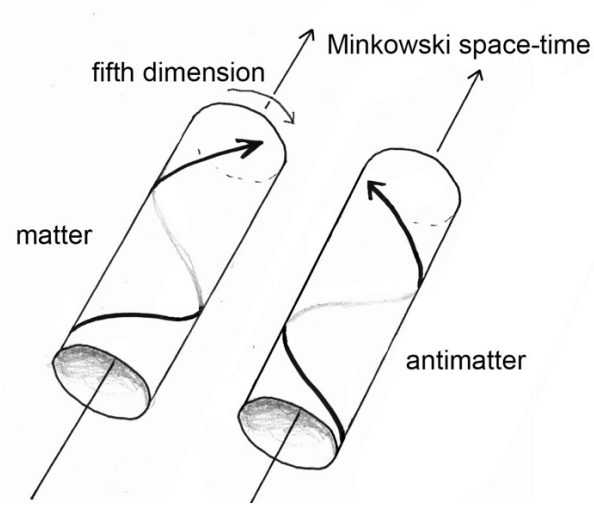
$\mu = -1$ représente la symétrie matière-antimatière (inversion de la charge quantique q). C'est l'inversion du sens de rotation le long de la cinquième dimension :

---

[46] J.P.Petit, H.Zejli : Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group. Reviews in Mathematical Physics. Vol. 37, n001, 2024. 1315 downloads. Cité 8 fois

[47] Avec l'Américain Bertram Kostant (1928-2017) et Alexandre Kirillov (né en 1936)

[48] J-M Souriau, Structure of Dynamical Systems,Ed. Birkhauser, chapter V



Traduction géométrique de la symétrie matière-antimatière

La symétrie $\lambda = -1$ correspond à l'élément :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agissant sur le mouvement d'une particule de matière, cet élément du groupe entraîne une double inversion :

- Inversion de la 5° dimensions, donc C-symétrie, inversion de la charge q.

- Inversion du temps et de l'espace (PT-symétrie), donc inversion de la masse.

Autrement dit une CPT symétrie. Cette symétrie « crée » tous les mouvements, donc les particules qui évoluent dans le monde négatif.

Le « théorème CPT » de la physique quantique (qui n'est pas un véritable théorème, en fait, mais une conséquence des hypothèses faites, en théorie quantique des champ, concernant les opérateurs C , P et T. Il dit :

- La CPT-symétrique d'une particule (de son mouvement) est identique à cette même particule.

Si on rajoute une C-symétrie en faisant :

$$C \times CPT = PT$$

On obtient la vision de Feynman de l'antimatière : une particule de matière, vue à travers un miroir et qui remonte le temps.

C'est ce qui se passe quand on part de l'hypothèse faite en théorie quantique des champs[49], que la T-symétrie n'inverse ni la masse, ni l'énergie.

La vision Janus est différente.

- *La CPT-symétrique d'une particule de matière de masse positive est identique à cette même particule, avec une masse et une énergie toutes deux opposées.*

- *La PT-symétrique d'une particule de matière de masse positive est son antimatière, de masse opposée. Nous l'appellerons « antimatière au sens de Feynman »*

- *La C-symétrique d'une particule de matière de masse positive est son antimatière, que nous nommerons « antimatière au sens de Dirac.*

La dualité matière antimatière est donc présente dans le monde négatif ; quii possède sa propre antimatière, de masse négative.

D'où émanait cette prédiction, qui a été confirmée :

- *L'antimatière créé en laboratoire a une masse positive. Elle réagira comme les particules de matière au champ gravitationnel.*

Cette vision des choses donne alors corps à l'aidée de Sakharov, selon laquelle la synthèse des baryons à partir de (trois) quarks aurait été plus rapide que la synthèse des antibaryons à partir de 3 antiquarks. D'où la survivance d'une particule de matière sur un milliard dans notre feuillet d'univers.

Situation inverse dans son « univers jumeau » (pour nous, le feuillet hébergeant les masses négatives).

L'originalité du modèle Janus est :

- De donner corps à l'idée d'Andréi Sakharov (1967)

- De conférer une idée précise aux particules constituant le monde négatif :

Des antiatomes d'hydrogène et d'hélium de masse négative.

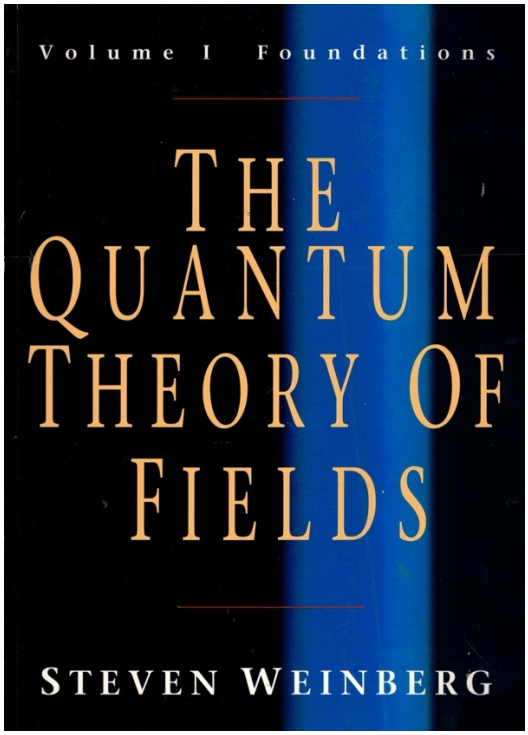
S'agissant de la structure du monde négatif et de la nature des conglomérats sphéroïdaux qui le constituent on présentera un article sur ce sujet plus loin.

Voilà pour la partie groupe.

Dans cet article on trouve les remarques qui servi de point de départ aux travaux de la Belge Nathalie Debergh, mathématicienne, spécialisée dans les bases mathématiques de la mécanique quantique[50].

[49] Que l'opérateur quantique T est anti-linéaire et antiunitaire.
[50] 2026-. N.Debergh & J-P Petit. Beyond the Standard Model. Theoretical Exploration of Negative Mass Physics http://www.jp-petit.org/books/2026-Debergh-Petit.pdf

Dès que j'ai mis le nez dans la Théorie Quantique des Champs, à travers le livre de Steven Weinberg « The Quantum Theory of Fields[51] »



je suis allé page 74 à la section

2.6 **Space inversion and Time-Reversal**

La physique quantique a aussi ses opérateurs d'inversion de temps et d'espace, qui offre deux options. Ils peuvent être

- Linéaire et unitaire
- Antilinéaire et anti-unitaire

C'est … au choix !

Weinberg souligne que si on opte pour :

- Soit pour un opérateur P antilinéaire et anti-unitaire
- Soit pour un opérateur T linéaire et unitaire

Cela entraîne l'existence d'états d'énergie négative. Et Weinberg de conclure

Comme ces états n'appartiennent pas à physique on est contraint de choisir :

- *Un opérateur P linéaire et unitaire*

[51] S.Weinberg. The Quantum Theory of Field. Cambridge University Press. Edition 2009.

- *Un opérateur T Anti-linéaire et anti-unitaire.*

Page104 il revient sur ce choix en le confortant, étant donné qu'on ne connaît nulle situation en physique, qui se traduise par l'existence de tels états.

C'était valable en 2009. Depuis le phénomène d'accélération de l'expansion a été mis en évidence, récompensé par un prix Nobel en 2011[52].

Dans l'article de 2014 je signale donc ce point, ce qui entraînera les travaux de Nathalie Debergh (voir le livre qui regroupe tout cela).

Nous allons maintenant donner la copie de l'article paru en 2014 dans Astrophysics and Space Science. Et avant d'évoquer le second article sur ce sujet, publié dans Modern Physics Letters A cette même année, nous ferons un détour en parlant du Dipole Repeller.

[52] S.Permutter, B.Schmidt, A.G.Riess, prix Nobel de Physique 2011

arXiv:submit/3658856 [gr-qc] 19 Mar 2021

Published in Astrophysics and Space Science, DOI 10.1007/s10509-014-2106-5

Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy

Petit J.P.* and D'Agostini G.†

(Dated:)

The observed acceleration of the universe arises a puzzling question. What is the nature of a dark energy that would cause this phenomenon? We recall the arguments against the existence of negative matter on General Relativity grounds. They vanish if the universe is considered as a manifold M_4 associated to two coupled metrics, solutions of a coupled field equation system. We build a non-steady solution where the positive species accelerates while the negative one decelerates. So that dark energy is replaced by (dominant) negative matter action.

Keywords: Dark energy; Bimetric model; Negative mass.

INTRODUCTION

As pointed out by Riess et al. [24], Perlmutter et al. [17], reviewed by Riess [22], Filippenko and Riess [9], Leibundgut [16], observations of type Ia supernovae at redshift $z < 1$ rise a serious problem, showing that the universe accelerates, this phenomenon being attributed to some puzzling "dark energy". Expanding this investigation on SNe Ia comforts such conclusion (Knop et al. 15). This has been extended to larger redshifts samples (Tonry et al. 28; Barris et al. 2). See also Riess [23]. Nobody anticipated such startling phenomenon. The magnitude of the observed acceleration was not anticipated by theory and continues to defy a post facto explanation. What this newly discovered component of the universe could be made of?

CAN NEGATIVE MASS PLAY A ROLE IN PHYSICS?

The observed acceleration of the universe suggests the effect of a negative pressure, associated to a negative mass content. Is it possible that the Universe would contain negative energy particles? The dynamic group theory (Souriau 27) shows that such concept comes from the antichron components of the Poincaré group. This last contains four connex components. The first four form the orthochron subgroup, or restricted Poincaré group. The last four form the antichron subset, whose elements reverse time. The coadjoint action of this group on its momentum shows that time inversion goes with energy, and mass inversion. Quantum theory of fields analyzes the inversion of space and time too. In dynamical groups theory groups are built with real components. In QFT the T operator become complex, so that it can be either linear and unitary, either antilinear and antiunitary. Weinberg [29, pp. 75–76] writes, we quote:

"At this point we have not *decided* whether P and T are linear and unitary or antilinear and antiunitary. The *decision* is an easy one. Setting $\rho = 0$ in Eq. (2.6.4) gives $\mathrm{Pi}H\mathrm{P}^{-1} = -\mathrm{i}H$, where $H \equiv \mathrm{P}^0$ is the energy operator. If P were antiunitary and antilinear then it would anticommute with is, so $\mathrm{P}H\mathrm{P}^{-1} = -H$. But for any state Ψ of energy $E > 0$, there would be another state $\mathrm{P}^{-1}\Psi$ of energy $-E$. *There are no states of negative energy* (energy less than that of the vacuum), so we are *forced* to *choose* the other alternative: P is *linear* and *unitary* and commutes than anticommutes with H. On the other hand, setting $\rho = 0$ in Eq. (2.6.6) yields $\mathrm{Ti}H\mathrm{T}^{-1} = -\mathrm{i}H$. If we supposed that T is linear and unitary we could simply cancel the is, and find $\mathrm{T}H\mathrm{T}^{-1} = -H$, with the again *disastrous conclusion* that for any state Ψ of energy E there is another state $\mathrm{T}^{-1}\Psi$ of energy $-E$. *To avoid this, we are forced to conclude* that T is antilinear and antiunitary". We see than the quantum theory of fields is built from *a priori choices about fundamental operators*, which are done in order *to avoid the disastrous fact to include negative energy particles in the theory*".

* jppetit1937@yahoo.fr; BP 55 84122 Pertuis France
† dagostini.gilles@laposte.net

This absence is nothing but a pure hypothesis. A stronger critic comes from General Relativity theory and was pointed out in Bondi [3]. Newton's law emerges naturally from Einstein's equation, through Newtonian approximation. Considering the action of a particle (2) on a particle (1), Bondi defines three kinds of masses:

$$m_{\mathrm{i}}^{(1)} \frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{G(r_2 - r_1) m_{\mathrm{p}}^{(1)} m_{\mathrm{a}}^{(2)}}{|r_2 - r_1|} \tag{1}$$

m_{i} is the inertial mass, m_{p} the passive gravitational mass and m_{a} the active gravitational mass. Immediately the equivalence principle gives $m_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{p}}$ so that (1) becomes:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{G(r_2 - r_1) m_{\mathrm{a}}^{(2)}}{|r_2 - r_1|} \tag{2}$$

which shows that positive mass attracts both positive and negative matter. Negative mass repels the two. So that two negative masses repel each other and cannot form clumps by gravitational instability. On another hand, if two masses with same absolute values and opposite signs encounter, the positive one escapes, while the negative one runs after it. The two experience a constant acceleration, but energy and momentum are conserved, because of the two masses are negative. Such preposterous features banned negative mass from cosmology during more than half a century.

REGIONS THAT BEHAVE AS IF THEY WERE FILLED BY NEGATIVE MATTER

Several authors suggested that the voids are a fundamental element of the large scale structure (LSS), with bubble-like structure (De Lapparent et al. 5; Kirshner et al. 14; Rood 25; Geller and Huchra 10; Petit 18, 19; Piran 21; El-Ad et al. 7, 8). El-Ad et al. [6] suggested that initial tiny perturbations, in the primordial density field, "acting as if the had a negative mass", could extend and play a role in the LSS. He made the hypothesis, without justification, that negative mass could own a negative active mass (from Bondi's definition), but positive inertial and passive masses, so that two negative masses would mutually attract. Negative material could form clusters. Positive and negative masses would repel each other, which was studied in references of Petit [18, 19]. Piran developed a Void Finder Algorithm which identifies voids in reshift surveys and measure their size and underdensity. In a more recent paper Izumi et al. [13] consider gravitational lensing shear by the magnifying lens models such as negative mass compact objects causing gravitational repulsion on light, like a concave lens. They suggest, as on reference of Knop et al. [15] that negative masses might attract each other, and form negative massive clumps, so that they could reside in cosmological voids (and there, they mention Piran's work). The demagnifying effect was previously predicted in Knop et al. [15], due to *negative lensing effect*. In addition they have shown that the images by the lens models are radially distorsed, due to the repulsive effect (instead tangentially, when due to positive masses).

Classically, the observed distorsion of the images of galaxies (weak lensing effect) is used to determine the three-dimensional distribution of some hypothetical CDM. Conversely, when decoding the data, if one assumes that the observed distorsion is radial, instead tangential, it could provide three-dimensional negative matter distribution. If this last is found as a regular set of clumps, located at the center of the observed big voids that would be in favor of the presence of such negative mass clumps in our universe.

TOWARDS A BIMETRIC DESCRIPTION OF THE UNIVERSE

General relativity is based on a M_4 manifold, associated to a single Riemannian metric, considered as solution of Einstein's field equation. On such grounds, negative matter cannot cohabit with positive matter. What about a different geometrical framewok? A first bimetric description was proposed in Petit [18, 19] and Petit et al. [20], then in Henry-Couannier [11] and Hossenfelder [12]. Let us consider the following coupled field equations system:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left(T_{\mu\nu}^{(+)} + \varphi T_{\mu\nu}^{(-)} \right) \tag{3a}$$

$$R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(-)}g^{(-)}_{\mu\nu} = -\chi\left(\phi T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}\right) \tag{3b}$$

$g^{(+)}_{\mu\nu}$ metric refers to positive energy (and mass if the have one) particles. $g^{(-)}_{\mu\nu}$ refers to *negative* energy (and mass if the have one) particles. $R^{(+)}_{\mu\nu}$ and $R^{(-)}_{\mu\nu}$ are Ricci tensors, built from metrics $g^{(+)}_{\mu\nu}$ and $g^{(-)}_{\mu\nu}$. For sake of brevity we will sometimes use the notation: $f \in \{+,-\}$. In mixed form, we will write the tensors:

$$T^{(f)}{}_{\nu}{}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho^{(f)}c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(f)} \end{pmatrix} \quad \text{with} \begin{cases} \rho^{(f)} > 0 \text{ and } p^{(f)} > 0 & \text{for } f = \text{“+”} \\ \rho^{(f)} < 0 \text{ and } p^{(f)} < 0 & \text{for } f = \text{“−”} \end{cases} \tag{4}$$

φ and ϕ are functions that will be defined further (to ensure energy conservation). Each metric produces its own geodesics family. The two are distinct, so that opposite energy particles cannot encounter, on pure geometric grounds. They interact only through gravitation. We assume that positive light, composed by positive energy photons, cruises along null geodesics of metric $g^{(+)}_{\mu\nu}$, while negative light, composed by negative energy photons, cruises along null geodesics of metric $g^{(+)}_{\mu\nu}$. We assume that structures made of positive masses can emit and capture positive energy photons. Similarly, structures made of negative masses can emit and capture negative energy photons. So that on geometric grounds, negative structures would be invisible to us, through our eyes or astronomic instruments.

NON-STEADY SOLUTION FOR DUST UNIVERSE

We assume this bimetric universe is homogeneous and isotropic, so that the Riemannian metrics become:

$$\left(\mathrm{d}s^{(f)}\right)^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \left(a^{(f)}\right)^2 \frac{\mathrm{d}u^2 + u^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)}{\left(1 + k^{(f)}\frac{u^2}{4}\right)^2} \tag{5}$$

Introducing these metrics in the system (3a) and (3b), with $p^{(+)} \cong 0$ and $p^{(-)} \cong 0$ we get classical systems:

$$\frac{3}{c^2\left(a^{(+)}\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}a^{(+)}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \frac{3k^{(+)}}{c^2\left(a^{(+)}\right)^2} = -\chi c^2\left[\rho^{(+)} + \varphi\rho^{(-)}\right] \tag{6a}$$

$$\frac{2}{c^2\left(a^{(+)}\right)^2}\frac{\mathrm{d}^2a^{(+)}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{c^2\left(a^{(+)}\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}a^{(+)}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{k^{(+)}}{c^2\left(a^{(+)}\right)^2} = 0 \tag{7a}$$

$$\frac{3}{c^2\left(a^{(-)}\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}a^{(-)}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \frac{3k^{(-)}}{c^2\left(a^{(-)}\right)^2} = +\chi c^2\left[\phi\rho^{(+)} + \rho^{(-)}\right] \tag{6b}$$

$$\frac{2}{c^2\left(a^{(-)}\right)^2}\frac{\mathrm{d}^2a^{(-)}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{c^2\left(a^{(-)}\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}a^{(-)}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{k^{(-)}}{c^2\left(a^{(-)}\right)^2} = 0 \tag{7b}$$

Applying classical mathematical methods (Adler et al. 1) the compatibility conditions of sets (6a) and (7a) and (6b) and (7b) gives:

$$3\frac{\mathrm{d}a^{(+)}}{a^{(+)}} + \frac{\mathrm{d}\left[\rho^{(+)} + \varphi\rho^{(-)}\right]}{\left[\rho^{(+)} + \varphi\rho^{(-)}\right]} = 0 \tag{8a}$$

$$3\frac{\mathrm{d}a^{(-)}}{a^{(-)}} + \frac{\mathrm{d}\left[\phi\rho^{(+)} + \rho^{(-)}\right]}{\left[\phi\rho^{(+)} + \rho^{(-)}\right]} = 0 \tag{8b}$$

The conservation of the energy (and mass):

$$E = \rho^{(+)}c^2\left(a^{(+)}\right)^3 + \rho^{(-)}c^2\left(a^{(-)}\right)^3 \tag{9}$$

is ensured if:

$$\varphi = \left(\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}}\right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}}\right)^3, \quad \phi = \varphi^{-1} \tag{10}$$

So that coupled field equation system becomes:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi\left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \left(\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(-)}\right] \tag{11a}$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi\left[\left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)}\right] \tag{11b}$$

Let:

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^4} \tag{12}$$

$$\left(a^{(+)}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2a^{(+)}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi G}{c^4}E \tag{13a}$$

$$\left(a^{(-)}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2a^{(-)}}{\mathrm{d}t^2} = +\frac{4\pi G}{c^4}E \tag{13b}$$

THE NATURE OF "DARK ENERGY"

Assume $E < 0$. Then $a''^{(+)} > 0$ and $a''^{(-)} < 0$. If we suppose that our visible part of the universe corresponds to positive mass, then it accelerates, while the negative species decelerates. Equation (13b) identifies to Friedman equation, while (13a) identifies to Bonnor's [1989] solution:

$$\begin{aligned} a^{(+)}(u) &= \alpha^2\cosh^2 u \\ t^{(+)}(u) &= \alpha^2\left(1 + \frac{\sinh 2u}{2} + u\right) \end{aligned} \tag{14}$$

From dynamic group theory (Souriau 27) all particles, including photons, may have negative mass. If L_o is the element of the orthochron restricted Lorentz group, let us consider the following extension of the Poincaré group.

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } \lambda = \pm 1 \text{ and } \mu = \pm 1 \tag{15}$$

which acts on a five-dimensional Kaluza space. The dimension of the group is 11. Then the momentum gets an extra scalar q, identified by J.M. Souriau as the electric charge (Souriau 26). The coadjoint action of the group gets an additional relation:

$$q' = \lambda\mu q \tag{16}$$

Matter-antimatter duality holds in the negative mass world. The negative matter, which acts as "dark energy" is composed by negative energy (and negative mass, if they have one) particles: electrons, protons, neutrons, neutrinos, quarks, an so on, plus their antiparticles, plus photons.

NEWTONIAN APPROXIMATION

To develop approximation we need to expand the metrics into series around Lorentzian metrics. The Universe is not homogeneous. When we develop classical Newtonian approximation we assume that the zeroth order term is Lorentzian, which means that this metric is solution of the field equation with a null second member, describing an empty portion of space. It is not necessary that this zeroth order solution corresponds to a description of the whole universe, only a restricted portion of space, small enough to encompass the interaction of particles, planets or stars, considered as mass-points. Similarly, whatever is the time-dependent model, it is possible to consider that the system is quasi steady. In our bimetric description, we consider a finite portion of quasi-steady empty space-time (null curvature, Lorentzian metrics).

$$g^{(+)} = \eta^{(+)} + \varepsilon\eta^{(+)}, \quad g^{(-)} = \eta^{(-)} + \varepsilon\eta^{(-)} \tag{17}$$

The two scale factor $a^{(+)}$ and $a^{(-)}$ are considered as constants. Then, field equations are expanded into a series. Neglecting the second order terms, we find:

$$\varepsilon\gamma^{(+)}_{00|\beta|\beta} = -\chi c^2 \left[\delta\rho^{(+)} + \left(\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}} \right)^3 \delta\rho^{(-)} \right] \tag{18a}$$

$$\varepsilon\gamma^{(-)}_{00|\beta|\beta} = \chi c^2 \left[\left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}} \right)^3 \delta\rho^{(+)} + \delta\rho^{(-)} \right] \tag{18b}$$

Defining the potentials:

$$\varphi^{(+)} = \varepsilon\gamma^{(+)}_{00}\frac{c^2}{2}, \quad \varphi^{(-)} = \varepsilon\gamma^{(-)}_{00}\frac{c^2}{2} \tag{19}$$

we get:

$$\frac{\mathrm{d}x^{(+)\alpha}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\alpha{}^{(+)}}, \quad \frac{\mathrm{d}x^{(-)\alpha}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x_\alpha{}^{(-)}} \tag{20}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2\varphi^{(+)}}{\partial x^{(+)\alpha}\partial x_\alpha{}^{(+)}} = 4\pi G \left[\delta\rho^{(+)} + \left(\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}} \right)^3 \delta\rho^{(-)} \right] \tag{21a}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi^{(-)}}{\partial x^{(-)\alpha} \partial x_\alpha{}^{(-)}} = -4\pi G \left[\left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}} \right)^3 \delta\rho^{(+)} + \delta\rho^{(-)} \right] \tag{21b}$$

which are Poisson-like equations, associated to our bimetric model. Building the dynamics from this set of equations would perhaps require a more refined solution, involving different speeds of light $c^{(+)}$ and $c^{(-)}$, and possibly time scale factors $T^{(+)}$ and $T^{(-)}$. Anyway, it is possible to derive those laws in the simplified case $a^{(+)} = a^{(-)}$. Then:

$$\Delta\varphi^{(+)} = -\Delta\varphi^{(+)} = 4\pi G \left(\delta\rho^{(+)} + \delta\rho^{(-)} \right) \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x^{(-)\alpha}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x_\alpha} \tag{23}$$

The subsequent interaction laws differ from GR's: positive masses attract together through Newton's law. Negative masses attract together through Newton's law. Opposite signs masses repel each other through an anti-Newton's law.

Referring to the previous works of Bondi [3] and Bonnor [4] the puzzling problem of runaway phenomenon is eliminated. By the way this model fits classical verification associated to GR. In effect, as the two species repel each other, where positive mass is present, negative mass is almost absent and the coupled field equations system reduces to:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} \simeq \chi T_{\mu\nu}^{(+)} \tag{24a}$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} \simeq -\chi \left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(+)} \tag{24b}$$

On another hand, considering portions of space containing a sphere filled by constant density matter (positive or negative), surrounded by void makes "internal" and "external" Schwarzschild solutions features clearer, as firstly presented in Petit [19], introducing negative gravitational lensing effect, evoked in Izumi et al. [13].

[1] Adler, R., Bazin, R., Schiifer, M.: Introduction to General Relativity. McGraw-Hill, New York (1967)
[2] Barris, B., et al.: Astrophys. J. **602**, 571 (2004)
[3] Bondi, H.: Negative mass in general relativity. Rev. Mod. Phys. **29** (3), 423 (1957)
[4] Bonnor, W.B.: Negative mass and general relativity. Gen. Relativ. Gravit. **21** (11) (1989)
[5] De Lapparent, V., Geller, M.H., Huchra, J.P.: Astrophys. J. Lett. **302**, L1 (1986)
[6] El-Ad, H., Piran, T.: Astrophys. J. **491**, 421 (1997)
[7] El-Ad, H., Piran, T., da Costa, L.N.: Astrophys. J. Lett. **462**, L13 (1996)
[8] El-Ad, H., Piran, T., da Costa L.N.: Mon. Not. R. Astro. Soc., **287**, 790 (1997)
[9] Filippenko, A.V., Riess, A.G.: In: AIP Conf. Proc., vol. 540, pp. 227–246 (2001), Particle
[10] Geller, M.J., Huchra, J.P.: Science **246**, 897 (1989)
[11] Henry-Couannier, F.: Int. J. Mod. Phys. A. **20**, 2341 (2005)
[12] Hossenfelder, S.: A Bimetric theory with exchange symmetry. Phys. Rev. D **78**, 044015 (2008)
[13] Izumi, K., Hagiwara, C., Nakajima, K., Kitamura, T., Asada, H.: Gravitational lensing shear by an exotic lens with negative convergence or negative mass. Phys. Rev. D, Part. Fields **88**, 024049 (2013)
[14] Kirshner, R.P., Oemler, A. Jr., Schlechter, P.L., Schectman, S.A.: Astrophys. J. **314**, 496, (1987)
[15] Knop, R., et al.: Astrophys. J. **598**, 102, (2003)

[16] Leibundgut, B.: Annu. Rev. Astron. Astrophys., **39**, 67, (2001)
[17] Perlmutter, S., et al.: Astrophys. J. **517**, 565 (1999)
[18] Petit, J.P.: The missing mass problem. Il Nuovo Cimento B **109**, 697–710 (1994)
[19] Petit, J.P.: Twin universe cosmology. Astrophys. Space Sci. **226**, 273–307 (1995)
[20] Petit, J.P., Midy, P., Landhseat, F.: Twin matter against dark matter. In: Conf. on Astr. and Cosm., "Where Is the Matter?", Marseille (2001).
[21] Piran, T.: On gravitational repulsion. Gen. Relativ. Gravit., **29** (11), 1363 (1997)
[22] Riess, A.G.: Publ. Astron. Soc. Pac. **112**, 1284 (2000)
[23] Riess, A.G.: Astrophys. J. **607**, 665—687 (2004)
[24] Riess, A.G. et al.: Astron. J. **116**, 1009 (1998)
[25] Rood, H.J.: Annu. Rev. Astron. Astrophys. **26**, 245 (1988)
[26] Souriau, J.M.: Géométrie et Relativité. Hermann, Paris (1964) (French edition only)
[27] Souriau, J.M.: Structure des Systèmes Dynamiques, Dunod, France (1970) (Structure of Dynamical Systems, Birkhaüser, Boston, 1997)
[28] Tonry, J.T., et al.: Astrophys. J. **594**, 1 (2003)
[29] Weinberg, S.: The Quantum Theory of Fields. Cambridge University Press, Cambridge (2005)

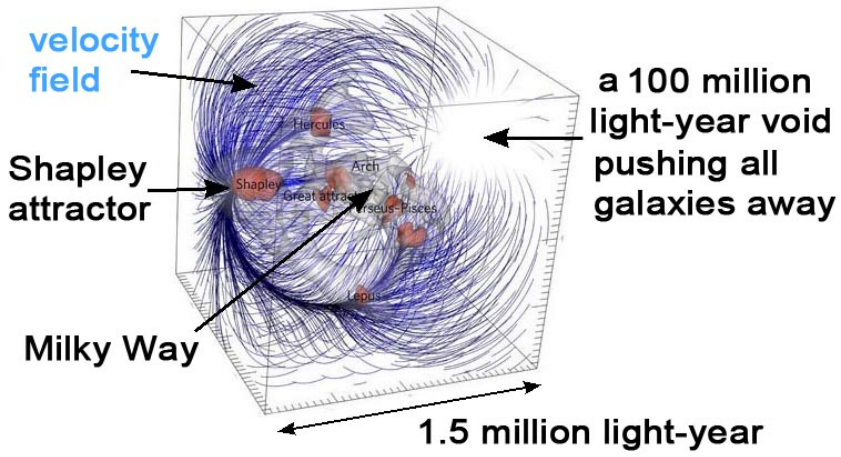
En 2017 paraît, dans la revue Nature, un article qui se présente sous une forme originale[53].

Ces quatre chercheurs, ont géré des données émanant de centaines de milliers de galaxies, qui se situent à des distances allant jusqu'à un milliard et demi d'années-lumière qui se résument à (distance- vitesse de fuite (redshift)- position (θ, φ)dans le ciel).

Si on veut donner une image didactique de l'expansion cosmique il faut imaginer qu'on collerait sur un ballon que l'on gonfle des décalcomanies figurant les galaxies. Alors la loi de Hubble se manifeste immédiatement, selon laquelle la vitesse de fuite est proportionnelle à la distance.

Ce champ de vitesse, c'est la façon dont l'espace lui-même se détend, entre en expansion. Mais dans cet espace, les galaxies bougent, ont des mouvements propres.

Y.Hoffman, D.Pomarède, B.Tully et H.Courtois ont donc retranché des mesure de vitesse des galaxies la composante liée à l'expansion. Ils ont alors construit un fantastique champ de vitesse, en 3D qui se situe dans un cube d'un milliard et demi de côté.



Le « Dipole Repeller » : Le point d'observation (notre galaxie) est au centre du cube.

Les lignes bleues représentent le champ de vitesse qui s'organise entre deux pôles. A gauche on trouve une amas représentant une centaine de milliers de galaxies, l'attracteur Shapley.Mais à droite, à 600 millions d'années-lumière de distance de la Voie Lactée, notre point d'observation, on trouve un immense vide, de cent millions d'années-lumière de diamètre. Celui-ci repousse les galaxies environnantes.

Pour nous c'est la manifestation de l'effet répulsif d'un premier conglomérat de masse négative, que nous situons au centre de ce grand vide. Nous rédigeons immédiatement un article en ce sens que nous adressons aux revues « mainstream ».

Refus général de soumission à des referees.

[53] Y.Hoffman, D.Pomarède, B.Tully, H.Courtois. The Dipole Repeller. Nature Astronomy. Vo. 17 article 0036 (2017). DOI. 10.1038/s42550-016-0036 arXiv : 1792.02483

Pas d'explication. C'est le « negative mass effect » : Les masses négatives n'existent pas dans l'univers. Donc toute explication de cet effet répulsif qui l'attribue à une masse négative est un non-sujet.

Nous renverrons le lecteur scientifique à la lecture de cet article[54]. Là on a essayé de tromper la vigilance des bureaux éditoriaux avec deux prête-noms : Hicham Zejli et .. son épouse. Ca a pu passer dans une obscure revue russe de .. géologie, que nous ne citerons pas. Je vais resoumettre cet article sous le nom de JP Petit à une revue qui accepté de faire examiner les articles. Et cette référence remplacera celle mentionnée.

Car nous sommes face à une situation totalement invraisemblable.

Dans la suite de cet texte je détaillerai le contenu d'un article intitulé « Alternatives to Black Holes : Gravastars and Plugstars[55] », publié en 2025 dans une revue à comité de lecture.

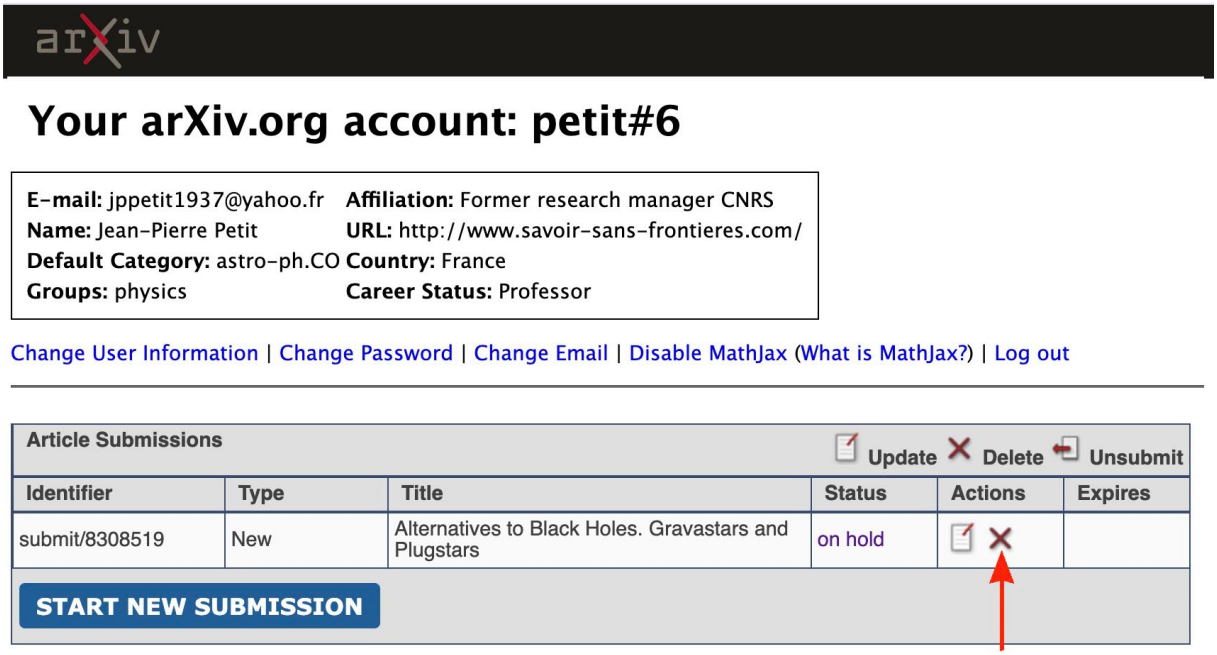
J'évoquerai plus loin un article où mon nom figure sous un pseudonyme et un autre où l'article a pu passer parce qu'un collègue mathématicien français a carrément accepté de substituer mon nom au sien. Alors le papier est passé (et il s'agit d'un contribution majeure dans l'analyse de la solution de Schgwarzsvchild !).

Le 31 octobre 2026, j'ai soumis à arXiv ce papier, sur mon compte (gr-qc) ; general relativity and quantum gravity.

L'article n'a pas seulement été bloqué (ON HOLD) il a été carrément effacé !

[54] H.Zejli, JP-Petit, H.Zejli. Nature of the Dipole Repeller. https://hal.science/hal-04068080v1

[55] J.P.Petit , G.d'Agostini. Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. Octobre 2025. 497 views. 3610 downloads



arXiv

Your arXiv.org account: petit#6

E-mail: jppetit1937@yahoo.fr **Affiliation:** Former research manager CNRS
Name: Jean-Pierre Petit **URL:** http://www.savoir-sans-frontieres.com/
Default Category: astro-ph.CO **Country:** France
Groups: physics **Career Status:** Professor

Change User Information | Change Password | Change Email | Disable MathJax (What is MathJax?) | Log out

Article Submissions Update Delete Unsubmit

Identifier	Type	Title	Status	Actions	Expires
submit/8308519	New	Alternatives to Black Holes. Gravastars and Plugstars	on hold		

START NEW SUBMISSION

A propose du document qui suit, avant qu'il ne soit remplacé par un article publié dans une revue à comité de lecture, signalons qu'il sera accru de l'explication que le modèle Janus propose pour The Big Ring[56]. Il s'agit d'une formation en anneau découverte en 2024.

[56] A.Lopez, RG Clowes,GM Williger, « A Big Ring in the Sky ». arXiv :20*24.07591,2024



Nature of the Dipole Repeller

Hasnae Zejli, Jean-Pierre Petit, Hicham Zejli

▶ **To cite this version:**

Hasnae Zejli, Jean-Pierre Petit, Hicham Zejli. Nature of the Dipole Repeller. Russian Journal of Earth Science, In press, 8 (2). hal-04068080v1

HAL Id: hal-04068080

https://hal.science/hal-04068080v1

Submitted on 13 Apr 2023 (v1), last revised 17 Aug 2023 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Nature of the Dipole Repeller

Hasnae ZEJLI - PhD in Physics & Mechanical Engineering, Hicham ZEJLI - Engineer,
Jean-Pierre Petit - Astrophysicist & Retired Research Director at CNRS

Keywords : dipole repeller, primeval antimatter, dark matter, dark energy, runaway paradox, Sakharov model, bimetric model, negative mass, Janus cosmological model

Abstract : It's shown through the Janus cosmological model framework that the object responsible for the phenomenon called "dipole repeller" is a spheroidal cluster made exclusively with anti-hydrogen and anti-helium of dark matter of negative mass. Emitting photons of negative energy, this object is not observable with optical instruments, but it plays a crucial role in the structure of the world of negative dark matters which contains neither galaxies, nor stars, nor heavy elements, nor planets, nor biomolecules. This model thus proposes an important extension of the theory of dark matter by including the existence of negative masses in the universe, and thus opens up new perspectives for understanding the structure and evolution of the universe as a whole.

1 – Introduction

In 2017 Yehudi Hoffman, B. Tully, H.Courtois and D.Pomarède published the first very large scale map of the universe (Hoffman et al. 2017), based not only on the position of galaxies, but also including the velocity field, subtracting the Hubble field from what emanated from the raw measurements of their redshift. The result is extremely impressive and will be, we believe, one of the major discoveries of observational cosmology today, comparable to that made by Edwin Hubble a century earlier. It was already known that the motions of a certain set of galaxies reflected a convergence toward a formation that had been given the name of Great Attractor. The analysis published in 2017 highlighted the action of another, larger formation, located beyond this one, to which the name Shapley Attractor was given. But the most singular result was to highlight a region, roughly diametrically opposed to these two formations, where no galaxies were found, only a large void around which the neighboring galaxies presented a flight motion, centered on this object. This formation was first given the name of dipole repeller. Then, deciding to couple it to the attractive formations, it was included in the name of Dipole Attractor. There is no doubt that the understanding of such a phenomenon, which cannot be qualified as an artifact, will require an important progress in our understanding of cosmic dynamics.

2 – Some attempts at interpretation.

Four years after this discovery, few attempts have been made to model this phenomenon. The article published by Neiser in 2020 does not focus on this question of the dipole repeller which follows from the hypotheses made. It is known that observations have highlighted a phenomenon of acceleration of the cosmic expansion (Perlmutter et al. 1999, Riess et al. 2004, Schmidt B.P. et al. 1998). This implies the action of a component associated with a

negative pressure. One of the models considered is to suppose the existence, within the cosmos, of elements of negative mass, which would then exert a repulsive action on the components of positive mass. This hypothesis is at the center of the works corresponding to the references (Petit et al. 2014b, Petit et al. 2014a, Petit et al. 2019, Petit et al. 2018, Petit et al. 2021b, Petit et al. 2021a). Neiser in 2020 makes numerous hypotheses in different fields, on the nature of the Big Bang, the quantum vacuum, the origin of the universe "which would have been created by the gravitational collapse of an antineutrino star". To the point that he recalls that the conclusions of his article remain speculative. Among these hypotheses is that antimatter would have a negative gravitational mass, which would allow, according to him, "the progressive formation of neutrino stars and stars made up of antineutrinos which would repel each other". This repulsive aspect of a primordial antimatter is also mentioned by Benoit-Lévy et al. in 2012, but without further justification. All these people are waiting for the result of the analysis of the behavior of the antimatter created in the LHC, slowed down and subjected to the earth gravitational field (Nieto et al. 1994), aspects discussed by Nieto et al. in 1991. This is a question that we will address later. Heald evokes in 2020 the situation of Laniakea, pushed by the dipole repeller and pulled by the Shapley Attractor. Here again, a repulsion between matter and antimatter is evoked, which would have given rise to the present large-scale structure of the universe, organized around large voids. But we do not find any real model of the object that would be located at the center of this great void, nor why we would not receive any light signal from it. Vuyk appeals in 2018 to a hypothetical 5th force. Hoffman et al. in 2018 through numerical simulations reconstruct the ad hoc distribution of dark matter consistent with the observational data (Hoffman et al. 2017). From this exploration we retain two explanatory schemes. That of the existence of hypothetical objects made of repulsive antimatter, unobservable and that of a gap in the dark matter distribution.

3 – About the interpretation through a gap in the dark matter.

One is entitled to ask the question: can a gap in the dark matter produce the observed repulsion effect? Conceptually one is then tempted to start by considering a spherical gap in a uniform dark matter distribution. We then think that this system should obey the Poisson equation.

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Psi}{dr}=4\pi G\rho_{dm} \quad (1)$$

This equation is linear. We can therefore say that by superimposing two given density distributions ρ_1 and ρ_2, the resulting gravitational potential is the sum of the potentials associated with these two distributions $\Psi=\Psi_1+\Psi_2$.

Let us consider a uniform density distribution ρ_{dm}^{unif}, creating a potential Ψ1. We will create the gap by assuming that in a certain volume contained in a sphere we superimpose an equal and opposite density $-\rho_{dm}^{unif}<0$ creating a potential ψ2 .

Let us start by calculating this one, solution of

(2) $$\frac{d^2\Psi_2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Psi_2}{dr}=-4\pi G\rho_{dm}^{unif}$$

This solution is :

(3) $$\Psi_2=-\frac{4\pi G\rho_{dm}^{unif}}{3}r^2 \qquad \vec{g}_2=\frac{8\pi G\rho_{dm}^{unif}}{3}\vec{r}$$

We thus obtain a repulsive gravitational field, proportional to the distance to the center of the sphere. It remains to calculate the gravitational field created by the uniform distribution, still considering the Poisson equation (1). Its solution is then :

(4) $$\Psi_1=\frac{4\pi G\rho_{dm}^{unif}}{3}r^2 \qquad \vec{g}_1=-\frac{8\pi G\rho_{dm}^{unif}}{3}\vec{r}$$

We obtain the same force field, of opposite sign. Consequently, by superimposing, inside the gap the gravitational field is null:

(5) $$\vec{g}=\vec{g}_1+\vec{g}_2=0$$

In any case the solution (4), of the Poisson equation, corresponding to a uniform distribution is a paradox. We have placed ourselves in a stationary or quasi-stationary situation, considering a uniform distribution of density ρ_{dm}^{unif}. Then, whatever the point chosen as the origin of the coordinates, we find a non-zero gravitational field $\vec{g}$, whose modulus increases proportionally to the distance to this point. We are faced with a paradox.

We are forced to go back to the construction of this Poisson equation. Unlike electromagnetism, this equation cannot be constructed by calculating the flow of the gravitational field through a closed surface, because of the non-nullity at infinity. In gravitation we will be forced to consider the Poisson equation as the linearized version of Einstein's equation in a very restrictive case: in a stationary (or quasi-stationary) situation and when we can describe the metric as a perturbation of a Lorentz metric :

(6) $$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\varepsilon\gamma_{\mu\nu}$$

The classical calculation gives :

(7) $$\varepsilon\sum_{i=0}^{3}\gamma_{00}{}_{|i}=-\chi\varepsilon\rho_1$$

The gravitational potential is thus defined by:

$$\Psi = \frac{c^2}{2}\varepsilon\gamma_{00} \tag{8}$$

and equation (7) is then identified with the Poisson equation. But, in this approach, it should be noted that everything is based on the fact that we can consider a stationary metric solution, in the zero order, expressed in the form of a Lorentz metric, immediately associated to a portion of empty space. In the above, the perturbation of the metric is due to a density of finite extension. It is not possible to reconcile this approach on the basis of a non-empty, uniform and infinite density of order zero. The conclusion is that it is simply impossible to define a gravitational potential in a uniform matter distribution. One can consider that this remark is of little interest. It remains that this question had never been raised before. However, the problem of the existence of large voids in the large scale structure of the universe is not solved. Indeed, the gravitational instability produces clusters, not vacuums, so that we do not have a scheme for their formation.

4 – The dipole repeller in the Janus cosmological model.

This translates into an introduction of negative masses in the cosmological model that satisfies the equivalence principle. This is impossible in the framework of classical general relativity, based on a single field equation, that of Einstein, with or without its cosmological constant:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} + \Lambda\,g_{\mu\nu} = \chi\,T_{\mu\nu} \tag{9}$$

Indeed the control particles, positive or negative, follow the same geodesics, whatever the source of the field. As a consequence, we get the following interaction scheme:

- The positive masses attract the positive and negative masses.
- The negative masses repel the positive and negative masses.

This leads to the runaway paradox (see Fig. 1), according to which a couple constituted by masses of opposite signs accelerates uniformly while keeping a constant kinetic energy.

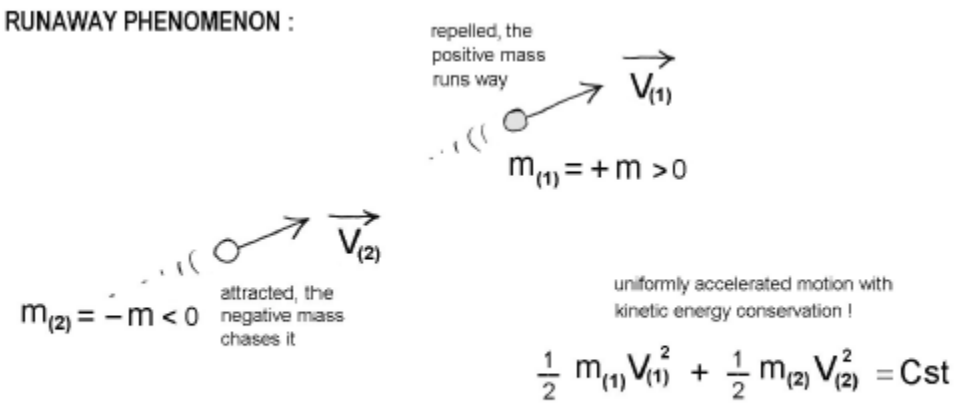


Fig.1 : The runaway paradox

When the authors Neiser in 2020, Benoit-Lévy et al. in 2012 and Nieto et al. in 1994 mention the existence of negative mass structures, these aspects are not considered, although they are fundamental. It is not possible to invoke the presence of negative masses without clarifying this point. In 2018, Farnes justifies what he calls himself a "toy model" by saying that this runaway effect could be the source of cosmic rays. To remain within the framework of a description using a single field equation, he is forced to invoke a hypothetical mechanism of continuous creation of negative mass so that this leads to the constancy of its value over time, which would then constitute an interpretation of the presence of the cosmological constant in the equation. But this scheme does not exclude the runway phenomenon which he then considers as the source of the existence of particles of very high energy, so-called cosmic rays. Because of this undescribed mechanism of constant creation of negative mass the author only obscures the situation even more.

The Janus cosmological model (Petit et al. 2014b, Petit et al. 2014a, Petit et al. 2019, Petit et al. 2018, Petit et al. 2021b, Petit et al. 2021a) takes up the idea of a bimetric description of the universe, initiated by Damour et al. in 2002, then taken up through articles published by Hossenfelder in 2006 and 2008. If the description done by Damour et al. in 2002 corresponds to branes whose points are connected by a hypothetical force field, the description done next by Hossenfelder in 2006 and 2008 is clearer and more constructed, geometrically. The system of the two field equations resulting from their construction, from a Lagrangian, satisfies the Bianchi conditions. The universe is then an M4 manifold equipped with two metrics, the first one producing the geodesics along which the positive masses and the positive energy photons move and the second one the geodesics along which the negative mass particles and the negative energy photons move. The disjoint character of these two systems of geodesics leads to the fact that each set of masses interacts with the other only through an antigravity force and that the negative masses are therefore invisible for an observer constituted of positive masses. The model was created by Hossenfelder in 2006 and 2008 at a time when the phenomenon of accelerating cosmic expansion was not recognized. In an effort to fit with what she considers as the standard model (of Friedmann) the author makes choices of signs which lead to a nonsatisfaction of the principle of equivalence for the negative masses, which are then endowed with a negative gravitational mass, but a positive

inertial mass. In the Janus model, on the contrary, we try to satisfy the equivalence principle within the two populations, which leads to the system of equations:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}}\, \widehat{T}_{\mu\nu}^{(-)} \right] \quad \textbf{(10a)}$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + \sqrt{\frac{g^{(+)}}{g^{(-)}}}\, \widehat{T}_{\mu\nu}^{(+)} \right] \quad \textbf{(10b)}$$

The tensors $\widehat{T}_{\mu\nu}^{(+)}$ and $\widehat{T}_{\mu\nu}^{(-)}$ correspond to "induced geometry", i.e. the way each population contributes to the geometry of the other. Their form is determined by the Bianchi conditions. In their mixed form :

$$\widehat{T}_{\mu}^{(+)\nu} = \begin{pmatrix} \rho^{(+)}c^{(+)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^{(+)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{(+)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^{(+)} \end{pmatrix} \quad \textbf{(11a)}$$

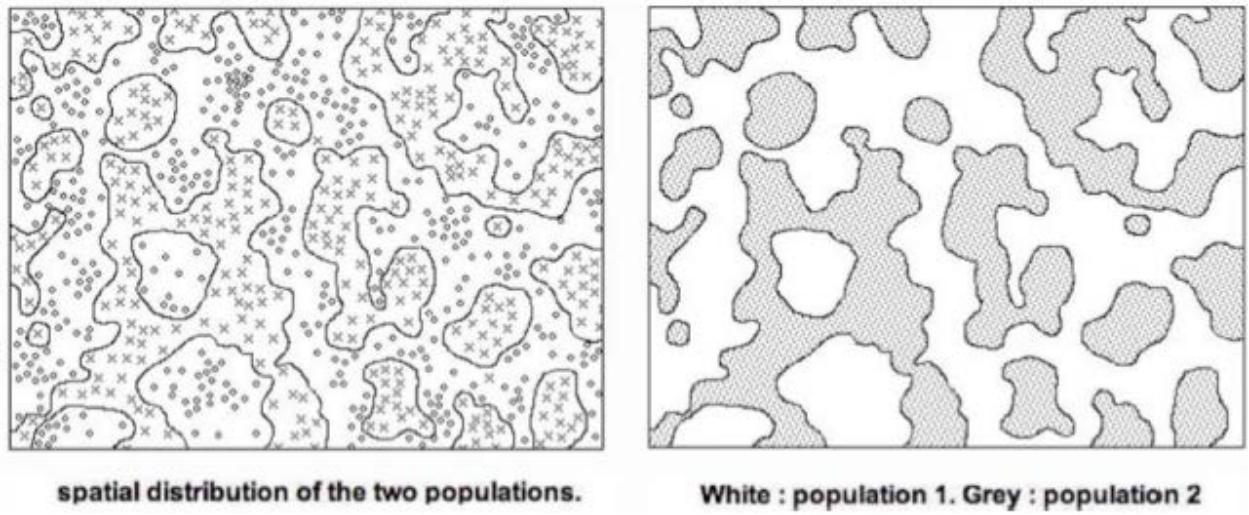
$$\widehat{T}_{\mu}^{(-)\nu} = \begin{pmatrix} \rho^{(-)}c^{(-)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^{(-)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{(-)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^{(-)} \end{pmatrix} \quad \textbf{(11b)}$$

These geometrical conditions are only problematic in regions where the densities of matter, of positive or negative mass, are non-zero. By explaining these conditions, in the conditions of the Newtonian approximation they simply translate the fact that inside these masses, where the density is assumed to be constant, the pressure force balances the gravity force.

Outside these regions it is the vacuum. The second members are zero and the Bianchi conditions are satisfied identically because of the form of the first members, themselves resulting from the presence of the terms $R^{(+)}\sqrt{-g^{(+)}}$ and $R^{(-)}\sqrt{-g^{(-)}}$ in action as first introduced by Damour et al. in 2002. The Janus model is based on a set of agreements with observation. What interests us here is a possible justification of the Great Repeller phenomenon. In its Newtonian approximation the system of the two coupled field equations leads to the following interaction laws:

- Masses of the same sign attract each other according to Newton's law
- Masses of opposite signs repel each other according to "anti-Newton"

The runaway phenomenon is thus eliminated and the principle of equivalence is satisfied in both populations. For negative masses, their gravitational masses and their inertial masses are negative and equal. It is then possible to do numerical simulations. If the absolute values of the two densities $\rho(+) > 0$ and $\rho(-) < 0$ the values of the thermal agitation velocities $<V(+)> = <V(-)>$ are equal we obtain a percolation, which does not fit with the observational data referring to the large scale structure of the universe (see Fig. 2).



spatial distribution of the two populations.

White : population 1. Grey : population 2

Fig.2 : Evolution of the system when $\left|\rho^{(-)}\right| = \rho^{(+)}$

On the other hand, if we assume that there is a strong dissymmetry between the two populations, so that $\rho(-) >> \rho(+)$ then the pattern changes completely. As the Jeans times vary as the inverse of the square root of the density, the negative masses are shorter. These then form a regular network of spheroidal conglomerates. The positive mass is forced to occupy the remaining space, which gives it a lacunar structure (El-Ad et al. 1997) comparable to a set of joined bubbles (see Fig. 3), a pattern repeated by Farnes in 2018.

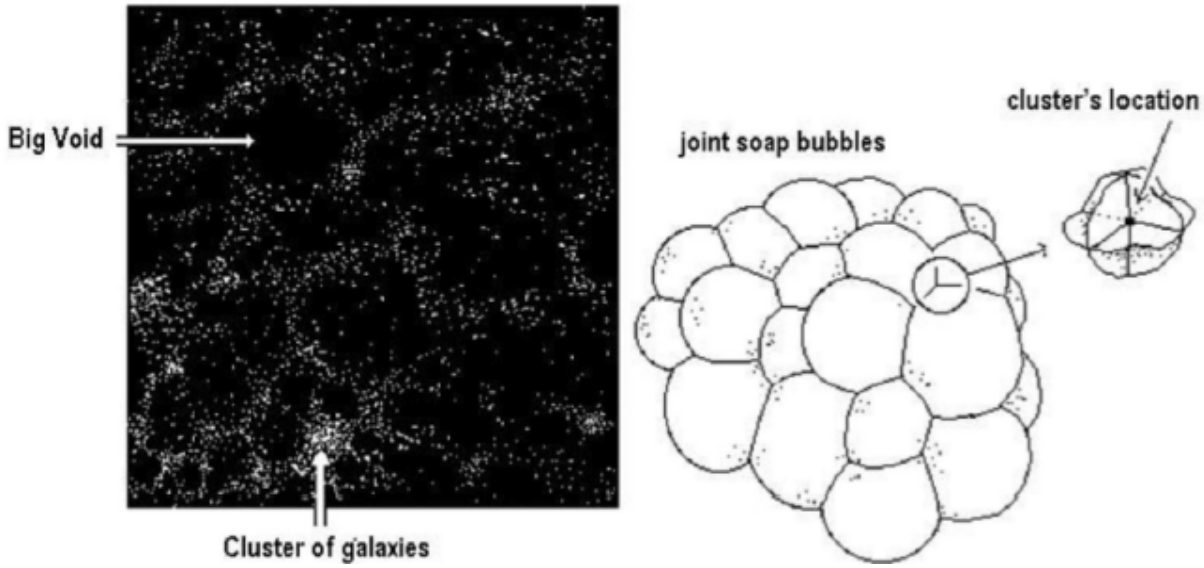


Fig.3 : Lacunar structure

On Fig. 4, there is the result of a 2D simulation (Petit 1995) :

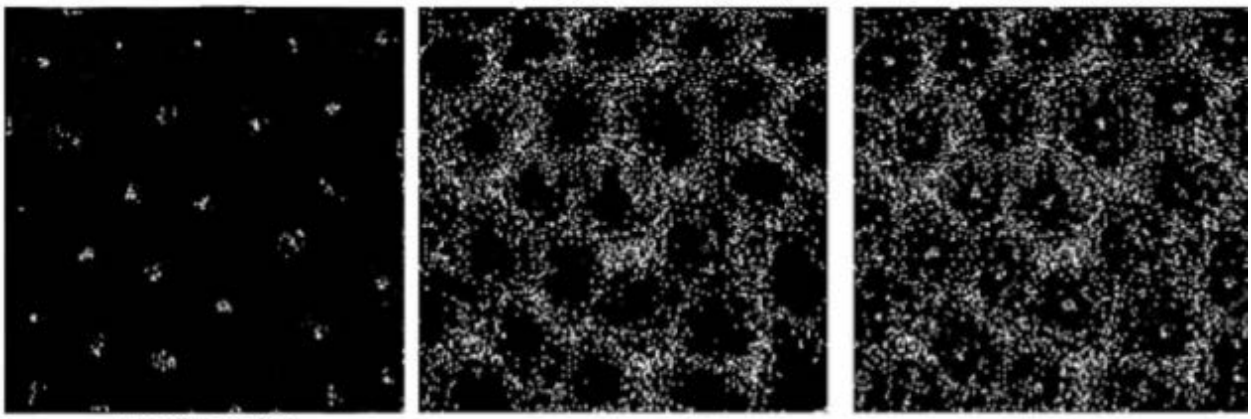


Fig.4 : Evolution when $\left|\rho^{(-)}\right| >> \rho^{(+)}$

Teams with adequate means will easily extend this to 3D. As developed by Petit et al. through articles referenced in 2014b, 2021b, 2021a, the negative mass content accounts for both the dark matter and the dark energy, which is identified with the contribution $\rho^{(-)} c^{(-)2} < 0$ and is therefore responsible for the acceleration of the expansion of positive masses. According to this model, the phenomenon of the dipole repeller translates the presence, within this great void, of a spheroidal conglomerate of negative mass, invisible, because it emits photons of negative energy that our eyes and our measuring instruments cannot capture.

5 – Nature of the objects of negative masses

This question has been examined by Petit et al. in 2014b and the detailed calculations can be found in the article published by Petit et al. in 2021a. In the theory of dynamical groups (Souriau 1970) the link between geometric structure and content is translated by the nature of the associated dynamical group. The General Relativity goes with the restricted Poincaré group, where we keep only the set of terms which do not reverse time. It is thus the orthochron subgroup of the complete Poincaré group, built from the orthochron Lorentz subgroup. Here after its matrix representation:

(12)
$$\begin{pmatrix} L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C being the space-time translation vector. It is a group of dimension 10. By making this group act on the dual of its Lie algebra, or momentum space, one makes appear the energy E, the momentum p and the spin s, as attributes of the particle, of purely geometric essence. In order to endow the particles with n quantum charges, it is necessary to endow the space with n additional dimensions {ζ0 , ζ1, ... , ζn} and move on to the group below, where we have included its action.

(13)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta + \phi \\ L_o \xi + C \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } \xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^0 \\ \zeta^1 \\ \cdots \\ \zeta^n \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \cdots \\ \phi^n \end{pmatrix}$$

The action on the momentum space adds to the particle n quantum numbers qi, including the electric charge, which are all constants. By introducing the group:

(14)
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{with} \quad \mu = \pm 1$$

We translate geometrically the concept of antimatter, the inversion of quantum charges (C-symmetry) going hand in hand with the inversion of movements in additional dimensions.

If we want to introduce negative energies, it is enough to pass from the restricted Poincaré group Lo, orthochronic, to the full group λLo with λ = ± 1 . Immediately we find that the time-inversion (λ = − 1) goes with energy and mass-inversion. The corresponding dynamic group is according to the article published by Petit et al. in 2014b :

(15)
$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_{\circ} & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{matrix} \lambda = \pm 1 \\ \mu = \pm 1 \end{matrix}$$

In this model the C-symmetry exists both in the world of positive and negative masses. There are thus two antimatter.

- The first one, C-symmetric ($\lambda = 1$; $\mu = -1$) of the ordinary matter, of positive mass
- The second, PT-symmetric ($\lambda = -1$; $\mu = 1$) of ordinary matter, of negative mass.

It is the first one that we make appear in laboratory. The model therefore predicts that this one will behave like ordinary matter in the earth's gravity field.

6 – About the lack of observation of primordial antimatter.

If we suppose, as A. Sakharov (1967, 1979, 1980), that the couple :

- Matter of positive mass
- Antimatter of positive mass

is formed from quarks and antiquarks of positive energy, and that a couple :

- Matter of negative mass
- Antimatter of negative mass

was formed from quarks and antiquarks of negative energy, and that in addition the synthesis of the matter of positive mass, in the first couple, was faster, whereas it is that of the antimatter of negative mass, in the second couple which was it one leads on the idea that the objects, in the center of the great voids of the large-scale structure of the universe, whose presence is betrayed by the phenomenon of the dipole repeller, would be constituted of antimatter, that is to say of antiprotons, anti-neutrons and antielectrons of negative mass. These would then form spheroidal objects made of antihydrogen (light elements) of negative mass comparable to immense protostars with a cooling time superior to the age of the universe, which could not be the seat of fusion reaction, thus generating neither stars, nor galaxies, nor planets.

7 – Observations specifically related to these objects.

As presented by Petit in 1995, these negative mass objects decrease the luminosity of the background sources by negative lensing. But the luminosities of galaxies at $z > 7$ are indeed weak. The classical approach is to consider them as dwarfs. But these could be galaxies of normal size and mass, so the luminosity would be affected by this phenomenon. Finer measurements, in large voids, could reveal a threshold that would allow access to the diameter of these formations.

8 – Conclusion.

We have examined the very few attempts to model the dipole repeller phenomenon. Then we have moved on to the interpretation of the Janus cosmological model. We recall the origin and the essential aspects of this model, based on the hypothesis that the universe has a content of negative masses, such that the principle of equivalence is satisfied in both populations and that eliminates the runaway phenomenon and produces the same effects attributed so far to dark matter and dark energy. In this model the dominant negative mass forms a regular set of spheroidal clusters, which repel the positive mass by confining it in the residual space, giving it a lacunar structure. One of these can then produce the phenomenon of dipole repeller.

Data availability

The data underlying this article are included within the article and in its online supplementary material.

References

Benoit-Lévy A., Chardin G., 2012, Introducing the Dirac-Milne universe, Astronomy and Astrophysics Vol. 537 A 78

Damour T., Kogan I., 2002, Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity, Phys. Rev. D Vol. 66, Iss. 10

El-Ad H., Piran T., da Costa L.N., 1997, Mon. Not. R. Astro. Soc.

Farnes J., 2018, A unifying theory of dark energy and dark matter : Negative mass and matter creation within a modified ΛCDM framework, Astronomy and Astrophysics

Heald G., 2020, The Stronger Case for Gravitational Repulsion between Matter and Antimatter, Research Gate publication Num. 339339776

Hoffman Y., Carlesi E., Pomarede D., Tully R.B., Courtois H., Gottlober S., Libeskind N.I., Sorce J.G., Yepes G., 2018, The quasi-linear nearby Universe, Nature Astronomy, arxiv:1807.03724.pdf

Hoffman Y., Pomarède D., Tully R.B., Courtois H., 2017, The Dipole Repeller, Nature Astronomy 1.0036

Hossenfelder S., 2006, Antigravitation, Phys Letters B Vol. 636 issue 2

Hossenfelder S., 2008, A bimetric Theory with Exchange Symmetry, Phys. Rev. D78 044015, arXiv:0807.2838v1

Neiser T.F., 2020, Fermi Degenerate Antineutrino Star Model of Dark Energy. Advances in Astronomy, Volume 2020, Article ID 8654307

Nieto M.M., Goldman T., Anderson J.D., Lau E.L., Mercader J.P., 1994, Theoretical motivation for gravitation experiments on ultra-low energy antiprotons and antihydrogen, arxiv:9412234.pdf

Nieto M.M., Goldman T., 1991, The arguments against "antigravity" and the gravitational acceleration of antimatter, Physics Reports Vol. 205 Issue. 5, p. 221-281

Perlmutter S. et al., 1999, Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, APJ, Vol. 517 Number. 2

Petit J.P., 1995, Twin Universe Cosmology, Astrophysics and Space Science Volume 226 Issue 2 pp.273-307

Petit J.P., D'Agostini G., 2014a, Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe, Modern Physics Letters A Vol. 29 Number. 34

Petit J.P., D'Agostini G., 2014b, Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy, Astrophysics And Space Science, A 354, pp. 611-615

Petit J.P., D'Agostini G., Debergh N., 2018, Evidence of negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator, J. Phys. Comm. 2 Number. 115012

Petit J.P., D'Agostini G., Debergh N., 2019, Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM), Progress in Physics 2019 Vol. 15 issue. 1

Petit J.P., D'Agostini G., Debergh N., 2021a, Bimetric models. When negative mass replaces both dark matter and dark energy. Excellent agreement with observational data. Solving the problem of the primeval antimatter, Database of the French National Center

Petit J.P., D'Agostini G., 2021b, Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia, Astrophysics and Space Science, In press. hal-03426721f

Riess A. et al., 2004, Type Ia Supernova Discoveries at z > 1 from the Hubble Space Telescope, Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution, APJ Vol. 607 Number. 2

Sakharov A.D., 1967, ZhETF Pis'ma 5 : 32, JETP Lett. 5 : 24

Sakharov A.D., 1979, ZhETF Pis'ma 76 : 1172, JETP 49 : 594

Sakharov A.D., 1980, Cosmological Model of the Universe with a Time Vector Inversion, ZhETF Tr. JETP 52, 349-351, 79 : 689–693

Schmidt B.P. et al., 1998, The high-Z supernova search. Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae, APJ, Vol. 507 Number. 1

Souriau J.M., 1970, Structure des systèmes dynamiques, Dunod Ed. France, 1997, Structure of Dynamical Systems, Boston Birkhaüser Ed.

Vuyk V., 2018, A Fifth Force Vacuum Dipole Repeller, Needed to Create all Attraction Forces even around Black Holes in Quantum FFF Theory, Research Gate publication Num. 325995732

Après cette parenthèse consacrée au Dipole Repeller nous reprenons la présentation des articles publiés en 2014 et maintenant il s'agit du second, dont le contenu sera reproduit.

Volume de l'article : 13 pages ! Le double du papier précédent.

Que contient-t-il ? Si vous regardez l'article précédent, de cette années 2014, 7 pages, paru dans Astrophysics and Space Science, la condition de compatibilité entre les deux équations, donc de cohérence mathématique du système, se traduisait par la constante de l'énergie, sous une forme généralisée :

$$E = \rho^{(+)} a^{(+)^3} c^2 + \rho^{(-)} a^{(-)^3} c^2 = Cst$$

Mais j'avais pris la même vitesse de la lumière pour les deux entités.

Ce papier consiste donc à reprendre ce modèle en supposant qu'on a deux vitesse limites pour la lumière ;

- c dans le monde positif
- $\bar{c}$ dans le monde positif

Le calcul se déroule exactement de la même façon et conduit cette fois à :

$$E = \rho^{(+)} a^{(+)^3} c^2 + \rho^{(-)} a^{(-)^3} \bar{c}^2 = Cst$$

Mais, dans l'article, on trouve par exemple, au début, cette conclusions de la fin du discours de réception de prix Nobel (de la Paix) par Andrei Sakharov, lui à Stockholm par son épouse Helena Bonaire (Sakharov n'ayant pas eu l'autorisation de sortir d'Union Soviétique).

seemed important to us to quote his own words:

> *Il y a des milliers d'années, des tribus humaines devait face à de grandes nt de grandes difficiulyés dans leur lutte pour la survie. Dans ce combat, il était essentiel non seulement de savoir manier une massue, mais aussi de posséder la capacité de raisonner, de préserver les connaissances et l'expérience accumulées par la tribu, et de tisser des liens permettant une coopération avec d'autres groupes. Aujourd'hui, l'humanité tout entière est confrontée à une épreuve comparable. Dans l'immensité de l'espace, il existe inévitablement de nombreuses civilisations, dont certaines sont plus sages et plus « abouties » que la nôtre. J'adhère à l'hypothèse cosmologique selon laquelle le développement de l'Univers se répète, dans ses traits fondamentaux, un nombre infini de fois. Dès lors, d'autres civilisations — y compris des formes plus « abouties » — devraient exister une infinité de fois, sur les pages « précédentes » et « suivantes » du Livre de l'Univers. Cela ne doit toutefois en rien amoindrir la portée de nos nobles aspirations dans ce monde qui est le nôtre, où, tels de faibles lueurs dans les ténèbres, nous avons surgi, pour un instant, du néant d'une obscure inconscience matérielle. Il nous appartient de répondre aux exigences de la raison et de bâtir une existence digne de nous-mêmes, ainsi que des objectifs que nous ne faisons qu'entrevoir.*

> *Thousands of years ago tribes of human beings suffered great privations in the struggle to survive. In this struggle, it was important not only to be able to handle a club, but also to possess the ability to think reasonably, to take care of the knowledge and experience garnered by the tribe, and to develop the links that would provide cooperation with other tribes. Today the entire human race is faced with a similar test. In infinite space many civilizations are bound to exist, among them civilizations that are also wiser and more "successful " than ours. I support the cosmological hypothesis which states that the development of the Universe is repeated in its basic features an infinite number of times. In accordance with this, other civilizations, including more "successful" ones, should exist an infinite number of times on the "preceding" and the "following" pages of the Book of the Universe. Yet this should not minimize our sacred endeavors in this world of ours, where, like faint glimmers of light in the dark, we have emerged for a moment from the nothingness of dark unconsciousness of material existence. We must make good the demands of reason and create a life worthy of ourselves and of the goals we only dimly perceive.*

Le texte de l'article, qui suivra, est en langue anglais. Mais dans la version gratuite mise à disposition, qui soit dans des langues autres que la langue anglaise, figure le passage :

> *Ce texte mentionne explicitement la possibilité que les Terriens ne constituent pas l'espèce intelligente la plus avancée sur le plan scientifique et technologique. Il s'agit là d'une position logique que tout scientifique raisonnable devrait adopter. Mais cela soulève immédiatement une question : des civilisations plus avancées que la nôtre ont-elles pu nous rendre visite, y compris par le passé, au cours de notre histoire ? Si de telles visites étaient techniquement et scientifiquement réalisables, se poursuivent-elles encore aujourd'hui ? Face à cette interrogation, les sceptiques avancent deux arguments. Premièrement, à l'instar d'Enrico Fermi en son temps, ils s'étonnent de l'absence totale de contact. Deuxièmement, ils invoquent l'impossibilité du voyage interstellaire, en raison des limites strictes imposées à la vitesse d'un engin par les lois de la relativité restreinte — des lois maintes fois vérifiées à toutes les échelles. Concernant le premier argument, notons que tout contact entre des civilisations présentant des niveaux de développement scientifique et technique très disparates s'accompagne inévitablement d'un choc des cultures. Plusieurs scénarios sont alors envisageables. Dans l'un d'eux, la civilisation au niveau scientifique et technologique inférieur s'effondre purement et simplement. Dans un autre, la civilisation la plus avancée absorbe celle avec laquelle elle entre en contact, qu'il s'agisse d'une assimilation ou d'une mise en esclavage (colonisation). Dans un troisième scénario, un transfert scientifique et technologique majeur se produit ; or, comme c'est souvent le cas lors de toute avancée technologique fondamentale, ce transfert est immédiatement et prioritairement détourné vers la création de nouvelles armes. Tout progrès scientifique s'accompagne inéluctablement d'un accroissement de notre capacité de destruction. Ainsi, si une technoscience suffisamment avancée permettait le voyage interstellaire, elle s'accompagnerait nécessairement du développement de moyens de destruction colossaux. En comparaison, ces nouvelles armes feraient paraître nos ogives thermonucléaires dérisoires, comme de simples allumettes. Il est difficile de contester l'idée que la sagesse est une denrée rare sur Terre, où, malgré les drames passés, on peut se demander si l'humanité ne basculera pas bientôt dans une troisième guerre mondiale. Par conséquent, tout transfert technologique ne ferait qu'accentuer le déséquilibre mortifère dont nous souffrons — une situation qui, loin de s'améliorer,*

risque de s'aggraver avec le temps. Le présent texte se concentre sur le second argument : la faisabilité du voyage interstellaire.

Dans ce contexte, tout déplacement ne peut s'effectuer qu'en suivant les géodésiques associées à la métrique $g_{\mu\nu}$, laquelle est solution de l'équation.

Ces géodésiques se répartissent en deux sous-ensembles : celles de longueur non nulle, suivies par les particules dotées d'une masse, et celles de longueur nulle, suivies par les photons. Ce constat impose une limite infranchissable à toute vitesse : celle de la lumière, notée c . Aux vitesses relativistes, des énergies considérables entrent en jeu ; la limite imposée par la vitesse c implique, selon cette vision de l'Univers, qu'une énergie quasi infinie serait nécessaire pour l'atteindre. Il en découle que toutes les tentatives de modélisation du voyage interstellaire aboutissent à des durées de trajet incompatibles avec la durée d'une vie humaine.

La conclusion s'impose donc : si le voyage interstellaire est scientifiquement et techniquement réalisable — c'est-à-dire compatible avec la durée d'une vie humaine —, alors un changement profond du paradigme cosmologique actuel, qui exclut une telle éventualité, s'avère indispensable. On pourrait même dire que la situation actuelle appelle, en quelque sorte, un tel changement de paradigme.

....

Dans notre modèle, l'Univers est une variété $\mathcal{M}_4$ associée non pas à une métrique unique, mais à deux métriques : $g_{\mu\nu}$ et$\overline{g}_{\mu\nu}$; la première étant liée aux entités dotées d'une masse et d'une énergie positives, la seconde à celles possédant une masse et une énergie négatives. Un système composé de deux équations de champ couplées a alors été proposé

(2a) $$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

(2b) $$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}^{(-+)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mu\nu}^{(+)} \right]$$

Les lettres ***T*** majuscules représentant les « tenseurs d'interaction » ont été indiquée en lettre grasses. Cela sera expliqué plus loin.

...

Dans ces deux univers, le fait que and $a^{(-)} < a^{(+)}$ entraïnbe que $c^{(-)} > c^{(+)}$:

(25) $$c^{(+)} \sim \frac{1}{\sqrt{a^{(+)}}} \quad , \quad c^{(-)} \sim \frac{1}{\sqrt{a^{(-)}}}$$

C'est à) dire que :

(26) $$\frac{c^{(-)}}{c^{(+)}} \sim \sqrt{\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}}} > 1$$

Si l'inversion de masse pouvait être opérée, la question de l'impossibilité des voyages interstellaire (à l'échelle d'une vie humaine) devrait être remis en question ?

En effet le voyage s'effectuerait alors le long des géodésiques engendrées par la métrique $g_{\mu\nu}^{(-)}$, avec les gains suivants :

- *Limite de vitesse (celle des photons d'énergie négative)* $\left(c^{(-)} > c^{(+)} \right)$*plus élevée*
- *Distances plus courtes :* $\left(a^{(-)} < a^{(+)} \right)$

Deux questions émergent alors :

- *Comment inverser la masse d'un vaisseau et de ses passagers ?*
- *Comment donner au vaisseau une vitesse de croisière relativiste ?*

Si une technologie donnée permettait l'inversion de la masse d'un appareil, celui-ci semblerait se dématérialiser aux yeux d'un observateur. Les particules, atomes et molécules à masse négative n'interagiraient plus avec les molécules à masse positive de l'air ambiant, si ce n'est par le biais de la gravitation (ou, plus précisément, de l'antigravitation). Nous supposons que le processus d'inversion de masse serait symétrique : si la masse positive présente dans un volume donné est inversée, les quelques masses négatives qui s'y trouvent subiraient également une inversion, devenant ainsi des masses positives. Il en résulterait, au sein de ce volume, un milieu extrêmement raréfié, constitué de quelques atomes d'hydrogène à masse positive. Pour un observateur doté d'une masse positive, l'espace occupé par l'appareil paraîtrait vide. L'air s'y engouffrerait alors instantanément, engendrant une perturbation hydrodynamique.

(27) $$\lambda_C = \frac{h}{mc}$$

Si l'inversion de masse obéit aux lois de jauge telles que définies dans la Réf. 26, alors :

(28) $$c \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad h \sim a^{3/2} \qquad m \sim a$$

Il s'agit d'une « masse apparente », concept qui sera développé dans un prochain article. Cela conduit à :

(29) $$\lambda_C \sim a$$

L'inversion de masse s'accompagnerait d'une sorte d'« effet Gulliver ». Transférées dans le nouveau référentiel, les particules inversées auraient une longueur de Compton supérieure à celle de leurs homologues de masse négative, car $a^{(-)} < a^{(+)}$*. L'énergie qui en résulte est :*

(30) $$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Un tel transfert s'accompagnerait d'une perte d'énergie. Si l'on suppose que le transfert de masse implique la conservation de l'énergie durant le processus d'inversion du signe de la masse, les particules transférées doivent posséder des longueurs d'onde de Compton identiques à celles de leurs « homologues » dotées d'une masse négative. Cela serait envisageable si, après l'inversion de masse, les particules acquéraient une vitesse relativiste, de sorte que la réduction de leur longueur d'onde de Compton soit assurée par la contraction de Lorentz. Toutefois, ce processus devrait orienter les vitesses dans une direction unique ; dans le cas contraire, le vaisseau et ses passagers seraient disloqués. Si un tel procédé était réalisable, les vaisseaux interstellaires n'auraient nul besoin de système de propulsion

Les termes « accélération » et « décélération » perdraient alors toute signification. Ainsi, bien qu'une quantité considérable d'énergie soit requise pour accélérer une masse positive jusqu'à une vitesse relativiste, une quantité d'énergie équivalente serait nécessaire, une fois la masse inversée, pour ramener sa vitesse à zéro alors que le vaisseau évolue dans ce nouveau référentiel à masse négative.

Après l'inversion, le vaisseau se déplacerait à une telle vitesse qu'il lui serait impossible de ralentir. Cependant, à son arrivée à destination, une nouvelle inversion de masse lui restituerait ses paramètres cinétiques initiaux.

Même sous une forme très rudimentaire, ces techniques de voyage n'ont rien à voir avec la propulsion par fusée. Tout repose sur la manipulation de la masse, combinée à celle d'autres paramètres, tels que le spin (aisément contrôlable au moyen d'un champ magnétique). Nous suggérons que la conservation de l'énergie pourrait s'accompagner d'une modification des paramètres dynamiques qui défie l'imagination. Après une inversion de masse, une nouvelle modification des paramètres — alors que le vaisseau possède une masse négative — pourrait lui conférer, dans le domaine des masses positives, un vecteur vitesse orienté dans une direction différente, tout en préservant la norme du vecteur ainsi que le moment cinétique.

Si un tel phénomène est possible, un observateur doté d'une masse positive verrait le vaisseau effectuer des virages à angle droit, voire une inversion totale de sa vitesse — des comportements incompatibles avec les lois de la physique conventionnelle.

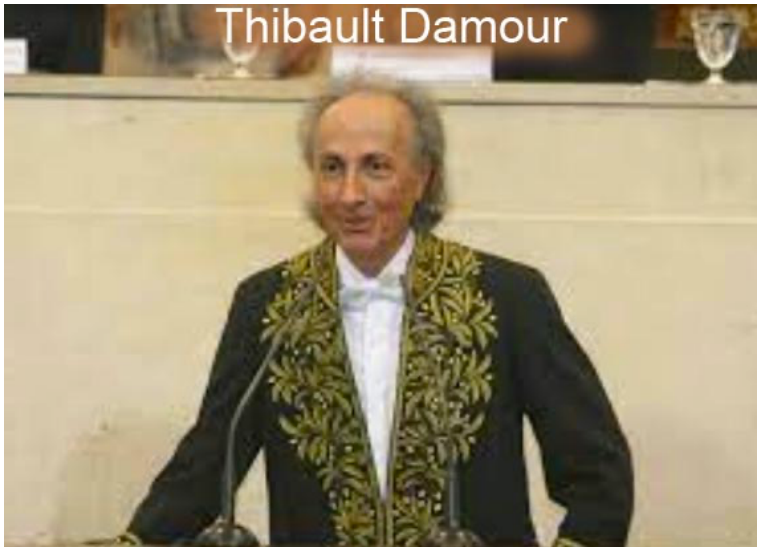
Si, dans un avenir lointain, les avancées techniques permettaient à un vaisseau de voyager entre les étoiles en des durées comparables à celle d'une vie humaine, que verraient les voyageurs à travers les hublots en traversant ce monde à masse négative ? Ils ne seraient plus en mesure de percevoir l'Univers à masse positive ; planètes, étoiles et galaxies leur deviendraient invisibles. En revanche, en étant capables de capter des images transmises par des photons d'énergie négative,

ils pourraient percevoir, au loin, des amas sphéroïdaux diffus constitués de masse négative ; ces amas émettraient faiblement — à l'instar de proto-étoiles — une lumière rougeâtre ainsi que des rayonnements infrarouges[57].

[57] Décrit dans une texte Ummite, à retrouver.

On voit que dans ce second article j'avais profité de l'ouverture qui s'était présentée pour tenter de placer des éléments présentant les grandes lignes de la technologie des voyages interstellaires.

Ce texte aura des conséquences et entraînera des réactions extrêmement agressives et violentes au sein de la communauté scientifique, concentrées sur la réaction du « Monsieur Cosmologie » français, l'académicien Thibaud Damour.



L'académicien Thibault Damour (né en 1951)

Membre de l'Institut des Hautes Études Scientifiques.

Cancellation of the central singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process.

Published in*Modern Physics Letters A, Vol. 30, No. 9 (2015) 1550051*

J.P. Petit* G. D'Agostini†

March 25, 2021

arXiv:2103.12845v1 [gr-qc] 23 Mar 2021

Abstract

We reconsider the classical Schwarzschild solution in the context of a Janus cosmological model. We show that the central singularity can be eliminated through a simple coordinate change and that the subsequent transit from one fold to the other is accompanied by mass inversion. In such scenario matter swallowed by black holes could be ejected as invisible negative mass and dispersed in space.

Keywords: Black hole; space bridge; Schwarzschild metric; Kerr metric; central singularity; Janus cosmological model; Gaussian coordinates; mass inversion process.

PACS Nos.: 98.80.Bp, 98.80.Qc

1 Introduction

When Schwarzschild published his solution[1] of Einstein equation, in 1916, the basic hypothesis was just time-independence and spherical symmetry. Nobody suspected that there was an additional one: null-homotopy. The consequence of this last one was that, in the proposed solution, r was a radial coordinate:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r}\right)} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{1}$$

A first problem at $r = R_\mathrm{s}$, considered as coordinate singularity, was eliminated by various coordinates changes. See Fig. 1.

But $r = 0$ was considered as a *true singularity*, a point of space where the geodesics end. The goal of this paper is to show, through a very simple coordinate change, that this so-called "central singularity" is due to a wrong choice of local topology.

We must introduce the concept of *representation space* which is the space in which we build a mental image of an object. As an example we believe we live in R3 and that space and time are separated. This old belief is useful and enough for today's life. But if the speed of light was much smaller we should shift to Minkowski's spacetime. Similarly, when we send a probe to Jupiter or predict an eclipse we neglect space curvature. If this last was not neglectible, we should use Einstein's equation instead of Newton's. If we intend to describe an object through a line element it is easy to show, through 2D examples that inadequate coordinate choice may induce wrong image of a geometric object. For example, consider the following metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r^2}{R_\mathrm{s}^2}} + r^2\,\mathrm{d}\varphi, \tag{2}$$

*CNRS, BP 55, 84122 Pertuis, France, e-mail: jppetit1937@yahoo.fr

†dagostini.gilles@laposte.net

Coordinates	Line element	
Eddington-Finkelstein (ingoing)	$\left(1-\frac{r_{\rm s}}{s}\right)\mathrm{d}v^2-2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}r-r^2\,\mathrm{d}\Omega^2$	regular at horizon, extends across future horizon
Eddington-Finkelstein (outgoing)	$\left(1-\frac{r_{\rm s}}{s}\right)\mathrm{d}u^2-2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r-r^2\,\mathrm{d}\Omega^2$	regular at horizon, extends across past horizon
Gullstrand-Painlevé	$\left(1-\frac{r_{\rm s}}{s}\right)\mathrm{d}T^2-2\sqrt{\frac{\tau_{\rm s}}{r}}\,\mathrm{d}T\,\mathrm{d}r-\mathrm{d}r^2-r^2\,\mathrm{d}\Omega^2$	regular at horizon
Isotropic	$\frac{\left(1-\frac{r_{\rm s}}{4R}\right)}{\left(1+\frac{\tau_{\rm s}}{4R}\right)^2}\mathrm{d}t^2-\left(1+\frac{r_{\rm s}}{4R}\right)^4\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right)$	isotropic lightcones on constant time slices

Fig. 1. Schwarzschild's geometry. Alternative coordinates.

whose signature $(+,+)$ changes into $(-,+)$ when $r>R_{\rm s}$. But, through the simple following coordinate change

$$r=R_{\rm s}\sin\theta, \tag{3}$$

this object becomes a sphere:

$$\mathrm{d}s^2=R_{\rm s}^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{4}$$

Another example. Consider the metric:

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}r^2}{-r^2+2rR+r_0^2-R^2}+r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{5}$$

The signature is $(+,+)$ if

$$R-r_0<r<R+r_0, \tag{6}$$

but through the new coordinate change

$$r=R+r_0\cos\theta, \tag{7}$$

we get the well-known metric of the torus:

$$\mathrm{d}s^2=r_0\,\mathrm{d}\theta^2+(R+r_0\cos\theta)\,\mathrm{d}\varphi^2. \tag{8}$$

Now, let us focus on the space part of Schwarzschild's line element, limited to $\{r,\varphi\}$ coordinates:

$$\mathrm{d}\Sigma^2=\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{R_{\rm s}}{r}}+r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{9}$$

For $r<R_{\rm s}$, the signature $(+,+)$ is changed into $(-,+)$. Let us make the change of variable:

$$r=R_{\rm s}\left(1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho\right), \tag{10}$$

which gives:

$$\mathrm{d}\Sigma^2=R_{\rm s}^2\left[\frac{(1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)}{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}\,\mathrm{th}^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho^2+(1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)^2\,\mathrm{d}\varphi^2\right]. \tag{11}$$

All singularities disappear, $r = R_\mathrm{s}$ corresponds to $\rho = 0$. In this point the determinant of the metric

$$\det g = R_\mathrm{s}^4 \frac{(1 + \mathrm{Log\,ch}\,\rho)^2}{\mathrm{Log\,ch}\,\rho} \mathrm{th}^2\,\rho,$$

is no longer zero. The metric is well defined for all values of ρ. If we embed the surface in a 3D-Euclidean space we can define the meridians, corresponding to

$$\mathrm{d}\Sigma^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r}} + \mathrm{d}z^2 \tag{12}$$

And we immediately get the meridians as*

$$z = \pm 2R_\mathrm{s}\sqrt{\frac{r}{R_\mathrm{s}} - 1}, \quad r^2 = R_\mathrm{s} + \frac{z^2}{4R_\mathrm{s}}. \tag{13}$$

The surface is a *space bridge*, a "2D diabolo" linking two 2D-Euclidean surfaces.

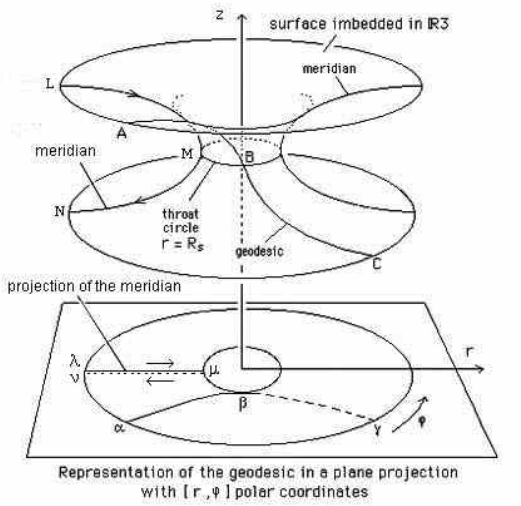


Fig. 2. The 2D diabolo embedded in R^3.

The problem of the signature has disappeared. From Lagrange equations we can calculate the geodesics in the $[\rho, \varphi]$ coordinate system. If embedded, the surface owns a throat circle whose perimeter is $2\pi R_\mathrm{s}$. We can shape the surface as a twofold $F^{(+)}$ and $F^{(-)}$ cover of a M_2 manifold with a 1D common circular border, and create induced mapping between adjacent points $M^{(+)}$ and $M^{(-)}$.

Figure 4 shows the projection $\alpha\beta\gamma$ of a geodesic ABC (see Fig. 2) tangent to the common boundary, which ensures the continuity of the geodesics of the fold $F^{(+)}$ with the ones of the fold $F^{(-)}$ (dotted lines). Radial line $\lambda\mu\nu$ is the image of a geodesic meridian curve LMN of Fig. 2. This will be important for the following.

Figure 5 shows how vicinities of adjacent points are linked by enantiomorphy relationship.

Figures 3–5 correspond to a reduction of our representation space to a 2D Euclidean representation space, through a non-isometric imbedding which artificially transforms the throat into a pleat and couples points through an adjacent and enantiomorphic relationship. "The circle owns no center and there is nothing inside", because we are out of the considered 2D surface, the 2D diabolo.

*Erratum page 11

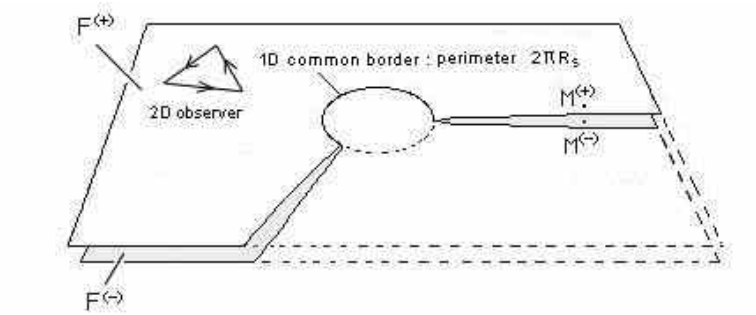


Fig. 3. Twofold cover of a manifold with a circle as common boundary.

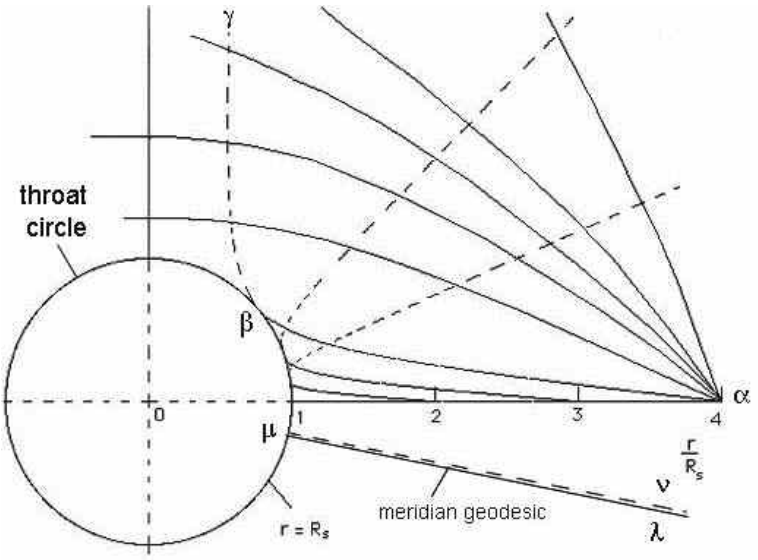


Fig. 4. Projection of geodesics.

Now introduce the 3D metric

$$\mathrm{d}\Sigma^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{R_\mathrm{s}}{r}} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{14}$$

which is Euclidean at infinity. When $r < R_\mathrm{s}$ the signature $(+++)$ is changed into $(-++)$. Applying (10) we get

$$\mathrm{d}s^2 = R_\mathrm{s}^2\left[\frac{(1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)}{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}\,\mathrm{th}^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho^2 + (1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \tag{15}$$

Its determinant never vanishes. The metric is well defined for all values of ρ and is Euclidean at infinite. It is a *3D space bridge* linking to 3D Euclidean spaces. Its throat, corresponding to $\rho = 0$, is a S2 sphere.

Unfortunately we do not own a 4D Euclidean representation space to operate an isometric imbedding. So that, similarly as in Fig. 3, we will use a non-isometric imbedding in 3D Euclidean space. Then the throat is converted into a "pleat" along the projected S2 sphere. Similarly, some geodesics, continuous in this 3D hypersurface, seem to turn back on the sphere (see Fig. 6).

To show 3D space orientation we will use a tetrahedron (see Fig. 7). To illustrate the enantiomorphy relationship we need to project this object through the S2 throat sphere, each vertice following a geodesic, as showed in Fig. 8.

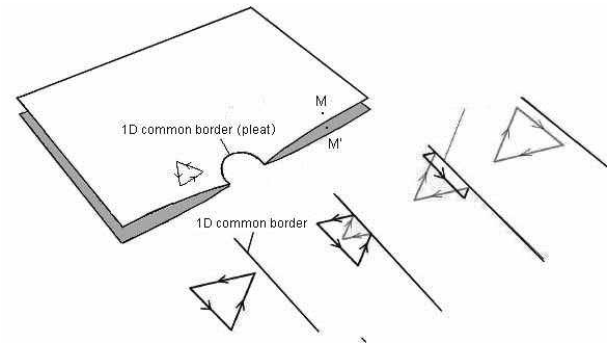


Fig. 5. When the triangle crosses the common boundary, the orientation is reversed.

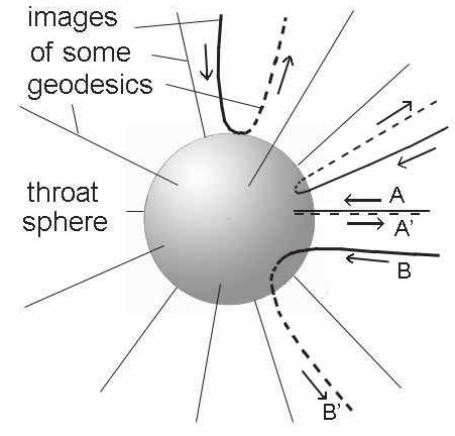


Fig. 6. When geodesics of the 3D hypersurface cross the throat sphere they appear tangent to it in this 3D non-isometric imbedding in a 3D Euclidean space.

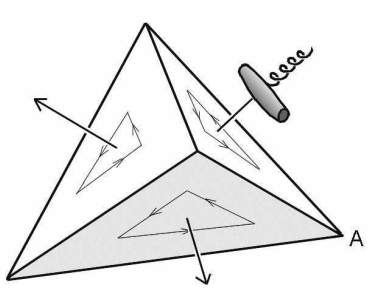


Fig. 7. Oriented tetrahedron.

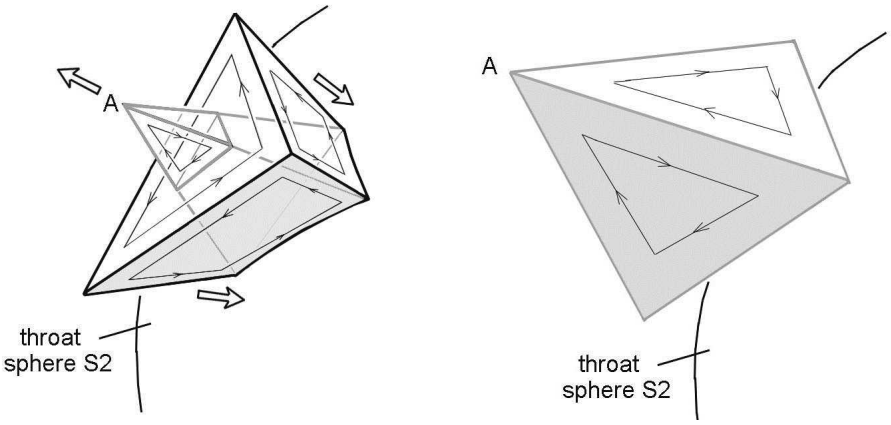


Fig. 8. By crossing the throat sphere, the tetrahedron is inverted.

In the 2D $\{\rho, \varphi\}$ representation the adjacent points are defined by the relation:

$$M\colon (\rho, \theta) \to M'\colon (-\rho, \theta).$$

In the 3D $\{\rho, \theta, \varphi\}$ representation the adjacent points in 2D and 3D are defined by the relation:

$$M\colon (\rho, \theta, \varphi) \to M'\colon (-\rho, \theta, \varphi).$$

The association of points M and M' goes hand in hand with an enantiomorphic relation between their corresponding neighborhoods.

Now let us go back to (2) and apply (10). We get

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}{1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho} c^2\,\mathrm{d}t^2 - R_\mathrm{s}^2\left[\frac{(1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)}{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}\,\mathrm{th}^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho^2 + (1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \tag{16}$$

When ρ tends to $\pm\infty$, $\mathrm{Log\,ch}\,\rho \to \rho$ and $\mathrm{th}\,\rho \to 1$. The metric tends to Lorentz metric. Space is extended to $(\rho > 0; \rho < 0)$ domain. The hypersurface becomes a *spacetime bridge*, linking two Lorentz spaces through a throat surface S2. When we calculate the geodesics in the plane $\theta = \frac{\pi}{2}$ in the $\{t, r, \theta, \varphi\}$ representation we find the following (Eq. (6.90) in Ref. 8):

$$\mathrm{d}\varphi = \pm\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{c^2l^2-1}{h^2} + \frac{R_\mathrm{s}}{h^2 r} - \frac{1}{r^2} + \frac{R_\mathrm{s}}{r^3}}}, \tag{17}$$

where l and h are the classical parameters of the quasi-Keplerian trajectory (Eqs. (6.80) and (6.81) in Ref. 8). On the Schwarzschild's sphere ($r = R_\mathrm{s}$) we get:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = R_\mathrm{s}\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R_\mathrm{s}} = \frac{h}{R_\mathrm{s} cl}. \tag{18}$$

In a $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$ representation, with $\theta = \frac{\pi}{2}$, we obtain curves $\rho = f(\varphi)$ that will be inscribed in two (adjacent) folds $F^{(+)}$ and $F^{(-)}$.

With

$$(\mathrm{tg}\,\beta)_{\rho\to 0} = \frac{\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho} = \frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\rho}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho} = \frac{h}{R_\mathrm{s}^2 cl}\rho^2 \to 0. \tag{19}$$

The throat sphere $r = R_\mathrm{s}$ is reduced to a point. But the geodesics of the fold $F^{(+)}$ can be prolonged continuously in the adjacent fold $F^{(-)}$. *The central singularity disappears.* Now let us deal with spacetime structures.

Referring to *Introduction to General Relativity*, Sec. 2.6 of Ref. 8:

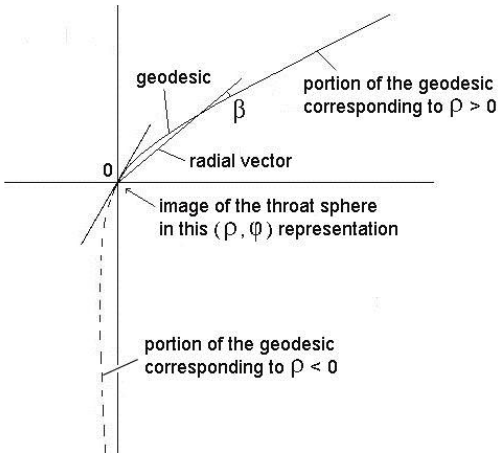


Fig. 9. Geodesical path in a $[\rho, \varphi]$ representation (plane, $\theta = \pi/2$).

By letting a family of geodesics play a particular role among the coordi-nates lines Gauss introduced a useful coordinate system. Consider a 4D space with hyperbolic metric with signature $(1, -1, -1, -1)$. Assume we can imbed a 3D hypersurface Σ_3, imbedded in the 4D space Σ_4. Assume, in some place, we can define a vector n normal to Σ_3, which satisfies:

$$n^0 n_0 + \left(n^1 n_1 + n^1 n_1 + n^1 n_1\right) > 0$$

which, in the familiar language of special relativity theory, implies that Σ_3 is "oriented in space" (whereas the vector n, normal to s, is "oriented in time").

We introduce in the surface Σ_3 three coordinates x^{*1}, x^{*2}, x^{*3} which serve to characterise the point $P^* \in \Sigma_3$. Through each point P^* of the 3D surface Σ_3 we draw the geodesic which is orthogonal to Σ_3 at P^*. These geodesic will form a non-intersecting curves in some neighborhood M of Σ_3 such that, through each point P of M there will be exactly one of the geodesics constructed. We introduce now, in the entire 4D domain M, coordinates as follows: Given P, we consider the geodesic passing through P and its original point $P^* \in \Sigma_3$. We define the coordinate x^i of P in terms of the arc length P^*P of the geodesic and of the coordinate x^{*i} of P^*.

In this manner, the three coordinates x^1, x^2, x^3 remain constant along any geodesic perpendicular to Σ_3. It follows that, along such a geodesic,

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\dot{x})^2\,, \quad g_{00} = 1.$$

This is the classical way Gaussian coordinates are defined. This is possible if and only if $g_{00} \neq 0$, if the term of the line element related to time-marker is nonzero. Note that, in Fig. 1,

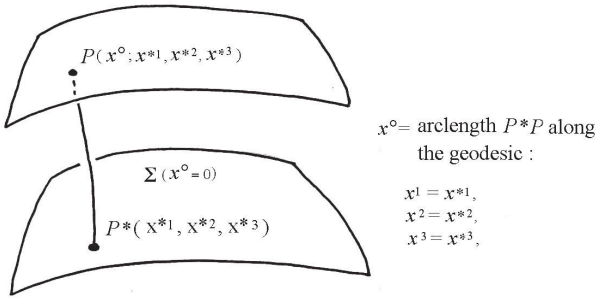


Fig. 10

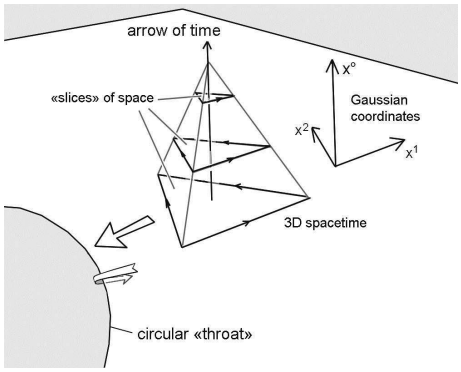


Fig. 11. Building a 3D spacetime.

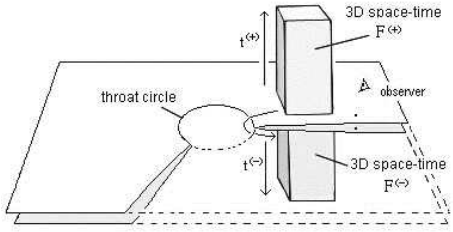


Fig. 12. In turning the throat circle, the arrow of time is inverted.

through various choices of coordinate systems, in Schwarzschild solution this term g_{00} (called g_{tt}) vanishes on the so-called horizon ($r = R_\mathrm{s}$), or throat surface ($\rho = 0$). It means that on this peculiar portion of the hypersurface, normal vector and space orientation cannot be defined.

Let us build a 3D spacetime on a 2D surface, as the twofold cover of a manifold M_2, as shown in Fig. 11.

As shown in Fig. 12 we will find some problem at the common boundary, where it is impossible to define space orientation and arrow of time (identified to normal vector). But, for adjacent regions we have imbricated PT-symmetrical spacetime structures. Such coupling concept, called at that time "twin universe theory", was first presented by Sakharov in 1967[12–15] and later in Ref. 11. In addition, this goes with recent works[9,10] (Janus Cosmological Model).

We have to deal with 4D spacetime, not 3D spacetime, which is just a didactic image of such geometric structure.

Back to the expression of the Schwarzschild metric in the new coordinates (16) we see that, on the throat surface ($\rho = 0$), g_{tt} vanishes (as well as in expressions shown in Fig. 1). According to Sec. 2.6 of Ref. 8, Gaussian coordinates cannot be defined, which means that on the throat surface, time and space cannot be oriented. This fits time and space inversion from fold $F^{(+)}$ to fold $F^{(-)}$, so that we must write joint metrics:

$$\mathrm{d}s^{(+)2} = \frac{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}{1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho} c^2\,\mathrm{d}t^{(+)2} - R_\mathrm{s}^2\left[\frac{(1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)}{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}\,\mathrm{th}^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho^2 + (1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right], \quad (20a)$$

$$\mathrm{d}s^{(-)2} = \frac{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}{1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho} c^2\,\mathrm{d}t^{(-)2} - R_\mathrm{s}^2\left[\frac{(1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)}{\mathrm{Log\,ch}\,\rho}\,\mathrm{th}^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho^2 + (1+\mathrm{Log\,ch}\,\rho)^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right], \quad (20b)$$

with

$$t^{(-)} = -t^{(+)}. \tag{21}$$

In the neighborhood of $\rho = 0$ it is possible to write the nearby expressions:

$$\left(\mathrm{d}s^{(+)}\right)^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(\mathrm{d}t^{(+)}\right)^2 - 2\,\mathrm{d}\rho^2 - R_{\mathrm{s}}^2\,\mathrm{d}\varphi^2, \tag{22a}$$

$$\left(\mathrm{d}s^{(-)}\right)^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(\mathrm{d}t^{(-)}\right)^2 - 2\,\mathrm{d}\rho^2 - R_{\mathrm{s}}^2\,\mathrm{d}\varphi^2. \tag{22b}$$

The inversion of the time variable does not imply a change in the sign of the proper time, and from one fold to the other $\mathrm{d}s^{(-)}$ takes the reins of $\mathrm{d}s^{(+)}$. It is not possible to have an inversion in the length measure along a geodesic. In other words we have $\left(\mathrm{d}s^{(+)}\right)\left(\mathrm{d}s^{(-)}\right) > 0$. But $t^{(+)}$ and $t^{(-)}$ are nothing more than "time markers", simple coordinates, and thus one will have: $\mathrm{d}t^{(-)} = -\,\mathrm{d}t^{(+)}$. So here one finds again the central idea of differential geometry: the length element has an only intrinsic reality. Lagrange equations give always in the vicinity of $\rho = 0$ the relations:

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\rho} = 0. \tag{23}$$

These functions are linear and monotonic as a function of the proper times (lengths $s^{(+)}$ and $s^{(-)}$) that enchain themselves in passing from one fold to the other without inversion.

$$\frac{\mathrm{d}t^{(+)}}{\mathrm{d}s^{(+)}} = \frac{C}{\rho^2}, \quad \frac{\mathrm{d}t^{(-)}}{\mathrm{d}s^{(-)}} = \frac{-C}{\rho^2}, \quad C = Cst. \tag{24}$$

The sign of the constant C depends on the sense adopted for the passage from one fold to the other. The object is thus a "black hole" and a "white fountain" at the same time. But, if measured with variable $t^{(+)}$ the passage is achievable only in an infinite time. If the object results from the implosion of a neutron star, its mass would be transferred to the negative energy region. But for the observers located in one of the folds such phenomena of implosion–explosion will appear to be "freezed in time".

As shown in Ref. 16 time-inversion goes with mass and energy inversion. In Refs. 11 and 12, according to Janus Cosmological Model the universe is composed by positive and negative energy (and mass if they own) particles, respectively described by metrics $g_{\mu\nu}^{(+)}$ and $g_{\mu\nu}^{(-)}$, solutions of a coupled field equation system. Spacetime bridges operate mass inversion. From Ref. 11 we know that masses with opposite signs repel each other. On another hand negative matter does not interact with positive matter by electromagnetic, strong or weak interaction.

2 Conclusion and Discussion

If black holes exist and swallow matter this last, instead to be crushed in a central singularity, would be discretely rejected as an invisible negative matter.

The main feature of the theory presented here is the mass (and space) inversion process. The advantage is to avoid the puzzling problem of a "central singularity" and to explain the fate of matter swallowed by black holes. But it implies injection of negative energy (and mass if the own) particles in spacetime, considered as a manifold plus two metrics $g_{\mu\nu}^{(+)}$ and $g_{\mu\nu}^{(-)}$.

As precised in Ref. 9 we assumed that particles of opposite masses do not interact neither by electromagnetic forces nor strong or weak forces, they could not enter into a collision. Some colleagues have criticized this idea arguing that "the particles are on the same spacetime". The answer to this question is: if one considers the problem on purely geometrical grounds, those encounters would be "geometrically impossible" because the two subsets move along disjoint families of geodesics.

A second criticism may rely on the immediate instability of a quantum vacuum which could create pairs $(+m, -m)$. But it is based on the theoretical framework of quantum gravity that, however, still today remains purely hypothetical. The creation and annihilation of pairs of particles of opposite mass has not been de-scribed till today.

A third criticism may issue from Quantum Field Theory, which excludes straight away states of negative energy *"because a particle could not have an energy less than that of the vacuum"* (p. 76 of Ref. 17). We quote:

> *If we suppose that* T *is linear and unitary then we should face the disastrous conclusion that for any state* Ψ *of energy* E *there is another state* $\mathrm{T}^{-1}\Psi$ *of energy* $-E$*. To avoid this we are forced here to conclude that* T *is anti-linear and anti-unitary.*

In order to refute this statement we would say that it is bootstrap talk and that the conclusion is contained in the hypothesis, as occurs with the "CPT theorem".

In his book Weinberg,[17] let us quote his sentence on p. 104:

> *No examples are known of particles that furnish unconventional representation of inversions, so these possibilities will not be pursued here. From now on, the inversions will be assumed to have the conventional action assumed in Sec. 2.6.*

This sentence refers of course to the hypothesis expressed on p. 76 of Ref. 17 about the anti-unitary and anti-linear character of the T operator. However, cosmic acceleration implies the action of a negative pressure and hence of negative energy (pressure is an energy density by unit volume). The discovery of such quite un-foreseen phenomenon[18–27] makes it compelling for Quantum Field Theory to be extended in order to include negative energy states.

References

1. K. Schwarzschild, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* Berlin 189 (1916).
2. D. Hilbert, *Math. Ann.* **92**, 1 (1924).
3. P. Painlevé, *C. R. Acad. Sci.* (*Paris*) **173**, 677 (1921).
4. A. Gullstrand, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.* **16**, 1 (1922).
5. A. S. Eddington, *Nature* **113**, 192 (1924).
6. D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **110**, 965 (1958).
7. G. Lemaître, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* **53**, 51 (1933).
8. R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity* (McGraw-Hill, 1965).
9. J. P. Petit and G. D'Agostini, *Astrophys. Space Sci.* **354**, 611 (2014).
10. J. P. Petit and G. D'Agostini, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 34 (2014).
11. J. P. Petit, *C. R. Acad. Sci.* **284**, 1217 (1977).
12. A. Sakharov, *ZhETF Pis'ma* **5**, 32 (1967) (in Russian); *JETP Lett.* **5**, 24 (1967).
13. A. Sakharov, *ZhETF Pis'ma* **76**, 1172 (1979) (in Russian); *JETP* **49**, 594 (1979).
14. A. Sakharov, *ZhETF Tr. JETP* **52**, 349 (1980); **79**, 689 (1980) (in Russian).
15. A. Sakharov, *Collected Scientific Works* (Library of Congress, 1982).

16. J. M. Souriau, *Structure Des Systèmes Dynamiques* (Dunod France, 1970) (in French); *Structure of Dynamical Systems*, Chap. III (Birkhaüser, 1997).

17. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge Univ. Press, 2005), Vol. 1.

18. A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).

19. S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).

20. A. G. Riess, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **112**, 1284 (2000).

21. A. V. Filippenko and A. G. Riess, *AIP Conf. Proc.* **540**, 227 (2000).

22. B. Leibundgut, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **39**, 67 (2001).

23. R. Knop *et al.*, *Astrophys. J.* **598**, 102 (2003).

24. J. T. Tonry *et al.*, *Astrophys. J.* **594**, 1 (2003).

25. B. Barris *et al.*, *Astrophys. J.* **602**, 571 (2004).

26. A. G. Riess, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).

27. B. Schmidt, *Rev. Mod Phys.* **84**, 987 (2012).

Erratum

Equation (13) page 3 has a typo (extra square) and should be written:

$$r = R_{\rm s} + \frac{z^2}{4R_{\rm s}}$$

Je vais un tri au sein de tous les éléments qui ont pu apparaître, dans le cadre de cette affaire Ummo.

Je ne vais pas reproduire des messages reçus non évoquer des éléments liés à cette histoire. Dans cette annexe je me concentrerai sur les éléments scientifiques.

J'évoquerai maintenant un message téléphonique. Ceux-ci étaient toujours brefs, limités au strict minimum. Aucun n'a été enregistré.

Cela doit se situer en 2015. A cette époque je commence à travailler sur la question des trous noirs, et cela m'amène à me pencher sur la question de la solution stationnaire de l'équation d'Einstein, en symétrie sphérique, publiée en janvier 1916 par Karl Schwarzschild[58], stationné sur le front russe, décédé quelques mois plus tard d'une infection.

La forme considérée (à tort) comme standard est la forme bilinéaire :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2(\,d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

Quand la variable *r* atteint la grandeur, positive R_s, le « rayon de Schwarzschild », il y a un dénominateur qui devient nul. On a donc une singularité, signalées par le mathématicien David Hilbert dès décembre 1916. [59]

Il ne s'agit pas d'une « vraie » singularité, mais d'une singularité qui résulte d'un mauvais choix de coordonnées. Différents changements de coordonnées ont été proposés et mis en œuvre pour éliminer cette singularité.

Le coup de téléphone, nocturne, se résume aux mots suivants :

- Vous commencez à travailler sur la solution métrique intérieure de Schwarzschild et vous vous intéressez à la singularité sur la sphère de Schwarzschild. Pour l'éliminer, faites :

r égale *Rs*, un plus logarithme de cosinus hyperbolique de ρ.

Fin de la communication.

---

[58] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld Messenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sit. Deut. Akad. Wiss. 1916
English translation by S.Antoci and A.Loinger. On the gravitational field of a mass point according to Einstein theory. arXiv :physics/9912033v1 [physics.hist-ph] 16 dec 1999.
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1916-Schwarzschild-exterior-en.pdf

[59] D.Hilbert. Die Grundlangen der Physik. (Zwerte Mitteilung) in Nachtchriten von Köniniglichen

Gesellschaft zu Göttingen. Math-Phys. Klasse 1917 p.53-76. Presented in the Session of 23 december 1916.

English translation : The Foundations of Physics (second communication)

Ce changement de variable s'écrit, dans le langage mathématique :

$$r = R_s\,(\,1 + Log\,ch\,\rho\,) = R_s\left[1 + Log\left(\frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{2}\right)\right]$$

Ca n'est pas quelque chose de simple, qui viendrait à l'esprit d'un théoricien. Tout calcul fait cette métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = \frac{ln\,ch\rho}{1 + ln\,ch\rho}c^2dt^2 - {R_s}^2\left[\frac{1 + ln\,ch\rho}{ln\,ch\rho}th^2\rho\,d\rho^2 + (1 + ln\,ch\rho)^2(d\theta^2 + sin^2\theta\,d\varphi^2)\right]$$

Cette nouvelle variable a pour avantage de tenir compte de la topologie de l'objet géométrique quadridimensionnel associé à cette solution. Il y a alors deux nappes, selon les valeurs de ρ.

- $\rho > 0$: notre propre feuillet d'univers, celui des masses positives
- $\rho < 0$: Le second feuillet, celui des masses négative.
- $\rho = 0$: La sphère de gorge, d'aire $4\,\pi\,{R_s}^2$

  Avec ce formalisme la variable ρ peut prendre toutes les valeurs réelles de

  $$-\infty\ to\ +\infty$$

  C'est … « magique ». Mais la question qui se pose alors est « d'où sort ce changement de variable assez compliqué ? »

  La question reste ouverte, aujourd'hui, avec son corolaire :

- Qui était au bout du fil cette nuit-là ?

Je publie un nouvel article dans Modern Physics Letters A[60]

On trouvera aussi le détail de ce calcul dans une des 40 vidéos consacrée à mon modèle Cosmologique Janus[61]

[60] J.P.Petit & G.D'Agostini : Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process. Mod. Phys. Lett. A vol. 30 n°9 2015
arXiv : gr-qc/2103.12845/13 feb 2001(23 March 2021) https://arxiv.org/abs/2103.12845
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2015-ModPhysLettB.pdf

[61] Vidéo Janus 22-7 (sous)titrée en anglais) "Des mathématiques venues d'ailleurs »
https://www.youtube.com/watch?v=FwwScatz6Z

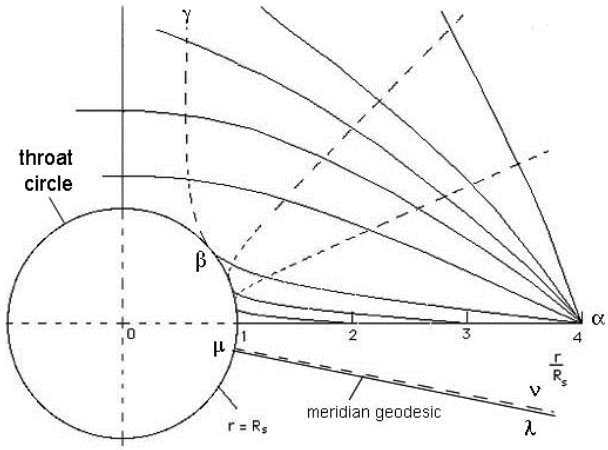


Fig. 4. Projection of geodesics.

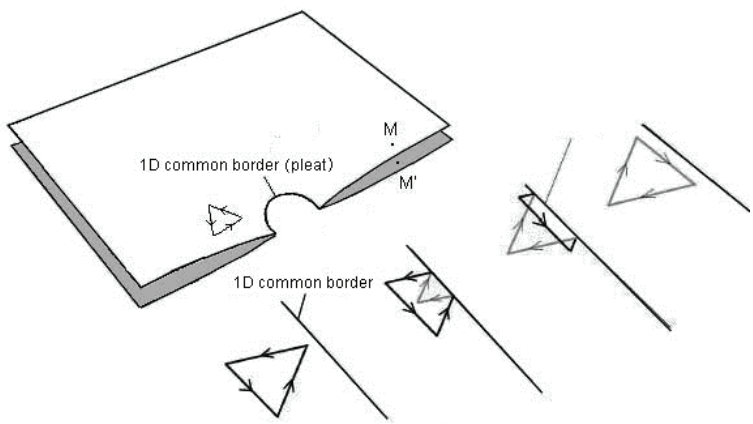


Fig. 5. When the triangle crosses the common boundary, its orientation is reversed.

which is Euclidean at infinity. When $r < R_s$ the signature $(+++)$ is changed into $(-++)$. Applying (10) we get

$$ds^2 = R_s^2 \left[\frac{(1 + \text{Log ch}\,\rho)}{\text{Log ch}\,\rho}\,\text{th}^2\,\rho\,d\rho^2 + (1 + \text{Log ch}\,\rho)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \right]. \quad (15)$$

Its determinant never vanishes. The metric is well defined for all values of ρ and is Euclidean at infinite. It is a *3D space bridge* linking to 3D Euclidean spaces. Its throat, corresponding to $\rho = 0$, is a S2 sphere.

Unfortunately we do not own a 4D Euclidean representation space to operate an isometric imbedding. So that, similarly as in Fig. 3, we will use a non-isometric imbedding in 3D Euclidean space. Then the throat is converted into a "pleat"

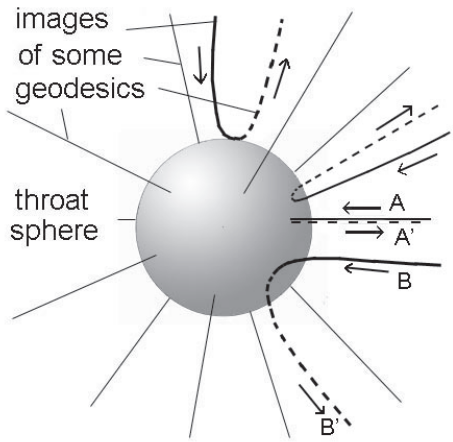


Fig. 6. When geodesics of the 3D hypersurface cross the throat sphere they appear tangent to it in this 3D non-isometric imbedding in a 3D Euclidean space.

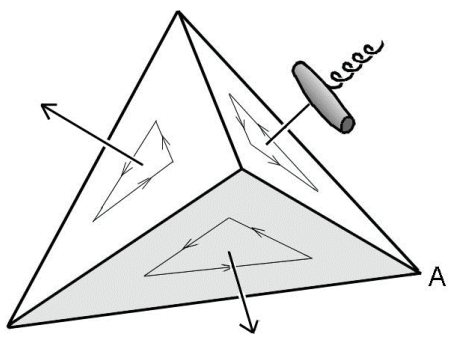


Fig. 7. Oriented tetrahedron.

along the projected S2 sphere. Similarly, some geodesics, continuous in this 3D hypersurface, seem to turn back on the sphere (see Fig. 6).

To show 3D space orientation we will use a tetrahedron (see Fig. 7). To illustrate the enantiomorphy relationship we need to project this object through the S2 throat sphere, each vertice following a geodesic, as showed in Fig. 8.

In the 2D $\{\rho, \varphi\}$ representation the adjacent points are defined by the relation:

$$M : (\rho, \theta) \to M' : (-\rho, \theta)\,.$$

In the 3D $\{\rho, \theta, \varphi\}$ representation the adjacent points in 2D and 3D are defined by the relation:

$$M : (\rho, \theta, \varphi) \to M' : (-\rho, \theta, \varphi)\,.$$

The association of points M and M' goes hand in hand with an enantiomorphic relation between their corresponding neighborhoods.

Nous allons maintenant tenter de résumer, à travers une suite d'articles relativement récents, les grandes lignes du modèle Janus.

En 2024 un point important est marqué, avec la publication d'un article de 24 pages[62] qui parait dans une revue mainstream bien cotée, European Physical Review C (EPJC), considérée comme une des plus solides en physique aujourd'hui. Elle a une « cote » comparable à celle dui est considérée comme la référence en matière de Physics, Particles, Fields :

Physical Review D qui a un facteur d'impact (2025) de 5.3

Celui de European Physical Review D est 4.9. C'est très comparable.

Ce article représente une présentation presque complète des tenants et aboutissants du Modèle Janus.

- Base en théorie des groupes dynamiques
- Topologie
- Construction du système d'équations de champ couplées à partir d'une action
- Solution exacte en instationnaire et hypothèse d'homogénéité et d'isotropie
- Contraintes mathématique, conditions de Bianchi. Solutions newtoniennes
- Confirmations observationnelles

[62] JP Petit, F.Margnat, H.Zejli : A bimetric Cosmological Model based on Andrei Sakharov's Twin Universe Approach. Eur Phys Jr (2024) 84:1226
https://doi.prg/10.1140/epjc 10052-024-13560-v http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2024-11-EPJC.pdf

Eur. Phys. J. C (2024) 84:1226
https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13569-w

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C

Regular Article

Theoretical Physics

A bimetric cosmological model based on Andreï Sakharov's twin universe approach

Jean-Pierre Petit[1,a], **Florent Margnat**[2,b], **Hicham Zejli**[1,c]

[1] Manaty Research Group, Glanon, France
[2] University of Poitiers, Poitiers, France

Received: 28 June 2024 / Accepted: 1 November 2024
© The Author(s) 2024

Abstract The standard cosmological model, based on Cold Dark Matter and Dark Energy (ΛCDM), faces several challenges. Among these is the need to adjust the scenario to account for the presence of vast voids in the large-scale structure of the universe, as well as the early formation of the first stars and galaxies. Additionally, the observed matter–antimatter asymmetry in the universe remains an unresolved issue. To address this latter question, Andrei Sakharov proposed a twin universe model in 1967. Building upon this idea and introducing interactions between these two universe sheets through a bimetric model, we propose an alternative interpretation of the large-scale structure of the universe, including its voids and the acceleration of cosmic expansion.

Contents

1 Introduction . . . . . .
2 The physical interpretation of time inversion (T-symmetry) . . . . . .
3 Geometrical interpretation of electric charge . . . . .
4 Matter–antimatter symmetry (C-symmetry) . . . . . .
5 Group associated with A. Sakharov's model: the *Janus group* . . . . . .
6 Topology of the Janus model . . . . . .
7 Introducing negative masses: first approach . . . . . .
8 A paradigm shift to escape the crisis of today's cosmology
9 Foundation of the Janus cosmological model . . . . .
10 Construction of a time-dependent, homogeneous and isotropic solution . . . . . .
11 Interaction laws and observational consequences . . .
12 The mathematical and physical consistency of the model
12.1 Newtonian approximation of the field generated by a positive mass M . . . . . .
12.2 Newtonian approximation of the field generated by a negative mass $\bar{M}$ . . . . . .
13 Dipole repeller prediction . . . . . .
14 Beyond the Newtonian approximation . . . . . .
15 Conclusion . . . . . .
References . . . . . .

1 Introduction

Between 1967 and 1980, the physicist Andreï Sakharov published several papers [18–20] in which he presented a cosmological model with two universes, connected by an initial singularity: the Big Bang. The first universe corresponds to ours, while the second is described by Sakharov as a twin universe. The *"arrows of time"* of these two universes are antiparallel, and they are *"enantiomorphic"*, that is, mirrored. Through this model, Sakharov proposed a possible explanation for the apparent absence of primordial antimatter in our universe.

For more than half a century, cosmology has been unable to solve one of its greatest enigmas: not only has no convincing explanation been found as to why one particle of matter in a million escaped total annihilation with antimatter, but no significant observation of a corresponding amount of primordial antimatter has been made.

Sakharov was interested in the violation of CP-symmetry, a fundamental property of the laws of physics, and hypothesized that a twin universe, where these violations would be reversed, could exist. This model would thus restore a generalized symmetry on a large scale. Based on the fact that matter is formed from the assembly of quarks and antimatter from antiquarks, he supposed that in our universe, the

[a] e-mail: jean-pierre.petit@manaty.net
[b] e-mail: florent.margnat@univ-poitiers.fr (corresponding author)
[c] e-mail: hicham.zejli@manaty.net

Published online: 26 November 2024

reaction leading to the formation of matter would have been slightly faster than the one leading to the formation of antimatter, while the inverse situation would occur in the twin universe.

Thus, in our matter-dominated universe, there would remain a small surplus of matter, accompanied by an equivalent amount of free antiquarks. Symmetrically, in the twin universe, one would find antimatter with a corresponding surplus of free quarks. Although this model may seem exotic, it nevertheless offers the only theoretical explanation proposed so far to account for the disappearance of half of the predicted cosmic content. Consequently, it seems legitimate to examine in detail the aspects and implications of such a model.

This article revisits the pioneering work of Andreï Sakharov and proposes a new cosmological model, inspired by his approach, in which two folds of the universe are connected by the same initial singularity, folded over one another and interacting through gravitational effects. It puts this work in perspective with modern concepts to address some of the challenges posed by the standard cosmological model, particularly those of the ΛCDM model. This model offers potential explanations for phenomena such as the acceleration of cosmic expansion or the existence of large-scale structures like cosmic voids.

Our paper is structured around several key sections. The first explores T-symmetry, which corresponds to time reversal, based on the mathematical framework of the Poincaré group. This symmetry is related to the existence of particles with negative mass and energy, at the core of the bimetrical Janus model, inspired by the work of J.-M. Souriau. It plays a central role in the dynamics of this double spacetime, where time reversal opens the door to a new interpretation of physical phenomena [22,24].

Next, C-symmetry, associated with charge conjugation, is extended within the framework of an additional dimension through the Kaluza–Klein model. This extension allows the interpretation of electric charge as a geometric component, in accordance with Noether's theorem. This connection between the extra dimension and charge conservation offers a new perspective on charged particles in a five-dimensional spacetime, where charge naturally emerges from geometry [24].

The model is enriched by the introduction of the *Janus restricted group*, which extends the Kaluza space to several compactified dimensions. This dynamic group links the matter–antimatter symmetry (C-symmetry) to the inversion of quantum charges in a multidimensional framework. Through this extension, the group's geometry allows for the understanding of the quantization of several charges, including electric charge, and opens the way to the emergence of new quantum charges. This section establishes a connection between Souriau's work and the Kaluza–Klein formalism to explain complex physical phenomena in a higher-dimensional spacetime [9,21,23,24].

The *Janus dynamic group*, which combines PT-symmetry (simultaneous inversion of energy, time, and spatial coordinates) and C-symmetry (charge conjugation), allows the modeling of interactions between matter, antimatter, and negative mass particles. Thanks to Noether's theorem, this group associates scalar invariants with the observed symmetries, thus clarifying the interactions between these different entities within a bimetrical framework, and allowing the extension of Sakharov's model by adding compactified dimensions for each quantum charge [16,18,24].

To illustrate this concept, in the context of our study on bimetric models, we proposed a model of wormhole linking two PT-symmetric folds of the universe via a modified Einstein–Rosen bridge [10]. This model includes a cross term $dr\,dt$ in the corresponding metric, leading to a finite free-fall time to the wormhole's throat for an external observer. The two folds are CPT-symmetric for photons, which are neutral particles. This wormhole model allows for unidirectional traversal through its throat, inducing a space-time inversion. This opens the possibility of interactions between matter and antimatter, arising from the PT symmetry observed during the transition between the two universe folds. Thus, the congruent identification of points on the two universe folds and the reversal of the arrow of time induce an inversion of energy, offering new insights into the structure of space-time and the potential inversion of particle mass while crossing this bridge.

The Janus model will also be studied from a topological perspective, with a closed universe geometry where P and T symmetries naturally emerge. Spacetime is modeled by a compact universe with the topology of a 4-dimensional sphere $\mathbb{S}^4$, which forms a two-fold cover of the projective space $\mathbb{P}^4$. In this structure, the antipodal points, representing the Big Bang and the Big Crunch, coincide. By replacing these singularities with a tubular structure, they disappear, allowing P and T symmetries to emerge as natural consequences of this closed projective geometry ($\mathbb{P}^4$) and be interpreted in a purely topological framework [3,13,15].

One of the earliest attempts to introduce negative masses into a cosmological model, explored by H. Bondi in 1957, showed that the coexistence of positive and negative masses, which respectively induce attraction and repulsion, leads to the *"runaway effect"* [2]. In this effect, a positive mass and a negative mass attract gravitationally while moving away from each other, thus violating the action-reaction principle. This effect has remained a major challenge for integrating negative masses into standard cosmology.

Thus, to resolve the crisis of modern cosmology, the Janus model proposes a paradigm shift. Since the 1970s,

the ΛCDM model has failed to explain certain observed phenomena, such as the rotation speeds of galaxies and the acceleration of cosmic expansion. The Janus model, based on a bimetrical geometry with positive and negative masses evolving on distinct geodesics, offers an alternative. It proposes a new approach to solving anomalies such as the rapid formation of galaxies after the Big Bang and discrepancies in the measurement of the Hubble constant [6,8].

The Janus model proposes a bimetrical system where gravitational interactions between positive and negative masses are described by distinct field equations, each associated with its own metric. The construction of a homogeneous, isotropic, and time-dependent solution in the Janus model relies on FLRW-type metrics, respectively describing the universes of positive and negative masses. A common energy conservation relation is established, proposing an exact solution for dust universes, where the observed cosmic acceleration is interpreted as a negative total energy. Numerical comparisons confirm the model's compatibility with observations, as illustrated by the magnitude-redshift curve. The interaction laws in the Janus model reveal that masses of the same sign attract, while those of opposite signs repel, thus eliminating the *"runaway effect"*. The model reproduces local observations of general relativity while replacing dark matter and dark energy with invisible negative masses. These negative masses form void-like structures that confine positive mass, accelerating star and galaxy formation in the first few hundred million years, in agreement with data from the James Webb telescope and observations of large cosmic voids [4,12,14,16,17].

Finally, the mathematical consistency of the Janus model is demonstrated in the weak field limit, thanks to the generalized conservation of energy and the Bianchi identities. The calculation of Schwarzschild metrics for positive and negative masses shows that masses of the same sign attract, while those of opposite signs repel. The model satisfies the Tolman–Oppenheimer–Volkoff equations in the Newtonian approximation, while remaining compatible with cosmological observations. It is also valid in regions dominated by negative masses, such as the *dipole repeller*, where it predicts a negative gravitational lensing effect, dimming the luminosity of background objects [1,8,10,11].

In summary, the Janus cosmological model proposes an extension of general relativity by introducing two distinct metrics, each associated with a type of mass, allowing for the explanation of both the acceleration of the universe's expansion and certain large-scale structures, while remaining compatible with local observations of general relativity. This analysis opens new perspectives and places the Janus model among the approaches that can be tested by modern cosmological observations.

2 The physical interpretation of time inversion (T-symmetry)

The T-symmetry refers to the inversion of the time coordinate. In 1970, contributing to the development of symplectic geometry and its application to physics, mathematician J.-M. Souriau provided the physical interpretation of this inversion of the time coordinate [24]. The Gram matrix defining the *Minkowski space* is:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Its isometry group is the *Poincaré group*:

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

where L is the matrix representing the *Lorentz group* $\mathcal{L}or$ which describes how spacetime coordinates change between different inertial frames. These transformations include rotations in space as well as Lorentz transformations (boosts), which are changes of reference frames moving at a constant speed relative to each other. It is axiomatically defined by:

$$L^{\mathsf{T}} G L = G, \tag{3}$$

and C is the quadrivector of space-time translations in $\mathbb{R}^{1,3}$ as follows:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}. \tag{4}$$

It acts on points in *Minkowski space*:

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

This Lie group with 10 independent parameters[1] is the isometry group of this space, defined by its metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{6}$$

The *Lorentz group* $\mathcal{L}or$ has four connected components:

- $\mathcal{L}or_n$ is the neutral component (its *restricted subgroup*), does not invert either space or time and is defined by:

$$\mathcal{L}or_n = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = 1 \ \cap\ [L]_{00} \geq 1\}$$

[1] Including the 6 independent parameters of the Lorentz group (3 rotations and 3 boosts) and 4 independent transformations, which are translations in the 4 directions of *Minkowski space*.

- $\mathcal{L}or_s$ inverts space and is defined by:

$$\mathcal{L}or_s = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = -1\ \cap\ [L]_{00} \geq 1\}$$

- $\mathcal{L}or_t$ inverts time but not space and is defined by:

$$\mathcal{L}or_t = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = 1\ \cap\ [L]_{00} \leq -1\}$$

- $\mathcal{L}or_{st}$ inverts both space and time and is defined by:

$$\mathcal{L}or_{st} = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = -1\ \cap\ [L]_{00} \leq -1\}$$

And we have:

$$\mathcal{L}or = \mathcal{L}or_n \cup\ \mathcal{L}or_s \cup\ \mathcal{L}or_t \cup\ \mathcal{L}or_{st}. \tag{7}$$

The first two components are grouped to form the so-called *"orthochronous"* subgroup:

$$\mathcal{L}or_o = \mathcal{L}or_n \cup\ \mathcal{L}or_s. \tag{8}$$

It includes P-symmetry, which poses no problem for physicists who know that there are photons of *"right"* and *"left"* helicity whose motions are derived from this symmetry. This corresponds to the phenomenon of the polarization of light.

The last two components form the subset *"retrochronous"* or *"antichronous"*, whose components invert time:

$$\mathcal{L}or_a = \mathcal{L}or_t \cup\ \mathcal{L}or_{st}. \tag{9}$$

Thus, we have:

$$\mathcal{L}or = \mathcal{L}or_o \cup\ \mathcal{L}or_a. \tag{10}$$

Note that:

$$\mathcal{L}or_t = -\mathcal{L}or_s \quad \mathcal{L}or_{st} = -\mathcal{L}or_n. \tag{11}$$

The *Poincaré group* inherits the properties of the *Lorentz group* and thus has four connected components, it is defined by:

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad L \in \mathcal{L}or \cap C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}, \tag{12}$$

acting on *Minkowski space* as follows:

$$g(X) = L.X + C. \tag{13}$$

The action of the group on its space of moments is the action on the dual of the Lie algebra of the group[2]. The element of the Lie algebra is obtained by differentiating the ten components of the group. Souriau designates by the Greek letter Λ the differential of the square matrix Z representing the element of the *Poincaré group*, and by the Greek letter Γ the element of the subgroup of spatio-temporal translations[3]:

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\Lambda} = -\Lambda \cap \Gamma \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}. \tag{14}$$

The elements of the *Lorentz group* act on points in space-time, transforming one motion into another. By applying an element L of the *Lorentz group* to a given motion, we obtain a new motion. The neutral component $\mathcal{L}or_n$ is a subgroup containing the identity matrix that inverts neither space nor time.

Let's consider the 4-component matrix ω made up of two parameters λ_1 and λ_2:

$$\omega_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \pm 1 \\ \lambda_2 = \pm 1 \end{cases} \tag{15}$$

Thus, the four components of the *Lorentz group* can be easily expressed using the four possible combinations of these two parameters applied to its neutral component, of which an element $L_n \in \mathcal{L}or_n$ is expressed according to the expression $L = \omega L_n$:

$$\omega_{(1,1)} \times L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_n$$

$$\omega_{(1,-1)} \times L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_s$$

$$\omega_{(-1,1)} \times L_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_t$$

$$\omega_{(-1,-1)} \times L_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_{st} \tag{16}$$

We note that $\lambda_1 = -1$ inverts time while $\lambda_2 = -1$ inverts space. The four components are grouped into two

[2] Souriau's approach, thanks to the Poincaré group which is the isometry group of *Minkowski space* encompassing the *Lorentz group* (with its four connected components), allows the parameters associated with each of these motions, whose representative points belong to a vector space, *the space of moments*, to emerge. The dimension of this space is equal to that of the group: ten. Indeed, the *Lorentz group* is made up of transformations that preserve the quadratic form of space-time. It consists of the orthochronous Lorentz transformations and the translation group. The transformations of the orthochronous *Lorentz group* have 6 degrees of freedom, while the translation group has 4 degrees of freedom. This structure leads to 10 independent parameters of the Poincaré group. By combining them into an antisymmetrical matrix called a *torsor*, the parameters of the space of motions can thus be defined.

[3] (13.54) of [24]. He then writes μ, an element of the space of motions, in the form (13.57) and expresses the invariance in the form of the constancy of the scalar (13.58), where M is an antisymmetric matrix.

subsets *"orthochronous"* and *"retrochronous"* according to the respective expressions (8) and (9).

The *Poincaré group* can then be written according to these four connected components as follows:

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \omega L_n & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \omega L_n \in \mathcal{L}or \cap C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}. \tag{17}$$

Thus, the action of this *Poincaré group* on the spacetime coordinates yields the following space of motions:

$$\begin{bmatrix} \omega L_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega L_n \xi + C \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Indeed, this describes the action of the *Poincaré group* on its space of moments μ, consisting of ten independent scalar quantities:

- The energy E,
- The momentum $p = \{p_x, p_y, p_z\}$,
- The passage $f = \{f_x, f_y, f_z\}$,
- The spin $s = \{l_x, l_y, l_z\}$.

If we consider the motion of an object in space, such motion is also defined by its moment μ. The physicist can then apply an element $\mathcal{G}$, for example from the Galilean group, to this moment μ. This produces a new moment μ'. This action can be written as follows:

$$\mu' = \mathcal{G}\mu\mathcal{G}^{\mathsf{T}}, \tag{19}$$

where $\mathcal{G}^{\mathsf{T}}$ represents the transpose of this matrix $\mathcal{G}$. μ is an antisymmetric moment matrix of size 5×5[4] where the more compact form is defined as follows:

$$\mu = \begin{pmatrix} M & -P \\ P^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

with[5]:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Then, by applying the action of the *Poincaré group* (12) on the dual of its Lie algebra, i.e., on its space of moments, we obtain the following action according to (19):

$$\mu' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & -P \\ P^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{\mathsf{T}} & 0 \\ C^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\mu' = \begin{pmatrix} LML^{\mathsf{T}} - LPC^{\mathsf{T}} + CP^{\mathsf{T}}L^{\mathsf{T}} & -LP \\ P^{\mathsf{T}}L^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

We can deduce[6]:

$$M' = LML^{\mathsf{T}} + CP^{\mathsf{T}}L^{\mathsf{T}} - LP^{\mathsf{T}}C, \tag{24}$$

and

$$P' = LP. \tag{25}$$

Therefore, the torsor of *Poincaré group* is given by the different components of the space of moments[7] as follows:

$$\mu = \{M, P\} = \{l, g, p, E\}, \tag{26}$$

where l is the angular momentum of M, g is the relativistic barycenter of M, p is the linear momentum of P and E is the energy of P.

Now, let's consider for example the symmetry T, where there is only a time inversion ($\lambda_1 = -1$), without space inversion ($\lambda_2 = 1$), in a case where there is also no translation in spacetime ($C = 0$). We thus have:

$$\omega_{(-1,1)} \times L_n = L_t. \tag{27}$$

Hence:

$$L_t \times \xi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-t} \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Thus, we obtain the action of time inversion in the space of trajectories or in spacetime.

The second Eq. (25) sheds light on the physical significance of this inversion of the time coordinate. Indeed, the application of the L_t component of the *Lorentz group* to the motion of a particle gives:

$$P' = L_t P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-E} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Therefore, we can deduce that the application of the L_t component of the *Lorentz group* to the motion of a particle induces an inversion of its energy from E to $-\boldsymbol{E}$.

The T symmetry applied to the motion of a particle inverts its energy which leads to mass inversion[8] following the definition of the mass[9] as:

$$m = \sqrt{P^{\mathsf{T}} \cdot P}\, \mathrm{sgn}(E). \tag{30}$$

A very detailed commentary on the work can be found in reference [22]. The approach is based on the introduction of the space of motions as a dual of the Lie algebra of the group.

[4] Meaning the symmetric elements with respect to the main diagonal have opposite signs. The elements on the main diagonal are equal to zero, as each is its own opposite.

[5] M is the moment matrix associated with μ with dimensions 4×4, and P, a four-vector energy-momentum with dimensions 4×1.

[6] (13.107) of [24].

[7] (13.57) of [24].

[8] page 198–199 of [24].

[9] (14.57) on page of [24].

In this context, we uncover the physical interpretation of the model proposed by A. Sakharov: the second universe in his framework could consist of particles possessing both negative energy and negative mass.

To further extend the interpretation of fundamental symmetries, we now turn our attention to C-symmetry, which is associated with charge conjugation. By introducing a higher-dimensional framework inspired by Kaluza–Klein theory, we can offer a geometrical interpretation of electric charge, according to Noether's theorem. This will allow us to explore the relationship between spacetime transformations and the emergence of electrically charged particles.

3 Geometrical interpretation of electric charge

The geometrical interpretation of C-symmetry, which is synonymous with charge conjugation and matter–antimatter duality, was provided by J.-M. Souriau in 1964 in chapter V of reference [24].

Let's apply an extension of the *Poincaré group* to form the following dynamic group:

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \cap L = \lambda L_o \in \mathcal{L}or \cap \lambda = \pm 1 \cap C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}. \tag{31}$$

Starting from *Minkowski space*:

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix}, \tag{32}$$

let's introduce Kaluza space[10] that incorporates a 5×5 Gram matrix:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{where}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

In the considered group, we just add a translation ϕ to the fifth dimension ζ. Thus, the dimension of the group becomes 11. It is the isometry group of Kaluza space, defined by its metric:

$$ds^2 = dX^{\mathsf{T}} \Gamma dX = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\zeta^2, \tag{34}$$

with:

$$X = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta \end{pmatrix}. \tag{35}$$

According to Noether's theorem,[11] this new symmetry is accompanied by the invariance of a scalar that we will call q. The torsor of this *Kaluza group* then incorporates an additional parameter:

$$\mu = \{M, P, q\} = \{l, g, p, E, q\}. \tag{36}$$

Let's introduce the action of the group on its Lie algebra:

$$Z' = g^{-1} Z g. \tag{37}$$

If we consider an element of the Lie algebra of this group:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

we obtain:

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & L^{-1}G\omega L & L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

This allows us to deduce the action of the following group:

$$q' = q, \tag{40}$$

$$M' = LML^{\mathsf{T}} - LPC^{\mathsf{T}} + CP^{\mathsf{T}}L^{\mathsf{T}}, \tag{41}$$

$$P' = LP. \tag{42}$$

If we identify q as the electric charge, this would show that the motion of a massive particle in a five-dimensional space would transform it into an electrically charged particle.

The interpretation of C-symmetry within a higher-dimensional framework, as explored, leads naturally to a broader geometric understanding of symmetries in the Janus model. Specifically, the notion of charge conjugation extends to encompass the duality between matter and antimatter. To develop this further, we now introduce the *Janus restricted group*, which provides a formal structure to describe these

[10] Kaluza space is a hyperbolic Riemannian manifold with signature $(+----)$.

[11] Noether's theorem states that for every continuous symmetry of a physical action, there exists a conserved quantity. In our context, if a new symmetry ensures the invariance of a scalar q, this scalar is the conserved quantity. This means that q remains constant when the symmetry is applied to the system's action.

symmetries. This group allows us to explore how quantum charges can be inverted by compactified dimensions, linking the symmetry properties of spacetime to the emergence of quantized charges and new quantum numbers.

4 Matter–antimatter symmetry (C-symmetry)

Let's introduce the *Janus restricted group* as follows:

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mu = \pm 1 \cap \phi \in \mathbb{R} \cap L = \lambda \right.$$
$$\left. L_o \in \mathcal{L}or \cap \lambda = \pm 1 \cap C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}. \tag{43}$$

The action of the group on the coordinates of the 5-dimensional spacetime defined by (35) yields the space of the following motions:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\zeta + \phi \\ L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

A similar calculation to the previous one yields the action of the group:

$$q' = \mu q, \tag{45}$$
$$M' = LML^{\mathsf{T}} - LPC^{\mathsf{T}} + CP^{\mathsf{T}}L^{\mathsf{T}}, \tag{46}$$
$$P' = LP. \tag{47}$$

This group acts on the five-dimensional Kaluza space. We observe that $\mu = -1$ reverses the fifth dimension ζ and the scalar q.

Through a dynamic interpretation of the group, we find the idea suggested by J.-M. Souriau [24]: the inversion of the fifth dimension is associated with the inversion of electric charge. However, this is only one of the quantum charges. Indeed, the C-Symmetry translating the *"matter–antimatter"* symmetry introduced by Dirac [5], reverses all quantum charges. This inversion operation is only obtained by adding as many compactified dimensions as there are quantum charges. The action of the group on the coordinates of n-dimensional spacetime yields the space of the following motions:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\zeta^1 + \phi^1 \\ \mu\zeta^2 + \phi^2 \\ \vdots \\ \mu\zeta^p + \phi^p \\ L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

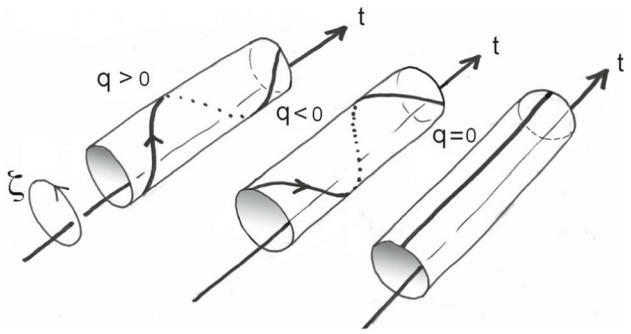


Fig. 1 Inversion of the winding direction of a particle's motion reflecting the C-symmetry

The torsor of this group incorporates several additional scalars q^p:

$$\mu = \{M, P, \sum_{1}^{p} q^i\} = \{l, g, p, E, q^1, q^2, \ldots, q^p\}. \tag{49}$$

This allows us to obtain the action of the group on its momentum space:

$$q'^1 = \mu q^1, \tag{50}$$
$$q'^1 = \mu q^1, \tag{51}$$
$$\cdots \tag{52}$$
$$q'^p = \mu q^p, \tag{53}$$
$$M' = LML^{\mathsf{T}} - LPC^{\mathsf{T}} + CP^{\mathsf{T}}L^{\mathsf{T}}, \tag{54}$$
$$P' = LP. \tag{55}$$

Moreover, Souriau considers that electric charge can be geometrically quantized into discrete values $(+e, 0, -e)$ when the associated fifth dimension is closed.

Imagine representing motion in *Minkowski space* along a simple straight line oriented in time. At each point, we add a closed dimension, which extends *Minkowski space* into a bundle. In Fig. 1, it is represented as a cylinder.

But in approach [21], these transformations no longer a priori preserve the electric charge q, which then becomes dependent on the chosen coordinate system. In reference [21], taking up the approach initiated in [23], the author opts for a closed fifth dimension, in which the radius of this *"universe tube"* becomes very small, of the order of Planck's length. He then rediscovers the invariance of electric charge and concludes [21], we quote:

> In this paper, we revisit the Kaluza–Klein theory from the perspective of the classification of elementary particles based on the coadjoint orbit method. The keystone conjecture is to consider the electric charge as an extra momentum on an equal footing with the mass and the linear momentum. We study the momentum map of the

corresponding symmetry group $\hat{\mathbb{G}}_1$ which conserves the hyperbolic metric. We show that the electric charge is not an invariant, i.e. it depends on the reference frame, which is in contradiction with the experimental observations. In other words, it is not the symmetry group of the Universe today as we know it. To avert this paradox, we scale the fifth coordinate and consider the limit when the cylinder radius ω vanishes. For the corresponding group $\hat{\mathbb{G}}_0$ also of dimension 15, the charge is an invariant then independent of the frame of reference and the observer. On this ground, we propose a cosmological scenario in which the elementary particles of the early Universe are classified from the momenta of the group $\hat{\mathbb{G}}_1$, next the three former dimensions inflate quickly while the fifth one shrinks, leading to the 4D era in which as today the particles are characterized by the momenta of the group $\hat{\mathbb{G}}_0$. By this mechanism, the elementary particles can acquire electric charge as a by-product of the $4+1$ symmetry breaking of the Universe. This work opens the way to the geometric quantization of charged elementary particles.

The expression for this characteristic dimension of this universal tube is given in [23] on page 412:

$$e\frac{\hbar}{e}\sqrt{\frac{\chi}{2\pi}}, \tag{56}$$

χ being the Einstein constant taken equal to [23]:

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2} = 1.856 \times 10^{-27}\text{cm g}^{-1}. \tag{57}$$

By introducing numerical values, this characteristic length is 3.782×10^{-32}cm. Dividing by 2π gives us the order of magnitude of Planck's length. In this view, the quantization of electric charge and its constancy are derived from the closure of the extra dimension associated with the decrease in the characteristic dimension associated with it.

This group refers to an extension of the *Poincaré group*, i.e. to a field-free, curvature-free universe. This construction of a five-dimensional relativity was suggested in 1964 in reference [23] and has been taken up again more recently in [21]. Note that it is in [23], page 413, that the link between charge conjugation and fifth-dimensional inversion is first mentioned.

By generalizing [9], we can envisage an extension of space-time to a space with $4+p$ dimensions, all of which may see their characteristic dimensions reduced, like that of this fifth dimension, each of these collapses leading to the emergence and quantization of new quantum numbers, baryonic, leptonic, unique etc., the electric charge being only the first of these.

Thus, the *Janus restricted group* has provided us with a framework for understanding the matter–antimatter symmetry (C-symmetry) and the inversion of quantum charges through additional compactified dimensions. We can now extend it to a broader symmetry group associated with A. Sakharov's model, the *Janus group*, which incorporates both C-symmetry and PT-symmetry. This extension allows us to explore a dynamic group structure that includes negative masses and antimatter within the framework of Sakharov's twin universe model.

5 Group associated with A. Sakharov's model: the *Janus group*

If we want to construct a group that translates the T-symmetry invoked by Sakharov, we'll replace L_o by λL_o with $\lambda = \pm 1$. But, as proposed in [16], we can translate what had already been proposed [18], we quote:

> All phenomena corresponding to $t < 0$ are, in this hypothesis, assumed to be CPT images of phenomena corresponding to $t > 0$.

Then, by introducing a new symmetry to the previous *Janus restricted group*, which we can call PT Symmetry allowing the conversion of matter into antimatter with negative mass[12], we thus combine C-symmetry and PT-symmetry to form the *Janus dynamic group* as follows:

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \lambda, \mu \in \{-1, 1\} \cap \phi \in \mathbb{R} \cap L_o \in \mathcal{L}or_o \cap C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{58}$$

We can consider that particles of matter and antimatter can coexist in the same space fold. However, no coexistence is possible for the motion of particles deduced by T-symmetry (or PT-symmetry). This space is of dimension $4+p$ (for p quantum charges). We will therefore consider the two-fold covering of this manifold M_{n+p}. In each of these two folds, there remains a possibility to perform the symmetry corresponding to $\mu = -1$, that is, the inversion of all quantum charges. In other words, the *"matter–antimatter"* duality exists in both folds.

To understand the nature of the different components of these folds, we will consider the motion of a particle of matter with energy and mass:

- By acting on this motion with elements of the group corresponding to $(\lambda = 1; \mu = 1)$, we will obtain other motions of particles of matter with positive mass and energy.

[12] A concept we could call *antimatter in the sense of Feynman* [7].

- By acting on this motion with elements of the group corresponding to ($\lambda = 1; \mu = -1$), we will obtain other motions of antimatter particles with positive mass and energy[13].
- By acting on this motion with elements of the group corresponding to ($\lambda = -1; \mu = 1$), we will obtain other motions of particles of matter with negative mass and energy.[14]
- By acting on this motion with elements of the group corresponding to ($\lambda = -1; \mu = -1$), we will obtain other motions of antimatter particles with negative mass and energy[15].

Its isometry group is that of Janus space, defined by the same metric as structuring Kaluza space (34), and its dimension is 11.[16] The torsor of the group is also the same as (36). However, if we consider an element of the Lie algebra of this group:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

we can then calculate Z' according to the relation (37) as follows:

$$\begin{aligned} Z' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & \lambda G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda\mu)\delta\phi \\ 0 & \lambda^3 L_o^{-1} G\omega L_o & \lambda^2 L_o^{-1} G\omega C + \lambda L_o^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{60}$$

Thus, by identification, we can deduce:

$$\delta\phi' = \lambda\mu\delta\phi, \tag{61}$$
$$\omega' = \lambda^2 G L_o^{-1} G\omega L_o, \tag{62}$$
$$\gamma' = \lambda^2 L_o^{-1} G\omega C + \lambda L_o^{-1}\gamma. \tag{63}$$

We know that:

$$L_o^{-1} = G L_o^{\mathsf{T}} G. \tag{64}$$

Then:

$$\begin{aligned} \delta\phi' &= \lambda\mu\delta\phi, \\ \omega' &= \lambda^2 L_o^{\mathsf{T}}\omega L_o, \\ \gamma' &= \lambda^2 G L_o^{\mathsf{T}}\omega C + \lambda G L_o^{\mathsf{T}} G\gamma. \end{aligned} \tag{65}$$

However, inspired by J.-M. Souriau, we could add as many additional closed dimensions as quantum charges and write the dynamic group as follows:

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \lambda\mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda\mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

The isometry group of this space can be defined by the following metric:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 - (\mathrm{d}\zeta^1)^2 \\ & -(\mathrm{d}\zeta^2)^2 - \cdots - (\mathrm{d}\zeta^p)^2. \end{aligned} \tag{67}$$

With:

$$X = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \end{pmatrix}. \tag{68}$$

The action of this *Janus group* on the coordinates of $10 + p$ independant parameters then yields the space of the following motions:

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \lambda\mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda\mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu\zeta^1 + \phi^1 \\ \lambda\mu\zeta^2 + \phi^2 \\ \vdots \\ \lambda\mu\zeta^p + \phi^p \\ \lambda L_o\xi + C \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

According to Noether's theorem, this new symmetry is accompanied by the invariance of additional scalars q^p. Therefore, the torsor of the group integrates them according to this relation:

$$\mu = \{M, P, \sum_1^p q^i\} = \{l, g, p, E, q^1, q^2, \ldots, q^p\}. \tag{70}$$

Thus, the duality relation[17] gives us:

$$\frac{1}{2} T_r(M \cdot \omega) + P^{\mathsf{T}} \cdot G\gamma + \delta\phi \sum_1^p q^i$$

[13] These are *"antimatter in the sense of Dirac"* (C-symmetry).

[14] CPT-symmetry.

[15] These are *"antimatter in the sense of Feynman"* (PT-symmetry).

[16] 10 + 1 dimension associated with the fifth space dimension ζ that J.-M. Souriau identifies with the electric charge q.

[17] (13.58) from [24].

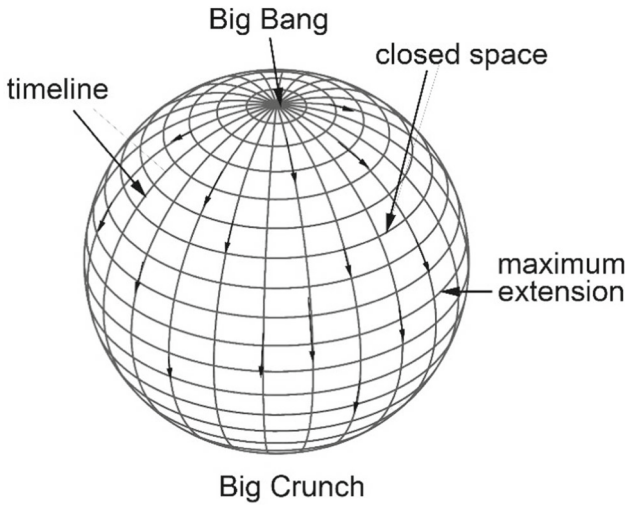


Fig. 2 A simplified 2D representation of a closed universe with a spherical topology $\mathbb{S}^2$, illustrating the temporal progression from the Big Bang to the Big Crunch, with the universe reaching maximum spatial extension in between

$$= \frac{1}{2}T_r(M' \cdot \omega') + P'^{\mathsf{T}} \cdot G\gamma' + \delta\phi \sum_1^p q'^i. \tag{71}$$

This allows us to deduce the action of the group by identification with (65):

$$\sum_1^p q'^i = \lambda\mu \sum_1^p q^i, \tag{72}$$

$$M' = LML^{\mathsf{T}} - LPC^{\mathsf{T}} + CP^{\mathsf{T}}L^{\mathsf{T}}, \tag{73}$$

$$P' = LP. \tag{74}$$

Having established the *Janus dynamic group* as a natural extension of Sakharov's model, which incorporates both PT-symmetry and C-symmetry, we now shift our focus to the topological implications of the Janus model. In particular, we will explore how the symmetries discussed earlier can emerge from a closed, higher-dimensional universe. This section delves into the topological structure of the model, illustrating how P and T symmetries can arise naturally from the geometry of a closed universe, modeled as a projective space $\mathbb{P}^4$.

6 Topology of the Janus model

Let's consider a universe closed in all its dimensions, including space and time (see Fig. 2).

Diametrically opposed, antipodal points can be brought into coincidence. The image is then that of a $\mathbb{P}^2$ projective. The north and south poles, one representing the Big Bang and the other the Big Crunch, come into coincidence. The sphere cannot be paved without the presence of these two singularities. The same applies to any sphere $\mathbb{S}^{2n}$ if n is even, especially if this dimension is 4. This geometry was proposed in [13].

The Fig. 3 shows how this coincidence of antipodal regions generates this T-symmetry. On the $\mathbb{S}^2$ sphere, the direction of time is given by the orientation of the meridian curves. This orientation is shown on the left at the new state of maximum expansion, when space is identified with the sphere's equator. During this folding of the $\mathbb{S}^2$ sphere, described in reference [15] page 65, the vicinity of this equator is configured as the two-folds cover of a Möbius strip with three half-turns (see Fig. 3 on the right).

In Fig. 4, we evoke the appearance of T-symmetry by manipulating the vicinity of a meridian line. In addition, we evoke the possible elimination of the Big Bang - Big Crunch double singularity by replacing them with a tubular passage, which then gives this geometry the nature of the two-fold cover of a Klein bottle (Fig. 4).

For enantiomorphy and P-symmetry to appear, the operation would have to be performed on a larger sphere. This aspect can be highlighted by considering the conjunction of antipodal regions in the vicinity of a meridian line, which is then configured according to the two-fold covering of a half-turn Möbius strip. The Fig. 5 illustrates this enantiomorphic situation (Fig. 5).

By bringing the antipodal points of even-dimensional spheres into coincidence, we locally create a configuration associating two T-symmetrical folds. By adding further dimensions, the coincidence of the antipodes creates a two-fold CPT-symmetric coating configuration of a projective space. In the case of the sphere $\mathbb{S}^2$, which corresponds only to a 2D didactic image, the image of the projective $\mathbb{P}^2$ is its immersion in, which corresponds to the surface described in 1903 by the German mathematician Werner Boy [3], see Fig. 6. In this figure, we show how the coincidence of the antipodal points of the equator of the sphere $\mathbb{S}^2$ gives the two-fold covering of a Möbius ribbon with three half-turns (Fig. 6).

In this section, we have demonstrated that the P and T symmetries invoked by A. Sakharov can arise as consequences of a purely topological structure, specifically the covering of a projective space $\mathbb{P}^4$.

After exploring the topological structure of the Janus model, we now address a major consequence of T-symmetry: the introduction of negative masses. According to Souriau, the application of T-symmetry to the motion of a particle inverts its energy, which leads to the inversion of its mass,[18] in accordance with the definition of mass.[19] Although this idea is elegant, it presents significant challenges when integrated into the framework of general relativity. In the follow-

[18] pages 198–199 of [24].

[19] (14.57) on page 346 of [24].

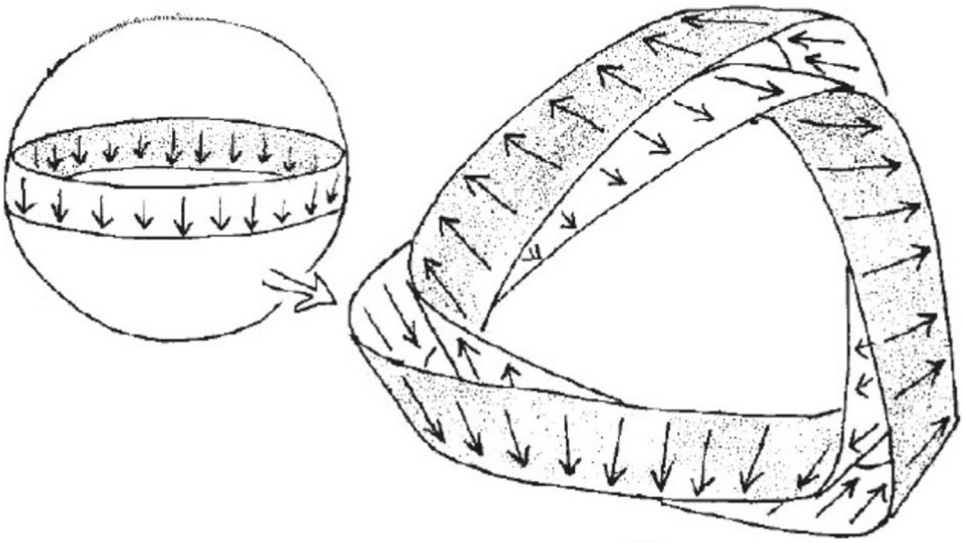


Fig. 3 How the coincidence of antipodal regions creates T-symmetry. Drawing extracted from [15], page 65

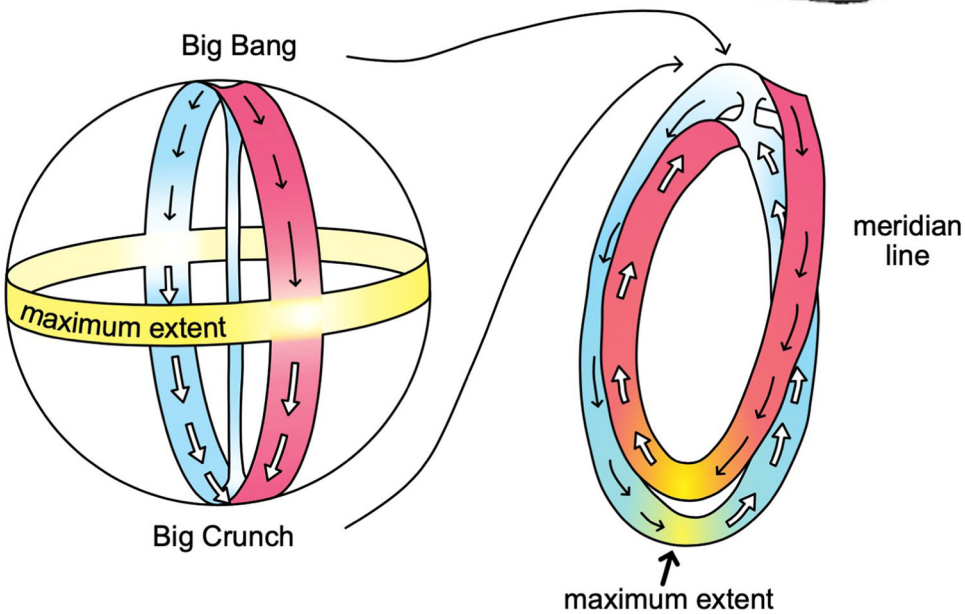


Fig. 4 Coincidence of antipodal regions on a sphere $\mathbb{S}^2$, according to the two-folds cover of a half-turn Möbius strip, with the appearance of T-symmetry

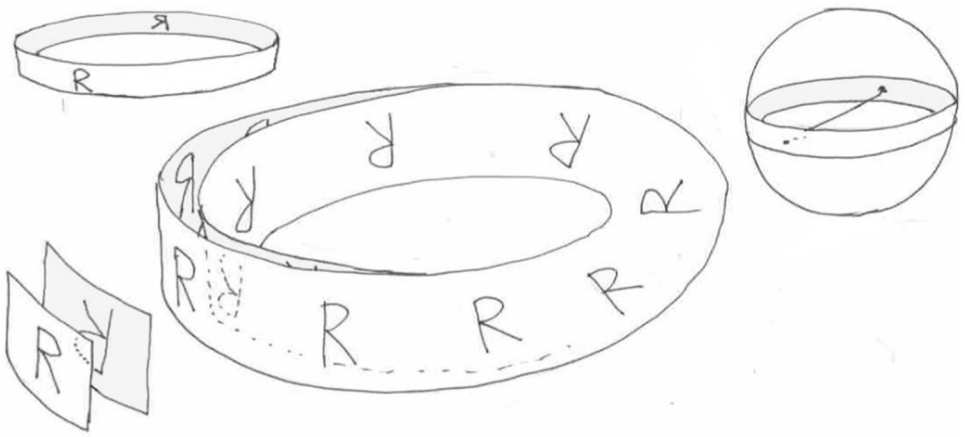


Fig. 5 P-symmetry as a consequence of contacting antipodal region neighborhoods on an $\mathbb{S}^2$ sphere

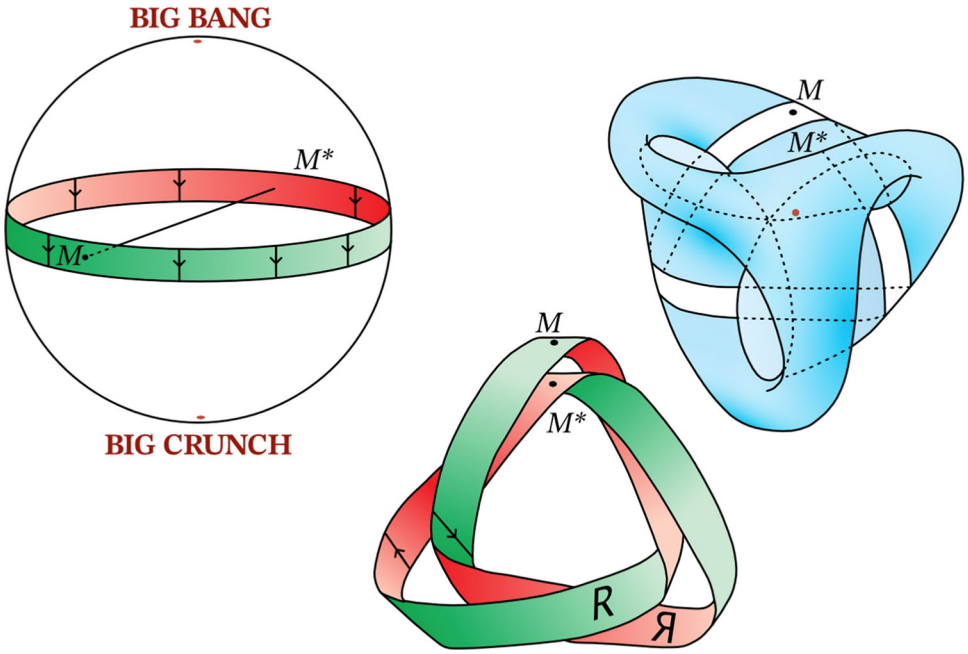


Fig. 6 Boy's surface, immersion of the $\mathbb{P}^2$ projective in $\mathbb{R}^3$

ing section, we will propose an initial approach to incorporating negative masses into the cosmological model, analyzing the implications of their interaction with positive masses and the resulting geodesics.

7 Introducing negative masses: first approach

Using dynamical group theory, we showed that this T-symmetry was synonymous with the introduction of negative masses into the cosmological model. A. Sakharov's primordial antimatter would therefore be endowed with negative mass. This first step is far from anecdotal since, if we neglect it, we admit to losing nothing less than half the universe from the outset. Is it then possible to introduce negative masses into the standard model of general relativity?

A first idea would be to consider that the field comes from two sources, represented by two tensors, the first referring to a positive mass content and the second to a negative mass content:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi\left[T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}\right]. \tag{75}$$

We can then consider the metric solution corresponding to a region where the field is created, firstly by a positive mass content:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T^{(+)}_{\mu\nu}. \tag{76}$$

Geodesics are given by a solution in the form of an external metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM^{(+)}}{c^2 r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \dfrac{2GM^{(+)}}{c^2 r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{77}$$

The geodesics evoke an attraction (see Fig. 7).

Now consider the field created by a negative mass $M^{(-)}$, the field equation becomes then:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T^{(-)}_{\mu\nu}. \tag{78}$$

And the solution corresponds to the metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{2G|M^{(-)}|}{c^2 r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 + \dfrac{2G|M^{(-)}|}{c^2 r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{79}$$

The geodesics then represent a repulsion (see Fig. 8).

In this context, our single field equation provides only a single family of geodesics, which the test particles, with both positive and negative masses, must follow. We deduce that:

- Positive masses attract both positive and negative masses.
- Negative masses repel both positive and negative masses.
- Two masses of identical absolute values but opposite signs are brought together, the positive mass flees, pursued by the negative mass. Both then accelerate uniformly, but without any energy input, since the energy of the negative mass is itself negative. This result was illustrated in 1957 by H. Bondi [2]. This phenomenon is known as *"runaway effect"*. What's more, this scheme violates the action-reaction principle. In 1957, the conclusion was reached that it was physically impossible

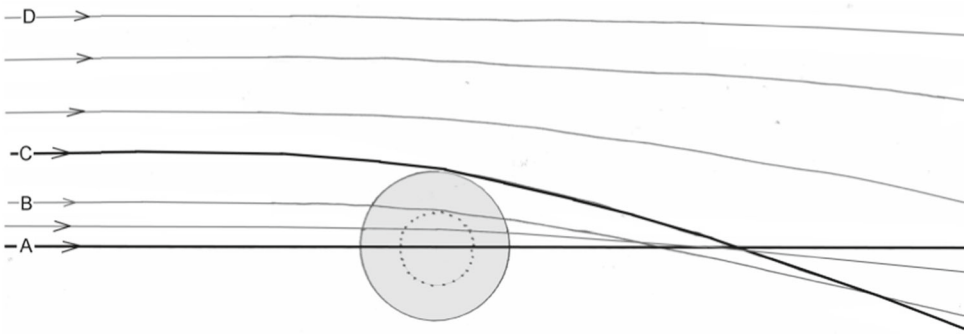


Fig. 7 Deflection of positive-energy neutrinos by a positive mass. The trajectories, when passing near the mass, are deflected more strongly due to the gravitational effect. The angle of deflection reaches its maximum (C) when the neutrinos graze the edge of the mass. Trajectories further away, such as (D), experience a weaker deflection, and the deflection angle becomes null for trajectories passing at a very large distance from the mass. The trajectory passing through the center of the mass (A) remains undeflected due to the symmetry of the configuration

to include negative masses in the cosmological model. This would only be possible at the price of a profound paradigmatic shift, not by denying the achievements of general relativity, but by considering its extension in a wider geometric context.

After examining the introduction of negative masses and their implications within the framework of general relativity, we now turn to a broader cosmological context. The discovery of anomalies, such as the dipole repeller and the accelerating expansion of the universe, has revealed significant shortcomings in the standard model ΛCDM. Recent observations, particularly those made with the James Webb Space Telescope, have intensified the crisis in cosmology by challenging long-held assumptions about galaxy formation. In the following section, we will explore how the Janus cosmological model offers a paradigm shift capable of resolving these issues by proposing a bimetrical structure for the universe, integrating both positive and negative masses into a broader and more innovative geometric framework.

8 A paradigm shift to escape the crisis of today's cosmology

In the mid-1970s, the excessive rotation speeds of stars in galaxies had already led specialists to propose the existence of dark matter, ensuring their cohesion. In 2011, the discovery that the cosmic expansion was accelerating was attributed to a new, unknown ingredient known as dark energy. Over the decades, all attempts to assign an identity to these new components ended in failure.

In 2017 [8], Hélène Courtois, Daniel Pomarède, Brent Tully and Yeudi Hoffman produced the first very-large-scale mapping of the universe, in a cube of one and a half billion light-years across, with the Milky Way, our observation

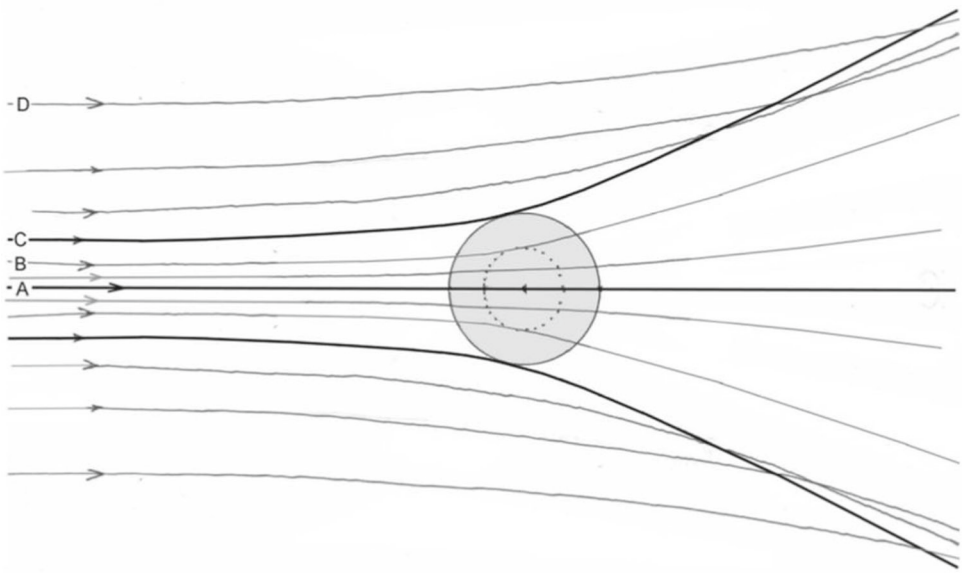


Fig. 8 Deviation of positive-energy photons by a negative mass. The trajectories, when the curvature remains moderate, are very close to hyperbolas. The angle of deviation reaches a maximum (C) when the geodesic is tangent to the limit of the mass. It then decreases steadily to zero at very large distances (D). The angle of deviation is null, due to symmetry, when the geodesic passes through the center of the mass (A)

point, at the center (see Fig. 9). By subtracting the radial component of the velocity linked to the expansion motion, they indicate the trajectories followed by the masses. A dipolar structure appears. One formation, the Shapley attractor, comprising hundreds of thousands of galaxies, attracts galaxies to itself. But, symmetrically to this formation, 600 million light-years from the Milky Way, there is an immense void, some one hundred million light-years across, which, on the contrary, repels galaxies, and to which we give the name of dipole repeller. To date, no theory has been able to explain the existence of this vast void. While the idea of a gap in dark matter, positive and attractive, has been evoked, it does not hold water, as no mechanism has been found to give rise to it. Since 2017, several other such voids have been detected and located.

The launch of the James Webb Space Telescope has only added to this crisis [6]. The Standard Model ΛCDM proposes a hierarchical mechanism for the birth of stars and galaxies. Gravitational instability appears as soon as matter and radiation are decoupled. The scenarios for the formation of both stars and galaxies in this model make use of the attributes conferred on hypothetical dark matter. But even with these parameters, it is impossible to imagine galaxies forming before a billion years. The Hubble Space Telescope was already able to obtain images in the near infrared. Early images of distant objects appeared to show groups of minigalaxies. But the James Webb Space Telescope showed that these objects were nothing other than HII regions belonging to barred spiral galaxies, fully formed, hosting old stars, only 500 million years old.

For decades, the Standard Model ΛCDM has relied on its ability to account for CMB fluctuations as gravitoacoustic oscillations, by adapting the numerous parameters relating to dark matter, dark energy and, in particular, the value of the Hubble constant. This desire to match observational data has resulted in a Hubble constant value of 67 Km s^{-1} Mpc^{-1}. This is significantly lower than the value of 70 Km s^{-1} Mpc^{-1} deduced from direct observation of standard candles.

All these factors are creating a deep crisis within the specialist community, and some voices are beginning to be heard, suggesting the need to consider a profound paradigm shift. This is what the Janus cosmological model[20] proposes.

Since we are unable to introduce negative masses into the general relativity model, let's consider a profound change of geometric paradigm, already evoked in the previous sections under the aspect of group theory and topology. The motion of positive masses, immersed in the gravitational field, takes place according to geodesics that we consider to be derived from a first metric $g_{\mu\nu}$. We will therefore describe the motion of negative masses using a second set of geodesics, derived from a second metric $\overline{g}_{\mu\nu}$. We thus have a manifold, whose points are marked by the coordinates $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, equipped with a pair of metrics $(g_{\mu\nu}, \overline{g}_{\mu\nu})$. We shall neglect the action of electromagnetic fields and consider only the field of gravity. From the metrics and we can construct Ricci tensors $R_{\mu\nu}$ and $\overline{R}_{\mu\nu}$ and their associated Ricci scalars R and $\overline{R}$.

As the Janus model proposes a paradigm shift by introducing a bimetric structure to account for both positive and negative masses, we will now focus on the foundational mathematical structure underlying this model. The Janus cosmological model builds upon the interaction between two entities, i.e. positive and negative mass populations, each associated with its respective metric. In the following section, we will explore the formulation of the action and field equations governing this interaction, and how these coupled systems lead to a coherent description of cosmic phenomena, offering an alternative to the limitations of the standard model ΛCDM.

9 Foundation of the Janus cosmological model

To build this model, let us now consider the interaction between two entities: ordinary matter with positive mass interacting with negative mass through gravitational effects. This model involving negative mass takes into account the influence of both dark matter and dark energy.

We can describe this system of two entities with respective metrics $g_{\mu\nu}$ and $\bar{g}_{\mu\nu}$. Let R and $\overline{R}$ be the corresponding Ricci scalars. We then consider the following two-layer action[21]:

$$A = \int_{\mathscr{E}} \left(\frac{1}{2\chi} R + S + \mathcal{S} \right) \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4x + \int_{\mathscr{E}} \left(\frac{\kappa}{2\bar{\chi}} \overline{R} + \overline{S} + \overline{\mathcal{S}} \right) \sqrt{|\bar{g}|}\, \mathrm{d}^4x. \tag{80}$$

The terms S and $\overline{S}$ will give the source terms related to the populations of the two entities, while the terms $\mathcal{S}$ and $\overline{\mathcal{S}}$ will generate the interaction tensors. χ and $\bar{\chi}$ are the Einstein gravitational constants for each entity. g and $\bar{g}$ are the determinants of the metrics $g_{\mu\nu}$ and $\bar{g}_{\mu\nu}$. For $\kappa = \pm 1$, we apply the principle of least action. The Lagrangian derivation

[20] See Sect. 9 where this model is developped.

[21] Integration over $\mathscr{E}$ using the element d^4x is a method for computing the total action in the bimetric spacetime, reflecting the four-dimensional nature of this bimetric universe. This implies considering the entire spacetime as the domain of integration, integrating the contributions from each point to the action. The term d^4x represents an infinitesimal element of hypervolume of this bimetric spacetime, used to measure each segment during integration. Thus, it is a multiple volume integral performed over the four dimensions of spacetime, accumulating contributions to the total action from each four-dimensional volume segment corresponding to each metric.

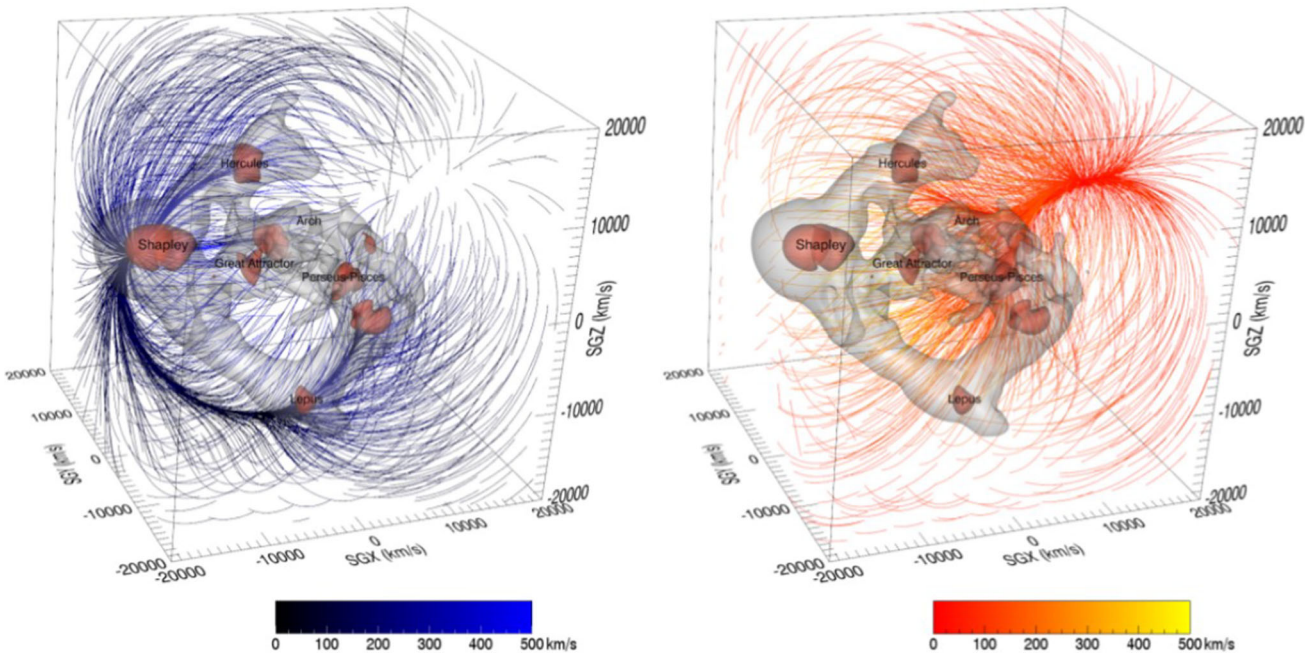


Fig. 9 Location of the dipole repeller within the large-scale structure of the universe [8]. The dipole repeller is a hypothesized region of space where galaxies are pushed away from, counteracting the attractive force of the Shapley Supercluster

of this action gives us:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta A, \\
&= \int_{\mathscr{E}} \delta\left(\frac{1}{2\chi}R + S + \mathcal{S}\right)\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}^4x \\
&\quad + \int_{\mathscr{E}} \delta\left(\frac{\kappa}{2\bar{\chi}}\overline{R} + \overline{S} + \overline{\mathcal{S}}\right)\sqrt{|\bar{g}|}\,\mathrm{d}^4x, \\
&= \int_{\mathscr{E}} \delta\left[\frac{1}{2\chi}\left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}S)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{S})}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}^4x \\
&\quad + \int_{\mathscr{E}} \delta\left[\frac{\kappa}{2\bar{\chi}}\left(\frac{\delta\overline{R}}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} + \frac{\overline{R}}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta\sqrt{|\bar{g}|}}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{S})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{\mathcal{S}})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}}\right]\delta\bar{g}^{\mu\nu}\sqrt{|\bar{g}|}\,\mathrm{d}^4x.
\end{aligned} \tag{81}$$

For any variation $\delta g^{\mu\nu}$ and $\delta\bar{g}^{\mu\nu}$, we locally obtain:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\chi}\left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}S)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{S})}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \\
&\frac{\kappa}{2\bar{\chi}}\left(\frac{\delta\overline{R}}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} + \frac{\overline{R}}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta\sqrt{|\bar{g}|}}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}}\right) + \frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{S})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{\mathcal{S}})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} = 0.
\end{aligned} \tag{82, 83}$$

Let us then introduce the following tensors:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}S)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}S, \tag{84}$$

$$\overline{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{S})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta\overline{S}}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} + \bar{g}_{\mu\nu}\overline{S}, \tag{85}$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{S})}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{86}$$

$$\overline{\mathcal{T}}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{\mathcal{S}})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}}. \tag{87}$$

We obtain then from Eqs. (86) and (87):

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{|\bar{g}|}{|g|}}\mathcal{T}_{\mu\nu} &= \sqrt{\frac{|\bar{g}|}{|g|}}\frac{-2}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{S})}{\delta g^{\mu\nu}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{S})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{S},
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{|g|}{|\bar{g}|}}\overline{\mathcal{T}}_{\mu\nu} &= \sqrt{\frac{|g|}{|\bar{g}|}}\frac{-2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{\mathcal{S}})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{\delta(\sqrt{|\bar{g}|}\overline{\mathcal{S}})}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta\overline{\mathcal{S}}}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}} + \bar{g}_{\mu\nu}\overline{\mathcal{S}}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Introduced into Eqs. (82) and (83), we can thus deduce the coupled field equations describing the system of the two entities. To obtain the desired interaction laws under the New-

tonian approximation, we must choose $\kappa = -1$. The system of equations then becomes:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi \left(T_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|\bar{g}|}{|g|}} \mathcal{T}_{\mu\nu} \right), \tag{90}$$

$$\overline{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \overline{R} = \kappa \bar{\chi} \left(\overline{T}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|g|}{|\bar{g}|}} \overline{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \right). \tag{91}$$

The tensor $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor, which represents the source of the field acting on positive mass entities and positive-energy photons. The term $\sqrt{\frac{|\bar{g}|}{|g|}}$ is the source of this field attributed to the action of negative masses on these positive masses. The tensor $\overline{T}_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor, which represents the source of the field acting on negative mass entities and negative-energy photons, and the term $\sqrt{\frac{|g|}{|\bar{g}|}}$ is the source of this field attributed to the action of positive masses on these negative masses. $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ and $\overline{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$ are the interaction tensors of the system of the two entities corresponding to the *"induced geometry"*, meaning how each matter distribution on one layer of the universe contributes to the geometry of the other.[22]

General relativity produces only a limited number of exact solutions. We will follow the same logic.

Having established the foundation of the Janus cosmological model, with its bimetric structure and the corresponding field equations, we turn to constructing explicit solutions under the assumption of homogeneity and isotropy. By considering the FLRW form for both metrics, we aim to derive a time-dependent solution that accounts for the interaction between positive and negative mass populations. The next section will focus on obtaining these solutions, exploring their compatibility with observational data, and providing a theoretical framework for the accelerated cosmic expansion.

10 Construction of a time-dependent, homogeneous and isotropic solution

Given the symmetry assumptions, the metrics then have the FLRW form. The variable x^0 is the common chronological coordinate (time marker).

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{d}x^{0^2} - a^2 \left[\frac{\mathrm{d}u^2}{1 - ku^2} + u^2 \mathrm{d}\theta^2 + u^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \right], \tag{92a}$$

$$\overline{g}_{\mu\nu} = \mathrm{d}x^{0^2} - \bar{a}^2 \left[\frac{\mathrm{d}u^2}{1 - \bar{k}u^2} + u^2 \mathrm{d}\theta^2 + u^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \right]. \tag{92b}$$

[22] Interaction between populations of positive and negative masses.

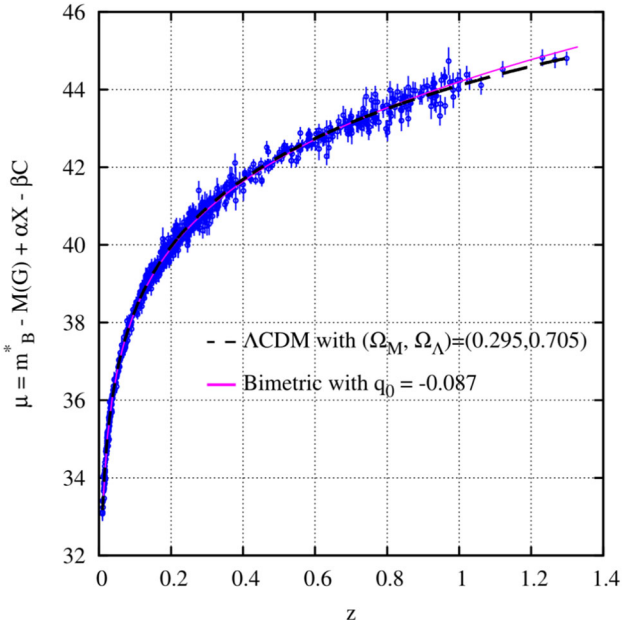


Fig. 10 Comparison of observed and theoretical magnitudes as a function of z redshift [4]

The determinants of the two metrics are

$$g = -a^6 \sin^2\theta, \qquad \bar{g} = -\bar{a}^6 \sin^2\theta. \tag{93}$$

As shown in reference [16] the treatment of the two equations leads to the compatibility relation:

$$\rho c^2 a^3 + \bar{\rho} \bar{c}^2 \bar{a}^3 = E = \mathrm{cst}. \tag{94}$$

This translates into conservation of energy, extended to both populations. The exact solution, referring to two dust universes, corresponds to:

$$k = \bar{k} = -1 \tag{95}$$

and:

$$a^2 \frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}x^{0^2}} = -\frac{4\pi G}{c^2} E, \tag{96a}$$

$$\bar{a}^2 \frac{\mathrm{d}^2 \bar{a}}{\mathrm{d}x^{0^2}} = +\frac{4\pi G}{\bar{c}^2} E. \tag{96b}$$

A theoretical model loses interest if it cannot be compared with observational data. The evolution of the positive species will correspond to an acceleration if the energy E of the system is negative. This provides a physical interpretation of the acceleration of the cosmic expansion [12,17], which then follows from the fact that the energy content is predominantly negative. Numerical data have been successfully compared with observational data [4]. The corresponding curve is shown in Fig. 10.

To complete the model, we now need to provide exact stationary solutions. We will restrict ourselves to $\mathfrak{so}(3)$ symmetry.

We now focus our attention on the interaction laws and their observational consequences. These interaction laws, derived from the coupled field equations of the Janus model, govern how positive and negative mass entities influence each other. The next section explores these laws in detail and examines how they provide explanations for various cosmological phenomena, including the formation of large-scale structures and the resolution of issues related to dark matter and dark energy.

11 Interaction laws and observational consequences

In the system of coupled field equations (**??**) and (**??**), the terms on the left-hand side involve the Ricci tensors $R_{\mu\nu}$ and $\overline{R}_{\mu\nu}$ and the corresponding Ricci scalars R and $\overline{R}$. These terms are calculated from the two metrics $g_{\mu\nu}$ and $\bar{g}_{\mu\nu}$. Using these two metrics, we then calculate the form of two operators known as *covariant derivatives* ∇_μ and $\overline{\nabla}_\mu$. It turns out that, due to their form, the two left-hand sides of both equations identically satisfy the following relation:

$$\nabla_\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0, \tag{97}$$

$$\overline{\nabla}_\mu \left(\overline{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overline{R} \bar{g}_{\mu\nu} \right) = 0. \tag{98}$$

The corresponding covariant derivatives of the two second members must therefore also be zero, which corresponds to the Bianchi identities, implying:

$$\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{99}$$

$$\overline{\nabla}_\mu \overline{T}_{\mu\nu} = 0. \tag{100}$$

We should also have:

$$\nabla_\mu \left[\sqrt{\frac{\bar{g}}{g}} \mathcal{T}_{\mu\nu} \right] = 0, \tag{101}$$

$$\overline{\nabla}_\mu \left[\sqrt{\frac{g}{\bar{g}}} \overline{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \right] = 0. \tag{102}$$

In stationary conditions, the square roots of the ratios of the determinants behave like constants, reflecting an *"apparent mass effect"*. Conditions (101) and (102) can therefore be replaced by:

$$\nabla_\mu \mathcal{T}_{\mu\nu} = 0, \tag{103}$$

and

$$\overline{\nabla}_\mu \overline{\mathcal{T}}_{\mu\nu} = 0. \tag{104}$$

Let's write the system of equations in mixed notation, replacing the square roots, which have become constant, by the positive constants b^2 and $\bar{b}^2$:

$$R^\nu_\mu - \frac{1}{2} R g^\nu_\mu = \chi \left[T^\nu_\mu + b^2 \mathcal{T}^\nu_\mu \right], \tag{105a}$$

$$\overline{R}^\nu_\mu - \frac{1}{2} \overline{R} \bar{g}^\nu_\mu = -\chi \left[\overline{T}^\nu_\mu + \bar{b}^2 \overline{\mathcal{T}}^\nu_\mu \right]. \tag{105b}$$

Using the Newtonian approximation, in both populations the non-zero tensor terms reduce to:

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \rho c^2 > 0 \qquad \mathcal{T}^0_0 = \bar{\rho} \bar{c}^2 < 0 \\ \overline{T}^0_0 &= \bar{\rho} \bar{c}^2 < 0 \qquad \overline{\mathcal{T}}^0_0 = \rho c^2 > 0. \end{aligned} \tag{106}$$

In our system of coupled field equations, the presence of a minus sign in front of the second member of the second equation gives the following interaction laws:

- Masses of the same sign attract each other;
- Masses of opposite signs repel each other.

We have thus eliminated the runaway effect.

The first conclusion to be drawn is that where one of the two types of mass is present, the other is absent, as immediately confirmed by simulations [14]. This is the case in the vicinity of the Sun, and under these conditions the first equation is identified with Einstein's 1915 equation. The model is therefore in line with all the classical local observational data of general relativity: Mercury's perihelion advance, deflection of light rays by the Sun. The model therefore does not invalidate that of general relativity, but presents itself as its extension, made essential to integrate the new observational data, which can no longer be managed by introducing the hypothetical components of dark matter and dark energy.

We have seen, in our construction of the unsteady solution, that negative energy dominates. The model is thus profoundly asymmetrical. The negative mass component is proposed as a substitute for the combined roles traditionally attributed to dark matter and dark energy. By the way, going back to the original idea, inspired by the work of Andreï Sakharov, this allows us to attribute a well-defined identity to these components. They are invisible, insofar as negative masses emit photons of negative energy that our optical instruments cannot capture. They are therefore simply copies of our own antimatter, assigned a negative mass. We then have a new distribution of contents (see Fig. 11).

At the moment of decoupling, when the gravitational instability can play its role (we must then speak of joint gravitational instabilities), the characteristic Jeans time is shorter for negative masses:

$$\bar{t}_\mathrm{J} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G |\bar{\rho}|}} \ll t_\mathrm{J} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho}}. \tag{107}$$

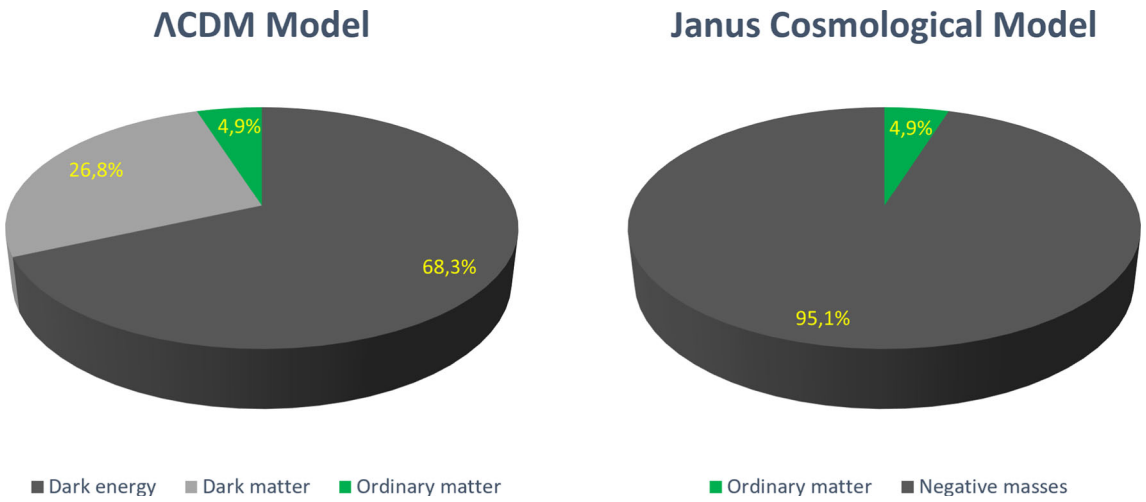


Fig. 11 Comparative contents of the ΛCDM and Janus models

The result will be a regular distribution of negative-mass conglomerates of spheroidal antihydrogen and negative-mass antihelium. These will behave like immense negative-mass protostars. As soon as their temperature causes hydrogen reionization, their contraction will cease. These formations will then radiate in the red and infrared wavelengths. But their cooling time is then large compared to the age of the universe, which means that these objects will no longer evolve. The history of this universe fold associated with negative masses is totally different from our universe fold of ordinary matter. It will not give rise to stars, galaxies or planets. It will contain no atoms heavier than negative-mass antihelium. And there will be no life. And, as we will see later: these negative formations are deliberately situated within the Newtonian approximation.

But there is another very important point. When these spheroidal conglomerates form, they confine the positive mass to the residual space, giving it a lacunar structure, comparable to joined soap bubbles. The positive mass is thus distributed in the form of thin plates, sandwiched between two negative conglomerates that exert a strong back pressure on it. The positive mass is thus violently compressed and heated. However, due to its plate-like arrangement, it can cool down very quickly through the emission of radiation (see Fig. 12).

The result is a pattern of first-generation star and galaxy formation totally different from the standard one. This configuration had been the subject of simulations [14] since the first, heuristic, approach to the model, and the fact that objects all form within the first hundred million years was one of its predictions, largely confirmed by JWST data.

The lacunar structure, advocated as early as 1995 [14], predicted the existence of large voids, which the discoveries of the dipole repeller and other similar large voids have also confirmed. Once this lacunar structure has been formed, matter tends to concentrate along the segments common to three gaps, forming filaments (see Fig. 13 on the next page). The nodes of this distribution will only develop into galaxy clusters.

After establishing the interaction laws and exploring their observational consequences, it is essential to verify the mathematical and physical consistency of the Janus model. This requires demonstrating that the system of coupled field equations respects the Bianchi identities and provides consistent solutions in the weak field limit. In the following section, we will examine the necessary conditions to ensure this consistency, particularly in regions dominated by ordinary matter, such as near the Sun, as well as in regions dominated by negative masses, such as near the dipole repeller.

12 The mathematical and physical consistency of the model

This is ensured in an isotropic, homogeneous and unsteady situation, the required condition being the generalized conservation of energy expressed by Eq. (94). We now turn to the case of stationary solutions, limiting ourselves to those that satisfy $\mathfrak{so}(3)$ symmetry. Bianchi identities must then be satisfied, i.e. relations (99), (100), (103) and (104).

First, we will show the existence of asymptotic consistency in Newtonian approximation situations. The key aspects of this approximation are as follows:

- Velocities must be negligible compared to the speed of light. This is the case for velocities $\langle v\rangle$ and $\langle \bar{v}\rangle$ of thermal agitation in both media, which are involved in the definition of pressures. After decoupling:

$$\varepsilon p = \frac{\varepsilon \rho \langle v\rangle}{3} \quad \text{and} \quad \varepsilon \bar{p} = \frac{\varepsilon \bar{\rho} \langle \bar{v}\rangle}{3}. \tag{108}$$

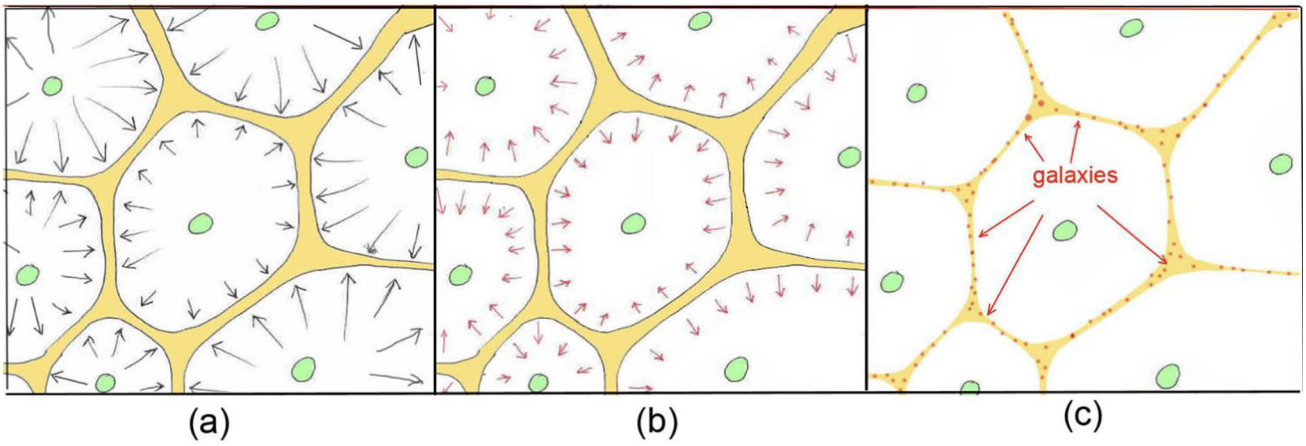
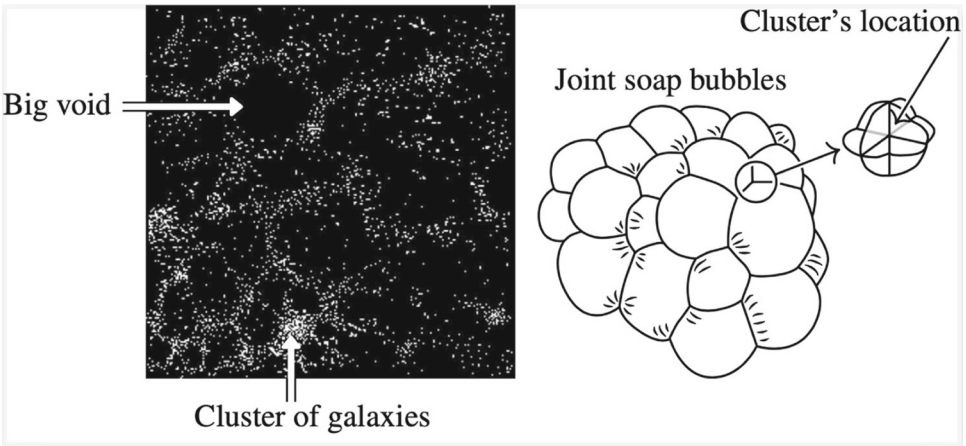


Fig. 12 Early rapid star and galaxy formation

Fig. 13 Structure of positive mass in contiguous bubbles



- Curvature effects must be neglected, meaning that the radial coordinate must be much larger than the characteristic length scale associated with curvature, i.e., the Schwarzschild radius.

12.1 Newtonian approximation of the field generated by a positive mass M

Let's introduce the Schwarzschild radius R_S as follows:

$$\varepsilon R_S = \varepsilon \frac{2GM}{c^2}, \tag{109}$$

where ε being a small parameter. $\mathfrak{so}(3)$ symmetry imposes the shapes of the two metrics:

$$ds^2 = e^{\nu} dx^{0^2} - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{110a}$$

$$d\bar{s}^2 = e^{\bar{\nu}} dx^{0^2} - e^{\bar{\lambda}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{110b}$$

The construction of a stationary solution then requires to calculate the functions:

$$\nu(r), \quad \lambda(r), \quad \bar{\nu}(r), \quad \text{and} \quad \bar{\lambda}(r). \tag{111}$$

To locate this solution, we need to consider the shapes of the field source tensors:

$$T_\mu^\nu, \quad \mathcal{T}_\mu^\nu, \quad \overline{T}_\mu^\nu, \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{T}}_\mu^\nu. \tag{112}$$

Let's start by considering a situation where only positive mass is present. The tensors $\mathcal{T}_\mu^\nu$ and $\overline{T}_\mu^\nu$ are then null and the two field equations (**??**) and (**??**) become in mixed-mode form:

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R = \chi T_\mu^\nu, \tag{113}$$

$$\overline{R}_\mu^\nu - \frac{1}{2} \bar{g}_\mu^\nu \overline{R} = -\bar{\chi} \sqrt{\frac{|g|}{|\bar{g}|}} \overline{\mathcal{T}}_\mu^\nu. \tag{114}$$

The form of the tensor T_μ^ν in its classical mixed-mode form is given by[23]:

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon p \end{pmatrix}. \tag{115}$$

[23] (13.1) p.425 of [1].

As we are in the Newtonian approximation, ε is very small. With the introduction of the metric (110a) and the tensor (115) in the first field equation, we are led to introduce the function $m(r)$ such that:

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies 2m(r) = r\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right). \tag{116}$$

Similarly to equation (14.18) from [1], the classic calculation leads to the relationship:

$$m(r) = \frac{G\rho}{c^2}\int_0^r 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{G}{c^2}. \tag{117}$$

We then obtain the classical Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) equation [11]. Relation (117) places the small quantity in front of any quantity that will be neglected in the Newtonian approximation:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{m + \frac{4\pi\varepsilon G p r^3}{c^4}}{r(r - 2m\varepsilon)}\left(\rho + \varepsilon\frac{p}{c^2}\right). \tag{118}$$

When ε tends to zero (or c tends to infinity) we get:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho m c^2}{r^2} = -\frac{G\rho}{r^2}\frac{4\pi r^3 \rho}{3}. \tag{119}$$

The quantity $\frac{4\pi r^3\rho}{3}$ represents the amount of matter $\mu(r)$ contained inside a sphere of radius r. We know that the force of gravity exerted inside a mass of constant density is equivalent to that exerted by the mass located at the center of the sphere, and that the mass located outside this sphere gives a force of zero. So the quantity $-\frac{G\rho\mu(r)}{r^2}$ is the force of gravity, per unit volume, acting on the matter contained in an elementary volume around a point at distance r from the center. Thus the relation (115), which follows from the Newtonian approximation, expresses that the force of gravity balances the force of pressure. This is the classic Euler relationship.

Hence, the Schwarzschild interior metric built is given by:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{r_n{}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} \\ &-r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right).\end{aligned} \tag{120}$$

This metric connects with the Schwarzschild exterior metric:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 \\ &\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right),\end{aligned} \tag{121}$$

where r_n is the radius of the star and $\hat{r}$ is a stellar constant as a function of its density ρ. It is the characteristic radius of a neutron star, defined under the assumption of constant density ρ. It establishes a critical threshold for the star's radius, beyond which the internal pressure becomes infinite at the center, indicating a physical singularity or instability. This radius is derived from the balance between gravitational forces and the internal pressure gradients within the star [10]. It is given by:

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}. \tag{122}$$

We can thus deduce, according to the classical theory of general relativity, that a particle of ordinary matter will undergo an attractive gravitational field due to the effect of a distribution of positive masses.

To ensure the mathematical consistency of the system of two field equations (113) and (114), we therefore need to consider a form of the tensor $\overline{\mathcal{T}}^{\nu}_{\mu}$ that gives back this same Euler relation when the Newtonian approximation is also applied to this solution. This is guaranteed with the form of the interaction tensor $\overline{\mathcal{T}}^{\nu}_{\mu}$ of the field equation (114) as this choice can stem from a Lagrangian derivation:

$$\overline{\mathcal{T}}^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\varepsilon p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\varepsilon p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\varepsilon p \end{pmatrix}. \tag{123}$$

On the right-hand side of the second field equation (114), the ratio of determinants will be considered almost unity insofar as we perform this calculation within the Newtonian approximation.

Then, if we consider that:

$$\sqrt{\frac{|g|}{|\bar{g}|}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{\nu}\mathrm{e}^{\lambda} r^4 \sin^2\theta}{\mathrm{e}^{\bar{\nu}}\mathrm{e}^{\bar{\lambda}} r^4 \sin^2\theta}} \approx 1, \tag{124}$$

the calculation leads to the Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) solution for the population of negative masses managed by the second field equation:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{m - \frac{4\pi\varepsilon G p r^3}{c^4}}{r(r + 2m\varepsilon)}\left(\rho - \varepsilon\frac{p}{c^2}\right). \tag{125}$$

The two solutions, (118) and (125), asymptotically approach the Euler equation in the Newtonian approximation as ε tends to zero. This also corresponds to the asymptotic satisfaction of the Bianchi identities in the same context[24].

Consequently, it is possible to build the Schwarzschild interior metric associated with the population of negative masses by applying the same calculation scheme as for the population of positive masses, thus constituting the solution

[24] The inequality $r \gg 2\,m$ (where m is often replaced by $\frac{GM}{c^2}$ to obtain a dimension of length, M being the mass of the object and G the gravitational constant) indicates that we are sufficiently far from the gravitational source for the effects of general relativity to be negligible. Indeed, at great distances, the length $\frac{2GM}{c^2}$ is completely negligible.

to the second field equation (114) as follows:

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1+\frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{126}$$

This metric must join the Schwarzschild exterior metric:

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2\mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{2GM}{c^2r}} - r^2 \times \left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{127}$$

We can deduce that a particle with negative mass will undergo a repulsive gravitational field due to the effect of a distribution of positive masses.

The Janus model presents a new paradigm, extending general relativity by describing the universe as a four-dimensional manifold M_4, endowed with two distinct metrics. These metrics are solutions to the system of coupled field equations (**??**) and (**??**).

Let's now consider the case, still in the Newtonian approximation, where the geometry is determined by the presence of negative mass, corresponding to regions of space dominated by negative masses, such as near the dipole repeller [8].

12.2 Newtonian approximation of the field generated by a negative mass $\bar{M}$

In regions where negative masses dominate, the system becomes in mixed-mode form:

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}g_\mu^\nu R = \chi\sqrt{\frac{|\bar{g}|}{|g|}}\mathcal{T}_\mu^\nu, \tag{128}$$

$$\overline{R}_\mu^\nu - \frac{1}{2}\bar{g}_\mu^\nu \overline{R} = -\bar{\chi}\overline{T}_\mu^\nu. \tag{129}$$

If we consider the impact of the presence of negative masses on the geometry of spacetime structured by the metric tensor of the first field equation (128) associated with the population of positive masses, we can define the corresponding interaction tensor (130) as follows:

$$\mathcal{T}_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\bar{c}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{p} \end{pmatrix}. \tag{130}$$

Thus, the impact of the pressure gradient of negative masses on the geodesics followed by ordinary matter and positive-energy photons according to the field equation (128) translates into the following Tolman–Oppenheimer–Volkoff equation:

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{m - \frac{4\pi G\bar{\rho}r^3}{\bar{c}^4}}{r(r+2m)}\left(\bar{\rho}-\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right). \tag{131}$$

Therefore, it is possible to build the Schwarzschild interior metric solution in this manner:

$$\mathrm{d}s^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1+\frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{132}$$

This metric can be connected to the Schwarzschild exterior metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2\mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{2GM}{c^2r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{133}$$

We can deduce that a particle of ordinary matter will undergo a repulsive gravitational field due to the effect of a distribution of negative masses.

Then, when the source of the gravitational field of the second field equation (129) is created by a negative mass, we can freely define the following energy-momentum tensor as follows:

$$\overline{T}_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\bar{c}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{p} \end{pmatrix}. \tag{134}$$

We can therefore deduce the following Tolman–Oppenheimer–Volkoff equation:

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{\overline{m} + \frac{4\pi G\bar{\rho}r^3}{\bar{c}^4}}{r(r-2\overline{m})}\left(\bar{\rho}+\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right). \tag{135}$$

Hence, the interior Schwarzschild metric can be constructed as follows:

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1-\frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{136}$$

This metric matches the exterior Schwarzschild metric:

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \left(1-\frac{2G\bar{M}}{\bar{c}^2r}\right)\bar{c}^2\mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2G\bar{M}}{\bar{c}^2r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{137}$$

We can deduce that a particle of negative mass will undergo an attractive gravitational field due to the effect of a distribution of negative masses.

Both solutions (131) and (135) reduces to the Euler equation approximately equal to $-\frac{G\bar{M}(r)\bar{\rho}(r)}{r^2}$ in the Newtonian limit, reflecting hydrostatic equilibrium.[25]

The form of these two source tensors satisfies the Bianchi identities. This would obviously not be the case if the negative mass were to fall outside of this framework. For that, there would need to exist neutron stars of negative mass. However, the characteristic time of evolution of conglomerates of negative mass, their *"cooling time"*, exceeds the age of the universe. These spheroidal conglomerates cannot evolve, so the content of this negative spacetime will be limited to a mixture of negative mass anti-hydrogen and anti-helium. Since nucleosynthesis cannot occur, there can be no anti-galaxies or anti-stars, regardless of their mass. Consequently, there cannot exist anti-neutron stars.

Moreover, in the case where this negative spacetime would generate hyperdense stars through an as-yet-unknown mechanism, it would then be necessary to reconsider the form of these tensors. However, the current configuration satisfies all currently available and potentially available observational data.

After verifying the mathematical and physical consistency of the Janus model, we now turn to its predictive capabilities. One of the most striking predictions concerns the existence of large voids and structures such as the dipole repeller. The Janus model not only accounts for these features but also offers novel predictions regarding the effect of negative gravitational lensing on the magnitudes of background sources. In the following short section, we explore the observational signatures of this phenomenon, with a particular focus on the implications for the dipole repeller.

13 Dipole repeller prediction

The Janus model is essentially falsifiable in Popper's sense. It predicted a large-scale twin structure with large voids. This has been confirmed [8]. It predicted a very early birth of first-generation stars and galaxies. A new prediction this time concerns the magnitude of sources located in the background of the large void. According to the model, the magnitude of the light emitted by these distant sources will be attenuated by the negative gravitational lensing effect. This is a novel aspect, since it has been assumed that the two entities, positive and negative, interact only through antigravitation. Photons from these distant sources can then freely pass through the negative-mass conglomerates. This means that both external and internal geodesics must be used. The deflection effect of light rays will be greatest when they graze the surface of the object, with radius $\bar{r}_0$. This effect weakens as you move deeper into the object, becoming zero when the photons pass through its center (see Fig. 8). Eventually, we will be able to map the magnitudes of objects in the background of the dipole repeller. Schematically, their luminosity will be attenuated in a ring-shaped pattern (see Fig. 14). This measurement will immediately give us the value of the radius $\bar{r}_0$ of this formation.

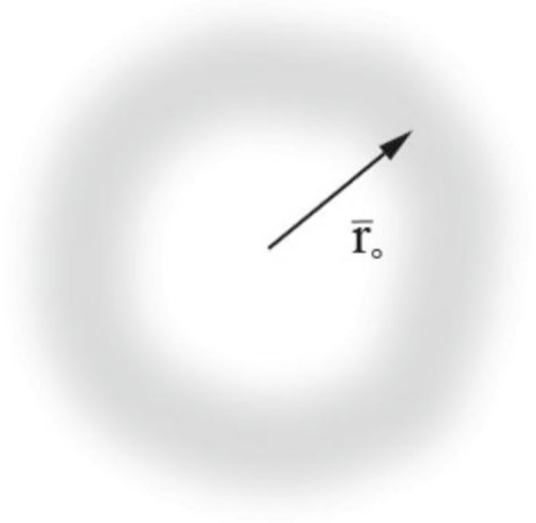


Fig. 14 Attenuation of the magnitude of objects in the background of the dipole repeller

After exploring the implications of the Janus model in the Newtonian approximation and its predictions for large-scale structures, such as the dipole repeller, we now move beyond these limitations. In a universe dominated by positive masses, certain astrophysical objects, such as neutron stars and supermassive black holes, exhibit strong gravitational effects that require a relativistic treatment. The following section addresses the challenges of extending the model to these extreme cases.

14 Beyond the Newtonian approximation

These objects are absent in the universe fold associated with negative masses. In our universe fold of ordinary matter, objects that deviate from the Newtonian approximation are neutron stars and hypermassive objects located at the center of galaxies, which early images show to be the seat of a strong gravitational redshift effect, darkening their central part. These objects are a priori manageable using the classic pair of outer and inner metrics, taking rotation into account. It should be remembered that we are under no obligation to

[25] Where the pressure at the center of this negative mass spheroid is balanced by the negative gravitational force depending on density and mass.

provide the form of the source tensor of the other sector, in this case an interaction tensor, whose form would be precisely imposed by the Bianchi identities. It is conceivable that one day someone will provide the exact form of this tensor.

But even in the absence of such an object, there is no a priori inconsistency.

15 Conclusion

The genesis of the Janus model spanned several decades. The starting point, in 1967, was Andreï Sakharov's attempt to provide an initial explanation for the absence of observations of primordial antimatter, which remains a significant flaw in the Standard Model ΛCDM. This model offers no explanation for the loss of half of the universe's content. Sakharov therefore proposed a universe structure with two sectors, the second being T-symmetrical to our own. A few years later, in 1970, through the application of symplectic geometry, mathematician Jean-Marie Souriau demonstrated that this inversion of the time coordinate, i.e., T-symmetry, is synonymous with the inversion of energy and mass. Pushing this idea of global symmetry further, Sakharov envisioned a twin universe that is CPT-symmetrical to ours. In this scenario, the invisible components of the universe reduce to negative-mass antimatter.

In 1994, we proposed that this universe structure corresponds to a two-fold cover of a projective $\mathbb{P}^4$, by a compact universe with the topology of a $\mathbb{S}^4$ sphere. The two singularities of this spherical universe, the Big Bang and the Big Crunch, then coincide. By introducing a tubular structure, these singularities disappear. This configuration consists of two PT-symmetrical folds. These adjacent sectors are assumed to interact solely through gravity. Therefore, the interaction between positive masses in one sector and negative masses in the other sector must be taken into account.

However, the introduction of negative masses is not feasible within the framework of general relativity, as it would result in interaction laws that are incompatible with known physical principles. Thus, a bimetric model is proposed. A system of coupled field equations is then constructed from an action, whose form eliminates the problematic runaway effect. The interaction laws in the model dictate that masses of the same sign attract each other according to Newton's law, while masses of opposite signs repel each other following an anti-Newtonian law. Since these masses are mutually exclusive, the negative mass can be neglected in the vicinity of the Sun, and the first field equation then aligns with Einstein's equation.

In this way, the model remains consistent with local relativistic observations, such as the advance of Mercury's perihelion and the deflection of light by the Sun. Therefore, the Janus model can be considered an extension of general relativity. An exact, time-dependent solution is constructed, revealing a generalized energy conservation law that applies to both sectors. When adapting the model to observations, it becomes evident that an accelerating expansion is present, imposing a fundamental dissymmetry between the two entities involved.

In this framework, the vast majority of negative mass replaces the hypothetical components of dark matter and dark energy. As a result, the matter distribution is approximately 5% visible matter and 95% negative mass, which is invisible because it emits photons of negative energy that elude detection by our observation instruments. This dissymmetry implies that, following decoupling, the negative masses form a regular network of spheroidal conglomerates, while the positive mass, confined to the remaining space, adopts a patchy distribution.

The model also accounts for the existence of large voids, with the dipole repeller being the first identified among them. At the centers of these large voids are invisible spheroidal conglomerates that behave like giant protostars, with cooling times exceeding the age of the universe. These objects, which emit negative-energy photons corresponding to light in the red and infrared regions, do not evolve and do not give rise to stars, galaxies, or atoms heavier than helium. Life, therefore, is absent from this negative sector, which consists of a mixture of negative-mass antihydrogen and antihelium.

Furthermore, the model explains the very early formation of first-generation stars and galaxies, as recently demonstrated by the James Webb Space Telescope. We then examine the issue of the model's mathematical consistency, specifically whether the Bianchi identities are satisfied. We show that they can be asymptotically satisfied under conditions corresponding to the Newtonian approximation.

Lastly, we address the question of objects that do not fit within this approximation, primarily located on the positive-mass side. We assert that we are not required to provide the exact form of the interaction tensor in such cases, as it is determined by the zero-divergence condition. The lack of definition of this tensor does not invalidate the consistency of a non-linear solution.

Author contributions JPP designed the model, developed the theoretical formalism, drafted the manuscript and prepared the figures. FM managed the submission and peer-review process. HZ corrected many typos from the draft and improved the layout of the manuscript.

Data Availability Statement My manuscript has no associated data. [Authors' comment: This is a theoretical study and no experimental data has been listed.]

Code Availability Statement My manuscript has no associated code/software. [Authors' comment: Code/Software sharing not applicable to this article as no code/software was generated or analysed during the current study.]

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.
Funded by SCOAP[3].

References

1. R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to General Relativity* (McGraw-Hill, New York, 1975)
2. H. Bondi, Negative mass in general relativity. Rev. Mod. Phys. **29**(3), 423–428 (1957). https://doi.org/10.1103/RevModPhys.29.423
3. W. Boy, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Mathematische Annalen **57**(2), 151–184 (1903). https://doi.org/10.1007/BF01444342
4. G. D'Agostini, J.-P. Petit, Constraints on Janus cosmological model from recent observations of supernovae type Ia. Astrophys. Space Sci. **363**(7), 139 (2018). https://doi.org/10.1007/s10509-018-3365-3
5. P.A.M. Dirac, The quantum theory of the electron. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A Contain. Pap. Math. Phys. Character **117**(778), 610–624 (1928)
6. L. Ferreira et al., Panic! at the disks: first rest-frame optical observations of galaxy structure at $z>3$ with JWST in the SMACS 0723 field. Astrophys. J. Lett. **938**(1), L2 (2022). https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac947c
7. R.P. Feynman, The theory of positrons. Phys. Rev. **76**, 749–759 (1949). https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.749
8. Y. Hoffman, D. Pomarède, R.B. Tully, H.M. Courtois, The dipole repeller. Nat. Astron. **1**(2), 0036 (2017). https://doi.org/10.1038/s41550-016-0036
9. R. Kerner, Generalization of the Kaluza–Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group. Annales de l'institut Henri Poincaré Sect. A Physique Théorique **9**(2), 143–152 (1968). http://www.numdam.org/item/AIHPA_1968__9_2_143_0/
10. P. Koiran et al., PT-symmetry in one-way wormholes. Ann. Phys. (2024). https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169765. arXiv:2409.02951 [gr-qc]. ISSN: 0003-4916
11. J.R. Oppenheimer, H. Snyder, On continued gravitational contraction. Phys. Rev. **56**(5), 455–459 (1939)
12. S. Perlmutter et al., Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. Astrophys. J. **517**(2), 565–586 (1999). https://doi.org/10.1086/307221
13. J.-P. Petit, The missing-mass problem. Nuovo Cimento B Serie **109**(7), 697–709 (1994). https://doi.org/10.1007/BF02722527
14. J.-P. Petit, Twin universes cosmology. Astrophys. Space Sci. **226**(2), 273–307 (1995). https://doi.org/10.1007/BF00627375
15. J.-P. Petit, *Topo The World (The Adventures of Archibald Higgins)*
16. J.-P. Petit, G. D'Agostini, Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophys. Space Sci. **354**(2), 611–615 (2014). https://doi.org/10.1007/s10509-014-2106-5
17. A.G. Riess et al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. Astron. J. **116**(3), 1009–1038 (1998). https://doi.org/10.1086/300499
18. A.D. Sakharov, Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe. ZhETF Pisma Redaktsiiu **5**, 32 (1967)
19. A.D. Sakharov, Baryon asymmetry of the universe. Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **76**, 1172–1181 (1979)
20. A.D. Sakharov, Cosmological models of the universe with reversal of time arrow. Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **79**, 689–693 (1980)
21. G. de Saxcé, Which symmetry group for elementary particles with an electric charge today and in the past?. (2024). arXiv:2403.14846 [math-ph]
22. G. de Saxcé, C.-M. Marle, Presentation of Jean-Marie Souriau's book "Structure des systèmes dynamiques". (2023). arXiv:2306.03106 [math.DS]
23. J.-M. Souriau, *Géométrie et Relativité* (Hermann, Paris, 1964)
24. J.-M. Souriau, Structure des systè mes dynamiques: maîtrises de mathématiques. Collection Dunod Université. Dunod. (1970). ISSN: 9782040107529

Après cela on trouvera une suite d'articles qui constitue le résultat d'un examen extrêmement poussé, concernant les bases mathématique et géométriques du modèle du trou noir. Ce sont :

- J-P. Petit, G.D'Agostini. Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Hole Model. Part I . Journal of Modern Physics, 2026 Vol. 17, N°2. 3223 views. 423 downloads Cite 4 fois.

- J-P Petit, G. D'Agostini, J-M Pechinot : The True Schwarzschild solution and its subsequent geometry. Journal of Modern Physics. 2026, 17(8), 997-1027. https://content.scirp.org/pdf/jmp_7506149.pdf Août 2026 31 downloads 329 views cité 2 fois.

- J-P Petit. Kruskal coordinates, semi-complex extension of spacetime. Journal of Modern Physics, 2026. 17(9), 1197-1128 39 downloads 197 views

- J-P Petit. Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Holet Model. Journal of Modern Physics. Part II 2026. A paraître.

Ces articles ne sont lisibles que par des mathématiciens-géomètres, ou d's spécialistes de relativité générale ayant mis à jour leurs connaissances en géométrie. Nous allons cependant tente d'évoquer le contenu. C'est une question centrale de l'histoire des sciences.

En 1905, Einstein pose le principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide, identique pour tous les observateurs inertiels. Associé au principe de relativité, ce postulat conduit aux transformations de Lorentz et bouleverse les conceptions classiques de l'espace et du temps.

Cette révolution trouve son expression géométrique dans la célèbre conférence de Hermann Minkowski, *Raum und Zeit* (L'espace et le temps), prononcée à Cologne le 21 septembre 1908 et publiée en 1909.

Minkowski réunit l'espace et le temps dans une même entité géométrique à quatre dimensions : l'espace-temps. Mais il meurt prématurément, le 12 janvier 1909, à 44 ans, des suites d'une rupture de l'appendice.

Sa géométrie est caractérisée par l'élément d'intervalle invariant, qui s'écrit :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \geq 0$$

L'élément de longueur définit l'élément du temps propre.

En 1915, du 28 juin au 5 juillet, Einstein donne à Göttingen une série de six conférences consacrées à sa théorie de la gravitation, alors encore en cours d'élaboration.

Ces conférences suscitent un vif intérêt chez le grand mathématicien David Hilbert, déjà célèbre pour ses travaux sur les fondements des mathématiques et de la géométrie.

La recherche d'une formulation géométrique et variationnelle des lois physiques s'inscrit alors dans une tradition bien plus ancienne.

Au XVIIIe siècle, Euler et Lagrange avaient développé les méthodes du calcul des variations, permettant de déduire les équations du mouvement d'un principe d'action stationnaire.

Au XIXe siècle, Hamilton et Jacobi avaient approfondi cette approche, tandis que Riemann avait introduit, en 1854, une conception générale des espaces courbes, caractérisés par la donnée locale d'une forme quadratique différentielle.

Plus récemment, Gustav Mie avait proposé, en 1912-1913, une théorie électromagnétique de la matière fondée sur un principe variationnel.

Einstein et Hilbert sont alors engagés dans une même recherche, celle des équations du champ gravitationnel, qui deviendront le fondement de la relativité générale. Mais ils abordent cette question selon deux stratégies profondément différentes.

Einstein part d'exigences physiques : le principe d'équivalence, la covariance des équations et la nécessité de retrouver la gravitation newtonienne dans l'approximation des champs faibles. Son ami Marcel Grossmann l'initie au calcul tensoriel, lui donnant accès aux outils de la géométrie différentielle. Einstein cherche ainsi à construire le membre géométrique d'une équation dont le second membre doit décrire les sources matérielles du champ gravitationnel, représentées par le tenseur énergie-impulsion.

Hilbert adopte une démarche différente. Prolongeant l'approche variationnelle de Gustav Mie, il construit une action associant le scalaire de courbure de Ricci à un lagrangien décrivant la matière et l'électromagnétisme. La variation de cette action par rapport aux composantes de la métrique fournit les équations gravitationnelles, avec une contribution géométrique et une contribution physique.

Le contraste est donc frappant. Einstein cherche la structure géométrique capable de représenter une physique dont il connaît les exigences fondamentales. Hilbert cherche à faire émerger les équations de cette physique d'un principe variationnel unique.

Le génie d'Einstein réside dans une intuition physique hors du commun. Là où Hilbert privilégie la puissance et la cohérence des constructions mathématiques, Einstein cherche d'abord à saisir, derrière les phénomènes observables, les principes physiques fondamentaux. Ce sont deux formes de créativité scientifique, mais c'est l'intuition physique d'Einstein qui constitue le moteur initial de la révolution relativiste.

En novembre 1915 tous deux construisent pratiquement simultanément l’équation de champ.

Introduisons la traduction d’aujourd’hui de deux qualificatifs d’espace définis par des formes bilinéaires $g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$.

Dans un espace Riemanien les ont tous le même signe. Un espace pseudo-Euclidien : tous les signes sont positifs. C’esdt Euclide plus de la courbure.

Dans un espace Lorentzien un des signes est différents de tous les autres. On peut désigner par « Minkowskien un espace de signature (+ - - -)

En 1915-1916, chez Einstein Schwarzschild, Droste, Weyl, Flamm, Lorent la cosmologie est « Minkowskienne »

Mais Hilbert pense et écrit de le cosmos a une géométrie « pseudo euclienne » avec que des plus, mais dans laquelle une des coordonnées, la quatrième, est imaginaire pure.

Pendant des décennies, la définitions restent entachées d'un certain flou. Avant Hilbert c'était la signature Minkowskienne (+ - - -). C'est à Hilbert qui, par la prégnance qu'exerce sur lui l'Euclidien, que nous devons la passage à la signature (- + + +) et l'émergence des "trajectoires su genre temps". On abandonne une forme de "principe de réalité", implicitement suivi par les autres (coordonnées réelles et longueur réelle).

Second point : Schwarzschild n'exprime pas sa solution à l'aide de ses coordonnées initiales, réelles et de leur variantes, polaires :

$$(t, x, y, z) \longrightarrow (t, r, \theta, \varphi) \quad r = \sqrt{x^2 + z^2 + z^2}$$

Mais utilise une « grandeur intermédiaire et des coordonnées :

$$(t, R, \theta, \varphi) \leftarrow R = \left(r^3 + {R_s}^3\right)^{1/3} \geq R_s$$

Sa solution est donc :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)c^2dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

Premier acte : Par la suite de la popularisation de cette géométrisation relativiste de l'astrophysique et de la cosmologie, principalement due aux ouvrages en anglais d'Arthur Eddington en1923[63] et de Richard Tolman en 1934[64] on perd de vue cette distinction et s'impose une expression standard de la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Second acte : Cette position se trouve renforcée par le calcul de Hilbert[65] ou, confrontée au terme de la métrique, selon la façon dont il l'introduit, il effectue la « simplification[66] »

$$G(r)\,(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2)\; plus\; G(r) \approx r^2 \longrightarrow r^2\,(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

---

[63] A.Eddington. http://www.jp-petit.org/books/#1923-Eddington.pdf

[64] R.C.Tolman : Relativity, Thermodynamics and Cosmology. In England, 1946 :Oxford at the Clarendon Press, First Edition :1934. http://www.jp-petit.org/books/1934-Tolman.pdf

[65] D.Hilbert. The foundations of Physics (second communication). English translation. Boston Series in Philosophy and Science. Copyright Springer, Vol.250 2007
https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4020-4000-9_45
http://www.jp-petit.org/papes/cosmo/1916-Hilbert-en.pdf

[66] Compréhensible en tant qu'approximation physique

Sans se rendre compte que c'est strictement équivalent à :

$$r \longrightarrow R = (r^2 + \alpha^3)^3$$

En 1989, soixante-treize ans plus tard, le mathématicien Abrams s'en apercevra et le signalera[67] dans un article qui passera totalement inaperçu (c'est déjà trop tard) .

Troisième acte : 1939 : Oppenheimer et Snyder[68] se basent sur les valeurs infinies des temps de chute libre et d'évasion de particules témoin pour proposer d'utiliser la solution stationnaire de Schwarzschild pour décrire un corps d'étoile en implosion rapide. On est juste avant le lever de rideau de cette pièces « The Black Hole ».

Quatrième Acte : John Archibald Wheeler, en poste à l'intitut des Etudes Acancées de Princeton, où il côtoie Einstein, éalement membre de ce prestifieux IAS est à la recherche d'une description d'un tel « objet » quand $0 \leq r \leq \alpha$. Donc « à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild ». En 1947 L'irlandais Synge propose de passer, à partir de la formulation « standard » de la métrique de Schwarzschild, des coordonnées (t , r) à des coordonnées (u , v) réelles. Il est le premier à en proposer la forme, pour r > αet pour r < α. Il est aussi le premier à publier ce qu'on nommera plus tard « le diagramme de Kruskal »[69]. En 1960 le Hongrois G.Szekeres donne aussi la forme de ces coordonnées à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild[70]. Le jeune mathématicien M.Kruskal, qui travaille dans le laboratoire de physique des plasma de Princeton, prend connaissance de tous ces éléments. Il rencontre A.Wheeler en 1959 à la cafeteria de Princeton qui lui communique ces éléments, sur une serviette en papier fournie par un serveur. Wheeler part à un colloque de cosmologie qui se tient en France, à Royaumont. Là-bas ilui smble enfin faire la lumière sur cette histoire de coordonnées réelles, permettant de pénétrer à l'intérieure de la sphère de Schwarzschild.

De retour à Princeton il rédige un article intitulé :

Maximal extension of Schwarzschild metric

Il l'envoie à la revue Physical Review en mettant Martin Kruskal comme unique auteur. Ce dernier découvre l'existence de cet article, dont il n'a pas écrit un mot, quand l'éditeur lui envoie les épreuves pour obtenir le bon à tirer !

---

[67] L.S.Abrams : Black Hole : the Legacy of Hilbert's Errror. Can. Jr. Phys. **67** , 9191 (1989es tv13 feb 2001 (le trou noir, heritage de l'erreir de Hilbert.

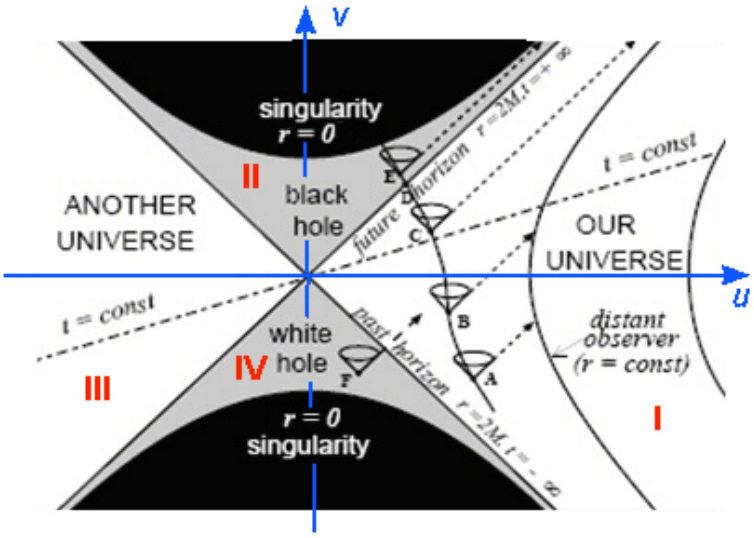
[68] J.R.Oppenheimer and H.Snyder : On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. Vol. 56 pp 455-459 sept 1939 https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.56.455
http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1939-Oppenheimer-Snyder.pdf

[69] J.L.Synge. The Gravitational Field of a Particle. Proceedings of the Irish Academy, Section A, Mathematical andPhysical Science, 53, pp. 83-114 (1950)
https://www.jstor.org/stable/ffd0dec8-d9d5-3ebf-a636-e9299aa13403?googleloggedin=true&seq=1#page_scan_tab_contents

[70] G.Szekeres. On the singularities of a Riemanian manifold. Publicationes Mathematicae Debrecen 7, 285 (1960). http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/1960-Szekeres.pdf

Il se rend chez Wheeler pour lui demander des explications et lui demande, pour le moins, de cosigner l'article. Wheeler lui répond que lui seul doit signer. Il arrive à le convaincre, Kruskal signe et l'article parait[71].

Kruskal devient ainsi « célèbre margré lui ». En effet son nom sera cité un nombre incalculable de fois pour « les coordonnées de Kruskal-Szekeres » et surtout pour « le diagramme de Kruskal », en n'étant l'auteur, ni des unes, ni de l'autre. Mais, après avoir signé, il retourne à ses travaux de physique des plasmas et ne portera plus le moins intérêt à la cosmologie et à ce que J.A.Wheeler qualifie désormais de « Black Holes », de trou noirs.



Le « diagramme de Kruskal »
En noir, la région « qui n'appartient pas à la physique » ($r < 0$)

Un document sans doute très peu connu :

[71] M.D. Kruskal : Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys. Rev. 119, 1734 (1° sept 1960).http://www.jp-oetit.org/papers/cosmo/1960-Kruskal.pdf

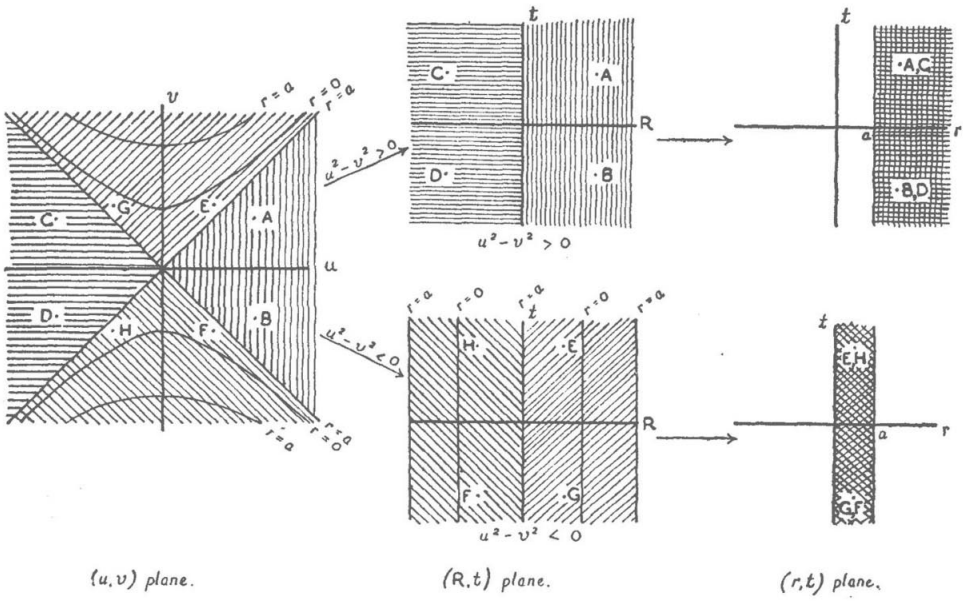


FIG. 8.—Mapping $(u, v) \longleftrightarrow (R, t) \longleftrightarrow (r, t)$, by (4.4).

The plane (u, v) is mapped twice on the plane (R, t).

(top right): The quadrant $u^2 - v^2 > 0$, $u > 0$ is mapped uniquely on $r > a$, and so is the quadrant $u^2 - v^2 > 0$, $u < 0$.

(bottom right): The pair of quadrants $u^2 - v^2 < 0$ is mapped infinitely often on the strip $0 < r < a$, each curvilinear strip in the (u, v) plane corresponding to the straight strip in the (r, t) plane.

Le même diagramme, issu de l'article de Synge (1949)

Le spécialiste remarquera que Synge intègre dans sa description la partie représentée en noir, dans le diagramme précédent, « exclue de la physique » et qui représente des valeurs où la « coordonnée radiale » *r* devient …. négative. Ci-après, la planche détaillant cette région :

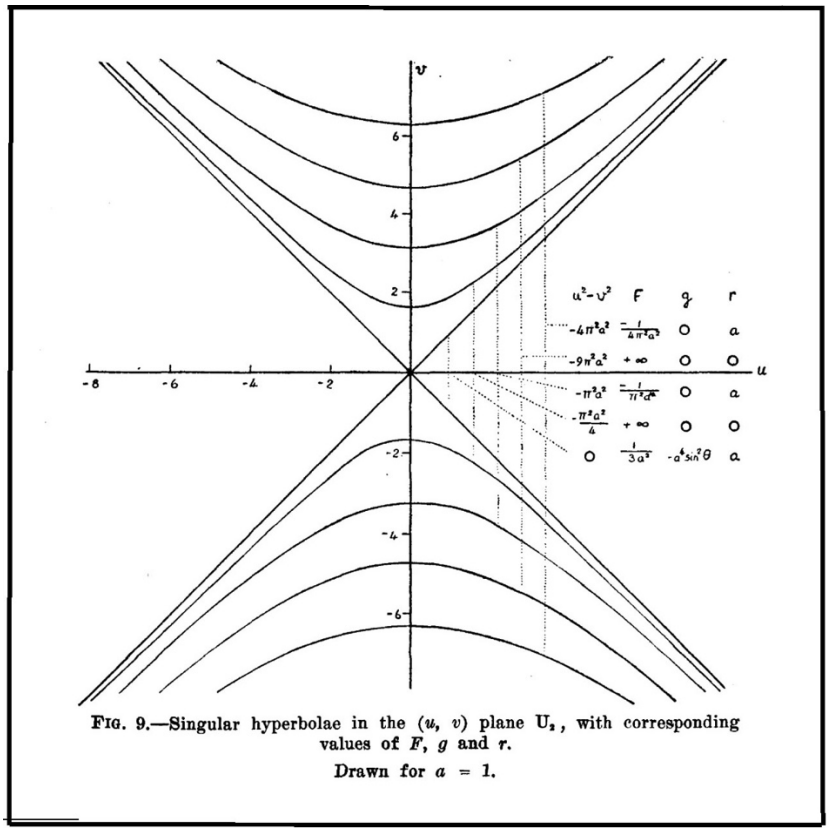


FIG. 9.—Singular hyperbolae in the (u, v) plane U_2, with corresponding values of F, g and r.
Drawn for $a = 1$.

La région « noire », admise par Synge

Or, rappelons que :

$$r = \sqrt{x^2 + y + z^2}$$

Si on admet que r soit négatif, il n'existe aucune valeurs complexes de x, y, z qui satisfasse cette équation. Pour ce faire il faut aller jusqu'à « bricoler » la définition même de cette « coordonnée radiale », en passant à :

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y + z^2}$$

Pourquoi pas ? Mais alors … où est la physique dans tout cela ?

Il reste un mystère : comment parvient-on, par quel changement de variable magique, parvient-on à décrire l'intérieur de cette sphère avec des coordonnées réelles u et v, alors que, topologiquement, cette partie de l'objet géométrique sort du domaine réel ?

Au fil des années des « solutions » se font jour, où toujours on remplace, opportunément, des quantités algébriques posant problème comme

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \quad when\ r < \alpha \quad \text{remplacé par} \quad \sqrt{\left|1 - \frac{\alpha}{r}\right|}$$

$$log\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) when\ r<\alpha \quad \text{remplacé par} \quad log\left|1-\frac{\alpha}{r}\right|$$

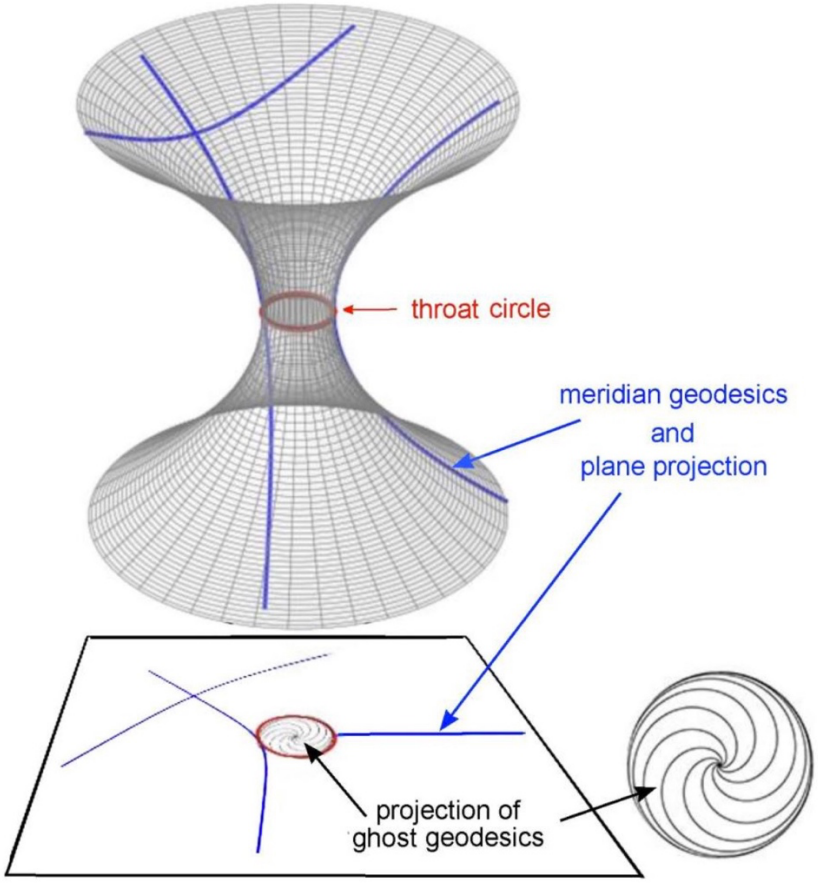
Dans l'article[72] :

J-P Petit. Kruskal coordinates, semi-complex spacetime expansion. Journal of Modern Physics. 2026 17(9), 1197-1228 https://doi.org/10.4236/jmp.2026.179053

Nous montrons que cet artifice cache l'extension de l'objet géométrique au-delà du monde réel. De la même façon qu'il est mathématiquement possible de s'aventurer en dehors de la surface de Flamm, topologiquement équivalente à l'hypersurface représentant la géométrie associée à la solution de Schwarzschild. Mais… on sort du monde réel pour l'aventurer dans le … monde imaginaire.

L'ensemble des articles publiés sur ce thème est repris dans ce long papier de synthèse, abondamment illustré[73]. Faisant suite à un premier article, publié quelques mois auparavant[74].

[72] http://www.jp-petit.org.papers/cosmo/2026-JMP-Petit-Kruskal-coordnates-semi-complex-extension-ofspacetime.pdf
[73] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2026-JMP-Petit-Physical-and-Geometrical-Inconsistency-of-the-Black-Hole-Model.PartII. pdf
[74] http://www.sp-petit.org/papers/cosmo/2026-JMP-Petit-Physical and Geometrical Inconcistency of the Black Hole Model. Part I. Pdf



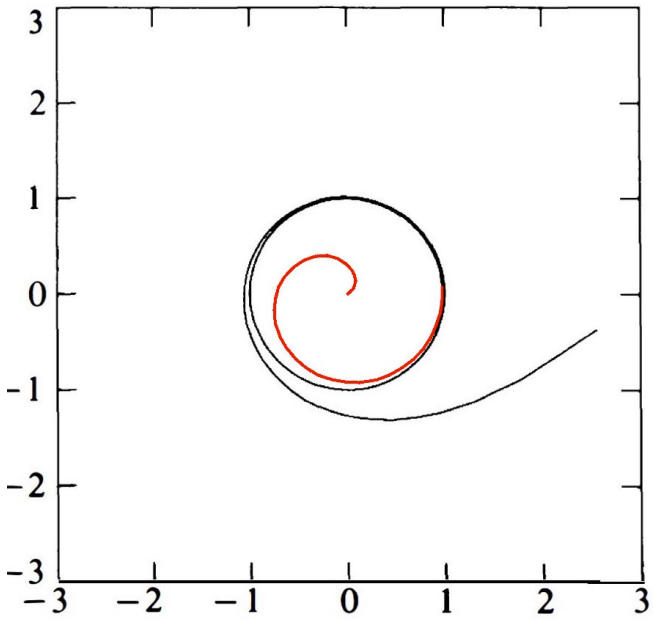
Extension semi-complexe de la surface de Flamm

Quand on regarde la figure ci-dessus, Les objets « habitent » dans un espace tridimensionnel (par ailleurs euclidien). Les courbes bleues inscrites sur cette surface de forme de « diabolo » (une « surface de Flamm ») sont réelles et se projettent sur le plan selon des courbes noires. Si ces courbes bleues ne pénètrent pas « à l'intérieur du diabolo », leurs projections ne pénètre pas à l'intérieur du cercle, projection du cercle de gorge de cette surface de Flamm.

Mais l'outil mathématique qui permet de construire ces « géodésiques » (les « équations de Lagrange ») produit aussi des « ghost geodesics », des géodésiques-fa,tômes, qui habitent dans un espace tridimensionnel « semi-complexe » (x , y , ζ) , où la troisième dimension, représentée par la lettre Grecque ζ, est « imaginaire pure ».

Véritable « diablerie mathématique » ces courbes 3D qui ne sont « qu'à moitié réelles » se projettent selon de belles courbes, bien réelles, mais « fantomatiques », inscrites sur le plan de projection, spiralant jusqu'à « une singularité centrale ».

Ainsi, lorsque le mathématicien en prix Nobel de Physique S.Chandrasekar[75] construit les trajectoires suivies par des masses « pénétrant à l'intérieur de de la sphère de Schwarzschild » à « l'intérieur du trou noir », en spiralant, ces courbes n'appartiennent pas au monde réel ! ». Mais personne ne s'en est aperçu. Ces courbes ne sont que … semi-réelles.



Chandrasekhar, 1992, Mathématique des Trous Noirs.
Trajectoire d'une masse tombant, à l'intérieur d'un trou noir
vers la « singularité centrale »

Pour illustrer cette « physique fantomatique » on a construit dans l'article[76], les projection de ce « géodésiques fantômes du Tore», issues des équations (de Lagrange), courbes «moitié réelles- moitié imaginaires » qui donne également des projections planes sous forme de courbes spiralant jusqu'à rejoindre « l'axe du tore ».

[75] S.Chandrasekhar :The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford University Press 1992.
http://www.jp-petit.org/books/1992-Chandrasekhar.pdf
[76] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2026-Kruskal-coordinates-semi-complex-spacetime-extension.pdf

Mathematical and geometrical Inconsistency of the black hole model. Part ll

Jean-Pierre Petit[1] Gilles d'Agostini

Keywords : virtual geodesics, Lagrangian, Flamm surface, Schwarzschild exterior solution, virtual geodesics, signature.

Abstract : Complementing a previous article, this second part shows that the spiral curves at the center of black holes are merely virtual geodesics, devoid of any physical reality. As an example, these virtual geodesics are constructed for the torus and the sphere. It is suggested that the generalization of the signature (- + + + +), exempt from any ontological justification in cosmology, stems from Hilbert's erroneous interpretation of Schwarzschild's solution in his 1916 article.

1 - **Introduction**.

The evolution of the geometric context of physics, astrophysics, and cosmology was driven by the changing understanding of the nature of light among scientists. In 1690, the Dutchman Christiaan Huygens was the first to attempt to identify light as a wave, without relying on experimental confirmation. He suggested that this wave propagated in a kind of universal, rigid medium: the ether, which would fill all of space and remain constant. In 1704, the Englishman Isaac Newton [2] introduced the idea of a corpuscular nature of light, which dominated for a century, until 1802, when his compatriot Thomas Young, with his slit experiment [3], demonstrated an interference phenomenon, which immediately revived a wave interpretation. In 1814, the German Joseph Fraunhofer demonstrated [4]. The fact that light emitted by heated bodies passing through a prism is distributed according to a spectrum made up of lines. In 1819, the Frenchman Augustin Fresnel published a complete theory of interference and diffraction [5]. In 1838, using the parallax method, the German Friedrich Bessel obtained the first estimate of the distance to a star [6]. The measurement of the distance to light was then added to that of light sources. In 1842, the Austrian Christian Doppler introduced [7] the idea that the color of light could depend on the radial component of the source's velocity relative to the observer. In 1845, the Dutchman Christophorus Buys Ballot set up an experiment to confirm Doppler's idea in air [8]. Musicians were placed aboard a train traveling at 40 km/h. The pitch of the sound from their instrument is compared to that of a tuning fork, manipulated by stationary observers. When the train moves away, the sound is lower. When it approaches, the sound is higher. In 1848, the Frenchman Hippolyte Fizeau gave substance to this idea in a theoretical form [9]. Subsequently, in 1865, the Scotsman James Clerk Maxwell identified light as an electromagnetic wave [8]. In 1868, the Englishman William Huggins demonstrated the relative motion of stars by comparing two spectra of the same type [10]. From this, he deduced the value of the difference in the relative velocities of these stars with respect to the Earth. Astronomers thus acquired, after photometric and distance measurements, a third element of measurement: that of the relative radial velocity.

[1] Jean-pierre.petit@manaty.net

At this stage, it doesn't occur to anyone that the universe could evolve. Light is therefore a wave that affects the ether, fundamentally underlying, invisible, assumed to be homogeneous, isotropic, but inaccessible to observation. Measurements are taken from the Earth, which moves around the Sun. As for the speed of light, it was first estimated in 1676 by the Dane Ole Rømer, then refined in 1728 by the Englishman James Bradley, in 1849 by the Frenchman Hippolyte Fizeau, and finally in 1862 by the Frenchman Léon Foucault. In 1881, the American Abraham Michelson conceived an experiment [12] intended to measure the speed of the Earth relative to the ether, a priori fundamentally immobile, within which all objects in the cosmos are supposed to move. But the sensitivity remained insufficient to draw a conclusion, and it was by repeating the experiment in 1887 with the American Edward Morley that the result was obtained [12]. And then, a dramatic turn of events: this speed maintained a constant value regardless of the direction considered.

In 1894, the Dutchman Hendrik Antoon Lorentz considered a solution to save both the ether and Maxwell's equations, which contain two parameters, ε_0 and μ_0, from which the speed of light, identified as an electromagnetic wave, is deduced at the speed $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. He considered that motion alters the functioning of the measuring instrument. He began by considering a contraction of lengths [14]. Then, in 1895, an alteration of time [15]. These two elements were combined in 1904 in an article where Lorentz presented his famous transformations [16]. Poincaré immediately identified a group structure in these transformations, an idea he presented in 1905 in a lecture given in Palermo [17]. From the outset he associated spatio-temporal translations with this Lorentz group, which gave birth to the group that would bear his name.

In 1905, Einstein's interpretation was conceptually different [18]. He showed that recourse to the ether was no longer necessary. Instead of proposing transformations to acrobatically salvage both Maxwell's equations and the concept of the ether, which disappeared, he manipulated "inertial frames of reference" and presented a kinematic vision based on two principles: relativity and the invariance of the speed of light. But while Einstein's vision accounted for the measurements, he did not, at this stage, introduce a clear geometric vision.

At that time, mathematics and geometry were also present, but the link with physics was not yet established. With Bernhard Riemann [19], the concept of the manifold emerged. Only then did people begin to consider the existence of spaces that escape our mental imagery, spaces that deviate significantly from the Euclidean. These objects exist, for mathematicians, who know how to equip them with metrics, associate them with isometry groups, and link them to invariants. The vertiginous leap that Minkowski dared to make was to understand, initially somewhat confusedly, that this approach was not simply a game for mathematicians, but that it touched upon the geometry of the real world.

The Norwegian mathematician Sophus Lie gradually developed the group theory tools between 1870 and 1874. A summary of his monumental works was published with Friedrich Engel between 1888 and 1893 [20]. The pieces are there, scattered. All that remains is to assemble them, to understand that they constitute the building blocks of a new physics and represent the conceptual leap of refounding the geometric structure in which we operate. But the mental attachment to the Euclidean model remains very strong. In 1907, Hermann Minkowski published a first article [21] in which the idea of integrating the time dimension into a four-dimensional space (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) is outlined. But the reference to the ether remains, and the Lorentzian character of space is managed by taking up the idea suggested by Poincaré in 1905

by introducing a purely imaginary time dimension: $x_4 = i\,t$. The following year [22] he declared in a conference:

> *Die Vorstellung, dass Raum und Zeit unabhängig voneinander sein können, ist nichts als eine eitle Illusion. Wir werden eine Vereinigung der beiden in Betracht ziehen müssen.*
>
> *The idea that space and time can be independent is nothing but a vain illusion. We will have to consider a union of the two.*

This is the birth of the entity that is space-time. Further on:

> *Das Weit wird die Menge aller denkbaren Werte von x, y, z, t sein.*
>
> *The universe will be the set of all imaginable values of x, y, z, t.*

And :

> *Das Zeitelement dt entspricht den Variationen dx, dy, dz dt der Koordinaten des Punktes im Raum.*
>
> *The time element dt will correspond to the variations dx, dy, dz, dt of the coordinates of the point in space.*

Further on, Minkowski explicitly gives the metric of his spacetime:

> *Wir betrachten eine Progression dx, dy, dz, dt entlang einer Weltgeraden und die Größe:*
>
> *We will consider a progression dx, dy, dz, dt along a world line and the quantity:*

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

We couldn't put it more clearly, and this introduces a purely geometric definition.

> *Das Integral* $\tau = \int d\tau$ *dieser Größe entlang dieser Weltlinie, von einem beliebigen Ursprung Po bis zu einem variablen Endpunkt P, wird als Eigenzeit* τ *(Eingeizeit) des substanziellen Punktes bei P bezeichnet.*
>
> *The integral* $\tau = \int d\tau$ *of this quantity taken along this world line, from any origin* P_o*, to a variable extremity P, will be called the proper time* τ *(Eingeizeit) of the substantial point at P.*

This leads to a purely geometric definition of the photon. The fact that particles cannot travel along these world lines at speeds greater than c follows from the fact that s and τ are real.

The photon is therefore the particle that, in spacetime, follows a world line of zero length ($ds = d\tau = 0$). Incidentally:

$$(1)\quad c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \geq 0 \qquad or\ c \geq \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

In other words, dit $v \leq c$ and that says it all. Minkowski's universe is a space where coordinates are real, where time is measured in meters, where length, assimilated to proper time, is real.

If $ds^2 < 0$ *we are simply stepping outside the world of physics.*

.

Until now, physicists had never considered any space other than Euclidean space, with its metric:

$$(2)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

It is understandable that this new geometry had difficulty taking root in the minds of men in general, and scientists in particular.

It was the Englishman Sylvester who introduced the concept of signature in 1852 [23], but by linking it to quadratic forms, and not systematically to a metric. In 1883, the Dane Jørge Gram [24] introduced a matrix presentation of bilinear forms. With X being a column vector (a column matrix) and ${}^tX$ a row vector (the transpose of this row matrix), a bilinear form can be written as:

$$(3)\qquad {}^tX\,G\,X$$

G being the Gram matrix:

$$(4)\qquad G = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

In this context, the Lorentz metric is written:

$$(5)\qquad ds^2 = {}^tdX\,G\,dX$$

And the corresponding Gram matrix is then:

$$(6)\qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

This matrix notation then allows us, in just a few lines of calculation, to obtain the elegant axiomatic definition of the element *L* of the Lorentz group:

$$(7)\qquad {}^tL\,G\,L = G$$

If we add the space-time translation column vector

$$(8)\qquad C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

We immediately obtain the representation, in the form of (5,5) matrix structures, of the Poincaré group:

(9) $$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

If we switch to a Euclidean space, its metric is of the form (5) where its Gramma matrix becomes the identity matrix *I*. Its isometry subgroup is the group of matrices defined by:

(10) $$^{t}a\, I\, a = \; ^{t}a\, a = I$$

That is, the orthogonal matrices and the isometry group become the Euclid group :

(10) $$\begin{pmatrix} a & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Noether's theorem tells us that every subgroup is associated with the conservation of a quantity. For the Euclid group, we have the rotation subgroup SO(3), which conserves the radius. For the Lorentz group, a subgroup of the Poincaré group, we have conservation of the quantity:

(11) $$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

2 – **Regarding the phenomenon of metric signature inversion.**

Today, in all treatises on theoretical physics and cosmology, one reads:

(12) $$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

This "modern signature" $(-+++)$ gradually became widespread after the Second World War. Since the coordinates are real, defining world lines equipped with real proper time then requires a purely imaginary length element *ds*:

(13) $$d\tau = \sqrt{-ds^2}$$

Given that the solutions to Einstein's field equation are metrics, it would be logical to interpret these geometries as hypersurfaces whose geodesics of non-zero length are the paths followed by masses, with this very simple guiding principle:

- Where the length s is real: we are in the hypersurface, therefore in physical reality
- Where it is purely imaginary: we are outside the hypersurface, therefore we leave the world of physics.

By modifying the signature, we abandon this criterion and give rise to two families of trajectories:

- "Time-like" trajectories, with $ds^2 > 0$

- "Space-like" trajectories, with $ds^2 < 0$, which are actually located outside the hypersurface, are real, and represent an extension of spacetime into complex numbers.

3 – **The birth of the field equation.**

This Lorentz metric describes geometry in a vacuum. Ten years later, Einstein set out to describe the geometry created by the presence of masses, both outside and inside them. Initially, the great mathematician David Hilbert did not believe that this world of high mathematics in which he moved, and where he produced groundbreaking work, had any connection whatsoever with that of physics. During numerous meetings in 1915, Einstein managed to change his mind. It is important to remember that at that time, the dynamics of the universe were understood to be limited to the action of the electromagnetic force and the force of gravity. Hilbert then envisioned the possibility of carrying out an immensely ambitious project, constituting "the first theory of everything." When we read his 1915 memoir, entitled "The Foundations of Physics," we discover a space whose points are located by four coordinates $\{ w_1, w_2, w_3, w_4, \}$, time being the fourth. Let us quote him:

(14)

Es seien $w_s\ (s = 1, 2, 3, 4)$ *irgendwelch die Weltpunkte wesentlich eindentig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter (allgemeiste Rau-Zeit-Koordinaten)*

Traduction :

Let $w_s\ (s = 1, 2, 3, 4)$ *be any coordinates labeling the world's points essentially uniquely—the so-called world parameters (most general spacetime coordinates).*

Below is the complete action integral proposed by Hilbert:

(15)

und zwar mub die Variation des Integrals

$$\int H \sqrt{g}\ d\omega \quad \left(g = |g_{\mu\nu}|,\ d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4\right)$$

für jedes der 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s *verschwinden.*

Traduction :

where the variation of the integral

$$\int H \sqrt{g}\ d\omega \quad \left(g = |g_{\mu\nu}|,\ d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4\right)$$

must vanish for each of the fourteen potentials $g_{\mu\nu}$, q_s .

Here we recognize its Lagrange function *H* and the four-dimensional hypervolume:

(16) $$\sqrt{g}\, d\omega = \sqrt{g}\ dw_1 dw_2 dw_3 dw_4$$

Hilbert represents by $|g_{\mu\nu}|$, the absolute value of the determinant constructed from the metric potentials $g_{\mu\nu}$. He will explicitly give the form of his Lagrange function:

(17) $$H = K + L$$

Where K is the Ricci scalar and L the Lagrangian of matter. What is crucial, when reading his first article from 1915, is to understand that Hilbert performs all his calculations with the coordinates w_s ($s = 1, 2, 3, 4$) and that at no point does either the signature of the metric or the metric itself appear in the form ds^2. For the mathematician David Hilbert, the solution to his field equation is not a metric, defining an element of length ds, but a bilinear differential form $g_{\mu\nu}\, dw_\mu dw_\mu$, whose sign, a priori, is of little importance to him. Given the historical significance of this event, here is Hilbert's field equation, as it appears in his 1915 article:

Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungsweise für die Variationsableitungen bezüglich der $g^{\mu\nu}$ erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (20) die Gestalt

(21) $$[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0.$$

Das erste Glied linker Hand wird

$$[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} K g_{\mu\nu}),$$

Fig.1 : Hilbert's field equation (November 20, 1915) [26])

Traduction :

Using the notation introduced earlier for the variational derivatives with respect to the $g^{\mu\nu}$, the gravitational equations, because of (20), take the form

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \qquad (21)$$

The first term on the left hand side becomes

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}\right),$$

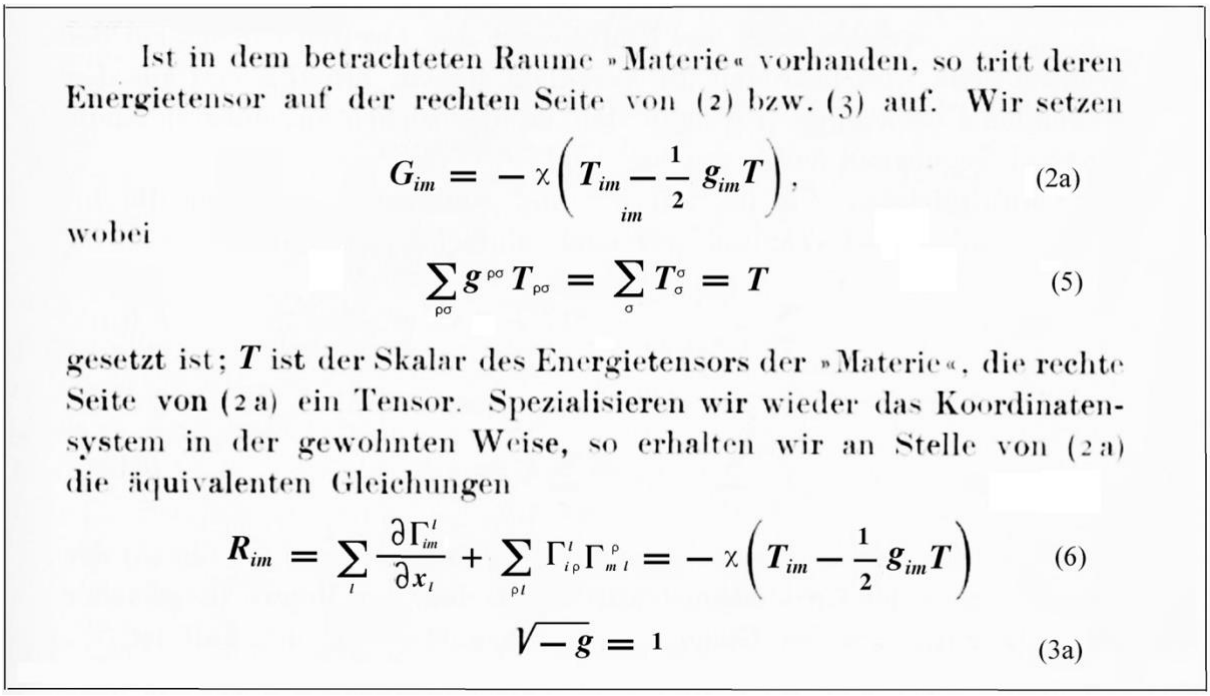
Fig.2 : English translation of the passage in Figure 1 [27].

What we can write:

(18) $$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K\, g_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g_{\mu\nu}}$$

Simply replacing the letter K with the letter R (for Ricci) reveals that this equation is equivalent to the one published by Einstein five days later [28]! Hilbert's left-hand side results from his

choice to include the Ricci scalar, which he calls *K*, in the definition of its action. It's worth noting that Einstein published his equation in a form equivalent to the one that would later be considered standard, which is thus closer to the one published by Hilbert.



Ist in dem betrachteten Raume »Materie« vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bzw. (3) auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\chi\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right), \qquad (2a)$$

wobei

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} T^{\sigma}_{\sigma} = T \qquad (5)$$

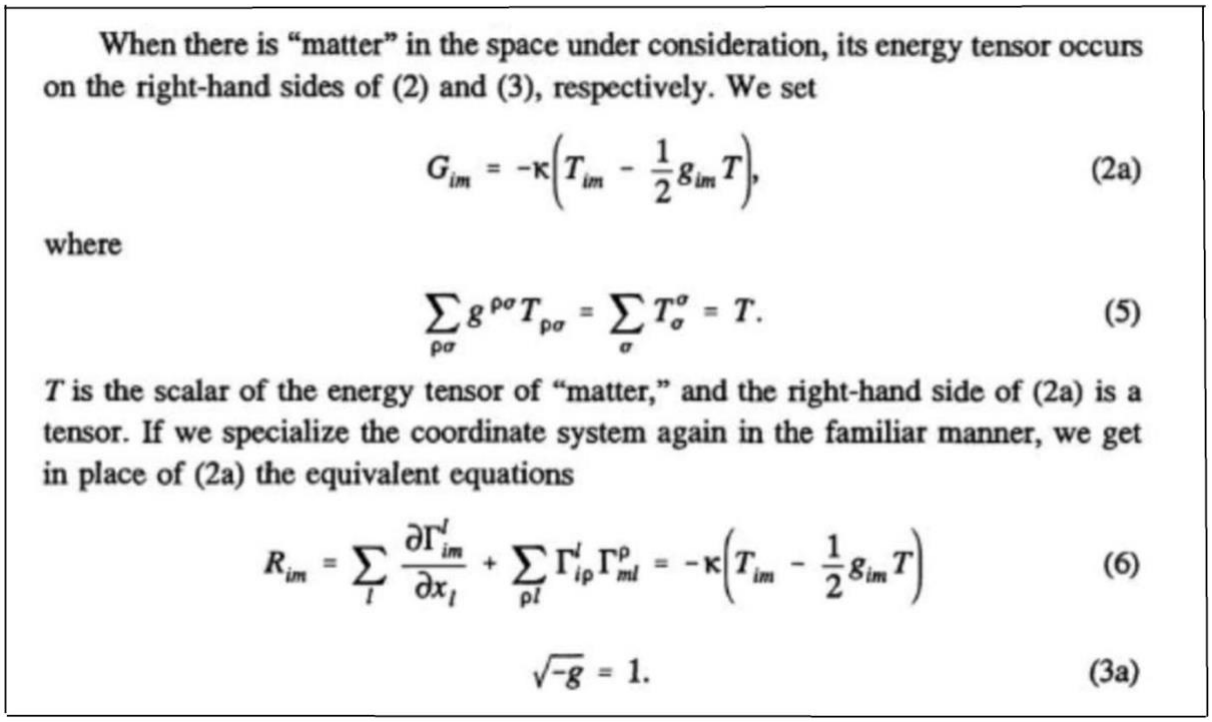
gesetzt ist; T ist der Skalar des Energietensors der »Materie«, die rechte Seite von (2a) ein Tensor. Spezialisieren wir wieder das Koordinatensystem in der gewohnten Weise, so erhalten wir an Stelle von (2a) die äquivalenten Gleichungen

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma^{l}_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^{l}_{i\rho} \Gamma^{\rho}_{ml} = -\chi\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right) \qquad (6)$$

$$\sqrt{-g} = 1 \qquad (3a)$$

Fig.3 : Einstein's field equation [28]

Traduction :



When there is "matter" in the space under consideration, its energy tensor occurs on the right-hand sides of (2) and (3), respectively. We set

$$G_{im} = -\kappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right), \qquad (2a)$$

where

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} T^{\sigma}_{\sigma} = T. \qquad (5)$$

T is the scalar of the energy tensor of "matter," and the right-hand side of (2a) is a tensor. If we specialize the coordinate system again in the familiar manner, we get in place of (2a) the equivalent equations

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma^{l}_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^{l}_{i\rho} \Gamma^{\rho}_{ml} = -\kappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right) \qquad (6)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \qquad (3a)$$

Fig4 : Translation of the previous figure.

In this construction of the field equation including gravitation, Hilbert preceded Einstein by five days. This fact placed Einstein in a delicate position. In June-July 1915, Einstein was invited by Hilbert, a request supported by Felix Klein, to give lectures at the University of Groningen where he endeavored to show that his physical ideas required profound mathematical tools, and that these were not arbitrary, but dictated by physics itself. During the summer and autumn of 1915, Einstein maintained a dense correspondence with Hilbert [29,30]. Einstein sensed that Hilbert was undertaking to tackle the problem from a variational and mathematical perspective. He insisted, sometimes nervously, that physics preceded form (what we would call modeling today), that equations were not an autonomous aesthetic construct. Their correspondence reached a peak in intensity in the last 6 to 8 weeks before their publication. Einstein sought not only to convince Hilbert that his mathematics was correct, but also that general covariance was not a formal luxury, that mathematical structure was imposed by the physical principle of equivalence. Hilbert, conversely, was fascinated by the possibility that the variational approach could encompass all of physics. Two converging approaches, two temperaments, and a few months during which theoretical physics was written at the pace of letters and lectures, with no finalized articles. Two approaches, pursued differently, at breakneck speed, but leading to the same result. On November 18, Einstein, without revealing his equation to Hilbert, informed him that his approach had succeeded and wrote:

> *"Ich bin sehr gespannt, ob Sie mit Ihrer Lösung ebenso zufrieden sein werden wie ich mit der meinen."*

Translation:

> *"I am very curious to see if you will be as satisfied with your solution as I am with mine."*

Their approaches were so similar, so parallel, that a joint publication could have been considered. But the stakes remained enormous, and they knew it. Especially since, for Hilbert, it was the equation of physics on which everything might depend: gravitation and electromagnetism. Nevertheless, Hilbert made the first move, sending his result for publication without informing Einstein, who immediately sent him a chilling letter on November 25, 2015 [29]. Einstein wrote, in particular:

> *« Die von Ihnen gegebene Lösung stimmt, soweit ich sehe, genau mit dem überein, was ich in meiner letzten Abhandlung gegeben habe."*

Translation:

> *"The solution you provided coincides, as far as I can tell, exactly with the one I presented in my last work."*

Their relationship nearly broke down. But the two managed to preserve their friendship and mutual respect. Hilbert made the first move on December 15, 1915, in a letter congratulating Einstein on what he considered his achievement. He noted the convergence of independent efforts but stated that he claimed no priority. It was a magnanimous gesture to which Einstein replied on December 21, 1915:

> *"Ich freue mich, dass zwischen uns keine Verstimmung entstanden ist, und hoffe, dass wir uns auch künftig als Freunde betrachten können."*

Translation:

> *“I am pleased that no awkwardness has arisen between us, and I hope that we can continue to consider each other as friends.”*

At the time, Einstein was already a member of the Royal Prussian Academy of Sciences, a professor at the University of Berlin (without a regular teaching obligation), and director of the Kaiser Wilhelm Institute for Physics (then being established). His academic position was therefore firmly established. He and Hilbert knew that this breakthrough was too important to be tainted by a question of paternity, and opted for an amicable solution.

4 – **La géométrisation de la physique.**

The French mathematician Jean-Marie Souriau, who is an exceptional example combining high mathematics [31] and a keen sense of physics, used to say:

> *"A little mathematics takes you away from reality, a lot brings you back to it."*

Cosmology is a perfect example, provided one knows how to use mathematical tools correctly. From what has been said above, we see that what guided Einstein was his extraordinary physical intuition. Didn't he say that in creating his special relativity, he strove to imagine how an observer "sitting on a photon" would perceive the universe? A few years later, Minkowski geometrized this vision, and everything became incredibly simple, expressed in just a few lines. Poincaré added to this the group tool and the group that bears his name (10), which became the isometry group of Minkowski space. The Lorentz metric, thanks to the use of the matrix tool, is reduced to a given Gramm matrix (6) and emerges from an extremely elegant axiomatic system (7), which evokes the extension of rotations to this 4D space. This is where we realize that this geometrization of reality, while impeccably accounting for the physical phenomena of the moment, provides a context that suggests looking beyond the world that gave birth to it, through the hidden symmetries it reveals.

Let us take Euclidean space as an example. Being in this space allows us to construct the operations of rotations and symmetries in three dimensions. By combining the two, we can then imagine the object that allows us to extract a cork from a bottle. By geometrizing these operations, we create the Euclid group, where rotations (subgroup SO(3)) are translated into the form of matrices a. These are then defined axiomatically (10) from a Gram matrix, which becomes the identity matrix. We then realize that the complete group possesses an operation that had not been considered: "mirror symmetry." The shaping of objects, using our machine tools, represents the implementation of group actions. This is how we can manufacture "straight" corkscrews. The group suggests an inversion, a P-symmetry. So our machine tools produce "face-and-grab corkscrews", "left-handed" corkscrews, which screw in the other direction.

Geometrizing special relativity, as Minkowski and Poincaré did, gives us a group structure that accounts for the two symmetries it comprises: 4D rotations, thanks to the Lorentz subgroup L, and spacetime translations. This subgroup contains the inversion of the orientation of space, the P-symmetry. So far, so good. This symmetry exists in our physics, even in the movements of the elementary objects that compose it. The phenomenon of polarization allows us to add helicity to the photon's motion. And so, there exist two photons of the same energy with

opposite helicities. But the complete Poincaré group possesses antichronous components, which reverse time. At this point, the geometrizing approach represented by taking motion into account in Minkowski space is no longer sufficient. An additional act of geometrization is required, represented by symplectic geometry [31]. And here our spatial intuition and our effort at analogical extrapolation completely fail us. While this geometric extension, of pure mathematics, was introduced by mathematicians such as the American Bertram Kostant [32, 33] and the Russian Alexander Kirilov [34, 35], it is Souriau [31], as the third member of the trio, who highlights the impact of the tool in the world of physics, which is expressed in the following sentence:

> *To consider that there is a movement of a particle which is inscribed along a geodesic which is deduced from the "normal movement" by inversion of the time coordinate, is equivalent to considering that this particle carries a negative energy and, when it has a mass, that this mass is negative.*

Assimilating special relativity meant admitting that particles—photons—could exist in spacetime, as presented by Minkowski, traveling along geodesics of zero length. This already required a considerable effort of mental representation. In a comic strip [36], I mention that the photon's death certificate is printed on the back of its birth certificate, a way of evoking the extreme brevity of its life, in its proper time. But imagining a spacetime resulting from the inversion of the temporal coordinate is beyond human imaginative possibilities—mine, at least. Yet it is this more advanced geometrization process, stemming from the implementation of all the symmetries of the Poincaré group [33], that gave rise to the Janus model [34]. And it is this new geometric conception of the universe that allows us to decode observations such as the acceleration of cosmic expansion, the large-scale, incomplete structure of the universe, the confinement of galaxies and the emergence of their spiral structure, the early birth of galaxies and stars, and the nature of the supermassive objects M87* and Sgr A* [39]. And, once again, it is up to Nature to decide. To better understand the topological aspects of the Janus model, refer to my comic strip Topo the World [40].

What the correspondence between Hilbert and Einstein reveals is the latter's skepticism towards this approach to pure mathematics, based on a variational model, and his fear of seeing this tool stray from reality. To Einstein's surprise, it enabled Hilbert to be the first to construct the tensorial field equation, geometrizing gravitation. Regarding the Janus Cosmological Model (JCM), while the topological aspects were described as early as 1994 [41], only the variational approach [38] allows this geometry to be equipped with its system of coupled field equations:

(19) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathrm{R}\, g_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}}\ K_{\mu\nu} \right)$$

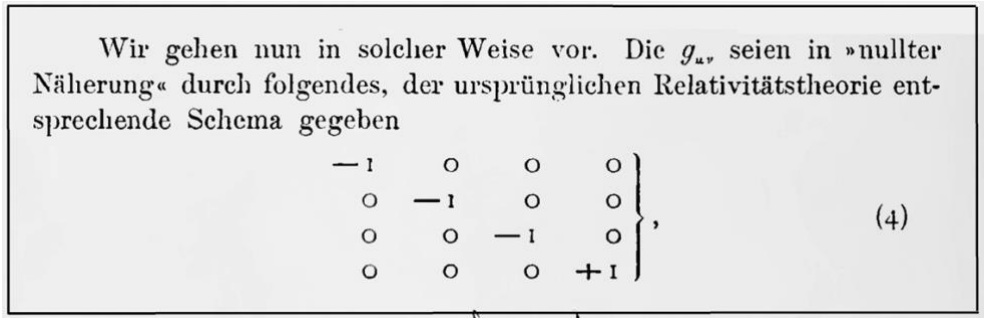
(20 $$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = - \chi \left(\bar{T}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}}\ \bar{K}_{\mu\nu} \right)$$

If this resonates with the reader's intuition, we can attempt to summarize the approach taken in the Janus Cosmological Model as follows. In their embedding in $\mathbb{R}^3$, every surface, a two-dimensional object, locally possesses a front and a back. The solutions to Einstein's equation on four-dimensional hypersurfaces. The extension of general relativity to JCM amounts to considering that the 4D hypersurface "has a front and a back" (which follows from the fact that it is orientable), with positive masses and photons of positive energy traveling on the "front," and negative masses traveling on the "back." What is then difficult to imagine and marks the

limits of this creation of a mental image is the fact that at two points A and B of this hypersurface there exist two different geodesics, one inscribed on the front and the other on the back, which are by no means each the image of the other and that the distances traveled and the travel times are different depending on whether one travels on the front or the back of the hypersurface.

5 – **The Schwarzschild exterior metric solution**.

It is November 1915. Hilbert and Einstein have just developed the "field equation." At the same time, Einstein, a physicist first and foremost, has published his own version and produced an approximate, linearized solution [42] that accounts for the advance of the perihelion of Mercury's orbit. As early as January 1916, Karl Schwarzschild provided an exact, nonlinear solution to the field equation in a vacuum and with spherical symmetry [43]. This remarkable work answered the question raised as early as 1846 by Le Verrier [44, 45, 46]. Nowadays, faced with the impossibility of observing this new planet, which Le Verrier had named Vulcan, our modern theorists might have called it a dark planet. Nevertheless, a month later Schwarzschild completed his work by publishing a second paper describing the geometry inside the mass [47]. Before analyzing Hilbert's article, we will point out that at the time, all the scientists involved in these developments of relativity opted, without exception, for a signature (+ - - -). Below is an excerpt from Einstein's article on the advance of Mercury's perihelion [42]:

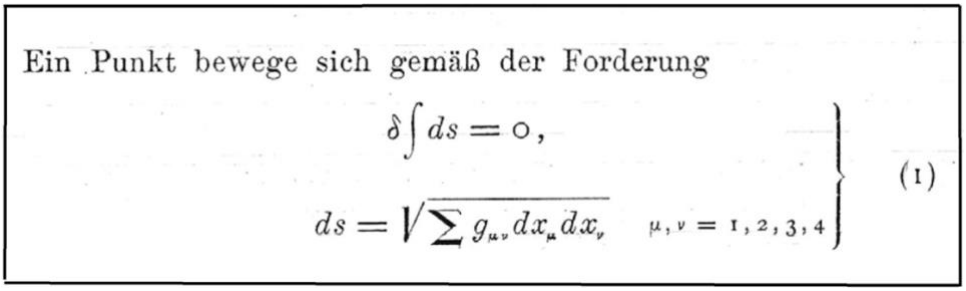


Wir gehen nun in solcher Weise vor. Die $g_{\mu\nu}$ seien in »nullter Näherung« durch folgendes, der ursprünglichen Relativitätstheorie entsprechende Schema gegeben

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\}, \qquad (4)$$

Fig.5 : The Gram matrix used by Einstein [42]

Unambiguously, if we decide to focus on the concept of signature, Einstein's choice is clearly $(-\,-\,-\,+)$ or $(+\,-\,-\,-)$, which amounts to exactly the same thing. The same options were used by contemporaries such as Karl Schwarzschild, Hermann Weyl [49], Ludwig Flamm [50], J. Droste, [51], etc. The only exception is Hilbert, in 1916 [48]. We need to understand why. As it appears explicitly in his first article of January 1916, the concept of geodesic is perfectly defined by Schwarzschild [43]:



Ein Punkt bewege sich gemäß der Forderung

$$\left.\begin{matrix} \delta \int ds = 0, \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

Fig.6: Geodesics, as defined by Schwarzschild [43].

In simpler terms, these are variationally defined curves, along which the length can only be real. The solution constructed by Schwarzschild is a metric, that is, a formula for calculating this real length element along a curve. He starts with a set of coordinates $\{ t , r , \theta , \varphi \}$ accounting for spherical symmetry, where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ is automatically non-negative. Taking into account spherical symmetry and stationarity, this metric becomes the following bilinear form (its equation (6)):

(21) $$ds^2 = F\, dt^2 - (G + H)\, dr^2 - Gr^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

All that remains is for him to express, using this metric, the components of the Ricci tensor in order to inject them into Einstein's homogeneous equation:

(22) $$R_{\mu\nu} = 0$$

To obtain the functions $F(r)$, $G(r)$, and $H(r$, which, expressed using these coordinates and a positive integration constant α, gives

(23)
$$ds^2 = \frac{(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4\, dr^2}{(r^3 + \alpha^3)[(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} - (r^3 + \alpha^3)^{2/3}(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

More precisely :

(24)
$$ds = \sqrt{\frac{(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4\, dr^2}{(r^3 + \alpha^3)[(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} - (r^3 + \alpha^3)^{2/3}(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)}$$

With this choice of coordinates, *ds* is always real. What cosmologists haven't yet understood is that a metric solution also contains "topology" information. The only intrinsic quantity is the length *s*. From this metric, we can calculate the surface area of a sphere corresponding to a given value of the variable r and with $dt = 0$. The metric then gives:

(25) $$d\sigma^2 = (r^3 + \alpha^3)^{2/3}(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

The determinant is then:

(26) $$\gamma = (r^3 + \alpha^3)^{4/3}\, sin^2\theta$$

The area of this sphere is:

(27) $$A(r) = \iint \sqrt{\gamma}\; d\theta\, d\varphi = 4\pi\, (r^3 + \alpha^3)^{2/3}$$

This coordinate *r* is not a "radius". This area has a minimum value for the value $r = 0$, which is:

(28) $$A_{min} = 4\pi\, \alpha^2$$

This means that the geometric object described by this metric solution is not contractible. We can, as Schwarzchild does, present this solution with a different set of coordinates by introducing the change of variable:

(27) $$r = (R^3 - \alpha^3)^{1/3} \quad \text{ou} \quad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

The metric then becomes:

(29) $$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)c^2dt^2 - \frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

And it was in this form that Schwarzschild presented his solution in January 1916. But it then becomes absurd to consider studying the hypersurface for values $R < \alpha$ since, under these conditions, we leave the domain of definition with imaginary values of r. We will not dwell on this, as this issue has already been raised in [52].

6 – **Calculation of geodesics using Lagrange's equations.**

As indicated by Schwarzschild, see figure 6, geodesics result from the variation:

(30) $$\delta \int \sqrt{\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu} = \delta \int \sqrt{\sum g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp}}\, dp$$

Posing : $$\frac{dx_\mu}{dp} = \dot{x}_\mu \qquad \frac{dx_\nu}{dp} = \dot{x}_\nu$$

(31) $$\delta \int \sqrt{\sum g_{\mu\nu}\, \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}\; dp = \delta \int F(x_i, \dot{x}_i)\, dp = 0$$

Which leads to Lagrange's equations:

(32) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

However, in all articles, treatises, and books, the Lagrangian is presented in the following form (example: [52], page 98):

19. The geodesics in the Schwarzschild space-time: the time-like geodesics

We have shown in Chapter 1 (§6(*a*), equation (203)) that the equations governing the geodesics in a space-time with the line element,

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{78}$$

can be derived from the Lagrangian

$$2\mathscr{L} = g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}, \tag{79}$$

where τ is some affine parameter along the geodesic. For time-like geodesics, τ may be identified with the proper time, s, of the particle describing the geodesic.

For the Schwarzschild space-time, the Lagrangian is

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-2M/r} - r^2\dot{\theta}^2 - (r^2\sin^2\theta)\dot{\phi}^2\right], \tag{80}$$

where the dot denotes differentiation with respect to τ.

Fig.7 : The Lagrangian, after Chandrasekhar [52].

And it is from this that we construct the Lagrange equations. This requires explanation. By writing:

(33)

$$\delta \int \left(g_{\mu\nu}\,\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu\right) dp \;=\; 0$$

It seems that we are basing our calculations not on the Lagrange function derived from the expression for the length, but on its square, and that we are actually writing:

(34)

$$\delta \int [F(\,x_i\,,\dot{x}_i\,)]^2\, dp \;=\; 0$$

This then leads to the following equations:

(35)

$$\frac{1}{L}\left(\frac{dL}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

So we have an extra term. How do we get rid of it? By choosing that:

(36)

$$\frac{dL}{dt} \;=\; 0$$

That is, by making the function L equal to a constant of arbitrary value. If we give it the value $L = 1$, we obtain (we don't see where this coefficient $\frac{1}{2}$ that Chandrasekhar adds comes from, see figure 7), we get this:

(37) $$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Or, under these conditions:

(38) $$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta\,d\varphi^2\right)$$

We can therefore see, by constructing a system of Lagrange equations, and linking it to a metric solution (38), that if we start from the actions:

(39) $$A = \int \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)}\,ds$$

Or from :

(40) $$A' = \int \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right)ds$$

We arrive at the *same* system of Lagrange equations! And the same would be true, with any n, for the action:

(41) $$A' = \int \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right)^n ds$$

But (39) requires that the quantity under the radical remain positive, whereas (40) and (41) do not. By opting for (40), see Figure 7, we then construct real curves that "extend inside the sphere" of radius $R = 2M = \alpha$, the Schwarzchild sphere, but where the portions of the curves located "inside" are then equipped with purely imaginary lengths. Without realizing it, postwar theorists achieved an extension into the world of complex numbers.

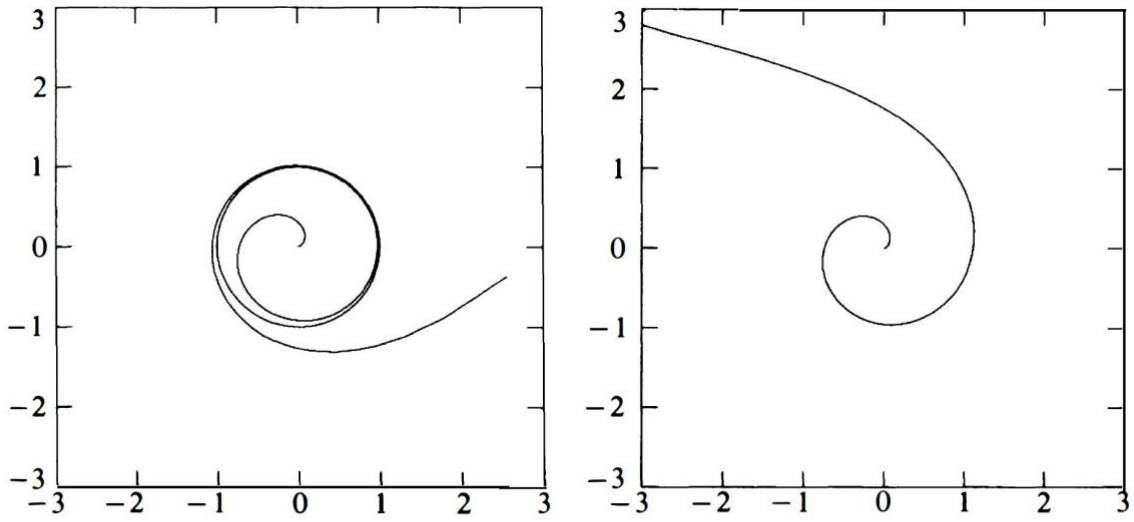


FIG. 7*b*. Various classes of time-like geodesics described by a test particle with $E^2 > 1$: (a), (b), (c): orbits of the first and the second kind with eccentricity $e = 3/2$ and latera recta, 4.5, 2.5, and 1.94 respectively ($M = 3/14$ in the scale along the coordinate axes); (d), (e): unbound orbits with $l = 1$ and with imaginary eccentricities $e = 0.001i$ and $0.1i$ ($M = 0.3$ in the scale along the coordinate axes).

121

Fig.8 : Chandrasekhar's "plunging geodesic" [52], page 121.

It should be noted that these curves are merely the projections of the geodesics onto the plane θ = constant where they lie. This distinction is important, as we will see later. Nevertheless, when we use the differential equation that gives these geodesics (equation (6.90) from reference [53]), derived from the system of Lagrange's equations, we do indeed find these projections, which evoke the crossing of the Schwarzschild sphere with superb continuity of the tangent to these curves (in projection!). Below is this equation with a Schwarzschild radius.

$$R_s = 2M = \alpha = \frac{2Gm}{c^2} = 1 \tag{42}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{l^2 c^2}{h^2} + \frac{1}{r\,h^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3}}} \tag{43}$$

About thirty years ago, in an attempt to get to the bottom of this, we recalculated everything until we arrived at this equation. Plotting the curves immediately revealed these quasi-elliptical geodesics, with the phenomenon of perihelion precession. See below, in Chandrasekhar ([52] figure 7a):

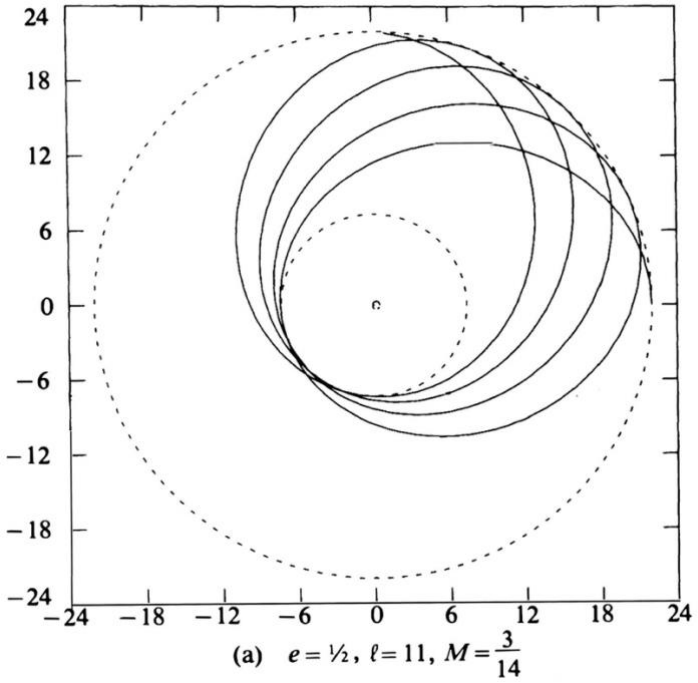


Fig.9 : Advance of perihelion ([52] figure 7a):

In the previous figure, the small circle with the dashed line is not the Schwarzschild circle but the circle along which the perihelion moves. Below is the curve I myself obtained, not without surprise:

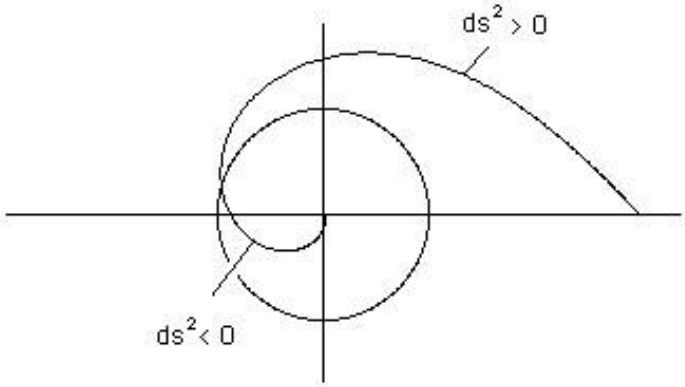


Fig.10: Real extension, in projection, of a curve equipped with an *imaginary length*.

The deceptive nature of this equation arises from the fact that, when one imagines extending the curve "inside the Schwarzschild sphere" using this equation, one obtains a perfect continuity of the tangent on the circle, which represents the projection of the sphere onto the plane $\theta = Cst$ In fact, as we will see later in a 3D representation (t, r, φ) and a perspective view, the geodesic never reaches the sphere! From this point, switching to the Kerr metric, which also has its own horizon, changes nothing. This has not prevented many authors from specifying "the structure of the “central singularity", *which exists only in their imagination* !

7- **The geodesics of the Flamm surface are not those of the Schwarzschild hypersurface!**

As early as 1916, the young Austrian mathematician Ludwig Flamm precisely analyzed [54] the structure of the solution hypersurface constructed by Schwarzschild. This constituted a brilliant demonstration of mastery of 4D geometry, a skill absent today among black hole specialists, who have not integrated the topological aspects of the solution. Since this solution does not depend on the time coordinate, Flamm deduced that the object is a 3D hypersurface undergoing a time translation. The metric of this 3D object is then simply, still with the indicated constraint:

$$(44) \qquad d\sigma^2 = \frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2(\,d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2\,) \qquad R = (\,r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

What is difficult to grasp is that our choice of coordinates is merely a *system of representation*. It so happens that this 3D hypersurface described by equation (44) and with $\alpha > 0$ is embeddable in $\mathbb{R}^3$ (which would not be the case for the hypersurface described by the same metric, equipped with $\alpha < 0$). Mentally, we therefore imagine this object embedded in the only representational space available to our minds: 3D Euclidean space. The Schwarzschild sphere then becomes a s throat sphere, the point of junction of this structure, which then appears, in the mental image we are trying so hard to construct, as a point connecting two 3D Euclidean spaces constituting a covering. The geodesics resulting from the metric (44) lie in planes. Below, on the left, is a planar geodesic that grazes the throat surface without touching it, and is therefore confined to the same 3D sheet. On the right, this geodesic "crosses the throat sphere" and thus extends into the other 3D sheet (shown as a dotted line):

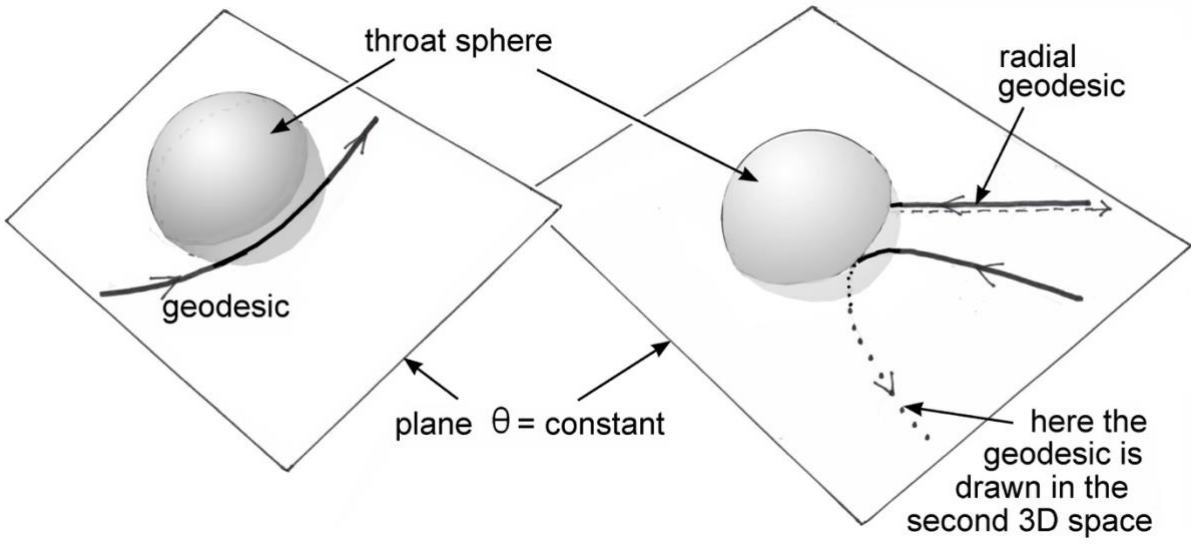


Fig.10: The hypersurface from equation (44) figured as a space bridge linking two 3D-spaces.

It is important to keep in mind that these are only mental images, derived from a representation in the specific coordinates $(R\,,\theta\,,\varphi)$. If we return to the initial coordinates chosen by Schwarschild, the 4D hypersurface, equation (23), is then the time translation of a 3D hypersurface defined by the metric:

(45) $$ds\sigma^2 = \frac{r^4\,dr^2}{(r^3+\alpha^3)\left[(r^3+\alpha^3)^{1/3}-\alpha\right]} + (r^3+\alpha^3)^{2/3}(d\theta^2+sin^2\theta d\varphi^2)$$

The throat sphere corresponds to the value $r = 0$. In other words, while its area is $4\pi\alpha^2$, in this representation it reduces to a point. This means that mental images have limits. But let's return to Flamm's analysis. If the hypersurface is three-dimensional, by setting, for example, $\theta = \pi/2$, we obtain a two-dimensional object, described by the metric:

(46) $$d\sigma^2 = \frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2 d\varphi^2 \qquad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

Still with the same constraint $R \geq \alpha$. Flamm [54] observes that this object can be embedded in $\mathbb{R}^3$ and that it is then generated by the rotation of a horizontal parabola.

(47) $$z = \pm 2\sqrt{\alpha\,(r-\alpha)}$$

The length of a portion of a curve corresponds to the integral:

(48) $$\int \sqrt{\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{\alpha}{r}} + r^2\dot{\varphi}^2}\quad ds$$

As we saw above, we obtain the Lagrange equations by basing the calculus of variations on:

(49) $$\delta \int \left(\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{\alpha}{r}} + r^2\dot{\varphi}^2 \right) ds = 0$$

But this eliminates the constraint of non-negativity of the quantity under the radical. The equations giving the solution curves are the same:

(50) $$\frac{d\varphi}{dr} = \pm\frac{h}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1-\frac{h^2}{r^2}\right)}}$$

We see that for $r > \alpha$, we obtain real curves for $|h| < \alpha$ .. But for $r < \alpha$, we also obtain real curves with $|h| > \alpha$. However, along these curves, which are spirals that start tangent to the circle and wind in a spiral, the length is purely imaginary. When we embed the Flamm surface in $\mathbb{R}^3$, the absurdity becomes evident:

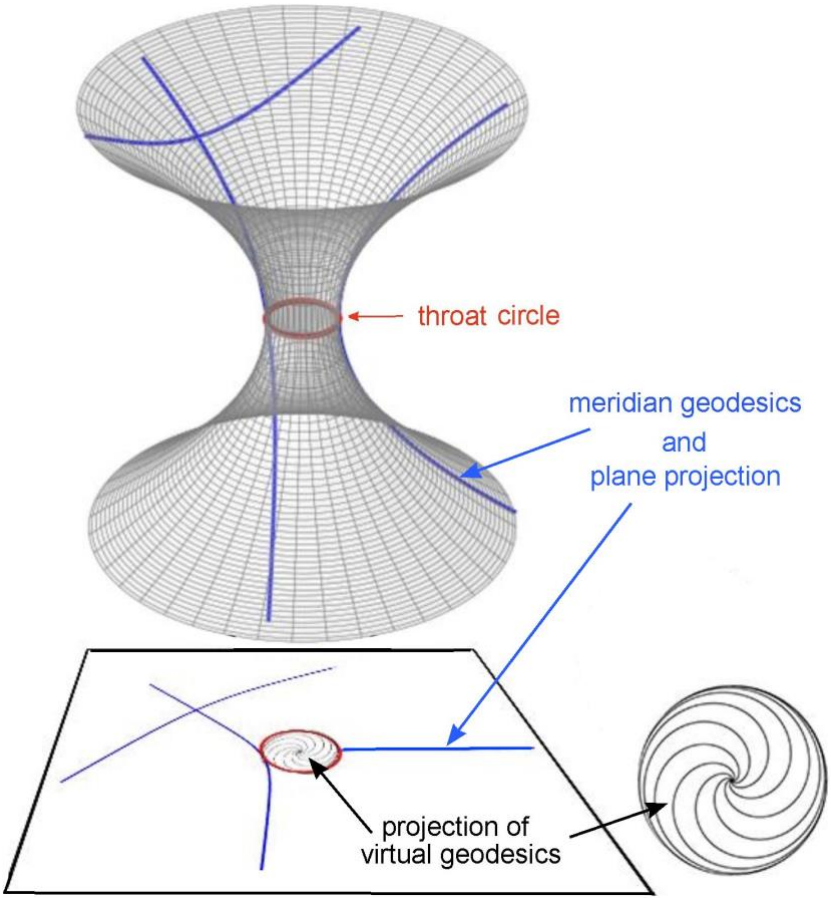


Fig. 11: Flamm surface, real and… virtual geodesics

But the geodesics of the Flamm surface are not those of a 4D hypersurface: the equations from which they are derived are different. Among other things, one cannot construct quasi-elliptic geodesics like those in Figure 9 on the Flamm surface. The virtual geodesics from (50) are tangent to the throat circle, while the curves from (43) intersect this circle at an angle. See Figures 8 and 10. But the idea is the same. Along these real curves, the length, and therefore proper time, is purely imaginary. It will probably be a long time before black hole specialists admit that these trajectories plunging into the horizon sphere and converging in a spiral toward the central singularity, like the singularity itself, have no physical reality. That being said, the Flamm surface remains a cross-section of Schwarzschild spacetime with constant θ. If we want to represent these geodesics in this embedding of the cross-section in $\mathbb{R}^3$, we must lift the curves from the plane towards the Flamm surface, where they belong. But then they are not geodesics of this surface.

8 – **The concept of "virtual geodesics"**.

It is easy to endow the torus and the sphere with these real curves, traversed by an imaginary length. What physicists have failed to grasp is that metrics like those derived from Einstein's equation possess not only the symmetries that preceded their construction, but also their own topology, revealed by an appropriate choice of coordinates. Let us illustrate this idea by taking the example of the torus, presented according to the metric:

(51) $$ds^2 = r_0^2\, d\theta^2 + (R + r_0 \cos\theta)^2\, d\varphi^2$$

The signature is (+ +). Considering the paths at $\theta = Cst$ and then at \ $\varphi = cst$, we immediately highlight the non-contractility of this surface. Let's now introduce the change of coordinate:

(52) $$\theta = arc\,cos\,\frac{r-R}{r_0}$$

The line element becomes :

(53) $$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{-R^2 + {r_0}^2 - r^2 + 2\,r\,R}$$

It is immediately apparent that the signature (+ +) will only be maintained if:

(54) $$R - r \leq r \leq R + r_0$$

Otherwise, we are outside the torus. The length is expressed as follows:

(55) $$s = \int \sqrt{r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r^2}}{-R^2 + {r_0}^2 - r^2 + 2\,r\,R}}\; ds$$

But we know that we will obtain the same system of Lagrange equations by doing:

(56) $$\delta \int \left(r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r^2}}{-R^2 + {r_0}^2 - r^2 + 2\,r\,R} \right) ds = 0$$

Lagrange's equations give us the projection of the curves resulting from this variation calculation onto the plane (r, φ):

(57) $$d\varphi = \frac{\pm\, h\, dr}{r^2 \sqrt{(-R^2 + {r_0}^2 - r^2 + 2\,r\,R)\left(1 - \frac{h}{r^2}\right)}}$$

This allows us to plot the projection of a geodesic of the torus:

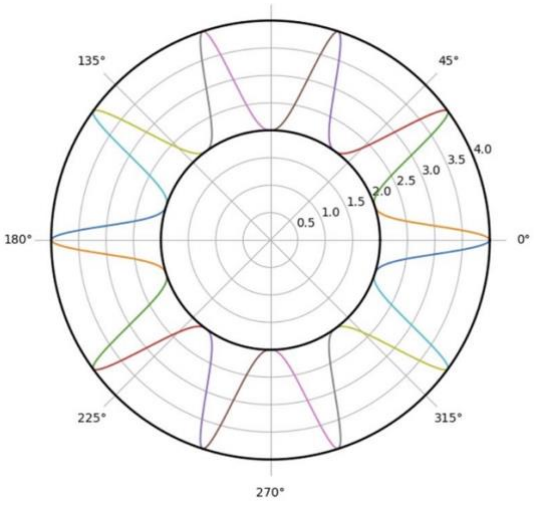


Fig.12: Projection of a geodesic of the torus.

Mais cette solution engendre également des courbes réelles qui sont la projection de courbes équipées d'une longueur imaginaire. Ci-après ces géodésiques virtuelles, à l'intérieur du tore:

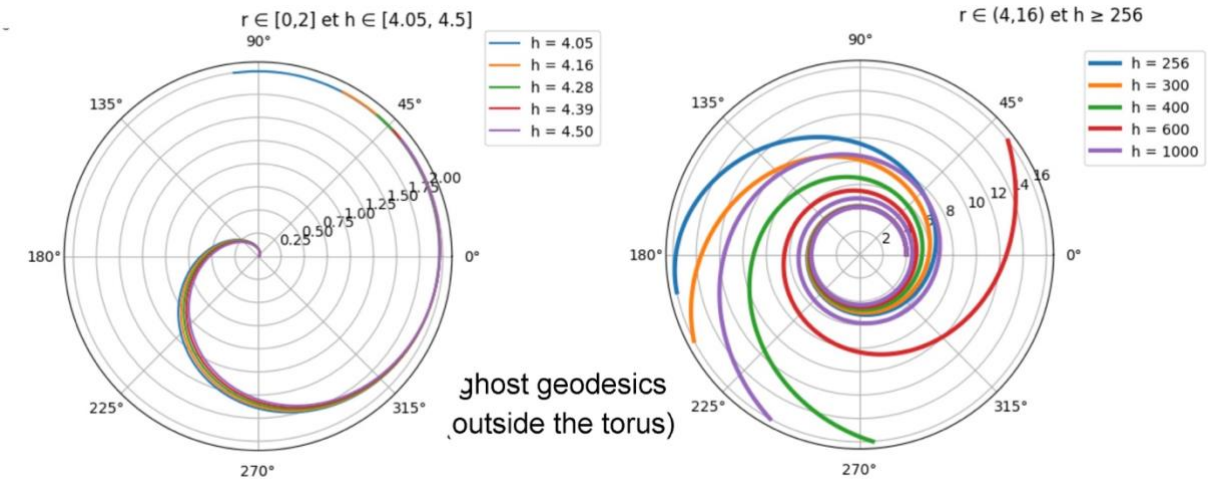


Fig. 13: Virtual geodesics of the torus "inside" its throat circle and "outside" its rim circle

A perspective view encompasses these results:

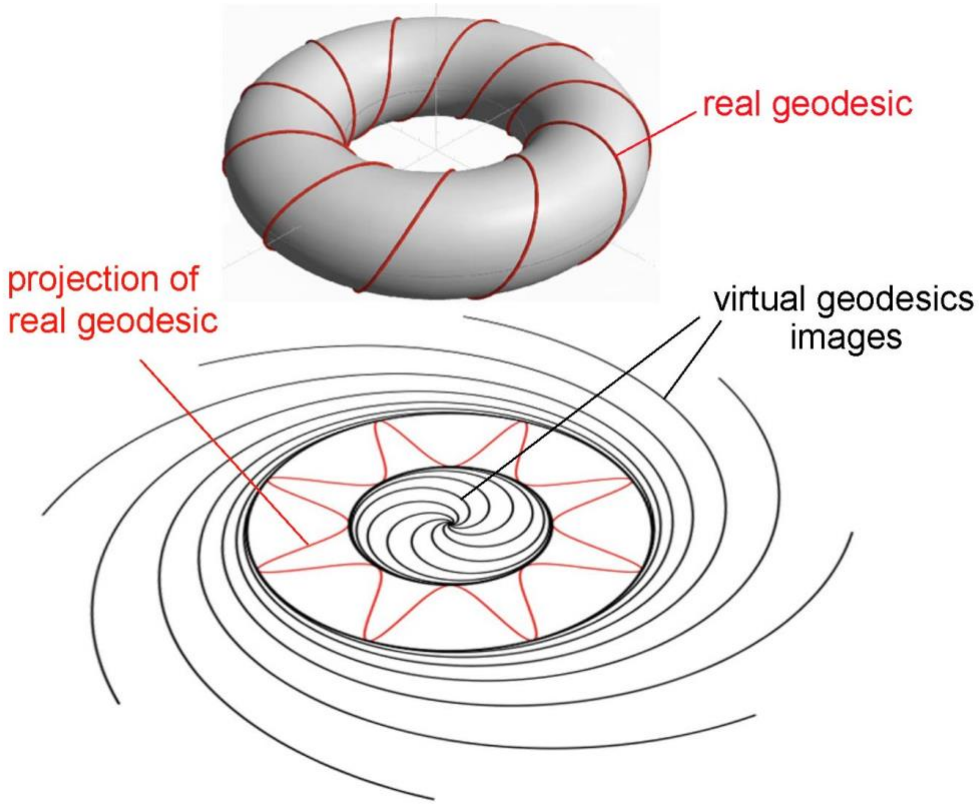


Fig.14: The torus, equipped with its (red) real and (black) virtual geodesics

Let's now turn to the sphere. The standard form of its metric is:

(58) $$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Let's make the following change of coordinate:

(59) $$\theta \; = \; arc\; sin\; \frac{r}{R}$$

The line element becomes :

(60) $$ds^2 \; = \; r^2 d\varphi^2 \; + \; \frac{R^2\, dr^2}{R^2 - r^2}$$

The variation calculation leads to the equation giving the projection of the geodesics:

(61) $$d\,\varphi \; = \; \frac{h\,R}{r} \frac{dr}{\sqrt{(R^2 - r^2)(\,r^2 - h^2)}})$$

We get that :

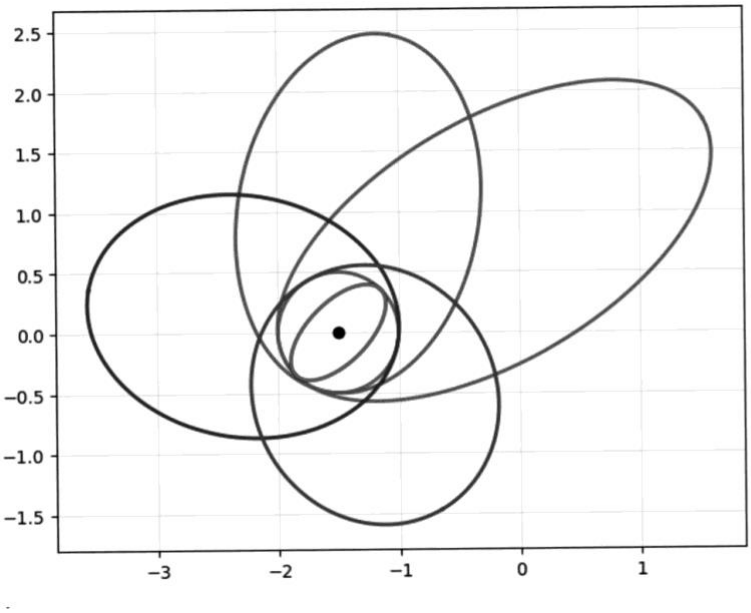


Fig.15 : Projections of geodesics and pseudo-geodesics of a sphere of radius 0.5

We have drawn, inside the circle, an ellipse, the projection of a geodesic of the sphere (these are "great circles"). But we have also drawn some of the projections of its "virtual geodesics". What are these curves, tangent to the sphere? Let's write:

(62) $$\frac{dr}{d\varphi} \; = \; \frac{r}{h\,R} \sqrt{(\,r^2 - \; h^2)\,(\,R^2 - \; r^2)}$$

Posing :

(63) $$r \; = \; \frac{1}{u}$$

(64) $$-\; \frac{d\varphi}{du} \; = \; \frac{1}{h\,R} \sqrt{(\;1 \; - \; h^2 u^2)\,(\,R^2 u^2 - \; \frac{11}{u^2}\,)}$$

(65) $$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \; + \; u \; = \; \frac{1}{h^2}$$

(66) $$u = \frac{1}{h^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0)$$

The parameter R disappears.

(67) $$r = \frac{h^2}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

We have just established the first theorem of *imaginary geometry*:

The projections of the virtual geodesics of the sphere are ellipses!

Below, a perspective view:

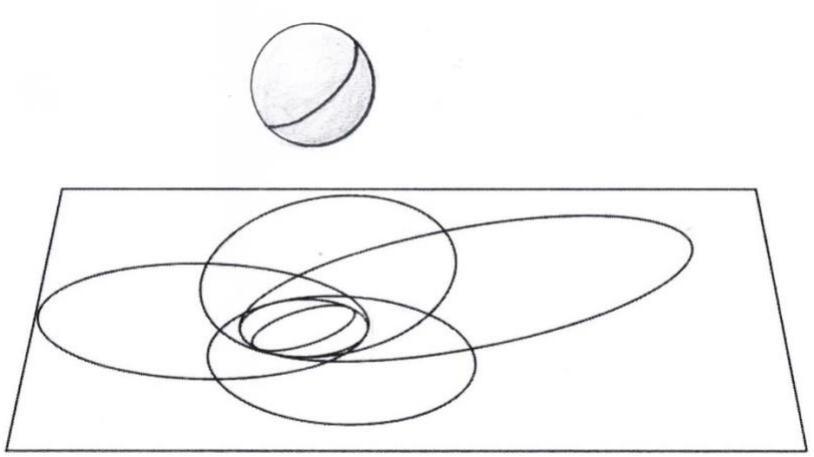


Fig.16 : Projection of geodesics and pseudo-geodesics of the sphere

Renowned scientists have produced some very elegant theorems about "the central singularity that black holes harbor at their center." Alas, these objects exist only in their imagination.

Using the Kerr metric would only complicate matters further. This object also possesses an event horizon, within which length, and therefore proper time, are purely imaginary. Thus, we would have the same phenomenon of extension through virtual geodesics, undoubtedly quite striking.
We can see, therefore, that the black hole model is a fantastic mathematical chimera, an artifact resulting from a flawed geometric interpretation. But one question remains: How is it possible to observe such continuity when, beyond the Schwarzschild circle, we construct the curve—real, but endowed with an imaginary length—that extends the geodesic?

9 – **The geodesics of the Schwarzschild solution in** 3D **space** (t, r, φ)

We will focus on the wormhole model, where two Schwarzschild solutions, in a form free of cross-terms in *drdt*, are associated to form a "space bridge". The curves then have the following schematic appearance:

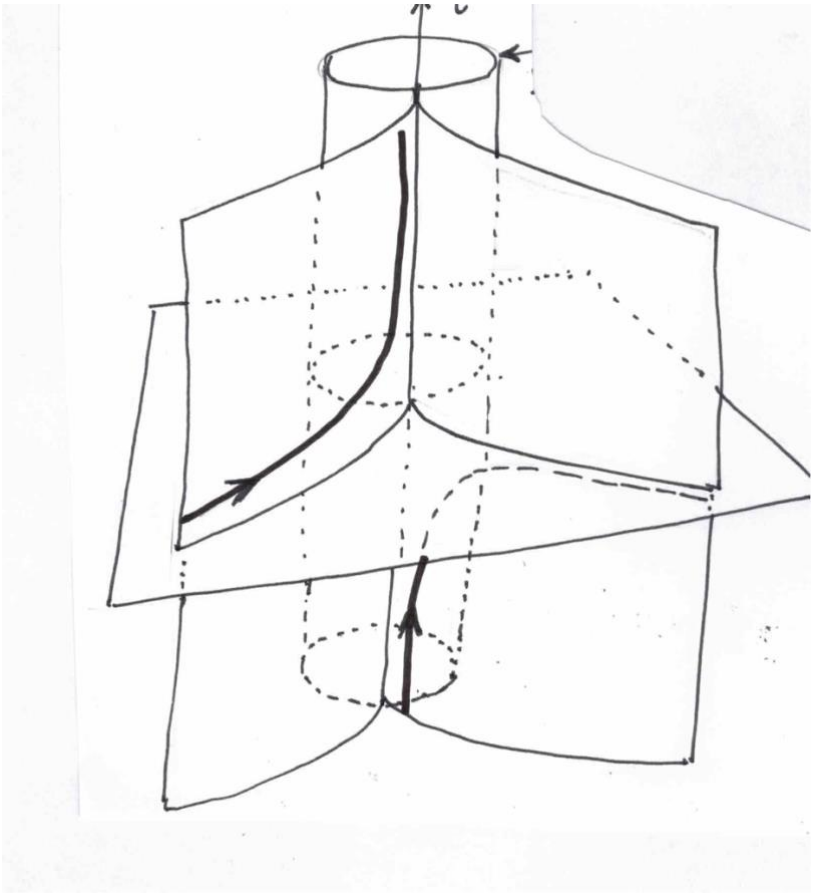


Fig.17 : Geodesics of the Schwarzschild wormhole in (t , r , φ)

We see that, evaluated using this coordinate t (called the "Schwarzschild time"), the free-fall and escape times are infinite. Crossing the throat sphere is then accompanied by a discontinuity in the geodesic. The figure shows the trace of these trajectories in their projection onto the plane. The break is therefore linked to the projection (r , φ). This explains why theorists were encouraged to extend this geodesic along a curve spiraling towards the center. The continuity was only apparent. We can now move on to a Koiran wormhole [55,51] where two Schwarzschild solutions are conjugate, with crossed terms of opposite signs;

In our own old (attractive field):

$$(68)\quad \boldsymbol{ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}$$

In the adjacent fold (repulsive field):

$$(69)\quad \boldsymbol{ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}$$

Since we are trying to model the embedding in the wormhole and its emergence in the adjacent sheet, we have represented the direction of time (this time coordinate t_E, of Eddington), downwards:

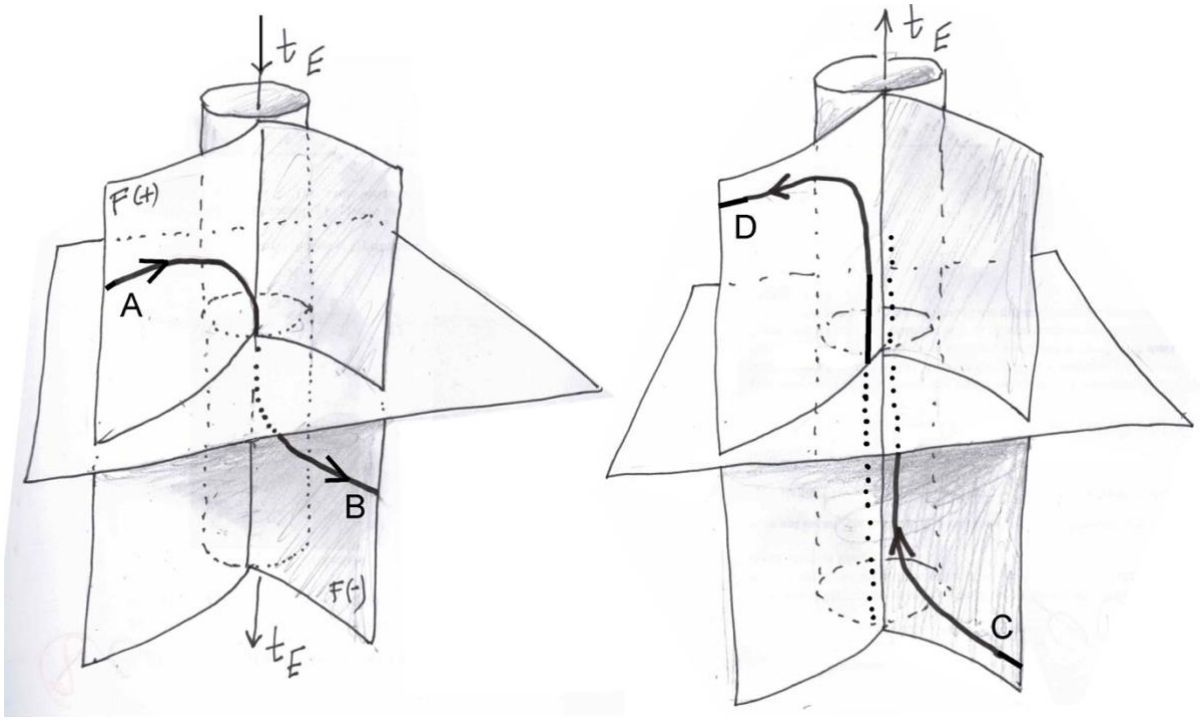


Fig.18 : Geodesics of the Koiran wormhole in (t_E , r , φ)

Wormholes do not belong to the realm of physics, as there, too, one would be considering describing a highly unsteady process using a steady-state solution. These images are simply intended to provide an interpretation of a geometric solution exhibiting continuity in geodesics. This interpretation of the solution illustrates the concept of a one-way membrane. Geodesics do not behave the same way depending on whether they are plunging or emerging.

On the left, at A, a control mass reaches the throat sphere in a finite time, and at B emerges from it into the second layer, also in a finite time. On the right, a control mass moving towards the throat sphere at C reaches it in an infinite time. At D, it emerges in an infinite time. Transit in the reverse direction is therefore impossible.

The figure on the left also shows the projection of the geodesics onto the plane (r , φ),, with their apparent break, which had led theorists to project these curves along a spiral converging towards the "center." The figure on the left, the only one depicting a physical phenomenon, shows a continuous geodesic, and it is its projection that produces this apparent break. To the cosmologists' credit, it must be admitted that this apparent continuity of the tangent in the plane (r , φ), was entirely convincing enough to encourage them to consider such an extension.

10 – **When the black hole model becomes, in the 21st century, the equivalent of the atom.**

In 1989, seventy-three years after Hilbert's publication, the Canadian mathematician L. Abrams was the first to publish an article entitled "The black holes: the legation of Hilbert's error" [56]. In 2004, A. Loinger published a new article entitled "Black holes do not exist. Thus spoke Karl

Schwarzschild" [57]. In 2011, C. Corda attempted to refute these arguments [58]. The fact that these exchanges are located exclusively in the arXiv database, moreover in its "physics" section and not in the section where cosmologists publish their preprints: "general relativity and quantum gravity, abbreviated gr-qc," shows that no peer-reviewed journal has seen fit to submit to its reviewers an article questioning the existence of black holes. Thus, this journal is the first to address this question in an article [25] where we have simply reiterated and expanded upon arguments raised in previous articles, to general indifference. Conversely, the article [59] published in 2019 by Robbert Dijkgraaf, current director of the prestigious Institute for Advanced Study in Princeton, a veritable Mecca of world science, founded in 1930 and to which Einstein and Oppenheimer belonged, reveals the general adherence of current theorists to this model. It is 2019. The EHT has just obtained the first image of the supermassive object located at the center of the galaxy M87 [60]. Note the title of the article: The Shadow of the Supermassive Black Hole. It is a black hole… "because we cannot see what else it could be." Dijkgraaf, who is very active in science education, writes, and we quote [59]:

> *The iconic black hole image released by the Event Horizon Telescope collaboration has gone viral these days.… It is difficult to overestimate the importance of this discovery. There is only one moment in human history when we will have seen a black hole for the first time … Black holes thus play a similar role as atoms did a hundred years ago … The black hole is just such a paradox, the atom of the twenty-first century.*

It is clear that it will prove very difficult to position this question within a scientific community that has made black holes the idols of a religion of dreary times, especially since an alternative interpretation of the available observational data : plugstars, has just emerged. [61]

11 – **David Hilbert's stange conception of space-time**.

We now return to 1916. Hilbert felt compelled to report, in an expanded version of his 1915 paper, on these solutions to the field equation, which had recently appeared in the literature. But physical applications remained quite new to him, as he had been navigating this world since July 1915 as if on another planet. When one reads his 1916 article [48], one realizes that he had not yet incorporated the concept of spacetime as defined by Minkowski in 1909, namely that the time coordinate *t*, modulo the multiplicative coefficient c, thus becoming the quantity *ct*, like *x, y*, and *z*, is expressed in meters. It's as if an ancient surveyor, after starting with land surveying and measuring length and width, suddenly realized that heights and altitudes can also be expressed in acres, miles, feet, and meters, and that by turning one's head 90 degrees, it's possible to consider things differently, from another angle. The same applies to relativity, except that it's the Lorentz group that allows us to perform these strange four-dimensional rotations.

In his first article [26], Hilbert constructed his field equation with his set of coordinates $\{ w_1, w_2, w_3, w_4\}$, without ever needing to specify the nature of these quantities, where the three coordinates $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ refer to space and w_4 to time. Strangely, Hilbert's article makes no mention of the second solution published by Schwarzschild, describing the geometry inside the masses [47]. He never attempts to incorporate into his paper anything other than Schwarzschild's first solution, which refers to the vacuum [43].

In his article, attention should be focused on certain key passages that reveal Hilbert's conception of the universe. It is essential to keep in mind that in 1916 the universe was not evolving and relativistic physics did not yet exist. The curvatures affecting it were merely minute perturbations unfolding within a decidedly Euclidean framework, associated with metric potentials $\delta_{\mu\nu}$. We read:

Im Falle der pseudo-Euklidischen Geometrie haben wir

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

worin

$$\delta_{\mu\mu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

bedeutet. Für jede dieser pseudo-Euklidischen Geometrie benachbarte Maßbestimmung gilt der Ansatz

Fig. 19: Hilbert's "pseudo-Euclidean" view of spacetime [48].

Translation :

In the case of the pseudo-Euclidean geometry we have

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

where

$$\delta_{\mu\nu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

For every metric in the neighborhood of this pseudo-Euclidean geometry the ansatz

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \ldots \qquad (37)$$

is valid, where ε is a quantity converging to zero, and $h_{\mu\nu}$ are functions of the w_s.

Fig. 20: Spacetime, according to Hilbert, is pseudo-Euclidean.

The matrix $\delta_{\mu\nu}$ is the identity matrix. The spacetime metric, according to Hilbert, is therefore:

(70) $$ds^2 = g_{11}dw_1^{\,2} + g_{22}dw_2^{\,2} + g_{33}dw_3^{\,2} + g_{44}dw_4^{\,2}$$

Then, the « signature » of his bilinear for mis (+ + + +)

In Hilbert's theory, spacetime is not defined by a metric. *It is determined by a bilinear form*. The difference is crucial. If its points are located along a trajectory using a parameter *p*, he writes:

$$(71)\quad G\left(\frac{dw_1}{dp},\frac{dw_2}{dp},\frac{dw_3}{dp},\frac{dw_4}{dp}\right) = g_{11}\left(\frac{dw_1}{dp}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{dw_2}{dp}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{dw_3}{dp}\right)^2 + g_{44}\left(\frac{dw_4}{dp}\right)^2$$

In the following figures, Hilbert, in his own way, attempts to integrate into the new version of his memoir "Foundation of Physics" [48] the exact solution that Karl Schwarzschild had just published in January 1916 [43], the one describing the geometry of the void surrounding a mass. In the plate below, you will find gathered all the errors made by Hilbert that would become the foundation of "modern cosmology." Let us begin with the German text:

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

$$w_1 = r\cos\vartheta$$
$$w_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$w_3 = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
a → $$w_4 = l$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

$$(42)\qquad F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) + H(r)\,dl^2$$

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

b → $$r^* = \sqrt{G(r)},$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen $*$ weg, so entsteht der Ausdruck

$$(43)\qquad M(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + W(r)\,dl^2,$$

wo $M(r)$, $W(r)$ die zwei wesentlichen willkürlichen Funktionen von r bedeuten. Die Frage ist, ob und wie diese auf die allgemeinste Weise zu bestimmen sind, damit den Differentialgleichungen (36) Genüge geschieht.

Zu dem Zwecke müssen die bekannten in meiner ersten Mitteilung angegebenen Ausdrücke $K_{\mu\nu}$, K berechnet werden. Der erste Schritt hierzu ist die Aufstellung der Differentialgleichungen der geodätischen Linien durch Variation des Integrals

c → $$\int\left(M\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + W\left(\frac{dl}{dp}\right)^2\right)dp.$$

Fig.21: The errors made by Hilbert, in their original version [48].

Translation :

The assumptions about the $g_{\mu\nu}$ are the following:

1. The metric is represented in a Gaussian coordinate system, except that g_{44} is left arbitrary, i.e. we have

$$g_{14} = 0, \qquad g_{24} = 0, \qquad g_{34} = 0.$$

2. The $g_{\mu\nu}$ are independent of the time coordinate x_4.
3. The gravitation $g_{\mu\nu}$ is centrally symmetric with respect to the origin of coordinates.

According to Schwarzschild the most general metric conforming to these assumptions is represented in polar coordinates, where

$$w_1 = r\cos\vartheta$$
$$w_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$w_3 = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$w_4 = l,$$

a

by the expression

$$F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dl^2 \qquad (42)$$

where $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ are still arbitrary functions of r. If we put

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

b

then we are equally justified in interpreting r^*, ϑ, φ as spatial polar coordinates. If we introduce r^* in (42) instead of r and then eliminate the sign *, the result is the expression

$$M(r)dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + W(r)dl^2, \qquad (43)$$

where $M(r)$, $W(r)$ mean the two essential, arbitrary functions of r. The question is whether and how these can be determined in the most general way so that the differential equations (36) enjoy satisfaction. |

To this end the well-known expressions $K_{\mu\nu}$, K given in my first communication must be calculated. The first step in this is the derivation of the differential equations for geodesic lines by variation of the integral

$$\int\left(M\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + W\left(\frac{dl}{dp}\right)^2\right)dp.$$

c

Fig. 22: Hilbert's multiple errors, all on the same plate.

→ As you can see is **a** , the calculations will be undertaken without the specific nature of this fourth coordinate being defined. Hilbert feels no need for it at this stage. In his equation (42), we find its bilinear form, with three unknown functions $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$, to be determined. He knows that in polar coordinates, the bilinear form that gives substance to Euclidean space is:

(73) $$dr^2 + r^2d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2$$

→ In **b**, replacing the function G(r) with it therefore seems to be a way to simplify the calculation by converging more quickly towards the expected result. Especially since this form must be identified with (73) at infinity. This is the error that L. Abrams pointed out in 1989, *seventy-three years* later [56].

→ In **c**, Hilbert defines its action. We disregard the length. We saw the consequences above. It remains for him to calculate the coefficients of his Ricci tensor, which he denotes by $K_{\mu\nu}$, and to calculate the Christoffels coefficients. And the field equation is then, in a vacuum, simply:

(74) $$K_{\mu\nu} = 0$$

Having completed all calculations, here is its result, that is to say its bilinear form, still expressed using this fourth time coordinate *l*.

(75) $$G(dr, d\theta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta \, d\varphi^2 + \frac{r-\alpha}{r} \, dl^2$$

with signature (+ + + +)

Since it was necessary to recover Schwarzschild's result, Hilbert posited $l = it$, which shows that he had not at all incorporated the vision of Einstein and Minkowski and remained attached to the hypothesis initially proposed by Poincaré in 1902 [16], then by Minkowski in 1907 [21] (which the latter would abandon the following year). Despite eight months of intense dialogue with Einstein:

→ For Hilbert, Special Relativity boils down to the fact that time is purely imaginary

This leads him to reformulate his result according to:

(76) $$G(dr, d\theta, d\varphi, dt) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta \, d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} \, dt^2$$

→ Thus, in December 1916, we have the birth certificate of the "modern" signature:

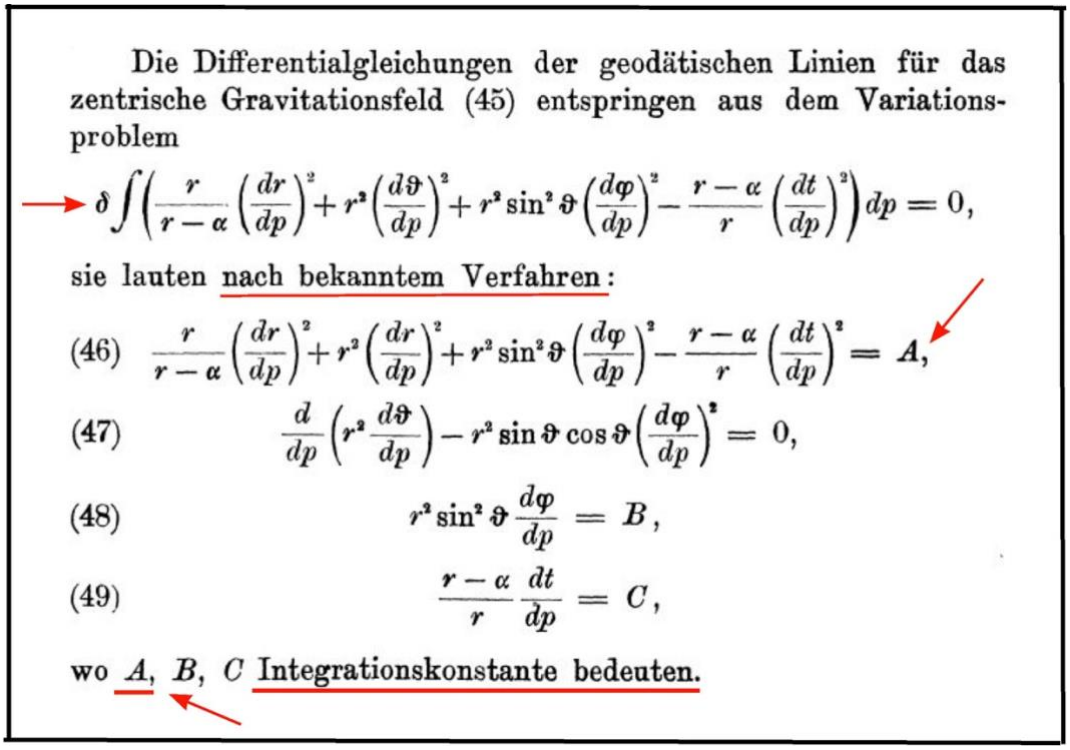
(+ ++ -)

Neglecting differences in sign, Hilbert concludes that this expression is, in his opinion, identical to the result published by Schwarzschild. He then mentions, in a footnote, this change of variable used by Schwarzschild:

(77) $$R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

He considers this a way to bring the singularity (at $r = \alpha$) back to the origin (at $r = 0$), specifying that "there are simpler ways to do this." This is without realizing that his simplification **b** transforms his initial variable *r*, which he considers "radial," into this "intermediate quantity" *R* of Schwarzschild.

He still needs to construct the geodetic trajectories. He then performs the variation according to:



Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien für das zentrische Gravitationsfeld (45) entspringen aus dem Variationsproblem

$$\delta \int \left(\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \right) dp = 0,$$

sie lauten nach bekanntem Verfahren:

$$\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A, \tag{46}$$

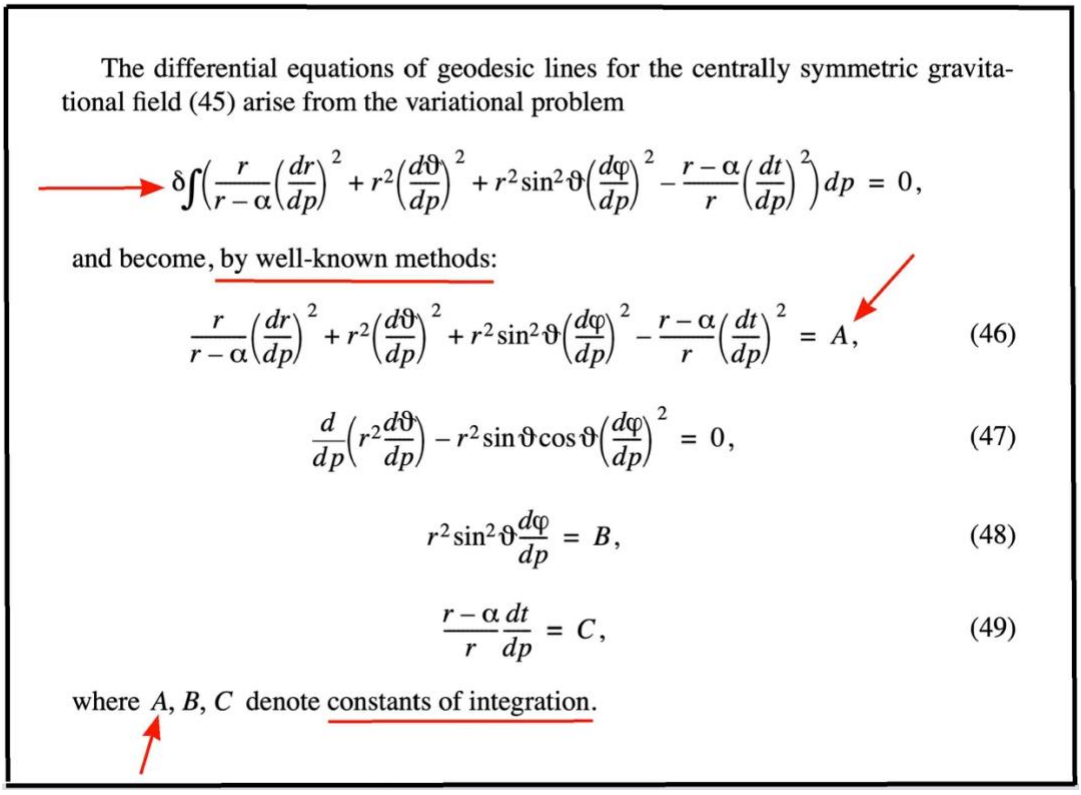
$$\frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp}\right) - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0, \tag{47}$$

$$r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{48}$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} = C, \tag{49}$$

wo A, B, C Integrationskonstante bedeuten.

Fig.23: Hilbert's variational approach [48]



The differential equations of geodesic lines for the centrally symmetric gravitational field (45) arise from the variational problem

$$\delta \int \left(\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \right) dp = 0,$$

and become, by well-known methods:

$$\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A, \tag{46}$$

$$\frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp}\right) - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0, \tag{47}$$

$$r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{48}$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} = C, \tag{49}$$

where A, B, C denote constants of integration.

Fig. 24: Hilbert's variational approach (translation)

This part of his article [48] is perhaps the one that most deserves our attention. In 1915, Hilbert introduced [27] the variational technique into cosmology for the first time, which allowed him

to use it to construct the field equation. His genius lay in constructing the action based on the Ricci scalar, which he called *K*, and on the four-dimensional hypervolume $\sqrt{[g]}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. The scientific community would later designate this approach as based on the "Hilbert-Einstein action." In these diagrams, the first red arrow shows that the action is constructed not on the elementary length, but using the bilinear form. Of the four equations (46), (47), (48), and (49) in Figures 23 and 24, the last three are the Lagrange equations, which are derived from the indicated variation. However, equation (46), which assumes the constancy of the bilinear form, is an additional assumption of Hilbert's, the very one that explains why his chosen action will indeed yield the geodesics, even though the action is not designed to minimize the length, but its square. See what was explained above. In the subsequent calculation, Hilbert concludes that this constant A must be negative.

Nach dem obigen Axiom soll die Weltlinie für die Bewegung eines Massenpunktes Zeitlinie sein; aus der Definition der Zeitlinie folgt mithin stets $A < 0$.

Translation :

According to the axiom above the world line for the motion of a point mass shall be a time line; from the definition of the time line it thus follows that always $A < 0$.

Fig.25: New implicit inversion of the signature of the bilinear form.

The solutions to these equations must be timelines. Now, in this same article, Hilbert defines the proper time associated with a timeline, adding in passing another "length λ" this time associated with trajectories that will later be described as "space-like":

Ist in dieser Geometrie eine Kurve

$$x_s = x_s(p) \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wo $x_s(p)$ irgend welche reelle Funktionen des Parameters p bedeuten, so kann diese in Teilstücke zerlegt werden, auf denen einzeln der Ausdruck

a → $$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

nicht sein Vorzeichen ändert: ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

ausfällt, heiße eine *Strecke* und das längs dieses Kurvenstücks genommene Integral

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Länge der Strecke*; ein Kurvenstück, für welches

b → $$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

ausfällt, heiße eine *Zeitlinie* und das längs dieses Kurvenstückes genommene Integral

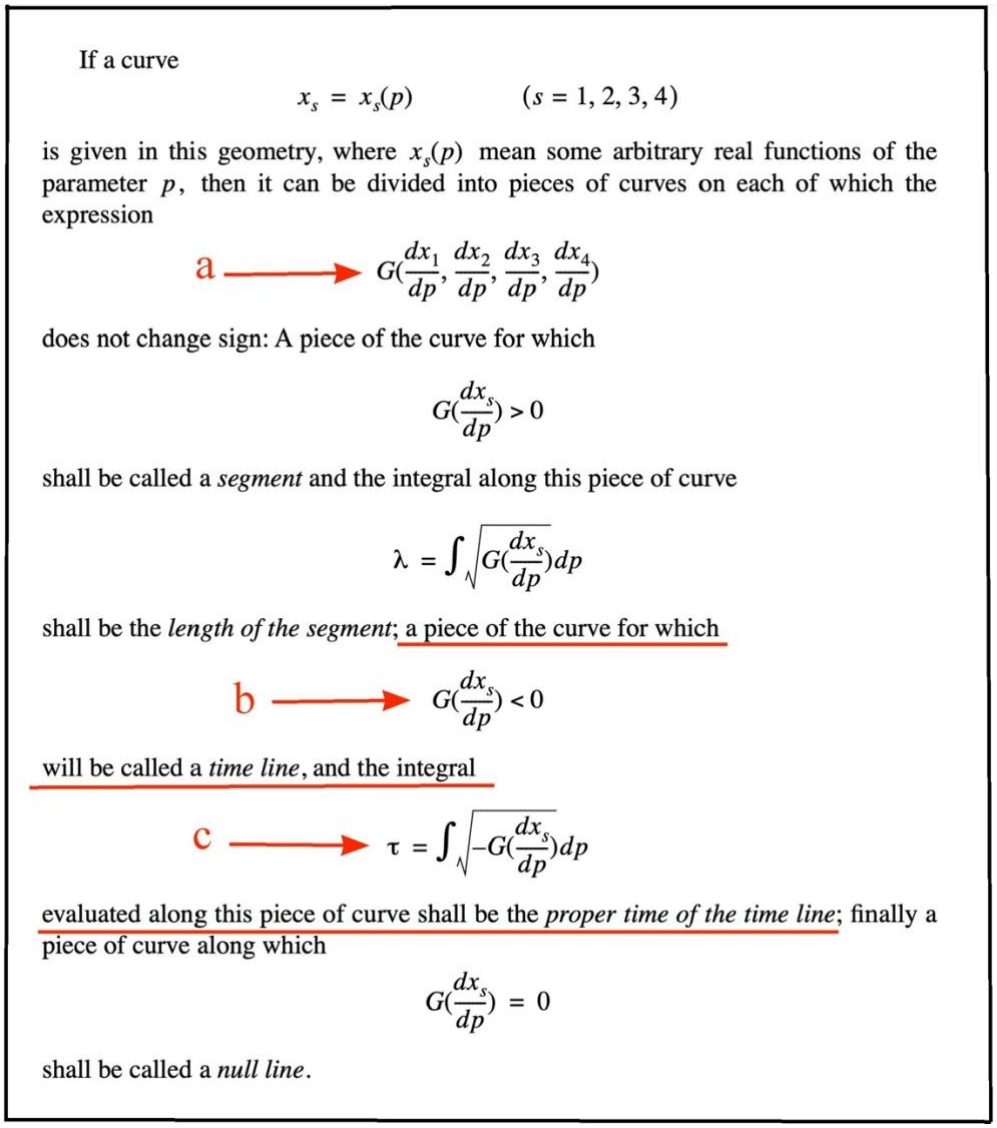
c → $$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Eigenzeit der Zeitlinie*; endlich heiße ein Kurvenstück, längs dessen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

wird, eine *Nullinie*.

Fig.26: The two lengths introduced by Hilbert [48]



If a curve

$$x_s = x_s(p) \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

is given in this geometry, where $x_s(p)$ mean some arbitrary real functions of the parameter p, then it can be divided into pieces of curves on each of which the expression

a ⟶ $G(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp})$

does not change sign: A piece of the curve for which

$$G(\frac{dx_s}{dp}) > 0$$

shall be called a *segment* and the integral along this piece of curve

$$\lambda = \int \sqrt{G(\frac{dx_s}{dp})}dp$$

shall be the *length of the segment*; a piece of the curve for which

b ⟶ $G(\frac{dx_s}{dp}) < 0$

will be called a *time line*, and the integral

c ⟶ $\tau = \int \sqrt{-G(\frac{dx_s}{dp})}dp$

evaluated along this piece of curve shall be the *proper time of the time line*; finally a piece of curve along which

$$G(\frac{dx_s}{dp}) = 0$$

shall be called a *null line*.

Fig.27 : Translation.

In **a** its bilinear form **G**, which therefore corresponds to equation (76). Now, in Figure 25, he has just determined that, for these trajectories to have physical meaning, to be timelines, G is negative. We are therefore in case b. So, why introduce this catch-up c which allows us to obtain a real proper time? Wouldn't it be simpler and more logical, given this sign constraint, to return to the fundamentals introduced by Einstein, Schwarzschild, Wey, Droste, and all the others, and simply write:

(78) $$G(dr, d\theta, d\varphi, dt) = ds^2 = \frac{r-\alpha}{r}\,dt^2 - \frac{r}{r-\alpha}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2\theta\, d\varphi^2$$

with signature $(+ - - -)$

This would then align with Schwarzschild's result of January 1916 and, by taking a unit value for the speed of light as he did, would transform his expression **c** into:

(79) $$\tau = s = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\,dp$$

We see in this section that several things came into play, initially stemming from Hilbert's vision of spacetime as Euclidean geometry, suddenly accompanied by a time coordinate that reveals its relativistic nature, that of a purely imaginary entity. Then, while retaining his signature (+++), to recover a real proper time, he had to change the sign of his bilinear form to a radical sign. These are subtleties of which we find little trace in works devoted to cosmology. Adding this question of virtual geodesics, everything was then in place to give birth to a chimera: the model of the black hole. The transition from the original signature (+ + + -), where the guiding thread, allowing exploration of the solution hypersurface, defined by its metric being to stick to a real length s, to a metric, called modern (+ - - -) has caused this thread to be lost, leading to expressions like $d\tau = \sqrt{-ds^2}$ et and, on the level of a physical interpretation to this surrealistic conclusion that "inside the black hole the coordinates of time and space exchange their respective roles".

11- **Conclusion**.

This second article complements what was presented in the first [25], where the mathematical and geometric inconsistency of the black hole model was outlined. It discusses the approach that gradually brought to light the true geometric context of special relativity, Minkowski space, with its signature (+ - - -). It recalls that the requirement for subluminal speeds boils down to the imperative of considering only trajectories of real length s, that is, with $ds^2 \geq 0$. It is shown that this principle guided the approaches of all cosmologists for half a century, until the appearance of the signature (- + + +) which has now become widespread, even though, at least in cosmology, this change is not based on any ontological argument, and no article advocates such an option.

We return to the creation of the field equation by Hilbert in 1915, using the variational method. We recall that this was done within a four-dimensional framework without mentioning the particular role played by the time coordinate w_4.

Returning to the solution presented by Schwarzschild in January 1916, we recall that the spiral trajectories towards the geometric center are in fact merely an artifact resulting from an erroneous application of the solutions to Lagrange's equations, used to construct geodesics, and that these real portions of curves are endowed with an imaginary length (and therefore a proper time). We propose to designate them as virtual geodesics. To illustrate the concept, we construct the virtual geodesics of the torus and the sphere.

It is noted that while Schwarzschild spacetime geodesics are inscribed, in the planes $\theta = Cst$, on the Flamm surface, they differ from the geodesics of this surface. 3D images of spacetime geodesics are produced in a coordinate system (t, r, φ).

Finally, we examine carefully how, in his December 1916 article [48], David Hilbert attempted to integrate Schwarzschild's result, focusing exclusively on the stationary solution of the homogeneous field equation [43] and completely neglecting its logical complement, the interior metric [47]. He then treats this solution of the homogeneous field equation for a bilinear form, not as a metric; at no point in either of his articles does an equation begin with $s^2 = etc$.

This amounts to him granting himself the freedom to choose the elements of the signature, in a stationary solution with spherical symmetry, expressed using coordinates (x, y, z, l), and, considering that physical phenomena, whether special relativity or curvature effects, are merely small perturbations of a fundamentally Euclidean geometry, he opts for the signature (+ + + +). It is only after all calculations have been done that he translates his conception of relativity by giving his time coordinate l a purely imaginary nature it , thus adhering to an idea initially introduced in 1902 by Poincaré [62], taken up by Lorentz in 1904 [16] and then by Minkowski in 1907 [21]. The signature then becomes (+ + + -). Without attaching importance to the inversion of the signs, he concludes that he has thus rediscovered Schwarzschild's metric

To obtain the geodesics, he constructs the Lagrange equations using the bilinear form $G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)$ as the Lagrange function. Since this form is constant (so that the geodesics can be derived from it and are time lines), and also negative, this observation should have led him to reverse the signs and opt for (- - - +). However, to obtain a real proper time, he chooses to add a minus sign under the radical:

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

When, in 1916, Hilbert discovered that Einstein and Schwarzschild had produced linearized and non-linearized solutions to the field equation, he hastened to incorporate them by publishing, with the same title, a new version of his 1915 article, "Foundations of Physics." His choice to completely ignore the solution with a non-linear term suggests a certain haste on his part, inconsistent with his legendary rigor. It is worth noting that he sent this new article on December 23, 1916, Christmas Eve. The general impression is that, in this rather rough second article, two approaches clash. Clearly, Hilbert did not subscribe to this new view of the universe, as Minkowski had just specified it in 1909, which stemmed from the definition of length and was accompanied by a signature (+ - - -). It then becomes clear that for him, it is not this definition of length that structures space, but a bilinear form. What also emerges is that Hilbert considers these new contributions, such as relativity and curvature, to be only very small perturbations to a space he conceives as fundamentally Euclidean. Indeed, a phenomenon like the advance of Mercury's perihelion represents only a tiny perturbation compared to Newtonian dynamics. At that time, no one could imagine that a relativistic physics would one day emerge, where objects could move at speeds so close to that of light, like "cosmic rays," to the point that relativistic corrections must be taken into account to interpret their apparent lifespan. In 1916, astrophysicists were well aware that the Schwarzschild radius was negligible compared to the radius of the Sun, and probably of stars in general. Who would have imagined at that time that hyperdense objects, such as neutron stars, or those located at the centers of galaxies, would one day take their place in the cosmic bestiary?

The general impression, after the interlude of the Second World War, is that something was lost at that time: a certain mastery of geometry (think of the analysis published by Flamm in 1916). As noted in our two articles, this chimera of the black hole stems from a complete disregard for topological aspects, the basis of the Janus Cosmological Model, which originates in the work of the mathematician Werner Boy [63], who, like Schwarzschild, enlisted at the outbreak of the First World War and died almost immediately in France on September 6, 1914. If these two had remained alive, the face of science would undoubtedly have been different. Everything suggests that after the Second World War, those who called themselves cosmologists simply reproduced

these different elements identically, including the inversion of the signature, as if they were simple words of the Gospel, completely missing "the train of topology".

References.

[1] Huygens C. Traité de la lumière, où sont expliquées les causes de ce qui lui arrive dans la réflexion & dans la réfraction. Edité par Pieter van der Aa, libraire-éditeur. 1690.
[2] Newton, I. (1704). *Opticks*. London: Samuel Smith & Benjamin Walford.
[3] Young, T. (1802). *On the theory of light and colours* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 92, p. 12–48.
[4] Fraunhofer, J. (1814) *Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten* Denkschriften der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu München. 5, p. 193–226.
[5] Fresnel A.J. Mémoire sur la diffraction de la lumière *Annales de chimie et de physique*, 11 (1819), p. 246–296.
[6] Bessel, F. W. (1838) *Bestimmung der Entfernung des 61sten Sterns des Schwans* Astronomische Nachrichten, 16, p. 65–96.
[7] Christian Doppler C. (1842). *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels* Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 2, p. 465–482.
[8] Buys Ballot, C. (1845) *Akustische Versuche auf der Niederländischen Eisenbahn* Poggendorffs Annalen der Physik, 66, p. 321–351.
[9] Maxwell J.C. (1865). A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **155**, p. 459–512.
[10] Fizeau H. *Sur l'effet Doppler dans les phénomènes lumineux* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 26, p. 342–345.
[11] Huggins, W. (1868) *On the motions of some of the stars towards or from the Earth* Proceedings of the Royal Society of London, 16, p. 318–331.
[12] Michelson, A. A., & Morley, E. W. (1887). *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*. American Journal of Science, 34, p. 333–345.
[13] Michelson, A.A. & Morley, E.W. (1887) *On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether* American Journal of Science, 3rd Series, volume 34 (203), pages 333–345 (Novembre 1887). DOI : 10.2475/ajs.s3-34.203.333
[14] Lorentz, H. A. (1892) *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps en mouvement* Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, 25, p. 363–552.
[15] Lorentz, H. A. (1895) *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*
Leiden: Livre édité par E. J. Brill.
[16] Lorentz, H. A. (1904) *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* Proc. Royal Netherlands Academy, 6, 809–831.
[17] Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körpner.Annalen der Physik zei4 Vol 17 (1905) pp/ 89-92
[18] Poincaré H. *Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* 23 juillet 1905 publicated : Dec 1905 / jan 1906 DOI: https://doi.org/10.1007/BF03013466
[19] Riemann, B. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (« Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie »). Publié de manière posthume

en 1867 dans la revue Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, vol.13 pp 133-150
[20] Lie, S. & Engel, F. (1888–1893). *Theorie der Transformationsgruppen*.Leipzig: B. G. Teubner.
[21] Minkowski H. (1907) Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern (*Les équations fondamentales des phénomènes électromagnétiques dans les corps en mouvement*) Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse,
[22] Minkowski, H. (1909). *Raum und Zeit (space and time)*. *Physikalische Zeitschrift*, 10, 75–88. (conference in 1908, publication in 1909)
[23] Sylvester, J. J. (1852) *On the Law of Inertia of Quadratic Forms* Philosophical Magazine**,** 4e série**,** 4, p. 138–142.
[24] Gram, J. P. (1883) *Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 94, p. 41–73.
[25] J-P Petit & G. D'Agostini. Mathematical and geometrical inconsistency of the black hole model. Journal of Modern Physics, &&& 2026.
[26] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Esrte Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. (20 novembre 1915) 395-407.
[27] D.Hilbert. The foundations of Physics (first communication). English translation. Boston Series in Philosophy and Science. Copyright Springer, Vol.250 2007 https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-4000-9_44
[28] A.Einstein : Die feldgleichungen der gravitation Sitzungsberichte der Königlich Preubishen 25 November 1915
[29] Albert Einstein – David Hilbert: Briefwechsel (correspondance). Renn Jürgen and Sauer Tilman. *Wissenschaftliche Korrespondenz.* Springer-Verlag (Vieweg) Braunschweig / Wiesbaden. 1997.
[30] Renn Jürgen **:** The Genesis of General Relativity. Springer, 2007
[31] J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhaüser Ed. 1997
[32] Kostant B, "Quantization and Unitary Representations" *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, Lecture Notes in Mathematics 170, Springer (1970).
[33] Kostant B. On the Definition of Quantization. *Géométrie symplectique et physique mathématique*, Coll. CNRS n°237, Paris (1975), p. 187–210.
[34] Kirillov A. Unitary representations of nilpotent Lie groups. *Russian Mathematical Surveys* **17**(4) (1962), 53–110
[35] Kirillov A. Merits and Demerits of the Orbit Method. *Bulletin of the AMS* (N.S.) **36** (1999), 433–488
[36] J-P Petit (1981). http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/English/EVERYTHING_IS_RELATIVE.pdf
[37] J-P Petit, H.Zejli : Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group. Reviews in Mathematical Physics. Vol. 37, n001, 2024.
[38] J-P Petit, F.Margnat, H.Zejli : A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach. Th European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024)
[39] J-P Petit , G.d'Agostini. Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. October 2025.
[40] J-P Petit, Topo the World, 1985. http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/English/Topo_the_world_eng.pdf

[41] J-P Petit : The missing mass problem. Il Nuovo Cimento B Vol. 109 July 1994, pp. 697-710
[42] A.Einstein : Erlklärung der Perihelbewegung des Merkur aus allgemeinen Relarivitätstheorie. Königlish Preubische Akademie der Wissenschaften (Berlin) Sitzungberichet (25 nov. 1915) p. 831-838
[43] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld Messenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sit. Deut. Akad. Wiss. 1916English translation by S.Antoci and A.Loinger. On the gravitational field of a mass point according to Einstein theory. arXiv :physics/9912033v1 [physics.hist-ph] 16 dec 1999.
[43] Le Verrier U. (1846) *Détermination de la position de la planète qui produit les perturbations d'Uranus* Comptes rendus**,** 23, p. 914–918. (1846)
[44] Le Verrier, U. *Théorie du mouvement de Mercure*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences**,** 49, p. 379–383. (1859)
[45] Le Verrier U. *Sur une planète qui pourrait exister en deçà de l'orbite de Mercure* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences**,** 50, p. 7–13. (1860)
[47] K. Schwarzschild **:** Über das Gravitionalsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916. English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluide according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.
[48] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Esrte Mitteilung). Nachrochten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1916) . The foundations of Physics (second communication). English translation. Boston Series in Philosophy and Science. Copyright Springer, Vol.250 2007 https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4020-4000-9_45
[49] H.Weyl : Zu Gravitationstherie. Annalen der physik, Vol.35 n° 18 (1917) Reprinted: On the Theory of Gravitation. Reprinted in Gen. Relat. And Gravit. Vol.44, pp.779-810
[50] Ludwig Flamm. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zestschrift XVII (1916) pp. 448-454.
[51] J.Droste – The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Ned. Acad. Wer. SA 1917 lutecium.fr. KNAW, Proceedings 19 I , 1917, Amsterdam, pp. 197-215
[51] J-P Petit, G.D'Agostini. Mathematical and geometrical inconsistency of the black hole model. Journal of Modern Physics &&&
[52] S.Chandrasekhar :The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford University Press 1992
[53] R.Adler, M.Bazin & M.Schiffer : Introduction to General Relativity Mc Graw Hill Book 1965-1975. Equation (6.90).
[54] Ludwig Flamm. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zestschrift XVII (1916) pp. 448-454.
[55] P.Koiran, H.Zejli, J.P.Levy, F.Margnat, MF. Duval : PT-symmetry in one-way wormholes. Annals of Physics, Vol. 470, November 2024, 169765
[56] L.S.Abrams : Black holes: the legacy of Hilbert's error. Phys.Rev.D20, 2474 (1989) arXiv :gr-qc/0201044
[57] A.Loinger : The black holes do not exist, "also sprach Karl Scwarzschild" (Thus spoke Karl Schwarzschild). arXiv:physics/04020088v1/(physics.nen.ph/ 18 Feb 2004

[58] C.Corda : A clarification on the debate on « the original Schwarzschild solution » (2011) 62-82. arxiv :1010 :6031v5 (gr-qc) 25 mar 2011.
[59] R.Dijgraaf. The black hole is the atom of the 21 st century. Publication of the Institute for Advanced Studies of Princeton. https://www.ias..edu/ideas/dijkgraaf-EHT-black-hole.
[60] First M87 Event Horizon Telescope Results. I.. The Shadow of the Supermassive Black Hole. K. Akiyama, A.Alberdi,W.Alef,K.Asada, R.Azulay, A.K.Bcako, D.Ball,M. Balakovic, J. Barrett. Astrophysical Journal, vol. 875, n°1,2019
[61] J.P.Petit , G.d'Agostini/ Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. Octobre 2025.
[62] Henri Poincaré **:** La mesure du temps"**,** *Revue de métaphysique et de morale, vol. 10, 1902, pp. 1–13*
[63] W.Boy :Über die curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Dissertation, Georg-August-Universitât, Gottingen, 1901

Remerciement.

Je remercie Jean-Marc Pechinot pour la réalisation d'images illustrant cet article.

Scientific Research Publishing

Journal of Modern Physics, 2026, 17(8), 997-1027
https://www.scirp.org/journal/jmp
ISSN Online: 2153-120X
ISSN Print: 2153-1196

The True Schwarzschild Solution and Its Subsequent Geometry

Jean-Pierre Petit, Gilles d'Agostini, Jean-Marc Pechinot

Manaty Research Group, Glanon, France
Email: Jean-pierre.petit@manaty.net

How to cite this paper: Petit, J.-P., d'Agostini, G. and Pechinot, J.-M. (2026) The True Schwarzschild Solution and Its Subsequent Geometry. *Journal of Modern Physics*, **17**, 997-1027.
https://doi.org/10.4236/jmp.2026.178045

Received: May 14, 2026
Accepted: August 25, 2026
Published: August 28, 2026

Copyright © 2026 by author(s) and Scientific Research Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

Abstract

We present the solution to Einstein's stationary, spherically symmetric field equation, expressed using variables initially chosen by Schwarzschild. We show that the geodesics of the Flamm surface are not the geodesics of the hypersurface solution and how the Flamm's 2D cross-section allows us to understand the topology of the 4D object.

Keywords

Schwarzschild Metric, Schwarzschild Geometry, Throat Sphere

1. Introduction

This article will be particularly long. We will begin by revisiting how Karl Schwarzschild constructed the first exact solution to Einstein's equation in 1916—a stationary, spherically symmetric solution [1].

Very few people have followed his calculations in detail, as they require close attention. Indeed, Schwarzschild performs several successive changes of variable, making it quite difficult to follow his work. We shall therefore go through this again in detail, specifying his assumptions and variables at each step. This yields the line element shown in Equation (3), which is what Schwarzschild should have written when expressing his solution metric in terms of his coordinates (t, r, θ, φ).

The reason why he did not do so is then explained. Quite simply, his primary goal was to recover the approximate solution published a few months earlier by Einstein, which accounted for the advance of Mercury's perihelion [2]. To achieve this, he needed to calculate the geodesic trajectories of a test mass (Mercury) around the mass (the Sun). He chose to do this not using the radial coordinate r, but rather using what he termed an intermediate quantity R (*Hilfsgröße*), a choice he explained in a letter sent to Einstein as early as December 1915 [3] (see **Figure**

8), even before the article had been published by the journal.

It is absolutely essential to understand that the real formulation of this metric solution, whose construction is presented in details in the present paper, is nothing other than the true form of his original solution—expressed in the coordinates (t,r,θ,φ) he had chosen, and that this calculation involves no extraneous input or additional geometric or physical assumptions. The invariant remains the length *s*. What is truly extraordinary is that no one has revisited his calculation in the way we are about to do together.

Naturally, this analysis is inextricably linked to the black hole model. The present work stems from an article published in 1989 by the Canadian mathematician L.S. Abrams [4]—a paper that went entirely unnoticed at the time. Abrams pointed out what he regarded as an error in D. Hilbert's work [5]. However, the issue is more complex; it is not, strictly speaking, an error. In fact, Hilbert based his geometry not on length measurement but on a bilinear form—an approach that appeared more general to him—which entails the extension of geodesics along autoparallel curves. This aspect will be analyzed in a future article, as will the reinterpretation of the solution by Kruskal and matters relating to Birkhoff's theorem. The present article is confined to a precise examination of the solution constructed by Karl Schwarzschild in February 1916 [1] and a similarly precise description of Flamm's surface [6].

2. Detailed Re-Examination of Karl Schwarzschild's Calculation

Figure 1 shows how Schwarzschild presents his solution [1]. To convince the reader of the importance of this examination, we deemed it appropriate to also provide the German versions of the passages from the articles.

We felt it important to present an excerpt from the original article, published in German, noting that the English translation of this document was only made available in 1999, 83 years after its publication. The corresponding excerpt, in English translation, follows on Figure 1.

where the auxiliary quantity

$$\longrightarrow R = (3x_1 + \rho)^{1/3} = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

has been introduced.

When one introduces these values of the functions f in the expression (9) of the line element and goes back to the usual polar co-ordinates one gets the line element that forms the exact solution of Einstein's problem:

$$ds^2 = (1 - \alpha/R)dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2), \quad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}. \qquad (14)$$

The latter contains only the constant α that depends on the value of the mass at the origin.

Figure 1. The way in which Karl Schwarzschild presented his exterior metric solution in January 1916 [1].

It seems essential to draw attention to the fact that this form of the Schwarzschild metric, described in the literature as "standard", is expressed using a varia-

ble *R*, auxiliary quantity (*Hilfsgröbe*), and not the variable *r* [1], explicitly designated by Schwarzschild as a radial variable. See **Figure 2**.

§3. If one calls t the time, x, y, z, the rectangular co-ordinates, the most general line element that satisfies the conditions 1-3 is clearly the following:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

where F, G, H are functions of $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Figure 2. The true Schwarzschild's radial coordinate [1].

In his article, Schwarzschild presents the above expression as, in his view, the most general form of the solution to Einstein's spherically symmetric and time-translation invariant equation. He then performs a series of changes of variable, for the sake of computational convenience, which means that, in this complex process, we lose the true final expression of his solution, expressed in its initial coordinate system, with its variable *r* and not this intermediate quantity *R*. We will reconstruct it precisely. He goes from its coordinates (t, r, θ, ϕ) to a set (x_4, x_1, x_2, x_3) according to **Figure 3**.

One puts:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos\vartheta, \quad x_3 = \phi. \tag{7}$$

Figure 3. The first Schwarzschild's coordinate change [1].

Which gives, see **Figure 4**:

In the new polar co-ordinates the line element reads:

$$ds^2 = Fdx_4^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}\right)dx_1^2 - Gr^2\left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2(1-x_2^2)\right], \tag{8}$$

for which we write:

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3 dx_3^2(1-x_2^2) \tag{9}$$

Then f_1 , $f_2 = f_3$, f_4 are three functions of x_1

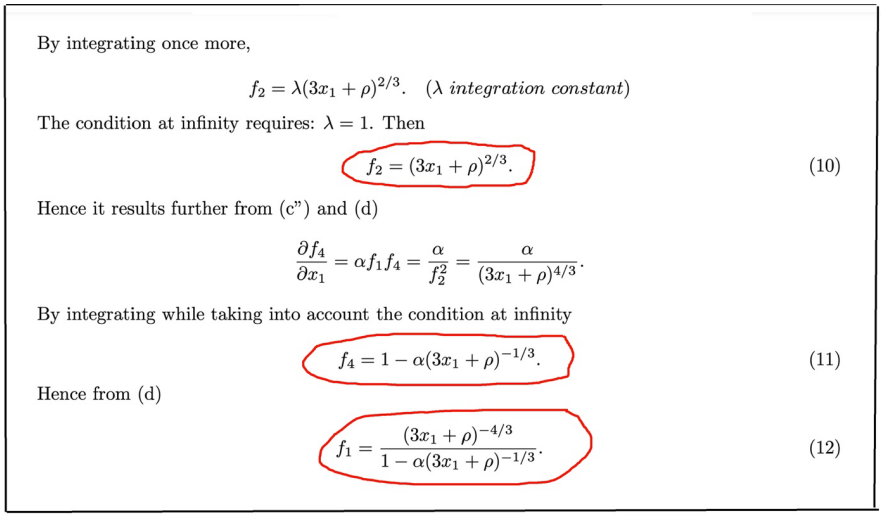
Figure 4. Schwarzschild's line element with his new space coordinates [1].

In the following pages, he calculates the Christoffel symbols, introduces all of this into the field equation, solves the equations, and obtains the expressions of his functions f_1, f_2, f_3, f_4. See **Figure 5**.

By exploiting this result, and taking into account de $f_3 = f_2, x_4 = t$, we obtain:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\left[1-\alpha\left(3x_1+\rho\right)^{-1/3}\right]\mathrm{d}t^2 - \frac{\left(3x_1+\rho\right)^{-4/3}}{1-\alpha\left(3x_1+\rho\right)^{-1/3}}\mathrm{d}x_1^2 \\ &-\left(3x_1+\rho\right)^{2/3}\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Using the change mentioned on **Figure 6**:



By integrating once more,

$$f_2 = \lambda(3x_1 + \rho)^{2/3}. \quad (\lambda \text{ integration constant})$$

The condition at infinity requires: $\lambda = 1$. Then

$$f_2 = (3x_1 + \rho)^{2/3}. \tag{10}$$

Hence it results further from (c") and (d)

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1 f_4 = \frac{\alpha}{f_2^2} = \frac{\alpha}{(3x_1 + \rho)^{4/3}}.$$

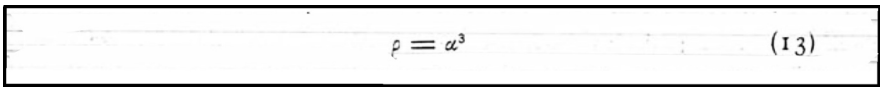
By integrating while taking into account the condition at infinity

$$f_4 = 1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-1/3}. \tag{11}$$

Hence from (d)

$$f_1 = \frac{(3x_1 + \rho)^{-4/3}}{1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-1/3}}. \tag{12}$$

Figure 5. The *f* functions [1].



$$\rho = \alpha^3 \qquad (13)$$

Figure 6. From original document [1].

We give for the first time, presented rigorously in a peer-reviewed scientific journal, 110 years after the publication of the original article, using its variables.

$$\left(t, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0, \theta, \phi\right) \tag{2}$$

the true solution, given in 1916 by Karl Schwarzschild, of Einstein's homogeneous equation, in spherical symmetry and invariant under time translation.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}s^2 = \dfrac{\left(r^3 + \alpha^3\right)^{1/3} - \alpha}{\left(r^3 + \alpha^3\right)^{1/3}} c^2 \mathrm{d}t^2 - \dfrac{r^4 \mathrm{d}r^2}{\left(r^3 + \alpha^3\right)\left[\left(r^3 + \alpha^3\right)^{1/3} - \alpha\right]} \\ -\left(r^3 + \alpha^3\right)^{2/3} \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Following Schwarzschild, Einstein's homogeneous equation—assuming spherical symmetry and invariance under time translation—is presented here in its author's original coordinates. This is the first time in 110 years that this form—despite its essential nature—has been presented in an article.

The invariant remains the length *s*. It is simply a reformulation of the exact solution provided by Schwarzschild, expressed not in terms of his intermediate quantity *R*, but in terms of his true radial coordinate:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0\,. \tag{4}$$

We have represented and highlighted it in red in the hope that the many specialists will notice this expression, which is being presented to them for the first time. At this point, a question immediately arises: Why didn't Schwarzschild present it in this form, with its variable $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, in his article, instead of using this intermediate variable *R*? The answer is found in a letter

Schwarzschild sent to Einstein on December 22, 1915 [3]. He wrote, see **Figure 7**:

As follows, it had beside your α yet a second term, and the problem was physically undetermined. From this I made at once by good luck a search for a full solution. A not too difficult calculation gave the following result: It gave only a line element, which fulfills your conditions 1) to 4), as well as field- and determinant equations, and at the null point and only in the null point is singular.

If:

$$x_1 = r\cos\phi\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\phi\cos\theta, \quad x_3 = r\sin\theta$$

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} = r\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{r^3} + \ldots\right)$$

then the line element becomes:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\gamma}{R}\right)dt^2 - \frac{dR^2}{\left(1 - \frac{\gamma}{R}\right)} - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

R, θ, ϕ are not "allowed" coordinates, with which one must build the field equations, because they do not have the determinant = 1, however the line element expresses itself as the best.

Figure 7. Letter from Schwarzschild to Einstein, December 2015 [3].

Einstein and Schwarzschild were in contact and exchanged letters regularly. In his letter of December 22, 1915, Schwarzschild responded to the article Einstein had just published on November 25, in which he calculated the perihelion advance of Mercury using an approximate solution [2]. Schwarzschild was preparing to send what was then the exact solution. But as he specified in his article, he knew that the radius, for the Sun, was limited to 3 km. He therefore decided to present his result using an intermediate variable R by performing a series expansion, as indicated in the article. We thus find here the origin of what would later be called the "standard form of the Schwarzschild solution".

3. December 1916: David Hilbert's Impact on Geometric Cosmology [5]

During 1915, for seven months, through numerous exchanges—first in person, then through copious correspondence—a very close relationship developed between Einstein and Hilbert, in an atmosphere of great mutual respect. Through Einstein's words, Hilbert discovered the link between advanced mathematics and the development of a new physics, toward which he had always been skeptical. Einstein spoke of the project in which he had become completely invested: a geometric translation, within a framework of covariance of the force of gravity. Intrigued, Hilbert had access to the most advanced mathematical tools of his time. It was a world in which Einstein, first and foremost a fantastic physicist endowed with exceptional intuition, always admitted to feeling uneasy. In this context, Hilbert conceived the project of integrating the two forces known at the time—gravita-

tion and electromagnetism—into a single formalism. Today we would call this a "theory of everything". For him, cosmic geometry is that of a four-dimensional space, designated by the letters (w_1, w_2, w_3, w_4), where the indices 1 to 3 refer to space and where w_4 is the time coordinate. Space is quasi-Euclidean and stationary (invariant under time translation): the phenomenon of cosmic expansion had not yet been discovered by Edwin Hubble. The geometry of the cosmos is determined by a number of functions, the set forming a tensor $g_{\mu\nu}$, from which one can calculate the components of the Ricci tensor, which Hilbert denotes by $K_{\mu\nu}$. The contraction of this tensor gives the Ricci scalar, designated by the letter *K*.

Hilbert then published a long article on November 20, 1915 [7] entitled "Foundations of Physics". While Einstein struggled as best he could with tensors, aided by his friend the mathematician Grassmann, Hilbert took a further step into abstraction by deriving a field equation from a variational calculus, centered on an action constructed around a "world function" *H*:

$$\int H\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\omega \tag{5}$$

$$|g| = |\det g_{\mu\nu}| \tag{6}$$

See **Figure 8**.

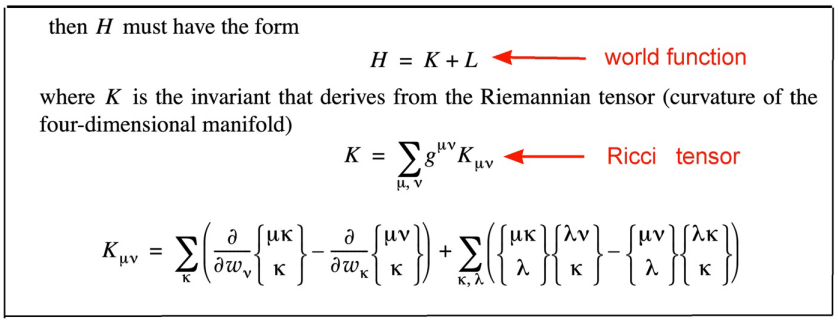


Figure 8. The Hilbert's world function [7].

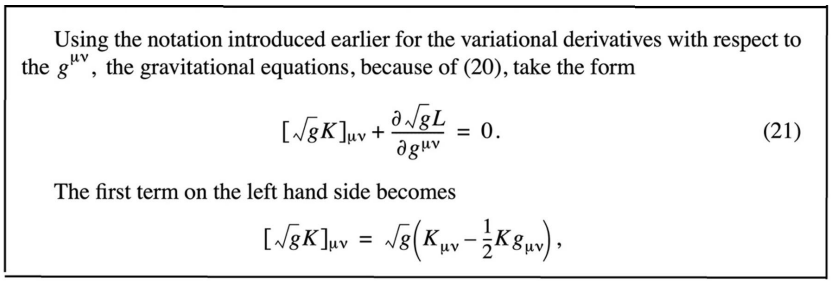
His stroke of genius was to identify this world function as the sum of two terms, the first being the Ricci scalar and the second the Lagrangian of matter, defining a field where, in principle, gravitation and electromagnetism are ambitiously intertwined. The publication of this article was a real shock for Einstein, who, when he sent his own five days later, on November 25, 1915 [8], presenting the goal of his quest—the famous field equation of this general relativity, which completes his special relativity—discovered that Hilbert had beaten him to it. See **Figure 9**.

If we replace the letter *K* with the letter *R* (the Ricci tensor and scalar *r*), and setting:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = \chi T_{\mu\nu} \tag{7}$$

The reader will recognize the field equation of general relativity with which they are familiar. Einstein then wrote Hilbert a letter of protest, and the following weeks reflected a certain amount of confusion. However, by mutual agreement, to preserve the feelings of esteem that bound them, the decision was made that this

equation would bear only Einstein's name. In the literature, the reader will now find references to the Einstein-Hilbert collaboration.



Using the notation introduced earlier for the variational derivatives with respect to the $g^{\mu\nu}$, the gravitational equations, because of (20), take the form

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \quad (21)$$

The first term on the left hand side becomes

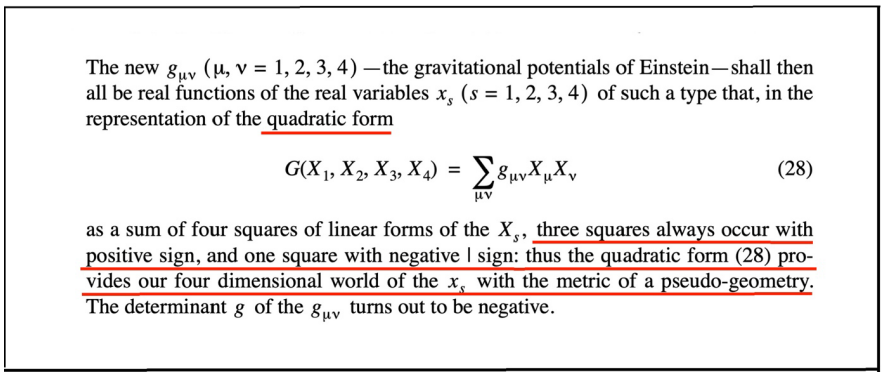
$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Kg_{\mu\nu}\right),$$

Figure 9. The Hilbert's field equation [7].

History makes its choices. It is, indeed essential to note that at no point in Hilbert's article does the word "metric" appear, nor expression beginning with "ds^2 =".

Schwarzschild then published, in quick succession, in January and February 1916, his two solutions to this field equation [1] [9]. Hilbert felt compelled to urgently incorporate this into a second version of his paper, bearing the same title, which he published on December 23, 1916 [5]. Only the solution to the homogeneous equation [1] held his attention. He made no mention of the second.

For Hilbert, a solution to the field equation was not a metric but a bilinear form which, in his view, determined the geometry. This is a crucial point that must be emphasized. Hilbert is, first and foremost, a mathematician. It therefore seems natural to him to consider the most general formulation from a purely mathematical perspective, specifically, a geometry derived from a bilinear form that could have any sign. He operates, in other words, like someone living in the world of mathematics. Einstein, by contrast, inhabits the world of physics. That is where the entire difference lies. See **Figure 10**.



The new $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) —the gravitational potentials of Einstein—shall then all be real functions of the real variables x_s ($s = 1, 2, 3, 4$) of such a type that, in the representation of the quadratic form

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}X_\mu X_\nu \quad (28)$$

as a sum of four squares of linear forms of the X_s, three squares always occur with positive sign, and one square with negative | sign: thus the quadratic form (28) provides our four dimensional world of the x_s with the metric of a pseudo-geometry. The determinant g of the $g_{\mu\nu}$ turns out to be negative.

Figure 10. Hilbert's Quadratic form [5].

The tedious presentation of these numerous plates is intended to show how Hilbert's highly personal conception of this "geometric cosmology", very different from that of Einstein [8], Schwarzschild [1], Droste [10], Flamm [6], Weyl [11], and others, profoundly influenced the development of this discipline. We will

show later how the main proponents of these ideas echoed, without citing their source, the choices made by Hilbert.

Thus, in the plate above, we find the origin of the change in signature. Among the authors cited, this signature was ubiquitous:

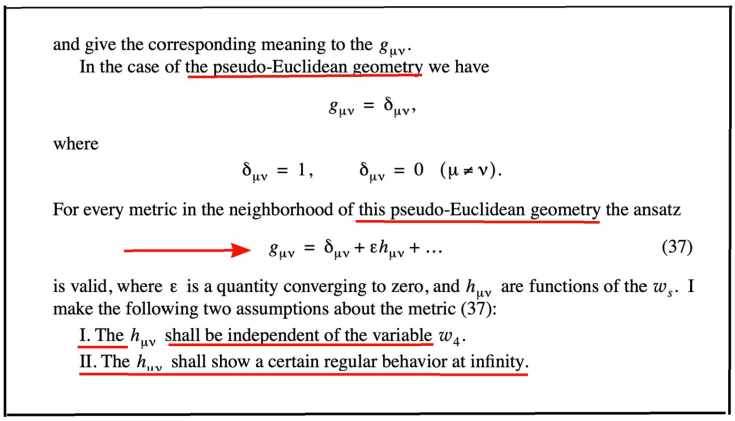
$$\text{The « old » signature: } (+---) \tag{8}$$

In the sentences underlined in red in the excerpt from Hilbert's December 1916 article, he explicitly introduces what will become the "modern" signature:

$$(+++-) \text{ or } (-+++) \tag{9}$$

This change will occur gradually and will eventually become widespread in the postwar period, even though, at least in cosmology, there is no article that provides an argument in favor of such a change.

But what does Hilbert mean by pseudo-geometry? The answer is in the following excerpt. See **Figure 11**.



and give the corresponding meaning to the $g_{\mu\nu}$.
In the case of the pseudo-Euclidean geometry we have

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

where

$$\delta_{\mu\nu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

For every metric in the neighborhood of this pseudo-Euclidean geometry the ansatz

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \ldots \tag{37}$$

is valid, where ε is a quantity converging to zero, and $h_{\mu\nu}$ are functions of the w_s. I make the following two assumptions about the metric (37):

I. The $h_{\mu\nu}$ shall be independent of the variable w_4.

II. The $h_{\mu\nu}$ shall show a certain regular behavior at infinity.

Figure 11. Hilbert's pseudo (Euclidean) geometry [5].

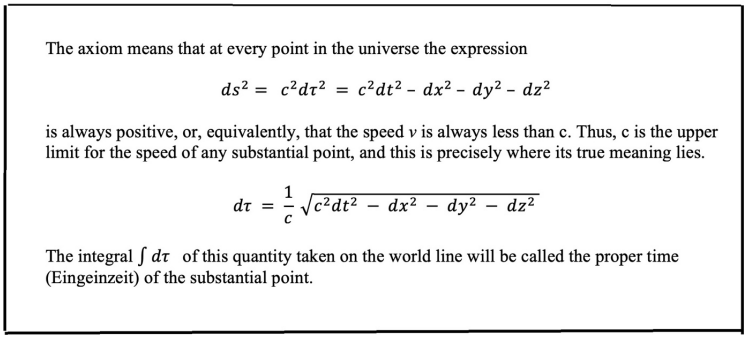
In equation (37) of the extract, it is clear that for Hilbert the universe is not only stationary (independent of its time coordinate w_4) but practically Euclidean. All this relativistic physics introduced by Einstein manifests itself only as a tiny perturbation, through the presence of a term $g_{44} = \varepsilon h_{44}$ [5]. The conception of spacetime introduced by Hermann Minkowski [12] in 1909[1], with its metric, is completely neglected. See Minkowski's statement on **Figure 12**.

These elements were very well assimilated by people like Schwarzschild [1]. See **Figure 13**.

In Schwarzschild's work, as with Schwarzschild and all others at that time, the assumptions are unambiguous:

- The coordinates are defined in $\mathbb{R}^4$.
- The element of length ds, associated with the hypersurface, is fundamentally real.
- We are looking for curves that minimize the length.

[1]Minkowski died a few months later from appendicitis that degenerated into a generalized infection. Antibiotics had not yet been invented. A detail of crucial importance.



The axiom means that at every point in the universe the expression

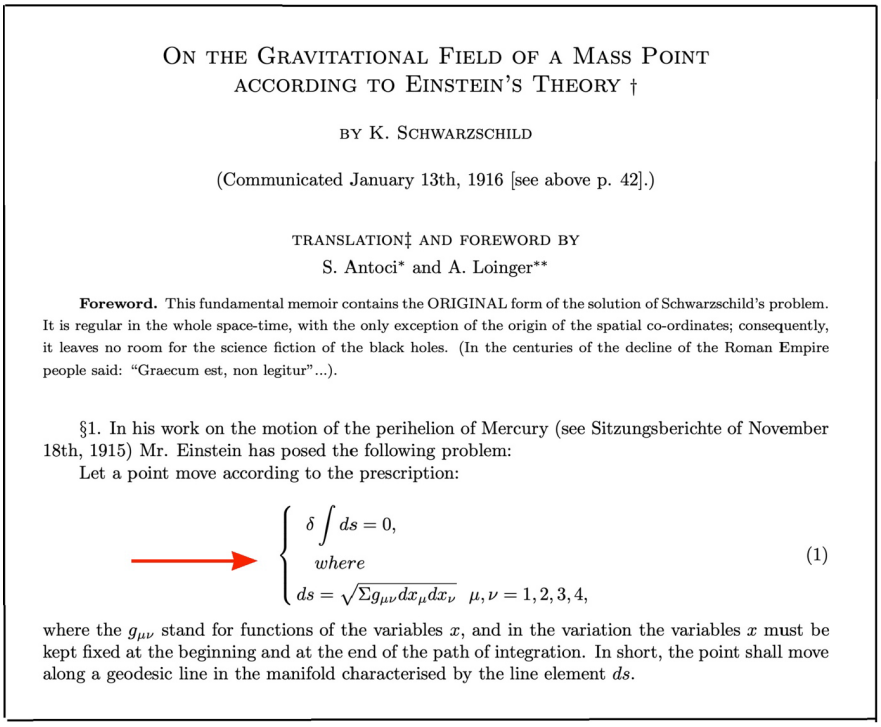
$$ds^2 = c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

is always positive, or, equivalently, that the speed v is always less than c. Thus, c is the upper limit for the speed of any substantial point, and this is precisely where its true meaning lies.

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

The integral $\int d\tau$ of this quantity taken on the world line will be called the proper time (Eingeinzeit) of the substantial point.

Figure 12. Minkowski's axiomatic definition [12] of spacetime (1909).



ON THE GRAVITATIONAL FIELD OF A MASS POINT
ACCORDING TO EINSTEIN'S THEORY †

BY K. SCHWARZSCHILD

(Communicated January 13th, 1916 [see above p. 42].)

TRANSLATION‡ AND FOREWORD BY
S. Antoci* and A. Loinger**

Foreword. This fundamental memoir contains the ORIGINAL form of the solution of Schwarzschild's problem. It is regular in the whole space-time, with the only exception of the origin of the spatial co-ordinates; consequently, it leaves no room for the science fiction of the black holes. (In the centuries of the decline of the Roman Empire people said: "Graecum est, non legitur"...).

§1. In his work on the motion of the perihelion of Mercury (see Sitzungsberichte of November 18th, 1915) Mr. Einstein has posed the following problem:

Let a point move according to the prescription:

$$\begin{cases} \delta \int ds = 0, \\ \text{where} \\ ds = \sqrt{\Sigma g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \end{cases} \tag{1}$$

where the $g_{\mu\nu}$ stand for functions of the variables x, and in the variation the variables x must be kept fixed at the beginning and at the end of the path of integration. In short, the point shall move along a geodesic line in the manifold characterised by the line element ds.

Figure 13. Schwarzschild foreword [1].

In short, it's very clear and simple:

When the element ds ceases to be real, we are outside the hypersurface.

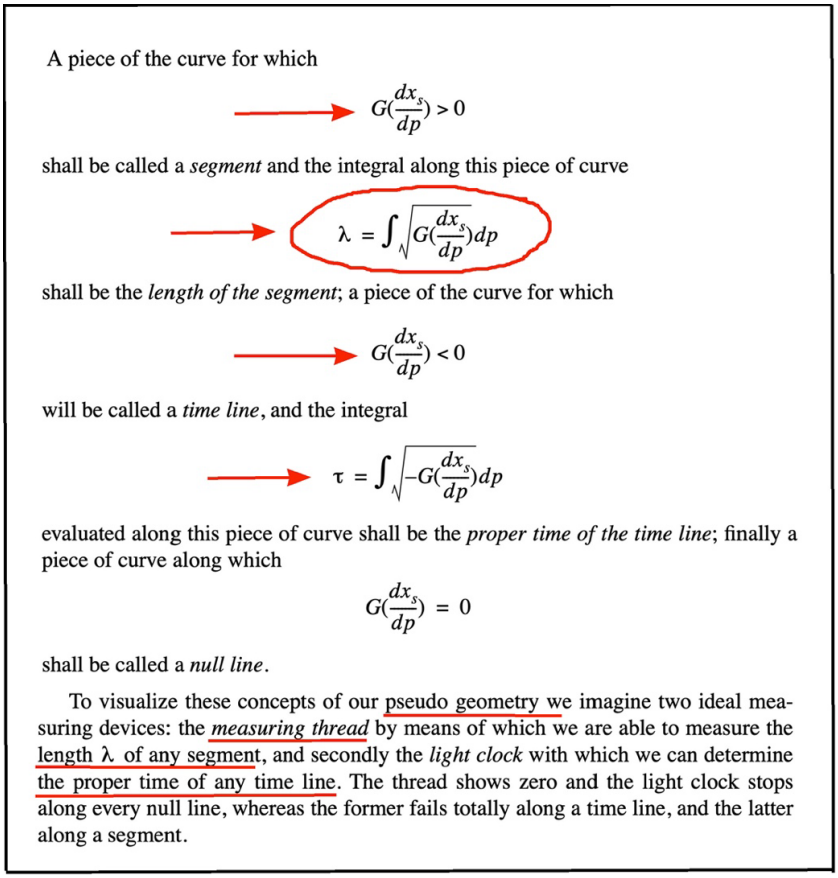
In doing so, he is merely conforming to the prestigious geometrization of physics associated with the lecture Minkowski gave in 1909 [12], just months before his death.

Since Hilbert defines his geometry not in terms of an elementary length d*s*, but rather based on a bilinear form, he arrives at what appears to him to be the most general geometry. It therefore seems logical to him to define two lengths rather than one, a step he takes by introducing an arbitrary sign change. See **Figure 14**.

For Hilbert, it is possible to define two real lengths from different expressions, depending on the sign of the quadratic form *G*. When this form is negative, this length becomes the proper time τ and a real value, measured along timelines, time-like trajectories, and is then obtained by inserting a negative sign in front of

it. In the domain of definition, when this form is positive, the scalar obtained is then called the length of a segment, along curves described today as being "space-like". Hilbert is therefore the first to achieve an extension of the solution, now called an "extension to the whole of spacetime". These are thus two different interpretations of the solution. In Schwarzschild's work, the result of the variational calculus is limited to the determination of authentic geodesics where the length is minimized:

$$\delta\int \mathrm{d}s = \delta\int \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}} = 0 \tag{10}$$


A piece of the curve for which

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

shall be called a *segment* and the integral along this piece of curve

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}dp$$

shall be the *length of the segment*; a piece of the curve for which

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

will be called a *time line*, and the integral

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}dp$$

evaluated along this piece of curve shall be the *proper time of the time line*; finally a piece of curve along which

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

shall be called a *null line*.

To visualize these concepts of our pseudo geometry we imagine two ideal measuring devices: the *measuring thread* by means of which we are able to measure the length λ of any segment, and secondly the *light clock* with which we can determine the proper time of any time line. The thread shows zero and the light clock stops along every null line, whereas the former fails totally along a time line, and the latter along a segment.

Figure 14. Hilbert's two different lengths [5].

Hilbert constructs the set of curves directly from the quadratic form, without worrying about whether it is positive or negative.

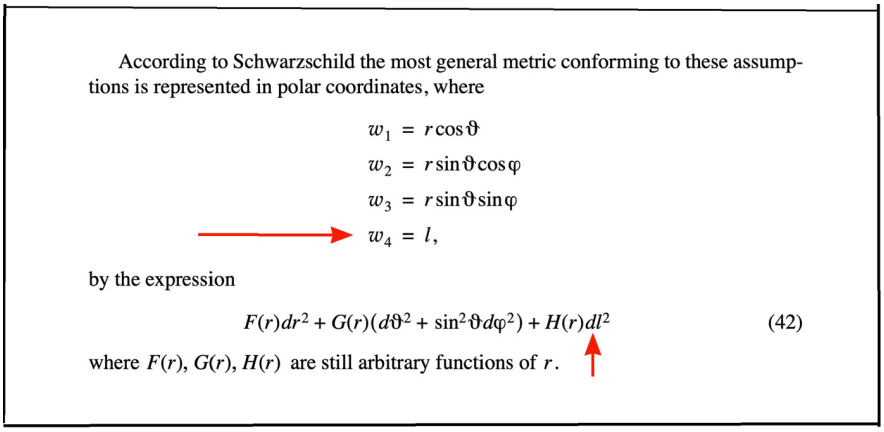
$$\delta\int\left(g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\right) = 0 \tag{11}$$

Hilbert was also the first to introduce the concept of the light cone, which henceforth has an interior and an exterior, where curves of a spatial nature then unfold.

4. Hilbert's Construction of the Solution to the Field Equation, Stationary and Spherically Symmetric [5]

For Hilbert, a solution to the field equation is a quadratic form, which can then

have any sign. Using polar coordinates, he writes, see Figure 15.



According to Schwarzschild the most general metric conforming to these assumptions is represented in polar coordinates, where

$$w_1 = r\cos\vartheta$$
$$w_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$w_3 = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$w_4 = l,$$

by the expression

$$F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dl^2 \qquad (42)$$

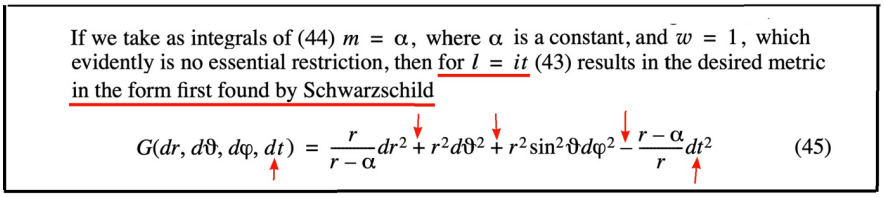
where $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ are still arbitrary functions of r.

Figure 15. Hilbert's coordinate choice [5].

He denotes his time coordinate by the letter l. This coordinate does not intervene at any point in his calculation, since the solution was assumed to be independent of it. For Hilbert, what determines the geometry is a quadratic form. It is therefore in this form that he presents his result (the typographical errors of the original manuscript, reproduced in the English translation, have been corrected):

$$G\left(\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\vartheta,\mathrm{d}l\right) = \frac{r}{r-\alpha}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\vartheta^2 + \frac{r-\alpha}{r}\mathrm{d}l^2 \qquad (12)$$

And it is only at this stage that Hilbert adopts the interpretation of relativity suggested in 1902 by the mathematician Henri Poincaré [13]. For Poincaré, as or Hilbert, the time coordinate is purely imaginary ($l = it$). See Figure 16.

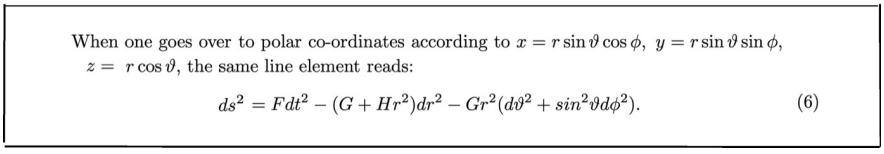


If we take as integrals of (44) $m = \alpha$, where α is a constant, and $w = 1$, which evidently is no essential restriction, then for $l = it$ (43) results in the desired metric in the form first found by Schwarzschild

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dt) = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dt^2 \qquad (45)$$

Figure 16. When Hilbert identifies [5] its own result to the Schwarzschild's one.

Like Hilbert, Schwarzschild adopts what appears to him to be the most general form of the solution to Einstein's equation without second member, stationary and spherically symmetric. See Figure 17.



When one goes over to polar co-ordinates according to $x = r\sin\vartheta\cos\phi$, $y = r\sin\vartheta\sin\phi$, $z = r\cos\vartheta$, the same line element reads:

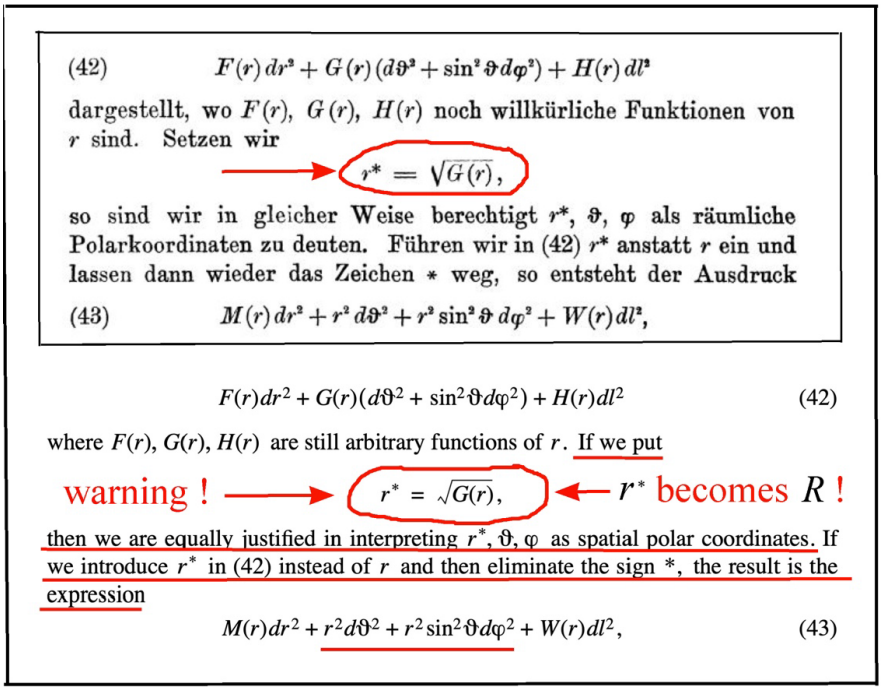
$$ds^2 = Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\phi^2). \qquad (6)$$

Figure 17. Schwarzschild's line element [1].

As can be seen, in Schwarzschild coordinates (t,r,θ,ϑ), this corresponds to

$$Gr^2 = \left(r^3+\alpha^3\right)^{2/3} \neq r^2 \tag{13}$$

In his calculation, Hilbert introduces a simplification concerning the coefficient of $\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\vartheta^2\right)$ which seemed to him likely to converge more rapidly toward what he identified as Schwarzschild's result in (t,r,θ,ϑ). See Figure 18.



(42) $F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) + H(r)\,dl^2$

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

$r^* = \sqrt{G(r)}$,

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen $*$ weg, so entsteht der Ausdruck

(43) $M(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + W(r)\,dl^2$,

$$F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dl^2 \tag{42}$$

where $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ are still arbitrary functions of r. If we put

warning ! $r^* = \sqrt{G(r)}$, r^* becomes R !

then we are equally justified in interpreting r^*, ϑ, φ as spatial polar coordinates. If we introduce r^* in (42) instead of r and then eliminate the sign $*$, the result is the expression

$$M(r)dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + W(r)dl^2, \tag{43}$$

Figure 18. Hilbert's approximation [5].

He then identifies his variable r^* with r. At a time when no one could have imagined for a single moment the existence of astronomical objects whose characteristic scale would be anything other than an infinitesimal perturbation, this error had little importance. But in reality, this amounts to identifying $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq 0$ with $R=\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}\geq\alpha$ (the intermediate Schwarzschild variable). This point was only pointed out in 1989 by L.S. Hence, the expression of Hilbert solution, as presented in its Equation (45) is not strictly identical to the Schwarzschild's one since it is expressed with the intermediary variable *R*, as noticed in 1989 by the Canadian mathematician Abrams [4], 73 years after the publication of Hilbert's paper.

5. Impact on Physicists

The first person to widely publicize these different works on this cosmology was Arthur Eddington [14], as early as 1919. His work testifies to his extraordinary openness to the science of his time. Representing a considerable undertaking, the book presents the tools of differential geometry upon which the progress represented by general relativity is based. However, on page 139, in Chapter III, he re-

produces the manner in which Hilbert treats this solution of Einstein's equation. See Figure 19.

CH. III THE FIELD OF AN ISOLATED PARTICLE 139

In flat space-time the interval, referred to spherical polar coordinates and time, is

$$ds^2 = -dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 + dt^2. \qquad (38.11)$$

If we consider what modifications of this can be made without destroying the spherical symmetry in space, the symmetry as regards past and future time, or the static condition, the most general possible form appears to be

$$ds^2 = -U(r)\,dr^2 - V(r)\,(r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2) + W(r)\,dt^2, \qquad (38.12)$$

where U, V, W are arbitrary functions of r. Let

$$r_1^2 = r^2 V(r).$$

Then (38.12) becomes of the form

$$ds^2 = -U_1(r_1)\,dr_1^2 - r_1^2\,d\theta^2 - r_1^2\sin^2\theta\,d\phi^2 + W_1(r_1)\,dt^2, \qquad (38.13)$$

where U_1 and W_1 are arbitrary functions of r_1. There is no reason to regard r in (38.12) as more immediately the counterpart of r in (38.11) than r_1 is. If the functions U, V, W differ only slightly from unity, both r and r_1 will have approximately the properties of the radius-vector in Euclidean geometry; but no length in non-Euclidean space can have exactly the properties of a Euclidean radius-vector, and it is arbitrary whether we choose r or r_1 as its closest representative. We shall here choose r_1, and accordingly drop the suffix, writing (38.13) in the form

$$ds^2 = -e^{\lambda}\,dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 + e^{\nu}\,dt^2, \qquad (38.2)$$

where λ and ν are functions of r only.

Figure 19. From Eddington's book [14], 1919.

One should note the old signature $(+---)$ as well as the use of exponentials e^{λ} and e^{ν} to ensure invariance when coordinates and functions belong to the real domain.

The same formulation appears identically in the book published in 1934 by the mathematician Richard Tolman [15], see on this book, Equations (94.2) and (95.1).

6. Geometric Interpretation of the Schwarzschild Solution

The young German mathematician Ludwig Flamm provided [6], immediately after publication of Schwarzschild's papers, the geometric interpretation of the two solutions [1] [9]. Since these are invariant under time translation, the study re-

duces to three-dimensional geometric structures undergoing translation in time. The 3D structure results from the joining of two manifolds along their common boundary, which is the spherical surface of the star. The author then considers the section of these two objects at constant θ, which yields 3D objects. See Figure 20.

§2. Now we can, in an analogous way, examine the first case which was treated by S c h w a r z s c h i l d, the gravitational field of a point mass. The line-element in its simplest form has the same structure as above and reads

$$d s^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) d t^2 - \frac{d R^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 \left(d \vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2\right)$$

Figure 20. L.Flamm's choice for the external metric representation [6].

Let us note in passing that Flamm adopts the signature $(+---)$ and identifies the trajectories of test masses with geodesics minimizing the length s, identified with the proper time τ. See Figure 21.

Therefore, if the elementary rulers and clocks are influenced by the gravitational field, then the propagation of light must be influenced in exactly the same way, so that when compared to each other they do not show any differences. The same must hold for all the other physical phenomena. This might be why one can describe the motion of a point particle by the simple variational equation

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} d s = 0, \tag{5}$$

Figure 21. Flamm's variational procedure [6].

He then embeds the object into $\mathbb{R}^3$. See Figure 22.

The spatial part of the line-element is again of a non-Euclidean nature. Once more, due to the spherical symmetry it seems to be enough to restrict the consideration to the metric properties in an arbitrary planar section through the origin, *i.e.*, to $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Now one obtains

$$d {\sigma_e}^2 = \frac{d R^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} + R^2 \, d \varphi^2. \tag{4}$$

This line-element is also of the form (2'), because one can put

$$\cos^2 \chi = 1 - \frac{\alpha}{R},$$

and it is also identical with a line-element on a surface of rotation. Denoting by z the coordinate in the direction of the rotational axis, the equation for the meridional curve follows from

$$\frac{d z}{d R} = \operatorname{tg} \chi = \sqrt{\frac{\alpha}{R - \alpha}}$$

as

$$z^2 = 4\alpha(R - \alpha).$$

This describes a parabola with parameter

$$p = 2\alpha,$$

Figure 22. L. Flamm's embedment operation [6].

He then obtains the meridian (r,z) of this manifold with boundary in the form of a sideways parabola. See Figure 23.

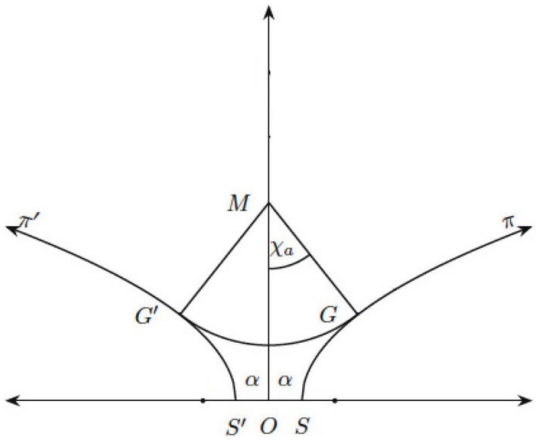


Figure 23. Flamm's medidian [6].

This Schwarzschild geometry is thus perfectly defined. The points G and G' represent the ends of the segment corresponding to the diameter of the sphere along which the two 3D surface elements are joined. The circular arc GG' completes the parabolic portions Gp and G'p'.

The Flamm surface is often described in the literature as a pedagogical artifact intended to illustrate how masses curve the surrounding space. When the spacetime geodesics arising from the 4D hypersurface corresponding to the exterior metric are projected, one obtains curves suggestive of an attractive effect, with the classical perihelion precession, as shown on Figure 24.

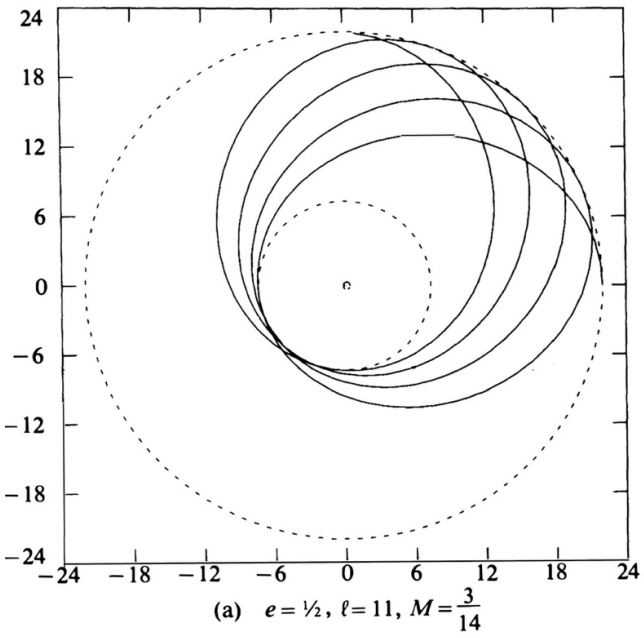


Figure 24. 2D (R,φ) projection of 4D Schwarzschild geodesic [16].

The system of geodesics of the Flamm surface was first studied only very recently [17], 113 years after its first presentation by its author. Later (2019!) this study was extended [18]. In this last paper, the geodesics are grouped into two families, depending on whether or not they cross the throat circle. The authors used a color code to distinguish portions of curves suggesting attraction, and at greater distance, repulsion. Consequently, they cannot constitute a pedagogical image intended to illustrate the way masses modify the geometry of the vacuum surrounding them. See **Figure 25**.

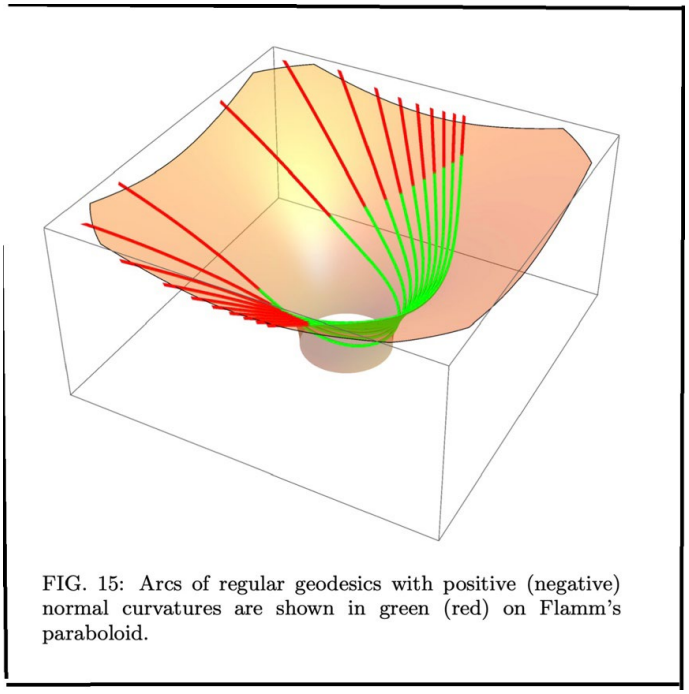


FIG. 15: Arcs of regular geodesics with positive (negative) normal curvatures are shown in green (red) on Flamm's paraboloid.

Figure 25. Flamm's surface geodesics. first family [18].

In **Figure 15** of the cited reference, the authors represented in green the portions of geodesics that do not cross the throat sphere, whose concavity is directed toward the symmetry axis (suggesting attraction). At larger distances, this concavity reverses (red color: repulsion).

This shows that the purely spatial geodesics of the Flamm surface must not be identified with the back-projections onto that surface of the 2D projections, in (R,φ), of spacetime geodesics. Under these conditions, what information does the Flamm surface provide? It is of a topological nature. Since Flamm's analysis shows that the 4D geodesics necessarily project onto this surface, conversely there cannot exist real geodesics crossing the throat sphere that correspond to the region $0<R<\alpha$ in the representation (t,R,θ,φ).

Schwarzschild's approach is perfectly consistent from the astrophysical point of view. He sought to construct two stationary, spherically symmetric solutions of Einstein's equation. He constructed the interior metric solution [9] in the coordinate system (t,χ,θ,φ).

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)^2 c^2 dt^2 - \hat{R}^2\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad (14)$$

With:

$$R = R_a \sin\chi \quad (15)$$

R_a being the ray of the star. With:

$$\hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho} \quad (16)$$

By going back to the system (t, R, θ, φ) it comes:

$$ds^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{8\pi G\rho R_a^2}{3c^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8\pi G\rho R^2}{3c^2}}\right]^2 c^2 dt^2 + \frac{dR^2}{1-\frac{8\pi G\rho R^2}{3c^2}} - R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad (17)$$

The geodesics of the two solutions join along the sphere representing the boundary of the star, assimilated to a sphere of radius R_a, filled with an incompressible material of constant density ρ. The geometric solution presented by Schwarzschild is illustrated in the following figure, expressing the union of a portion of the Flamm surface with a spherical cap. The global result is a contractible object, as shown on Figure 26.

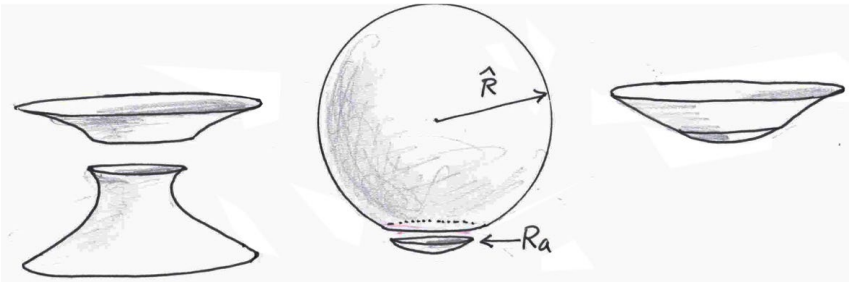


Figure 26. The global geometry of the Schwarzschild's solution.

This constitutes the true geometry of "Schwarzschild spacetime".

7. The Flamm Surface as a Whole

However, some authors considered the isolated exterior metric as a possible geometric description of masses: first H. Weyl in 1917[2] [11], then Einstein and Rosen in 1935 [19]. In the postwar period, the isolated exterior metric solution was considered either as describing a "frozen snapshot" of an object undergoing rapid implosion [20], or as a wormhole [21]. See the Kruskal's wormhole on Figure 27.

[2]Using the isotropic coordinate system he introduced, and noting the possible inversion of the time factor on a second sheet, Weyl was the first to suggest a two-sheeted covering structure involving an inversion of the time coordinate x^4. This will be analyzed in a future article; detailing it here would make the exposition overly cumbersome.

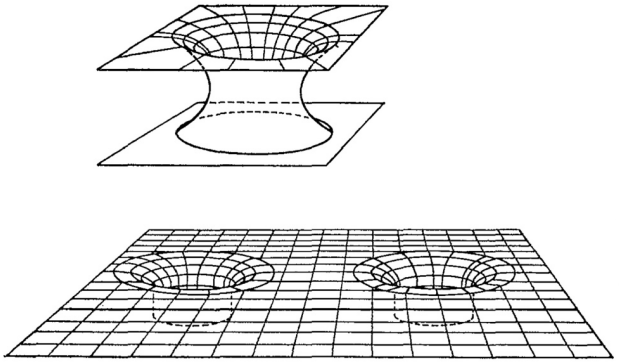


FIG. 1. Two interpretations of the 3-dimensional "maximally extended Schwarzschild metric" at the time $T=0$. Above: A connection or bridge in the sense of Einstein and Rosen between *two* otherwise Euclidean spaces. Below: A wormhole in the sense of Wheeler connecting two regions in *one* Euclidean space, in the limiting case where these regions are extremely far apart compared to the dimensions of the throat of the wormhole.

Figure 27. Kruskal wormhole [21].

In both cases, this leads us to consider the Flamm surface in its entirety. Below are its geodesics when they cross the throat circle, as shown on **Figure 28**.

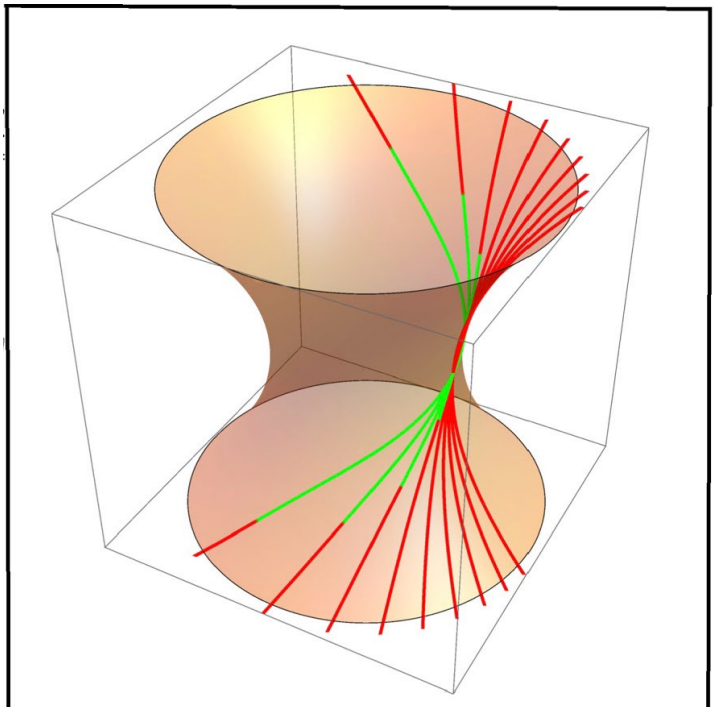


FIG. 16: Arcs of s-geodesics with positive (negative) normal curvatures are shown in green (red) on Flamm's paraboloid. The (normal) curvature of radial ($L = 0$) geodesics, $\kappa_n = \kappa = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_S}{r^3}}$, is always negative, pointing away from the hole region, although vanishing asymptotically.

Figure 28. Flamm's surface geodesics. Second family [18].

The same color coding is found again: green when these geodesics direct their concavity toward the axis (attraction), and red when this concavity reverses (repulsion). This is also visible when these Flamm surface geodesics are projected. See **Figure 29**.

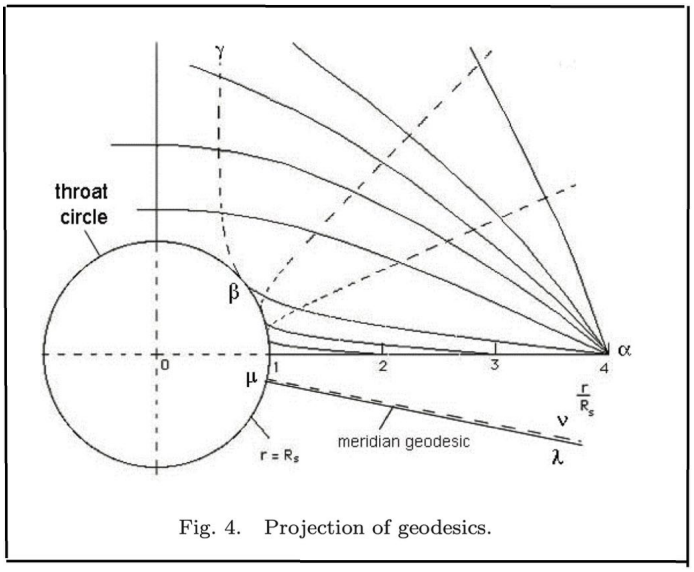


Figure 29. Geodesic projection of Flamm surface [17].

In these figures the purely spatial geodesics of the Flamm surface must not be identified with the back-projections onto that surface of the 2D projections, in (R,φ), of spacetime geodesics. This shows that since the 4D geodesics necessarily project onto this surface, there cannot exist real geodesics crossing the throat sphere that correspond to the region $R<\alpha$ in the representation (t,R,θ,φ) with $(0<R<\alpha)$.

When one constructs the curves solving the Lagrange equations, one finds in the projection (R,φ) real curve segments that give the illusion that test masses penetrate into the region $0<R<\alpha$. This illusion disappears when one constructs 3D images of these geodesics in a coordinate system (t,R,φ), as shown on **Figure 30**.

In **Figure 30(A)**, the trajectory of a test mass converging toward the boundary and then emerging from it has been represented. Both operations occur, with this coordinate *t*, over an infinite time interval. In **Figure 30(B)**, one has the impression that the test mass "bounces" off this boundary. In **Figure 30(C)**, this projection **Figure 30(B)** of the geodesic has been back-projected onto the Flamm surface along the green curve, which therefore appears distorted. It should be kept in mind that this is not a geodesic of the Flamm surface.

If one considers separating the two sheets of the hypersurface associated with this isolated exterior metric solution, it then becomes appropriate to introduce a new variable [17]:

$$R=\propto\left(1+\ln ch\rho\right) \tag{18}$$

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\ln ch\rho}{1+\ln ch\rho}c^2\mathrm{d}t^2-\alpha^2\left[\frac{1+\ln ch\rho}{\ln ch\rho}th^2\rho\mathrm{d}\rho^2+\left(1+\ln ch\rho\right)^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] \tag{19}$$

The throat sphere corresponds to the value $\rho=0$. The two sheets are distinct and correspond to $\rho>0$ and to $\rho<0$. At the throat:

$$G_{tt} \propto \frac{\rho^2}{2} \to +0 \qquad g_{\rho\rho} \to 2 \tag{20}$$

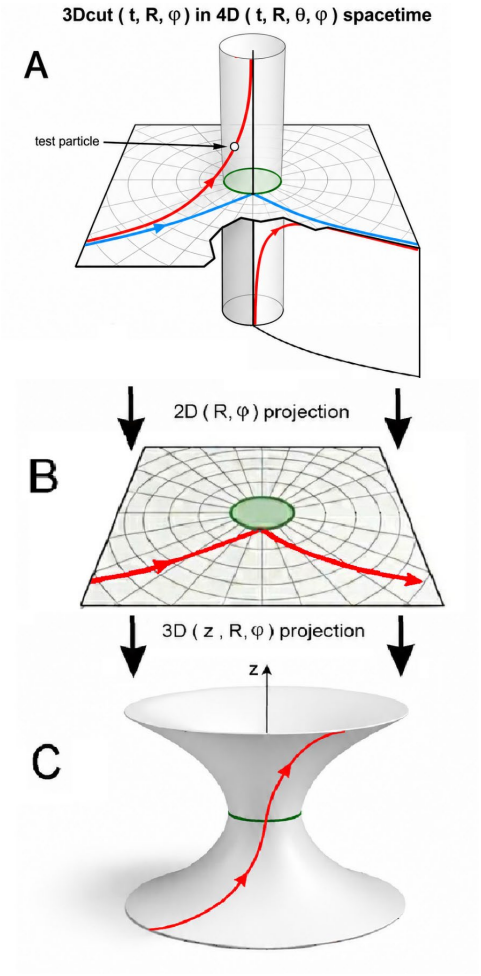


Figure 30. 4D geodesics and projections.

If one restricts oneself to the spatial part described by the metric:

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \alpha^2 \left[\frac{1+\ln ch\rho}{\ln ch\rho} th^2\rho \mathrm{d}\rho^2 + \left(1+\ln ch\rho\right)^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \right] \tag{21}$$

it is regular everywhere. Let us now consider the projections in (ρ,φ) of spacetime geodesics with $\theta = \pi/2$. In a representation (t,R,θ,φ), the projections (R,φ) are solutions of the classical equation:

$$\mathrm{d}\varphi = \pm \frac{\mathrm{d}R}{R^2\sqrt{\frac{c^2l^2}{h^2} + \frac{\alpha}{h^2R} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{R^3}}} \tag{22}$$

where l and h are parameters of the solution curve. Let ϕ denote the angle formed by the tangent to the curve and the radius vector. At the throat:

$$tg\,\phi = \alpha \left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}R}\right|_{R=\alpha} = \frac{h}{\alpha c l} \tag{23}$$

This quantity is finite. This is what gives the impression, when projecting the geodesic lying on the other sheet, of a discontinuity. It seems to bounce on the throat sphere. But this is only an artifact resulting from the embedding into $\mathbb{R}^3$. If one instead adopts a representation (t,ρ,θ,φ) and projects the geodesics with $\theta=\pi/2$ onto the plane (ρ,φ), this angular discontinuity disappears. Let β denote the angle formed by the tangent to the curve and the radius vector in this representation.

$$(tg\,\beta)_{\rho\to 0}=\frac{\rho \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}=\frac{R\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}R}\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}=\frac{h}{\alpha^2 cl}\rho^2\to 0 \tag{24}$$

One can therefore draw the corresponding projection of the geodesic. See Figure 31.

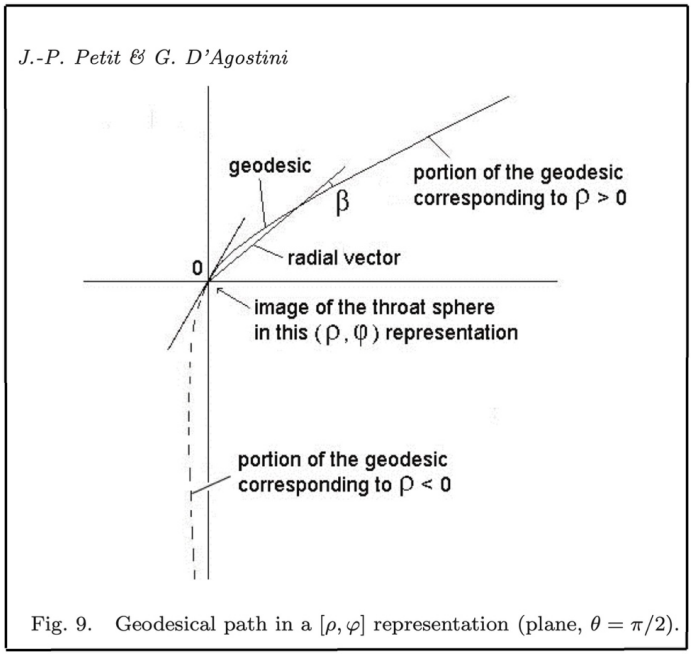


Figure 31. Projection of spatiotemporal geodesics in the representation (ρ,φ) [17].

This illustrates the interpretation of the Schwarzschild exterior metric solution as a two-sheeted covering of a manifold. Such a situation could be visualized by drawing the geodesics $(\rho>0)$ on the front side of a sheet of paper and extending them with the curves $(\rho<0)$ on the back side (dashed curve). The throat sphere is then reduced to a point. What opposes our intuition is that this sphere reduced to a point nevertheless possesses a nonzero area $4\pi\alpha^2$, so that the manifold is locally non-contractible even though it visually appears contractible. A similar representation would be obtained by exploiting the true expression of the Schwarzschild exterior metric solution in coordinates (t,r,θ,φ). See Figure 10. In a projection (r,φ), using the true variable $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq 0$ the interior of the sphere of area $4\pi\alpha^2$ would likewise reduce to a point.

These elements show that artifacts may arise when one attributes physical real-

ity to a representation obtained through embedding in $\mathbb{R}^3$. That being said, can the Schwarzschild exterior metric solution be considered in isolation? The first response was given in 1939 by Oppenheimer and Snyder [20]. In article [22], a second interpretation is proposed, outlining a model for a neutron star reaching Schwarzschild criticality [9], leading to the establishment of a passage toward a second sheet. Whatever physical meaning one assigns to this model, the following figure illustrates the P-symmetry of the two sheets. In three-dimensional space, four points form a tetrahedron whose volumetric orientation is linked to the orientation of its faces. When this tetrahedron crosses the throat sphere, its orientation becomes inverted, showing that the two sheets are related by an enantiomorphic relationship, as shown on **Figure 32**.

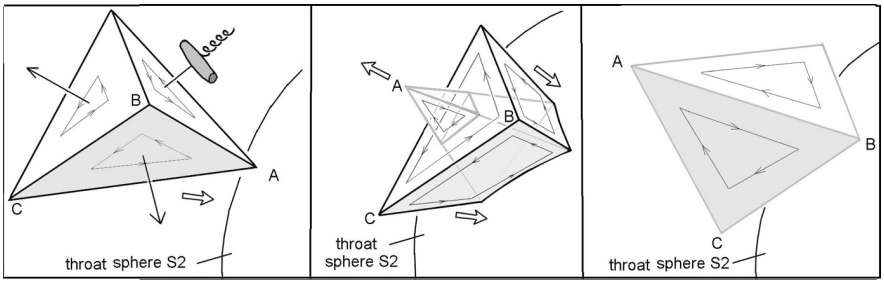


Figure 32. Crossing the throat sphere produces space-inversion [23].

In general, a choice of coordinates leads to a representation of the solution-object that is both geometric and physical. Each such choice corresponds to a particular way of conceiving spacetime, both geometrically and physically. When the stationary, spherically symmetric exterior solution to Einstein's equations is viewed in isolation as a physical object, a black hole, this choice of a geometry that allows for contraction implies a swapping of the roles of space and time coordinates within the object; this issue does not arise in interpretations derived from Flamm's, in which the object is non-contractile and possesses no interior.

8. Conclusion

We must now draw conclusions from this review of the various works in question. This could be summarized by saying that "everything depends on what one calls spacetime". As defined in 1909 by H. Minkowski, it is a hypersurface defined by a real elementary line element: $ds^2 \geq 0$. This was also the position held by Schwarzschild, Einstein, Droste, Weyl, Flamm, and many others at the time. In December 1916, the mathematician D. Hilbert proposed that the solution hypersurface be defined directly from the bilinear form—representing what is today referred to as the "extension of the solution to the whole of spacetime". Consequently, the signature ceases to act as a rigid constraint and can take either the form $(+---)$ or $(-+++)$. This corresponds to the standard view of spacetime expressed through the geometric interpretation of the Schwarzschild solution known as the black hole model. This article demonstrates that this interpretation differs from the reading

of the geometry provided by Flamm. Achieving this "extension to the whole of spacetime" requires that geodesics penetrating "into the interior"—beyond the Schwarzschild sphere—connect differently. That is, instead of extending onto the second sheet of Flamm's surface (organized around a throat sphere and corresponding to a wormhole), they extend into a region of spacetime "where time and space coordinates exchange roles". These correspond to two different topological options. Mathematically, Flamm's physical interpretation corresponds to a non-contractile geometric object, as can be seen directly from the line element in **Figure 10**, whereas the black hole model reflects the preservation of the object's contractibility, at the cost of swapping the roles of the coordinates. This article represents only the beginning of a broader line of reasoning linked to the black hole model. The ultimate goal is to clarify the nature of the geometric extension associated with this model. A future article will address the Kruskal extension and aspects related to Birkhoff's theorem.

Author Contributions

J.-P. Petit is the author of the article. G. D'Agostini verified the calculations, and J.-M. Pechinot contributed to the production of some of the figures.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

[1] Schwarzschild, K. (1916) Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

[2] Einstein, A. (1915) Erlklärung der Perihelbewegung des Merkur aus allgemeinen Relarivitätstheorie. Königlish Preubische Akademie der Wissenschaften (Berlin) Sitzungberichet, 831-838.

[3] Schwarzschild, K. (1915) Letter to A. Einstein. Collected Papers of Albert Einstein, The Berlin Years, Correspondence 1914-1918, Document n°169. https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc

[4] Abrams, L.S. (1989) Black Holes: The Legacy of Hilbert's Error. *Canadian Journal of Physics*, **67**, 919-926.

[5] Hilbert, D. (1916) Die Grundlagen der Physik (Esrte Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse.

[6] Flamm, L. (1916) Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zestschrift*, **17**, 448-454.

[7] Hilbert, D. (1915) Die Grundlagen der Physik (Esrte Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 20 November 1915, 395-407.

[8] Einstein, A. (1915) Die Feldgleichungen des Gravitation (The Field Equation of Gravitation). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Berlin, 844-847.

[9] Schwarzschild, K. (1916) Über das Gravitionalsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flü-

ssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz.

[10] Droste, J. (1917) The Field of a Single Centre in Einstein's Theory of Gravitation and the Motion of a Particle in That Field. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, **19**, 197-215.

[11] Weyl, H. (1917) Zur Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, **359**, 117-145. https://doi.org/10.1002/andp.19173591804

[12] Minkowski, H. (1909) Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 75-88.

[13] Poincaré, H. (1902) La mesure du temps. *Revue de métaphysique et de morale*, **10**, 1-13.

[14] Eddington, A. (1919) The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge University Press.

[15] Tolman, R.C. (1946) Relativity, Thermodynamics and Cosmology. The Clarendon Press.

[16] Chandrasekhar, S. (1992) The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford University Press.

[17] Petit, J.P. and D'Agostini, G. (2015) Cancellation of the Singularity of the Schwarzschild Solution with Natural Mass Inversion Process. *Modern Physics Letters A*, **30**, Article ID: 1550051.

[18] Eufrasio, R.T., Mecholsky, N.A. and Resca, L. (2018) Curved Space, Curved Time, and Curved Space-Time in Schwarzschild Geodetic Geometry. *General Relativity and Gravitation*, **50**, Article No. 159. https://doi.org/10.1007/s10714-018-2481-2

[19] Einstein, A. and Rosen, N. (1935) The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Physical Review*, **48**, 73-77. https://doi.org/10.1103/physrev.48.73

[20] Oppenheimer, J.R. and Snyder, H. (1939) On Continued Gravitational Contraction. *Physical Review*, **56**, 455-459. https://doi.org/10.1103/physrev.56.455

[21] Kruskal, M.D. (1960) Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Physical Review*, **119**, 1743-1745. https://doi.org/10.1103/physrev.119.1743

[22] Petit, J. and D'Agostini, G. (2025) Alternatives to Black Holes: Gravastars and Plugstars. *Journal of Modern Physics*, **16**, 1479-1490. https://doi.org/10.4236/jmp.2025.1610072

[23] Koiran, P., Zejli, H., Levy, J., Margnat, F., Duval, M. and Zejli, H. (2024) PT-Symmetry in One-Way Wormholes. *Annals of Physics*, **470**, Article ID: 169765. https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169765

Supplementary Information

wobei die Hilfsgröße

$$R = (3x_1 + \rho)^{1/3} = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

eingeführt ist.

Setzt man diese Werte der Funktionen f im Ausdruck (9) des Linienelements ein und kehrt zugleich zu gewöhnlichen Polarkoordinaten zurück, so ergibt sich das Linienelement, welches die strenge Lösung des Einsteinschen Problems bildet:

$$ds^2 = (1 - \alpha/R)dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\phi^2),\ R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}. \quad (14)$$

Dasselbe enthält die eine Konstante α, welche von der Größe der im Nullpunkt befindlichen Masse abhängt.

Figure S1. German version of **Figure 1** (the line element expressed with the intermediate quantity R).

§ 3. Nennt man die Zeit t, die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, so ist das allgemeinste Linienelement, welches die Forderungen 1—3 erfüllt, offenbar das folgende:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

wobei F, G, H Funktionen von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sind.

Figure S2. German version of **Figure 2** (the true Schwarzschild's radial coordinate r).

Man setze

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos\vartheta, \quad x_3 = \phi. \quad (7)$$

Figure S3. German version of **Figure 3** (Schwarzschild's first coordinate change).

In den neuen Polarkoordinaten lautet das Linienelement:

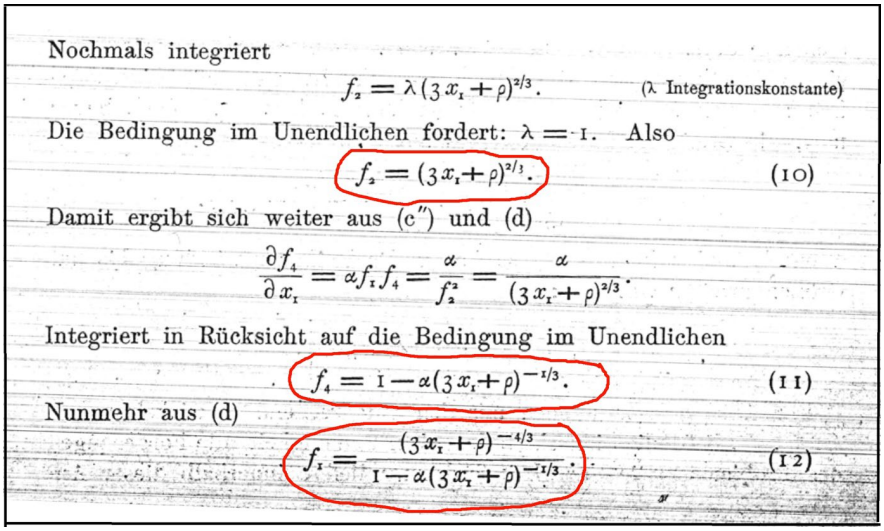
$$ds^2 = Fdx_4^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}\right)dx_1^2 - Gr^2\left[\frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} + dx_3^2(1 - x_2^2)\right], \quad (8)$$

wofür wir schreiben wollen:

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2\frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} - f_3 dx_3^2(1 - x_2^2). \quad (9)$$

Dann sind f_1, $f_2 = f_3$, f_4 drei Funktionen von x_1

Figure S4. German version of **Figure 4** (the three functions f).



Nochmals integriert

$$f_2 = \lambda(3x_1+\rho)^{2/3}. \qquad (\lambda \text{ Integrationskonstante})$$

Die Bedingung im Unendlichen fordert: $\lambda = 1$. Also

$$f_2 = (3x_1+\rho)^{2/3}. \qquad (10)$$

Damit ergibt sich weiter aus (c″) und (d)

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1 f_4 = \frac{\alpha}{f_2^2} = \frac{\alpha}{(3x_1+\rho)^{2/3}}.$$

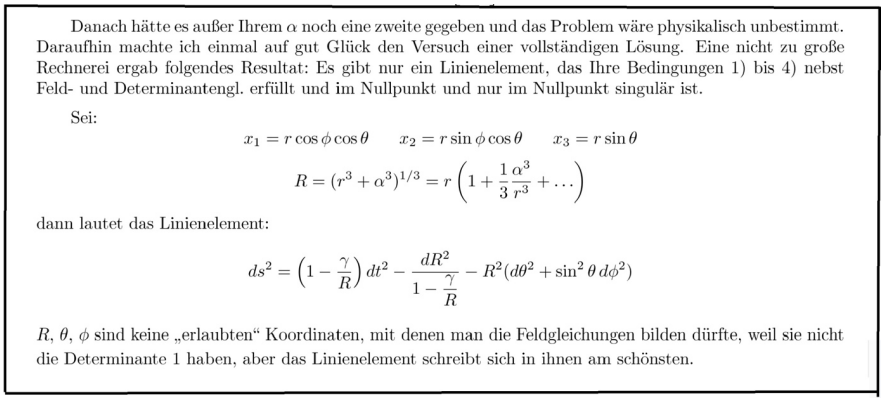
Integriert in Rücksicht auf die Bedingung im Unendlichen

$$f_4 = 1-\alpha(3x_1+\rho)^{-1/3}. \qquad (11)$$

Nunmehr aus (d)

$$f_1 = \frac{(3x_1+\rho)^{-4/3}}{1-\alpha(3x_1+\rho)^{-1/3}}. \qquad (12)$$

Figure S5. German version of **Figure 4** (expressions of the three functions *f*) [1].



Danach hätte es außer Ihrem α noch eine zweite gegeben und das Problem wäre physikalisch unbestimmt. Daraufhin machte ich einmal auf gut Glück den Versuch einer vollständigen Lösung. Eine nicht zu große Rechnerei ergab folgendes Resultat: Es gibt nur ein Linienelement, das Ihre Bedingungen 1) bis 4) nebst Feld- und Determinantengl. erfüllt und im Nullpunkt und nur im Nullpunkt singulär ist.

Sei:

$$x_1 = r\cos\phi\cos\theta \qquad x_2 = r\sin\phi\cos\theta \qquad x_3 = r\sin\theta$$

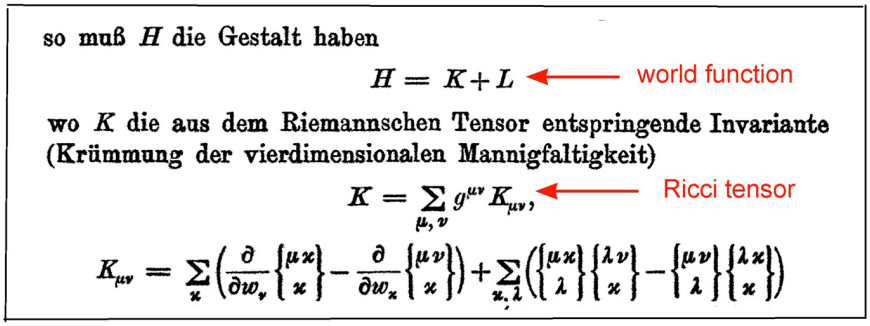
$$R = (r^3+\alpha^3)^{1/3} = r\left(1+\frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{r^3}+\dots\right)$$

dann lautet das Linienelement:

$$ds^2 = \left(1-\frac{\gamma}{R}\right)dt^2 - \frac{dR^2}{1-\frac{\gamma}{R}} - R^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)$$

R, θ, ϕ sind keine „erlaubten" Koordinaten, mit denen man die Feldgleichungen bilden dürfte, weil sie nicht die Determinante 1 haben, aber das Linienelement schreibt sich in ihnen am schönsten.

Figure S6. German version of **Figure 8** (the letter to Einstein).



so muß H die Gestalt haben

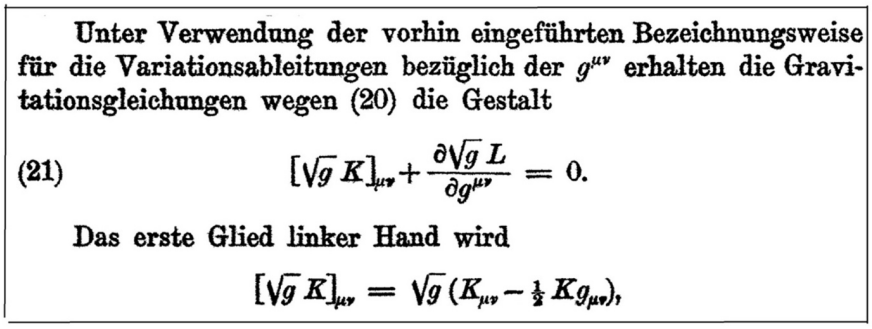
$$H = K+L$$ ← world function

wo K die aus dem Riemannschen Tensor entspringende Invariante (Krümmung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit)

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}K_{\mu\nu},$$ ← Ricci tensor

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial w_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial w_\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\right) + \sum_{\varkappa,\lambda}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\varkappa\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\right)$$

Figure S7. German version of **Figure 9** (the Hilbert's world function).



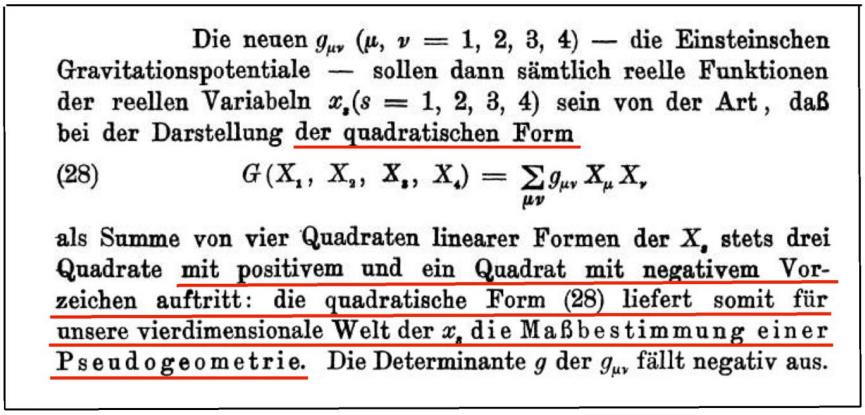
Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungsweise für die Variationsableitungen bezüglich der $g^{\mu\nu}$ erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \tag{21}$$

Das erste Glied linker Hand wird

$$[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} K g_{\mu\nu}),$$

Figure S8. German version of Figure 10 (The Hilbert's Field Equation).

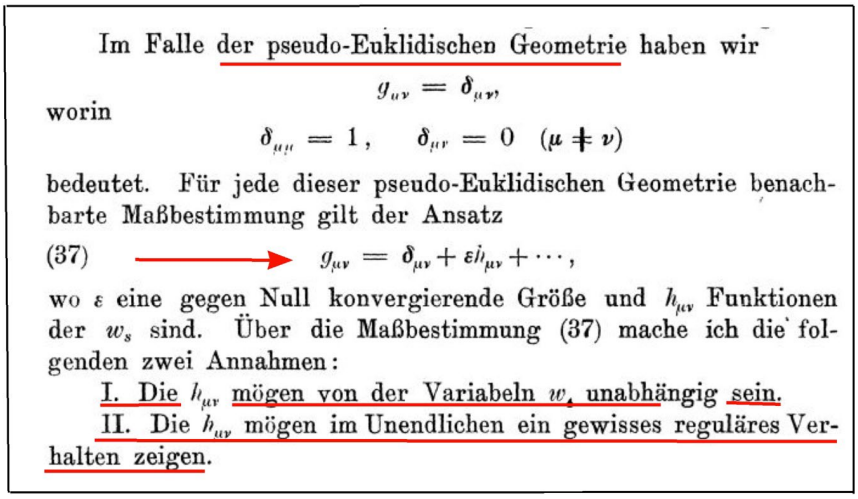


Die neuen $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) — die Einsteinschen Gravitationspotentiale — sollen dann sämtlich reelle Funktionen der reellen Variabeln $x_s (s = 1, 2, 3, 4)$ sein von der Art, daß bei der Darstellung der quadratischen Form

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{28}$$

als Summe von vier Quadraten linearer Formen der X_s stets drei Quadrate mit positivem und ein Quadrat mit negativem Vorzeichen auftritt: die quadratische Form (28) liefert somit für unsere vierdimensionale Welt der x_s die Maßbestimmung einer Pseudogeometrie. Die Determinante g der $g_{\mu\nu}$ fällt negativ aus.

Figure S9. German version of Figure 11 (Hilbert's quadratic form).



Im Falle der pseudo-Euklidischen Geometrie haben wir

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

worin

$$\delta_{\mu\mu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

bedeutet. Für jede dieser pseudo-Euklidischen Geometrie benachbarte Maßbestimmung gilt der Ansatz

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \cdots, \tag{37}$$

wo ε eine gegen Null konvergierende Größe und $h_{\mu\nu}$ Funktionen der w_s sind. Über die Maßbestimmung (37) mache ich die folgenden zwei Annahmen:

I. Die $h_{\mu\nu}$ mögen von der Variabeln w_s unabhängig sein.

II. Die $h_{\mu\nu}$ mögen im Unendlichen ein gewisses reguläres Verhalten zeigen.

Figure S10. German version of Figure 12 (Hilbert's pseudo Euclidean space).

Das Axiom bedeutet, dass an jedem Punkt im Universum der Ausdruck

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ist immer positiv, oder, gleichbedeutend damit, dass die Geschwindigkeit v immer kleiner als c ist. Somit ist c die obere Grenze für die Geschwindigkeit eines beliebigen wesentlichen Punktes, und genau darin liegt seine wahre Bedeutung.

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Das Integral $\int d\tau$ dieser Größe entlang der Weltgeraden wird als Eigenzeit des substanziellen Punktes bezeichnet.

Figure S11. German version of **Figure 13** (Minkowski's axiomatic definition of spacetime).

Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.

Von K. Schwarzschild.

(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

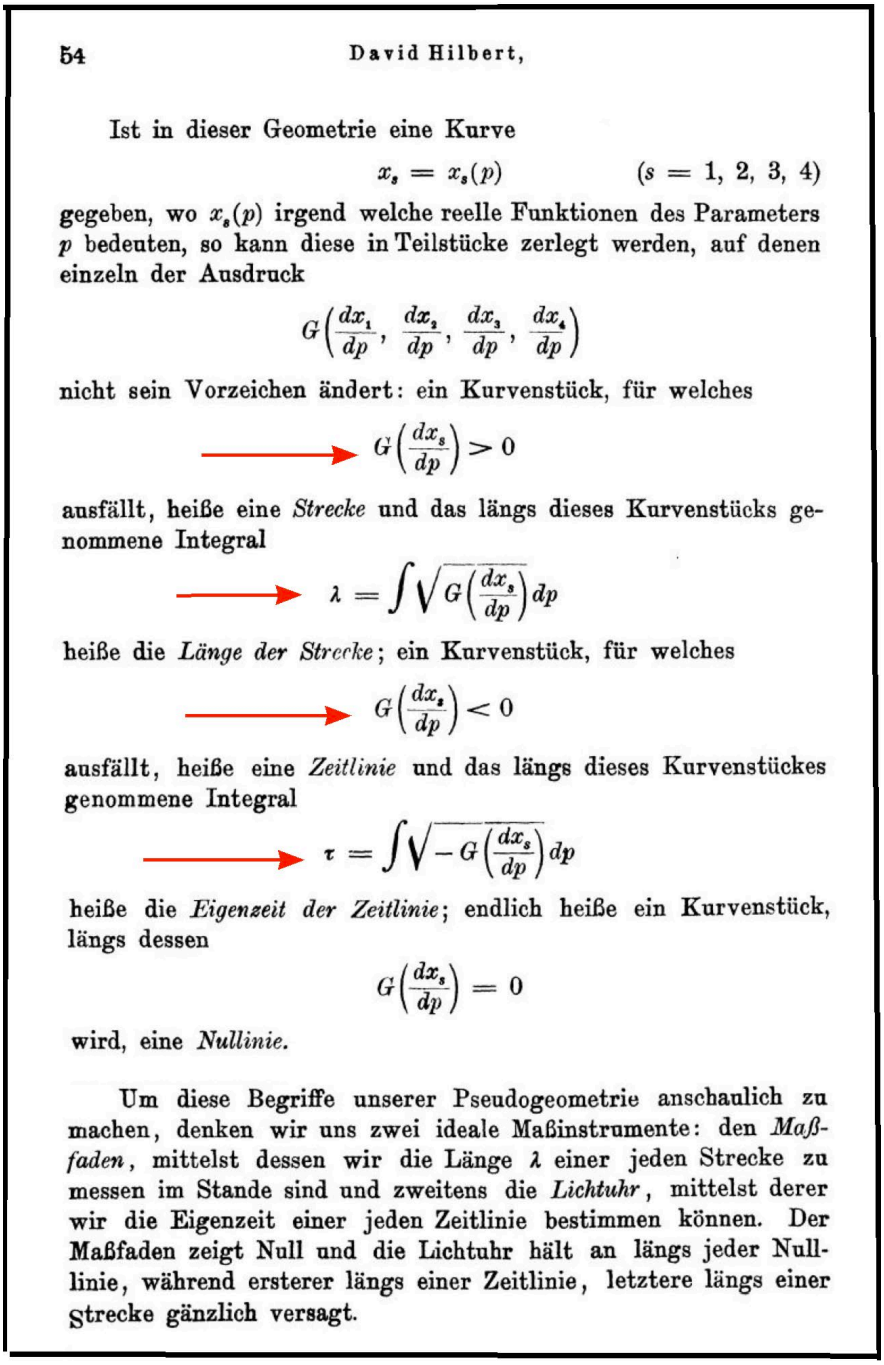
§ 1. Hr. Einstein hat in seiner Arbeit über die Perihelbewegung des Merkur (s. Sitzungsberichte vom 18. November 1915) folgendes Problem gestellt:

Ein Punkt bewege sich gemäß der Forderung

$$\text{wobei} \quad \left.\begin{aligned} \delta\int ds = 0, \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \qquad \mu,\nu = 1,2,3,4 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ist, $g_{\mu\nu}$ Funktionen der Variabeln x bedeuten und bei der Variation am Anfang und Ende des Integrationswegs die Variablen x festzuhalten sind. Der Punkt bewege sich also, kurz gesagt, auf einer geodätischen Linie in der durch das Linienelement ds charakterisierten Mannigfaltigkeit.

Figure S12. German version of **Figure 14** (foreword of the Schwarzschild's paper).



54 David Hilbert,

Ist in dieser Geometrie eine Kurve

$$x_s = x_s(p) \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wo $x_s(p)$ irgend welche reelle Funktionen des Parameters p bedeuten, so kann diese in Teilstücke zerlegt werden, auf denen einzeln der Ausdruck

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

nicht sein Vorzeichen ändert: ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

ausfällt, heiße eine *Strecke* und das längs dieses Kurvenstücks genommene Integral

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Länge der Strecke*; ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

ausfällt, heiße eine *Zeitlinie* und das längs dieses Kurvenstückes genommene Integral

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

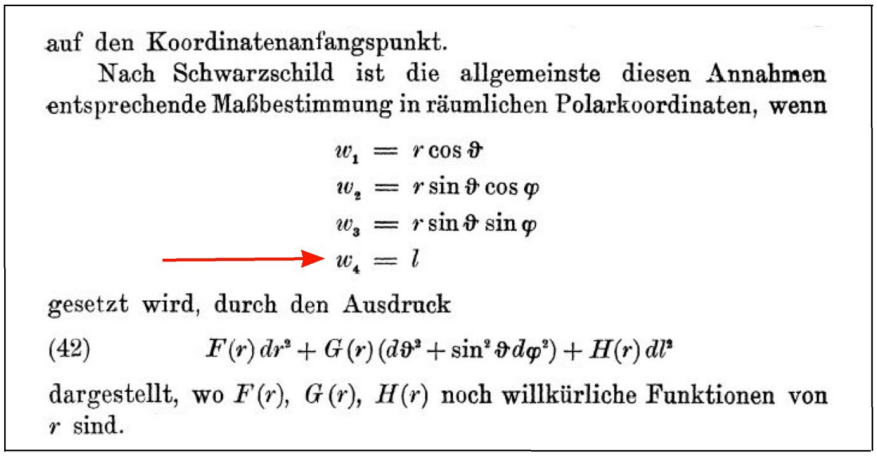
heiße die *Eigenzeit der Zeitlinie*; endlich heiße ein Kurvenstück, längs dessen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

wird, eine *Nullinie*.

Um diese Begriffe unserer Pseudogeometrie anschaulich zu machen, denken wir uns zwei ideale Maßinstrumente: den *Maßfaden*, mittelst dessen wir die Länge λ einer jeden Strecke zu messen im Stande sind und zweitens die *Lichtuhr*, mittelst derer wir die Eigenzeit einer jeden Zeitlinie bestimmen können. Der Maßfaden zeigt Null und die Lichtuhr hält an längs jeder Nullinie, während ersterer längs einer Zeitlinie, letztere längs einer Strecke gänzlich versagt.

Figure S13. German version of Figure 15 (Hilbert's definition of lengths).



auf den Koordinatenanfangspunkt.

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

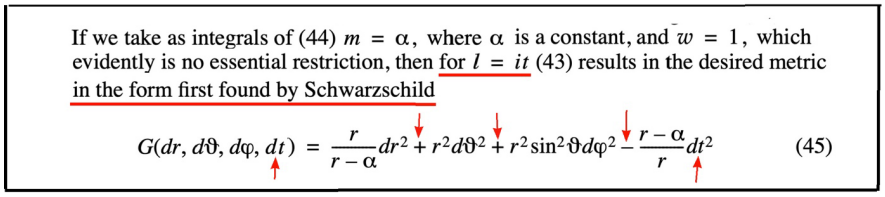
$$w_1 = r\cos\vartheta$$
$$w_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$w_3 = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$w_4 = l$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

$$F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) + H(r)\,dl^2 \tag{42}$$

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind.

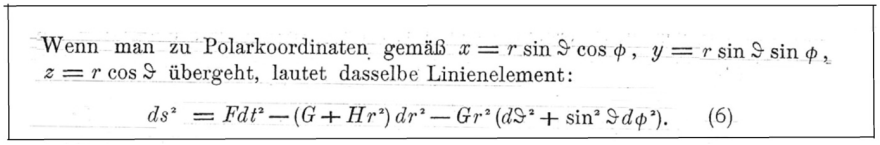
Figure S14. German version of Figure 16 (Hilbert's coordinates' choice).



If we take as integrals of (44) $m = \alpha$, where α is a constant, and $w = 1$, which evidently is no essential restriction, then for $l = it$ (43) results in the desired metric in the form first found by Schwarzschild

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dt) = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dt^2 \tag{45}$$

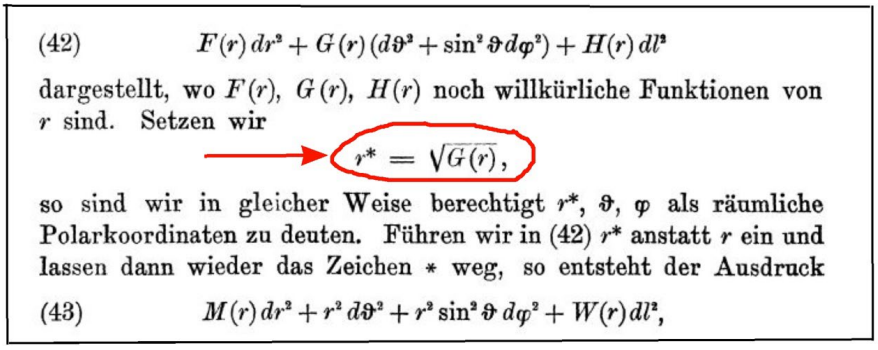
Figure S15. German version of Figure 17-German version of Figure 17 (Hilbert's identification of his solution to Schwarzschild's).



Wenn man zu Polarkoordinaten gemäß $x = r\sin\vartheta\cos\phi$, $y = r\sin\vartheta\sin\phi$, $z = r\cos\vartheta$ übergeht, lautet dasselbe Linienelement:

$$ds^2 = Fdt^2 - (G + Hr^2)\,dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\phi^2). \tag{6}$$

Figure S16. German version of Figure 18 (Schwarzschild's line element).



$$F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) + H(r)\,dl^2 \tag{42}$$

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen $*$ weg, so entsteht der Ausdruck

$$M(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + W(r)\,dl^2, \tag{43}$$

Figure S17. German version of Figure 19 (Hilbert's approximation).

§2. Nun können wir in analoger Weise den ersten Fall untersuchen, der von Schwarzschild behandelt wurde, nämlich das Gravitationsfeld einer Punktmasse. Das Linienelement hat in seiner einfachsten Form dieselbe Struktur wie oben und lautet:

$$d s^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) d t^2 - \frac{d R^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 \left(d \vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2\right) .$$

Figure S18. German version of Figure 21 (Flamm's choice for the metric representation).

Wenn also elementare Lineale und Uhren vom Gravitationsfeld beeinflusst werden, muss die Ausbreitung des Lichts in exakt derselben Weise beeinflusst werden, sodass sie im Vergleich keine Unterschiede aufweisen. Dasselbe gilt für alle anderen physikalischen Phänomene. Dies könnte erklären, warum sich die Bewegung eines Punktteilchens durch die einfache Variationsgleichung beschreiben lässt.

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} d s = 0 \quad , \tag{5}$$

Figure S19. German version of Figure 22 (Flamm's variational procedure).

Der räumliche Anteil des Linienelements ist wiederum nichteuklidischer Natur. Aufgrund der sphärischen Symmetrie scheint es wiederum ausreichend zu sein, die Betrachtung auf die metrischen Eigenschaften in einem beliebigen ebenen Schnitt durch den Ursprung zu beschränken, $\vartheta = \pi/2$. un erhält man

$$d \sigma_e{}^2 = \frac{d R^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} + R^2 \, d \varphi^2 \tag{4}$$

Bezeichnet man mit z die Koordinate in Richtung der Rotationsachse, so ergibt sich die Gleichung für die Meridionalkurve aus

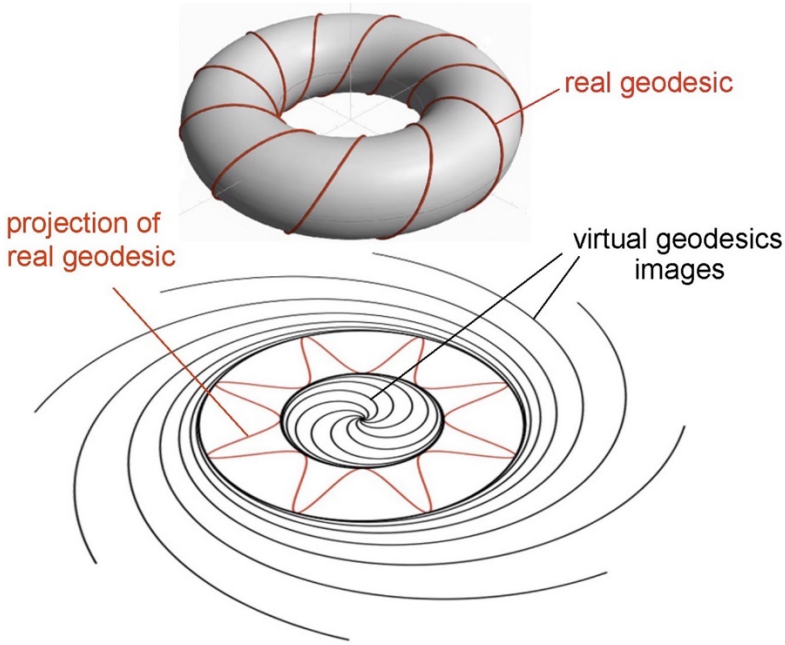
$$\frac{d z}{d R} = \operatorname{tg} \chi = \sqrt{\frac{\alpha}{R - \alpha}}$$

$$z^2 = 4\alpha(R - \alpha).$$

Dies beschreibt eine Parabol mit Parameter

$$p = 2\alpha,$$

Figure S20. German version of Figure 23 (Flamm's embedment).



Les géodésiques-fantômes du tore

Personne n'a rien vu, pendant 60 ans. Ce qui amenait un referee, à la première lecture de l'article, à exprimer son scepticisme en écrivant dans son premier rapport :

- *Comment peut-on imaginer que tant de gens n'aient jamais vu pendant six décennies !*

Je serai prêt à soutenir ces articles dans n'importe quel séminaire[77]. En ce moment mes effort consistent à présenter cela devant des mathématiciens géomètres, spécialistes des géométries Lorentzienne, pour réacquérir leur aval, et doubler ces analyses d'un article publié cette fois dans une revue … de mathématique.

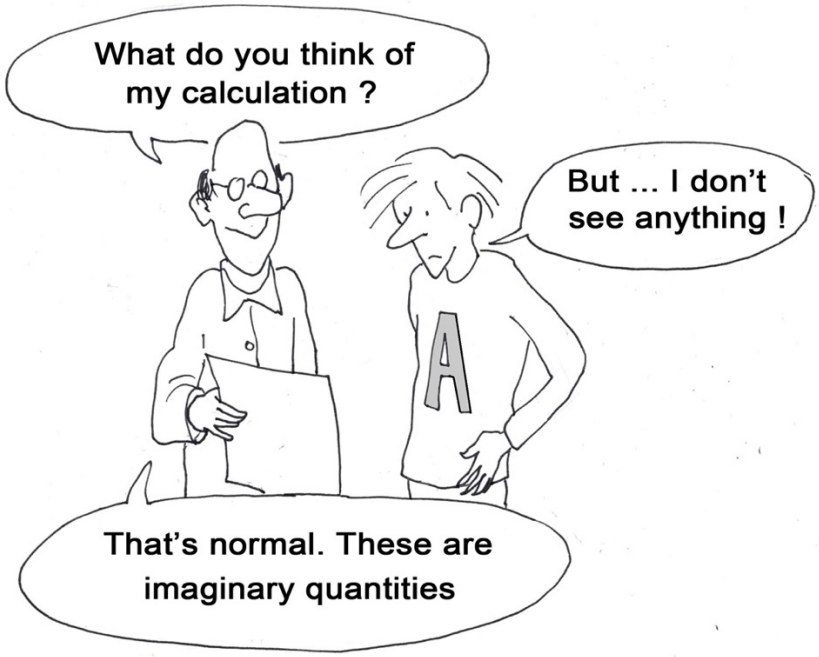
Ce premier aspect porte un coup terrible à cette chimère mathématique qu'est le modèle des trous noirs. Ceci envoie à la décharge des milliers d'articles et des centaines de thèses de doctorat, dont le prix Nobel reçu en par le sympathique mathématicien Anglais Roger Penrose « pour avoir montré que le modèle du trou noir découlait immanquablement de l'équation d'Einstein, de la Relativité générale. Et auteur, avec Stephen Hawking, de théorèmes sur une singularité centrale qui n'existe que dans … leur imagination, qui appartient à un monde imaginaire.

Mon dernier article est porteur de trois dessins humoristiques, dont voici les versions françaises, et qui illustrent l'idée :

[77] Mais, en France, les portes des séminaires de hauts-lieux comme l'Institut d'Astrophysique de Paris, l'Observatoire de Paris-Meudon, le séminaire de Normale Supérieure, l'Institut des Hautes Études Scientifiques, etc , se contentent de ne pas répondre à mes propositions de séminaires.


Je veux bien mais alors fournissez-moi ces joncs dotés de longueurs imaginaires
Oct 2026 JeanPierrePetit


intéressantes ces méridiennes. Mais je n'ai pas la tôle qui permet de construire de tels objets !
oct 2026
Jean Pierre Petit



Cette chimère nommée Modèle du Trou Noir, est née dans les années soixante-soixante-dix, d'une mauvais transcription de résultats de calcul par les grands diffuseur de ce nouveau savoir baptisé « cosmologie », principalement Eddington et Tolman, en langue angmlaise.

Ajourtons que seuls les gens à l'aise avec la langue de Goethe pouvaient s'aventurer dans les textes originaux, produits par des gens qui, pour la plupart, disparurent peu de temps après les avoir écrits, en général des mathématiciens.

Hermann Minkowski, mort en 1909 d'une péritonite.

Werner Boy dès 1914, tué à la bataille de la Marne.

Karl Schwarzschild, mort sur le front russe en mai 1916, trois mois après sa publication

Félix Klein, mort en 1925

Tout cela ne serait pas arrivé si, en janvier 1916, Karl Schwarzschild avait publié sa fameuse solution avec ses véritables coordonnées chrono-polaires t, r, θ, φ :

$$ds^2 = \frac{(r^3+\alpha^3)^{1/3} - \alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4\, dr^2}{(r^3+\alpha^3)[(r^3+\alpha^3)^{1/3} - \alpha]} - (r^3+\alpha^3)^{2/3}(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

C'est la première fois, au monde, que cette solution, ainsi formulée, figure dans un article scientifique, alors que n'importe quel étudiant de première année était à même de l'établir en quelques lignes. Et cela 116 ans après la publication de janvier 1916.

Ce qui est simplement sidérant, c'est que personne ne se soit attaché à rétablir cette solution dans ses véritable coordonnées, réelles. Sa signature (+ - - -) est alors « gravée dans le marbre », invariable, quelles que soient les valeurs (réelles) des quatre coordonnées.

La chimère n'aurait jamais pu naître sur un tel terreau.

J'ai donné toute la construction, équation après équation, ligne après ligne, dans l'article :

J-P Petit G. D'Agostini : The true Schwarzschild solution and its subsequent geometry[78]. The Journal of Modern Physics. August 2026. Vol. 17 n°8.

On a vu, plus haut, que l'acte de naissance du Trou Noir avait été la proposition, en 1939, par Oppenheimer et Snyder. Dans la présentation « standard » de la solution de Schwarzschild la coordonnée *t* n'est qu'un simple moyen de repérage des points sur l'hypersurface. Avec ce choix, arbitraire, des coordonnées, les temps de chute libre et d'évasion sont alors infinis.

Oppenheimer a donc suggéré d'utiliser cette solution stationnaire pour décrire un processus se déroulant un quelques … jours ! L'implosion d'une étoile massive. Et c'est la seconde clé du modèle des trous noirs.

Reprenant des analyses existant depuis de nombreuses années, le mathématicien Pascal Koiran, a repris cette solution stationnaire en symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans sa formulation « dans les coordonnées d'Eddington ». Ce changement de coordonnées s'opère sur le temps. Appelons t_S la coordonnée de temps (le « temps de Schwarzschild ») dans la présentation « sous la forme standard ». On passe au « temps d'Eddington » avec le changement de variable, où α le périmètre p de la sphère de gorge, divisé par 4 π , étant donné que le mot « rayon » n'a plus de sens, puisque cette sphère de Schwarzschiuld n'a plus de « centre » :

$$r = \alpha (1 + ln\, ch\, \rho)$$

La métrique devient :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) c^2 {dt_E}^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r}\, dr\, dt_E - r^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Eddington l'a inventé en 1924 pour faire disparaître la singularité de coordonnée en $r = \alpha$

Cela fait apparaître un terme croisé en $dr\, dt_E$

[78] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2026-JMP-The-True-Schwarzschild-Solution-and-its-Subsequent-Geometry.pdf

Certains esprits forts vous diront que le théorème de Birkhoff [79]exclut la présence de ce terme. C'est une lecture erronée de ses conclusions. The théorème de Birkhoff dit que la solution à symétrie sphérique est automatiquement invariante par translation temporelle et *peut* être mise sous la forme standard que l'on connait. Ne pas confondre *peut* et *doit*.

Dans la forme ci-dessus le temps d'évasion reste infini, mais le temps de chute libre devient fini, et bref [80]. Alors l'hypothèse d'Oppenheimer devient « coordinate dependent ». Dans un article ultérieur Koiran et Lévy[81] (moi … sous un pseudonyme) ont imaginé de couple une seconde métrique où le signe du terme croisé est inversé, qui est également solution et se déduit par le changement de variable, opéré sur la forme standard :

$$r \;=\; \alpha\,(\,1 \;-\; ln\; ch\;\rho\,)$$

Il vient :

$$d\bar{s}^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 {dt_E}^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r}\, dr\, dt_E - r^2(\, d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\,)$$

Situation inverse, le temps d'évasion est fini et le temps de chute libre infini. On obtient une

One-way membrane

Un passa « par une sphère de gorge », qui ne peut s'opérer que dans un seule sens. On peut rassembler ces deux métriques en une seule, en combinant avec le « changement de variable magique », en ρ. Et on obtient la « métrique de Petit » :

$$ds^2 = \left(\frac{ln\; ch\rho}{1 + ln\; ch\rho}\right) c^2 {dt_E}^2 - \left(\frac{2 + ln\; ch\rho}{1 + ln\; ch\rho}\right) \alpha^2 th^2\rho\; d\rho^2 - 2c\alpha \left(\frac{th\rho}{1 + ln\; ch}\right) d\rho dt$$

$$- \alpha^2 (1 + ln\; ch\rho)^2 (\, d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\,)$$

Quand on passe d'une nappe à l'autre le terme croisé change de signe grâce à la propriété

$$th\,(-\rho) \;=\; -\,th\,\rho$$

A ce stade, je pense que l'affaire est réglée. Il ne reste plus rien de la chimère. Certains diront que le modèle du trou noir n'est pas fondé sur la solution de Schwarzschild, mais sur la métrique de Kerr, qui tient compte de la rotation.

---

[79] G.D. Birkhoff : Relativity and modern physics. Cambridge Harvard University Press, 1923

[80] P.Koiran : Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application to Eddigton-Rosen Bridges. International Journal of Modern Physics D , vol.30 , n0 15, 2150106 (2021)
https://arxiv.org/abs/2110.05938

[81] P.Koiran,J-P Levy,F Margnat, M-F Duval, H.Zejli. PT-symmetry in one-way wormholes. Annals of Physics. 470 (2024) 169765

Cette métrique extérieure possède un terme croisé en $dtd\varphi$. On peut la modifier à l'aide d'un changement de variable sur le temps, faisant apparaître un terme croisé en *dtdr.* Et là encore on fera disparaître ce merveilleux « gel du temps », clé du trou noir, où le temps de chute libre est infini. La rotation ne fera que modifier légèrement le scénario.

Non, invoquer cette métrique de Kerr, comme le fait Luminet, ne fera pas survivre la chimère.

Combien d'années s'écouleront avant que l'on se décide à abattre le château de cartes. Je ne hasarderai aucun chiffre.

On pense à l'expression anglo-saxonne :

- Too big to fail [82].

On a donc tous ces travaux, qui illustrent la première phrase entendue à Madrid par le technicien Domingez, en réponse à sa question :

- ¿Qué es un agujero negro?[83]

La réponse avait été :

- Eso no existe[84]

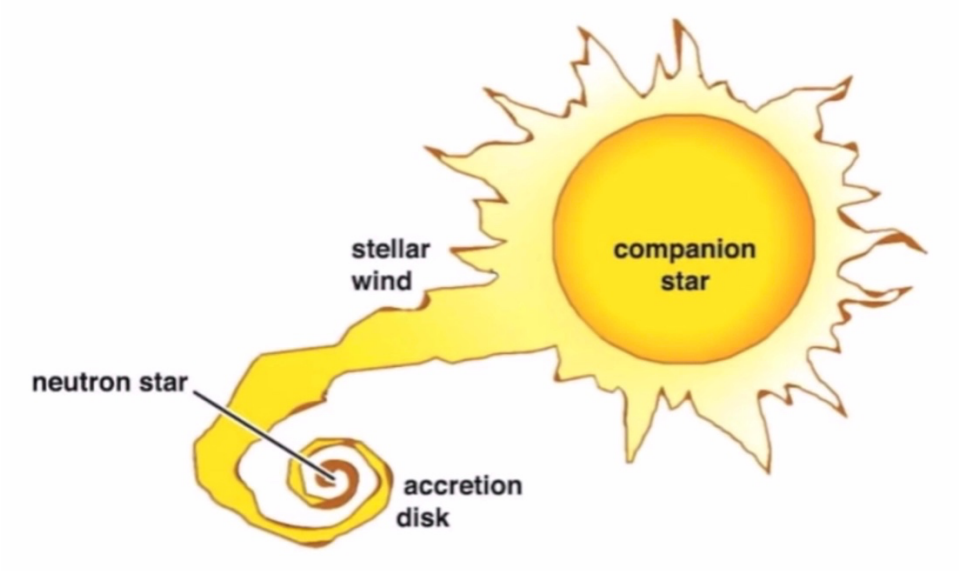
Il nous faut maintenant prendre en charge la seconde phrase :

- Cuando una estrella de neutrones se desestabiliza debido a la captura de materia proveniente de una estrella compañera, se deshace de ella enviándola al universo gemelo[85].

Essayons de réfléchir à cette question.

Le cas de l'étoile à neutrons est intéressant car, à la différence du problème créé par le collapse d'une étoile massive en fin de vue, qui ne dure que quelques jours, la montée vers la criticité d'une étoile à neutrons est très lente. Une étoile compagne n'émet que des bouffées de matière. Le Soleil émet du vent solaire. Les étoiles émettent du vent stellaire. Il existe nombre de « binaires serrées », de couples où les deux étoiles sont roches l'un de l'autre.
L'entrée en criticité peut prendre des centaines de millions d'années. Mais une évidence s'impose : il y a automatiquement un nombre important d'étoiles à neutrons qui ont connu ce destin, on atteint ces seuils critiques.

[82] Expression qu'on emploie pour des sociétés, ou des banques, « trop grandes pour pouvoir sombrer ».
[83] Qu'est-ce qu'un trou noir ?
[84] Ca n'existe pas.
[85] « Quand une étoile à neutrons est déstabilisée, par captation d'une matière envoyée par une étoile compagne, elle s'en débarrasse en l'envoyant dans l'univers jumeau ».



Nous savons décrire la géométrie à l'extérieur et à l'intérieur d'une étoile à neutrons (négligeons la rotation) en utilisant les deux solutions métriques publiées par Karl Schwarzschild en janvier et février 1916.

Beaucoup de cosmologistes, ou en tout cas de spécialistes en trous noirs, ignorent le contenu de ce second papier[86] et parfois même jusqu'à son existence.

La métrique extérieure faisait déjà état d'une criticité, qualifions-là de

Criticité *géométrique* quand $r = \alpha = Rs$

Dans une étoile à neutrons ceux-ci sont tassés les uns congre les autres. C'est plus une goutte liquide, incompressible, qu'une masse gazeuse. On peut donc envisager la croissance lente d'un objet où la densité se maintient à une valeur quasi constante. La valeur type est :

$$\rho = 10^{18}\ \mathrm{kg}/m^3$$

La masse de l'étoile croît comme le cube de son rayon. Sachant que le rayon de Schwarzschild vaut

$$R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2} = \frac{8\,\pi\,G\,\rho}{3\,c^2}\,{R_e}^3$$

Le rayon de Schwarzschild croît donc comme le cube du rayon R_e de l'étoile. Quand ce rayon rattrape le rayon de l'étoile, cela correspond à une masse de :

2.2 à 2.4 masses solaires.

---

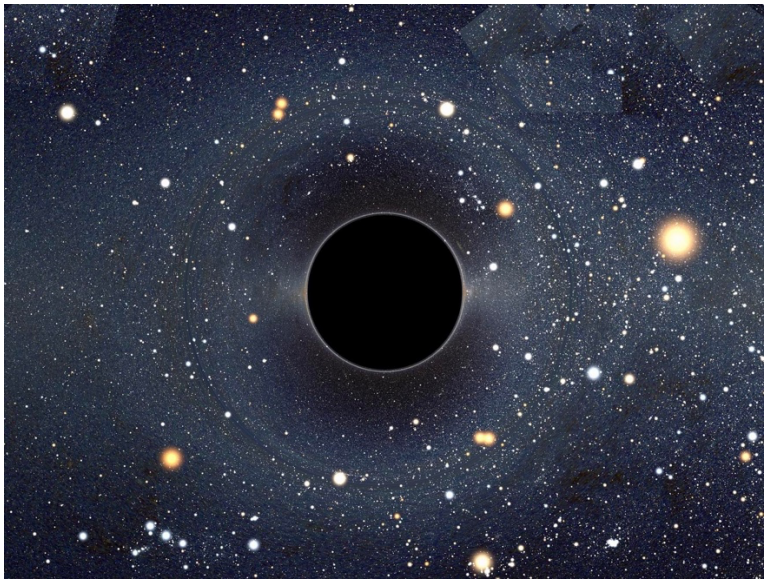
[86] K. Schwarzschild **:** Über das Gravitionalsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.

Ce qui correspond à un rayon de 6.8 km pour une masse de 2.3 masses solaires.

On estime que la rotation peut élever cette valeur de la masse de 20 % c'est-à-dire la pousser jusqu'à sans doute 3 masses solaires.

Donc, selon le scénario « Trou Noir », la masse de l'étoile à neutrons s'accroit, lentement. Sa partie centrale présente un effet de redshift gravitationnel.

La toile abonde d'images de synthèse montrant les trous noirs sous tous les angles. En l'absence de son disque d'accrétion un trou noir Ressemblerait à ceci :



Un « trou noir « nu »

Mais personne n'a construit toutes les images intermédiaires qui seraient celles d'une étoile à neutron « nue », privée de tout disque d'accrétion. En supposant que la rotation soit négligeable, on obtiendrait une image (quelqu'un la créera peut être) où, au fur et à mesure que la masse augmente, la longueur d'onde du rayonnement émis par la partie centrale, croit progressivement jusqu'à l'infini.

Un trou noir, cela serait assimilable à une étoile à neutrons présentant un effet de redshift gravitationnel infini, où la partie sombre, au centre, s'assombrit de plus en plus pour donner l'image finale ci-dessus, d'une étoile à neutron « nue » de 3 masses solaires.

Dans le schéma « trou noir », tout apport de masse supplémentaire disparait derrière cet « horizon des évènements » et chute indéfiniment vers une singularité centrale », située « au centre du trou noir ». Cet apport de matière ne ferait alors que faire croître le diamètre de ce « disque noir », proportionnellement à la masse totale, attendu que son diamètre est alors :

$$\phi = \frac{4\,G\,M}{c^2}$$

Mais, serait-ce « réaliste » ?

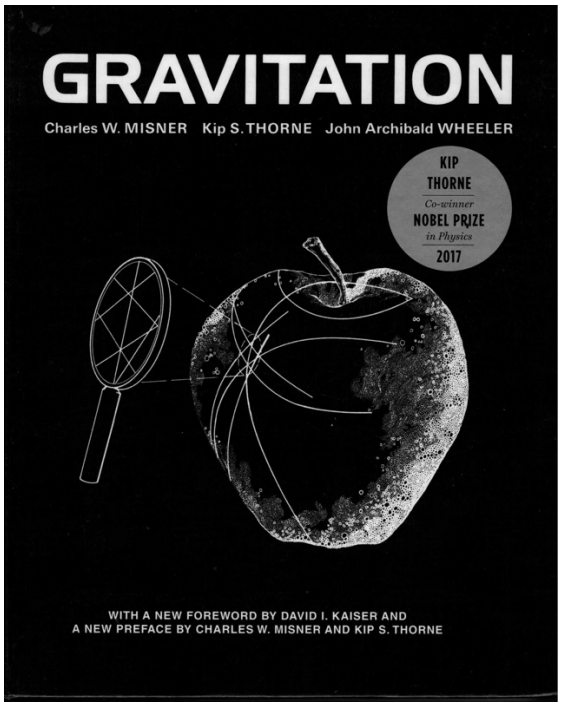
Etant donné qu'on peut considérer que cet apport de matière s'effectue très progressivement, on peut considérer chaque état de l'objet comme susceptible d'être décrit par une solution géométrique stationnaire, l'extérieur de l'objet étant décrit par la métrique extérieure de Schwarzschild, solution de l'équation de champ sans second membre :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 0$$

Et l'intérieur par l'équation avec second membre :

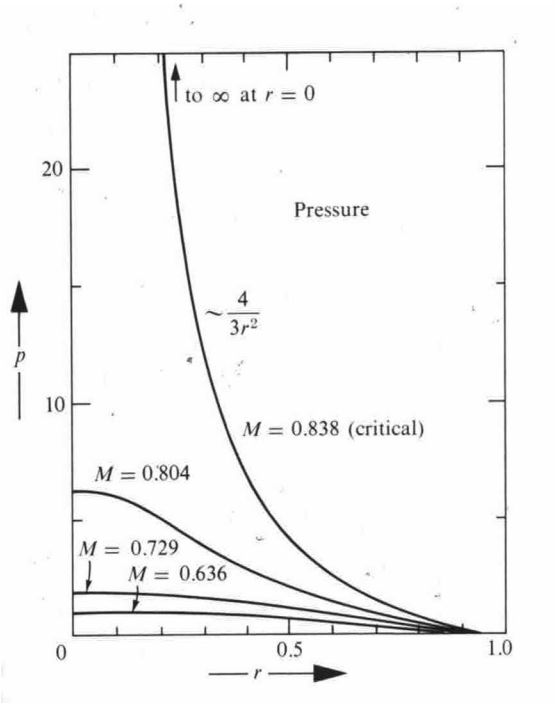
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$$

Cette solution « métrique intérieure », Karl Schwarzschild nous l'a donnée depuis février 1916[87] avec une densité constante. Dans la « Bible » de la cosmologie, version 2017, l'ouvrage « Gravitation » de J.A.Wheeler, K.S. Thorne et C.W. Misner



Voici, page 611, l'évolution de la pression au fur et à mesure que la masse s'accroît.

[87] K. Schwarzschild **:** Über das Gravitionalsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.



Evolution de la pression au centre de l'astre en fonction de la masse *M*

Si la valeur de la « masse critique géométrique » $M_{cr\ geom}$ est prise à 3 masses solaires, la pression au centre de l'étoile devient infinie pour une valeur d'une

Masse critique physique :

$$M_{cr\ phys} = M_{cr\ geom} \times 0.838 \cong 2.5\ masses\ solaires.$$

Depuis six décennies, indépendamment de l'analyse que nous avons faites de l'interprétation de la soi-disant présentation « standard » de la métrique de Schwarzschild tous les théoriciens font silence sur ce point.

C'est l'application du principe :

- *Ce que je ne sais pas gérer, je le mets sous le tapis*

Si nous reprenons cette solution métrique intérieur, elle nous donne la façon dont varie le temps propre d'un « observateur immobile » :

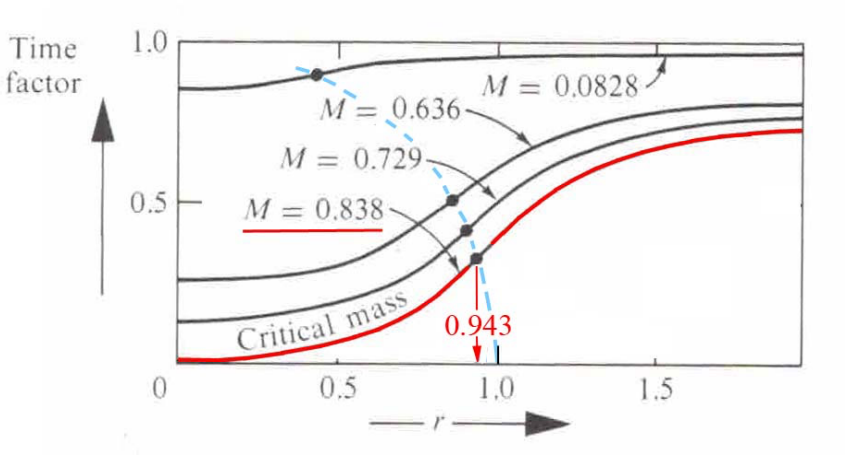
$$dr = d\theta = d\varphi = 0$$

La valeur locale de la masse, l'intensité du champ gravitationnel, modifient l'écoulement du temps. C'est un fait avéré. On est obligé d'en tenir compte pour que l'ensemble des satellites utilisés par nos systèmes GPS ne dérivent pas, au point de rendre ces systèmes inutilisables. Ainsi, le temps s'écoule plus lentement à la surface de la Terre que dans l'espace environnant, où orbitent ces satellites.

Dans le cas de la solution métrique intérieure de Schwarzschild, non seulement le temps s'écoule plus lentement à la surface de l'astre, mais si on s'enfonce dans ses entrailles le phénomène s'accentue, la dérive devenant maximale au centre. Si τ est le temps propre de « l'observateur » situé en ce point et t le temps à l'infini, cette dérive se traduit par la multiplication par une fonction qualifiée de *time factor*, de « *facteur temps* » f :

$$d\tau = f(r)\, dt$$

Cette fonction $f(r)$, la voilà, toujours à partir de l'ouvrage gravitation, même page ;



Le facteur temps en fonction du rayon t

La courbe bleue représente la croissance du « rayon de Schwarzschild » en fonction de la masse réduite :

$$M = masse\ /\ M_{cr\ geom} = M/\ 3\ masses\ solaires.$$

Et en fonction du rayon réduit :

$$rayon\ réduit\ r = rayon\ de\ l'astre/R_{cr\ geom} = rayon\ de\ l'astre/6.8\ km$$

Quand $M = 1$, le rayon $r = 1$.

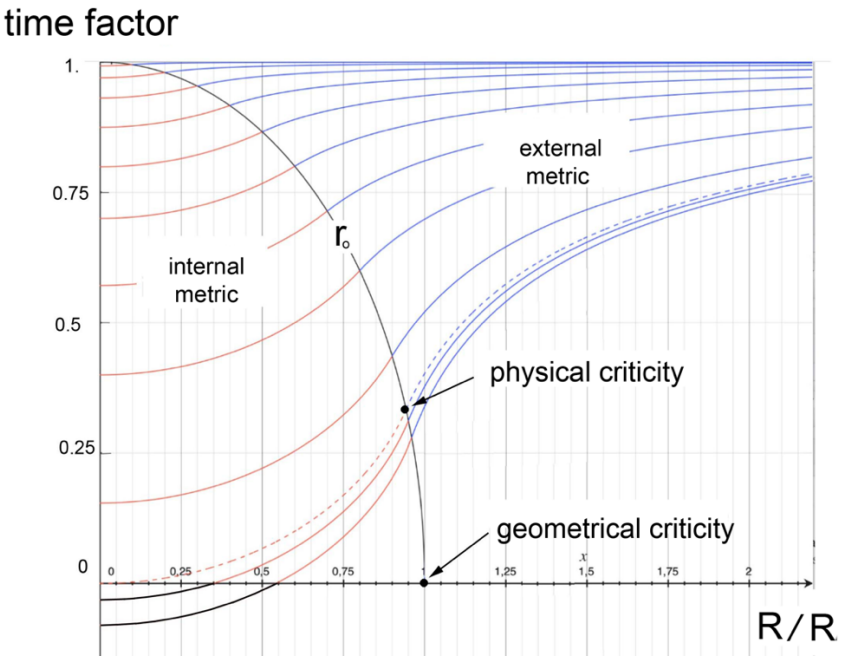
Mais quand $M = M_{cr\ phys} = 0.838\, M_{cr\ geom}$ le facteur temps f correspond à la figure rouge et s'annule alors en $r = 0$, au centre de l'objet.

Les tenants du modèle du trou noir font l'impasse sur ce phénomène depuis six décennies.

Que se passe-t-il si, en considérant cette métrique intérieure comme une solution «quasi-stationnaire » nous effectuons une petite perturbation en donnant à cette masse $M_{cr\ phys}$ un accroissement très petit :

$$M = M_{cr\ phys} + \Delta M$$

La fonction f devient négative dans une très petite portion d'espace autour du centre :



Evolution du facteur temps « au-delà de la criticité physique »

Au moindre accroissement de ma masse ce time factor devient négatif dans la partie centrale de l'astre. Or on a :

$$d\tau = f(r)\, dt$$

L'élément de temps propre, c'est aussi la façon dont le point figurant l'observateur dans l'objet géométrique progresse sur sa « ligne de temps » (*timeline*). Géométriquement, on ne peut faire demi-tour le long d'une géodésique. Ce temps propre, c'est celui qui s'écoule sur « la montre bracelet que l'observateur porte à son poignet », dont le mouvement ne peut s'inverser. C'est-à-dire que :

$$d\tau > 0$$

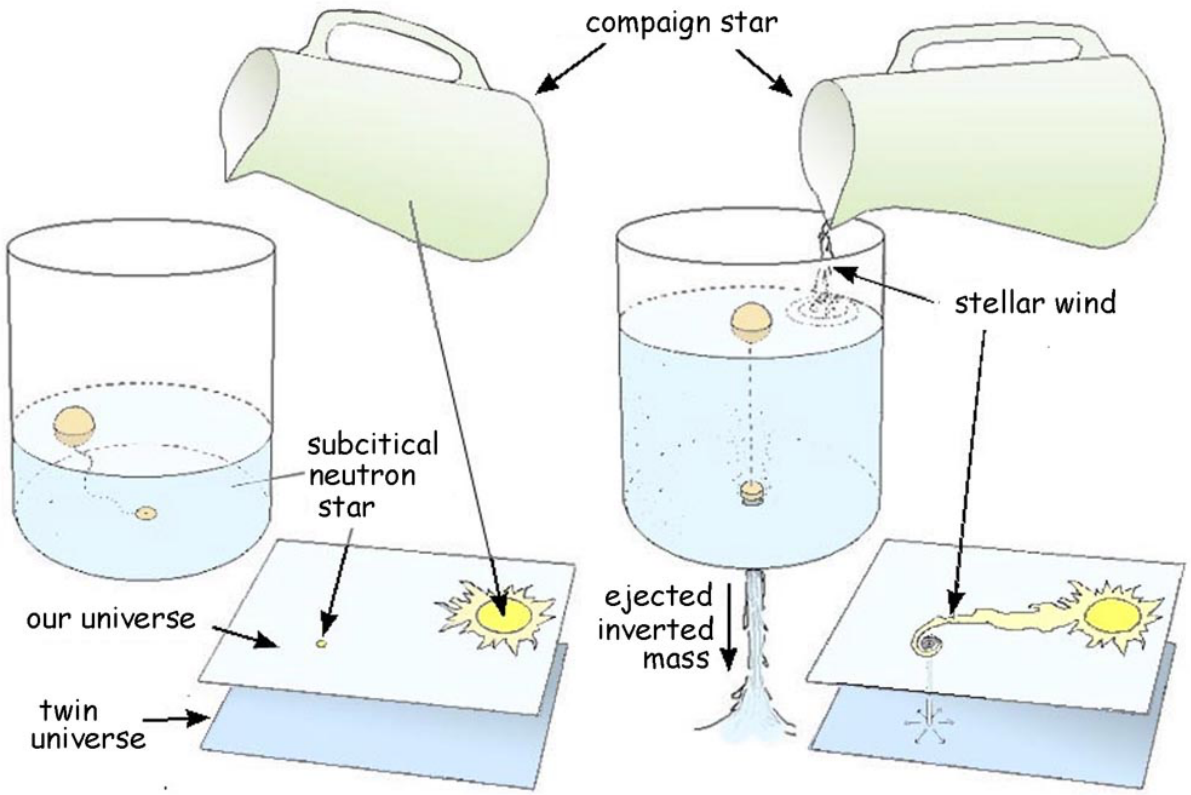
Alors, si *f* s'inverse, c'est que dans cette région c'est la coordonnée de temps *t* qui s'inverse, qu'on a une *T-symétrie* locale.

Et là, nous retournons vers le théorème de Souriau :

$$T - symmetry \quad \Leftrightarrow \quad mass\ and\ energy\ inversion$$

Dans cette région centrale, la masse des éléments est inversée.

Dans la cadre de la relativité générale, tout ceci n'a aucun sens. Mais dans le cadre du Modèle Cosmologique Janus, cela peut s'entendre. Cette masse inversée $\overline{m} < 0$ cesse alors immédiatement d'interaction avec la masse de l'étoile à neutron, aussi dense soit-elle. Comme elle est repoussée par les masses positives, dès qu'elle s'éloigne un tant soit peu du centre géométrique, où par symétrie le champ gravitationnel est nul, elle est violemment expulsée hors de l'astre. On a donc un mécanisme d'autostabilité qui évoque celui des chasses d'eau de nos WC :



Modèle didactique de plugstar.

Les dessins parlent d'eux-mêmes sans qu'il soit besoin de les commenter.

Alors, à quoi devrait alors ressembler un tel objet. Nous avons vu que la criticité physique devait se traduire par un effet de redshift gravitationnel maximal. Tout ceci a été noté dès 1959 par H.A. Buchdahl[88]. Si le mot « Plugstar » déplaît, on peut lui substituer celui de « Buchdahl object » et cette limitation du redshift gravitationnel à un « Buchdahl effect », peu importe.

Quel que soit le mécanisme d'émission de la lumière que capteraient alors nos télescopes, on coderait cet accroissement de la longueur à l'aide de couleurs, allant du noir au jeune clair.

Ce que captent nos instruments de mesure (en l'occurrence nos radiotélescopes opérant dans les longueurs d'onde millimétriques : 1.3 mm). En chaque point des capteurs (équivalant aux cellules d'une rétine) ce qui est capté est une densité d'énergie.

Ce qu'on veut mettre en évidence c'est une variation de la densité d'énergie captée, émise par chaque point de la source, une densité d'énergie par steradian. Et ce qui nous intéresse c'est d'évoquer la variation de cette intensité. On la convertit alors en « température équivalente », ou en « longueur d'onde équivalente », en utilisant la constante de Boltzmann k_B ; selon :

$$E = k_B T_r = \frac{h\,c}{\lambda}$$

[88] H.A.Buchdahl General Relativistic Fluid Spheres. Physical Review Vol.116 n°4 November 15, 1959

C'est le sens du codage indiqué sur les images des deux objets supermassifs situés au centre des galaxies M87 et Voie Lactée.

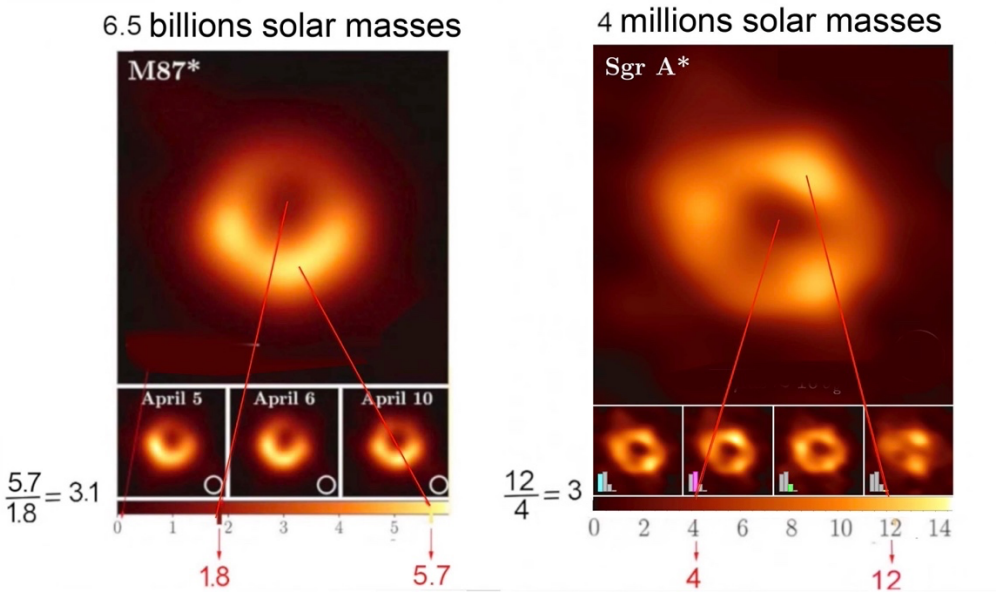


Image des objets supermassifs M87*[89] et SgrA*[90]

L'œil humain est assez précis pour évaluer les gammes de couleur. Si on prélève un petit carré de ces images et qu'on la compare aux données de la barre chromatique on obtient, non pas une température, par le rapport de deux températures maximale et minimale. Et dans les deux cas ces rapports sont pratiquement égaux à 3.

Cela ne signifie nullement que cette lumière soit émise par une source ayant cette température. Cela signifie qu'on reçoit du rayonnement avec une fenêtre se situant autour d'une longueur d'onde de 1.3 mm, ce qui correspond à une fréquence de 230 GHz. Mais là température indiquée sur la barre ne se déduit pas de :

$$T = \frac{h\,\nu}{k_B} = 11° K$$

C'est une « température de brillance » donnée par la loi de Rayleigh-Jeans :

$$T_b = \frac{c^2 I_\nu}{2\,k_B \nu^2}$$

[89] First M87 Event Horizon Telescope Results. I.. The Shadow of the Supermassive Black Hole. K. Akiyama, A.Alberdi,W.Alef,K.Asada, R.Azulay, A.K.Bcako, D.Ball,M. Balakovic, J. Barrett. Astrophysical Journal, vol. 875, n°1,2019

[90] First Sagittarius A* Event Hirizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. K. Akiyama, A.Alberdi, W. Alef, J.C.Algaba, E. Anantua, K. Asada, R. Azulay, U. Bach, A.K.Backo. The Astrophysical Journal Letters, vol. 930, number 2. 2022. DOI 10.3847/2041-8213/ac6674. 2019 10 April.

Ainsi les chiffres indiqués ne nous renseignent en rien sur la température réelle de la source, ni sur le mécanisme de l'émission de rayonnement. C'est la mesure de l'intensité lumineuse , dans cette fréquence de 230 GHz.

Ceci étant les commentateurs précisent que ce rayonnement est émis par effet synchrotron. Mais, quelle que soit la façon dont ce rayonnement est émis, il subit un effet de redshift gravitationnel et nous devons alors constater que celui-ci correspond à « l'effet Buchdahl », à cette valeur 3. Donc ces objets pourraient être des Plugstars.

Les tenant du modèle de trous noirs géants indiquent que le rayonnement émis par les parties centrales résulte de la présence d'un nuage de gaz chaud de situant devant ces objets.

Mais alors, quel heureux hasard ! La température de brillance de ce nuage de gaz chaud donne exactement cette valeur 3 dans les deux cas, alors que ces deux objets diffèrent en masse d'une facteur 1600 !

On trouvera tout cela dans cet article, publié en 2025

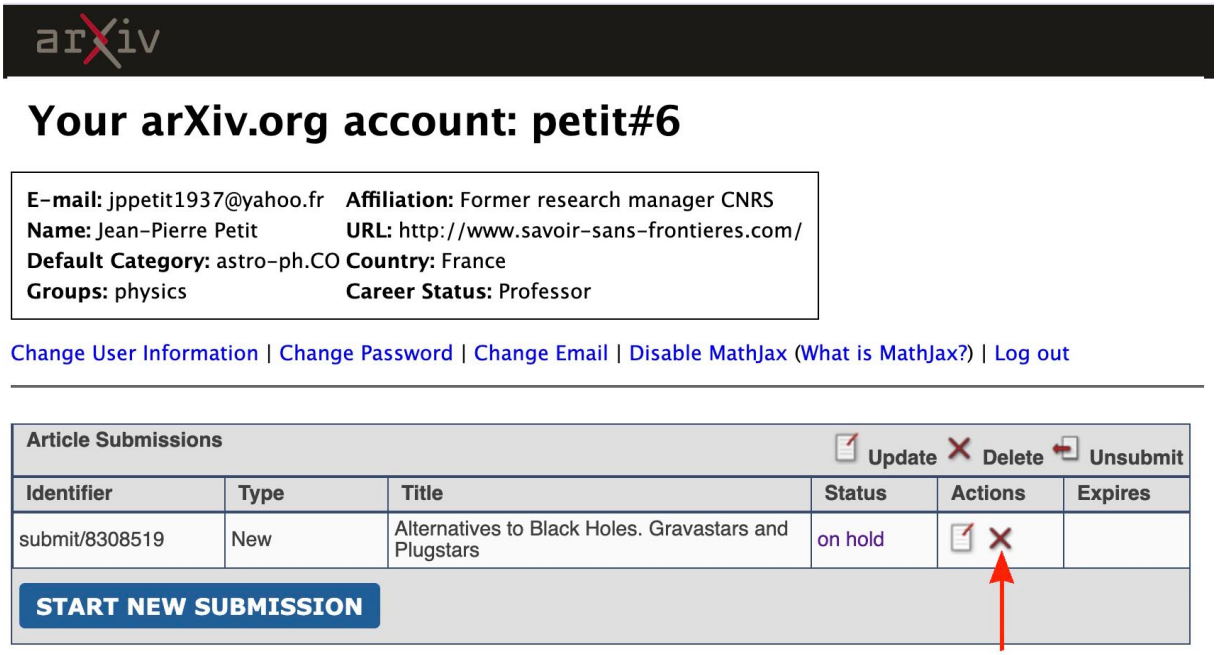
J.P.Petit , G.d'Agostini. Alternative to black holes, Gravastars and Plugstars. Journal of Modern Physics. Vol. 16, n°10. Octobre 2025. 497 views. 3610 downloads[91]

En France, l'astrophysicien à la retraite Jean-Pierre Luminet, qui n'a produit aucune contribution scientifique depuis 20 ans, sous la forme d'un article publié dans une revue à comité de lecture, mais a produit nombre d'ouvrage de vulgarisation, en particulier sur les trous noirs, vient de publier sur arXiv un article[92] où il tente de jouer « les pompiers de la cosmologie », en faisant de son mieux pour dévaluer nos travaux concernant le modèle Janus.

Comme son article a pu prendre place dans une section (gr-qc) : general relativity and quantum cosmologie, très visitées par les théoriciens (mais où on a vu que j'étais black listé), je dois donner quelques commentaires.

[91] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2025-10-14-JMP-Alternative-to-Black-Holes-Gravastars-and-Plugstars.pdf

[92] http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2026-Luminet-bimetric-arxiv.pdf



arXiv

Your arXiv.org account: petit#6

E-mail: jppetit1937@yahoo.fr **Affiliation:** Former research manager CNRS
Name: Jean-Pierre Petit **URL:** http://www.savoir-sans-frontieres.com/
Default Category: astro-ph.CO **Country:** France
Groups: physics **Career Status:** Professor

Change User Information | Change Password | Change Email | Disable MathJax (What is MathJax?) | Log out

Article Submissions Update Delete Unsubmit

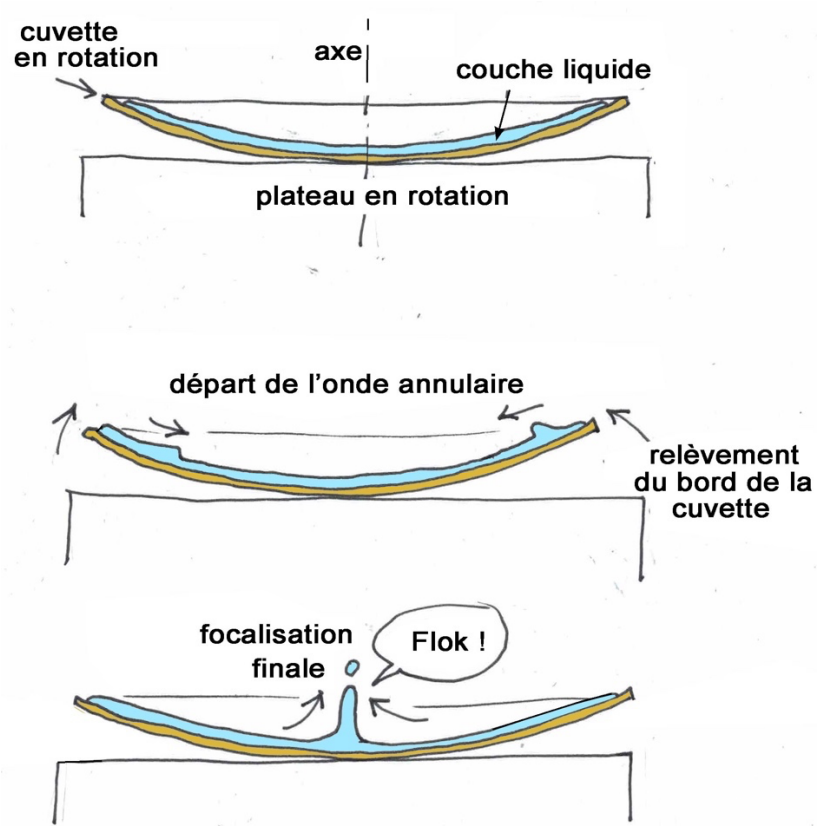
Identifier	Type	Title	Status	Actions	Expires
submit/8308519	New	Alternatives to Black Holes. Gravastars and Plugstars	on hold		

START NEW SUBMISSION

L'article, soumis le 31 octobre 2026 sur la plateforme arXiv a été effacé par les « modérateurs » S'agissant de notre modèle de Plugstars, Luminet critique le recours à une solution à symétrie sphérique en précisant que cet objet, formé par accrétion, par fusions successives de trous noirs de plus en plus massifs, devrait tourner sur lui-même.

Comme évoqué dans notre article, nous pensons que ces objets sont le résultat de fluctuations conjointes des métriques, phénomène que nous nous efforçons de modéliser en partant des équations Janus. Ce faisant nous nous basons sur l'idée, présente dans les textes Ummo (il faudra retrouver où) selon laquelle l'expansion de l'univers aurait connu une phase primitive très turbulente.

Dans cette optique la formation de tels objets se situerait très loin dans leur passé et serait le résultat de la focalisation d'une onde de densité. L'image didactique est alors la suivante :



Simulation du phénomène Quasar

Il faut imaginer une cuvette en rotation où la pente crée une force de gravité qui, compensant en tout point la force centrifuge, permet à une couche d'eau de profondeur quasi constante de se positionner en contact avec la cuvette. Ceci tend à représenter la distribution de densité quasi constante de gaz interstellaire dans le champ gravitationnel d'une galaxie. Champ gravitationnel principalement créé par la masse négative environnante.

Deux situations se présentent.

- Soit ce champ gravitationnel est atténué. On abaisse le bord de la cuvette et l'eau s'en échappe. On simule alors une galaxie irrégulière.

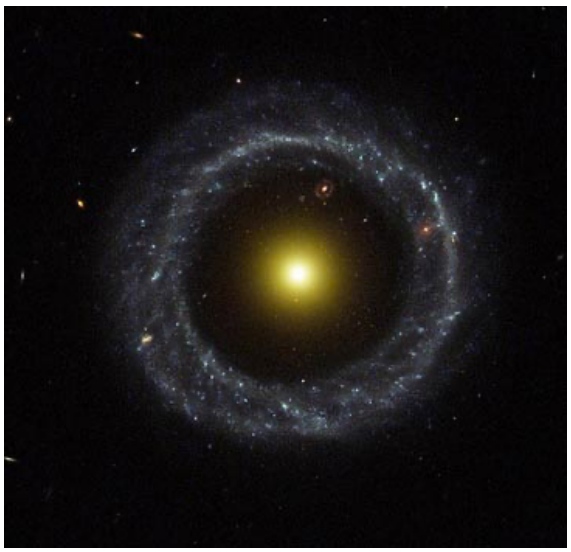


Galaxie irrégulière

Dans les lettres Ummo leurs auteurs indiquent que, tombant sur l'observation systématique des galaxies irrégulières par Halton Aarp[93] ils lui avaient adressé un rapport en lui indiquant qu'il mettait là le doigt sur une observation-clé pour la compréhension des phénomènes à l'œuvre dans le cosmos et que ceci révélait l'interaction entre notre univers et son jumeau. Ils avaient été décontenancés lors que celui-ci avait simplement jeté ce rapport dans sa poubelle.

- Dans le second cas de figure c'est le champ de confinement qui se trouve renforcés. On simule ceci en relevant le bord de la cuvette. On crée alors une onde liquide circulaire, en tous points semblables à un tsunami, qui se propage alors vers le centre galactique.

Nous avons suggéré, dans l'article sur les plugstars, que ceci puisse correspondre à la galaxie de Hoag :



Galaxie de Hoag[94]

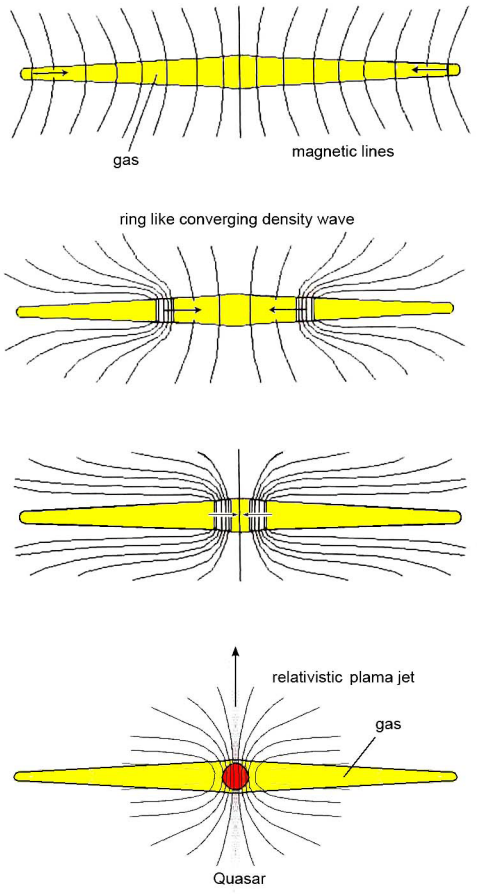
[93]Arp, H. C. (1966). Atlas of Peculiar Galaxies. The Astrophysical Journal Supplement Series, vol. 14, n° 123, pp. 1–20. DOI : https://doi.org/10.1086/190147

[94] Hoag, A. A. (1950). A Peculiar Object in Serpens. The Astronomical Journal, vol. 55, p. 170. DOI : https://doi.org/10.1086/106427

Quand l'onde atteint le centre cela provoque un sursaut important de densité. La température monte également et les conditions de Lawson (fusion) se trouvent atteintes dans toutes la masse, ce qui engendre une forte production d'énergie par réactions thermonucléaires.

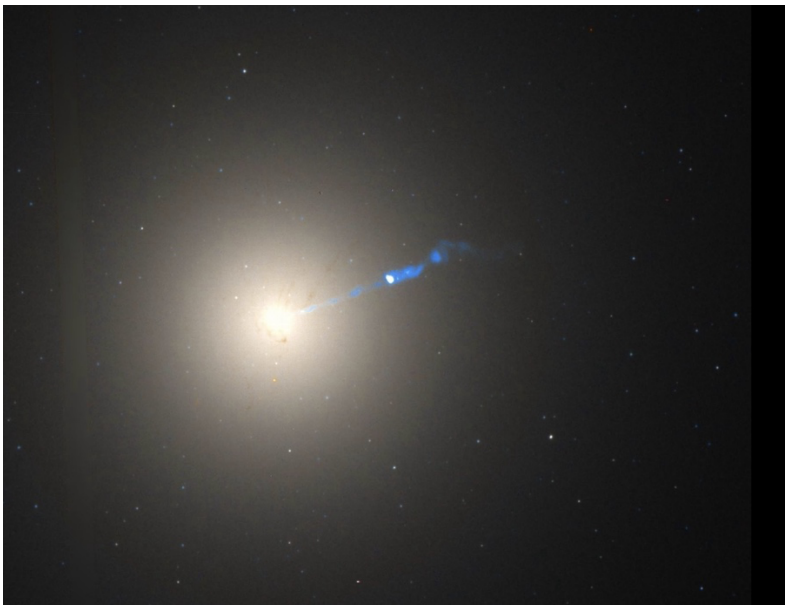
Quand l'onde de densité chemine dans le gaz de la galaxie, elle suscite la création de nouvelles étoiles, qui, émettant dans l'UV, ionisent le gaz (comme dans les bras spiraux). On obtient ainsi des conditions de nombre de Reynolds magnétique élevé. Les lignes de champ du faible champ magnétique présent dans la galaxie se trouvent piégées dans le plasma (*frozen in*) et rassemblées à la manière dont un moissonneur rassemblerait des épis de blé. La conservation du flux magnétique convertit ce très faible champ préexistant (un microgauss) en un champ dipolaire extrêmement élevé.

Ce champ dipolaire canalise les émissions de plasma, selon deux jets et on obtient un quasar.



Création d'un puissant champ magnétique dipolaire.

Ce phénomène d'émission peut cesser. L'objet supermassif au centre de la Voie Lactée peut ainsi être qualifié de « quasar éteint ». Mais ces soubresauts peuvent se poursuivre périodiquement en produisant alors un jet « tireté ». L'exemple est le jeu produit par la galaxie M87 :



Le jet fragmenté de la galaxie M87

Ceci-ci subit un « blue shift », parce que dirigé vers l'observateur. Le second jet n'est pas visible, parce que « red-shifté ». Ci-dessous, une vue d'artiste :



M87, image d'artiste

Ces quasars se situent au centre des galaxies. Le fait que, statistiquement, leurs jets se situent perpendiculairement au plan des galaxies qui les hébergent contredit la thèse de leur formation par accrétion (auquel cas les jets auraient des directions aléatoires). Au contraire cet aspect va dans le sens d'une formation par onde de densité.

Quand l'onde de densité parvient au centre de la galaxie elle entraîne une remontée brutale de densité, mais ne traduit pas la conservation d'un moment cinétique. C'est la raison pour laquelle la solution métrique en symétrie 0(3) est adaptée à la description du phénomène.

Scientific Research Publishing

Journal of Modern Physics, 2025, 16(10), 1479-1490
https://www.scirp.org/journal/jmp
ISSN Online: 2153-120X
ISSN Print: 2153-1196

Alternatives to Black Holes: Gravastars and Plugstars

Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini

Manaty Laboratory, Dijon, France
Email: jean-pierre.petit@manaty.net, gilles.dagostini@manaty.net

How to cite this paper: Petit, J.-P. and D'Agostini, G. (2025) Alternatives to Black Holes: Gravastars and Plugstars. *Journal of Modern Physics*, **16**, 1479-1490.
https://doi.org/10.4236/jmp.2025.1610072

Received: July 23, 2025
Accepted: October 21, 2025
Published: October 24, 2025

Copyright © 2025 by author(s) and Scientific Research Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

Abstract

The images collected by the EHT of objects M87* and SgrA* show darkened, but not black areas. So that the immediate identification with supermassive black holes remains questionable. Attention is thus focused on the main alternative candidates: gravastars, which have attracted a great deal of attention for decades. However, none of these models provides any evidence that can successfully confront these observational data. We present an interpretation derived directly from Schwarzschild's inner geometry, in the subcritical case where the intense pressure gradient counterbalances the force of gravity. The object then exhibits a gravitational redshift effect leading to a wavelength ratio of 3, which is remarkably consistent with image analysis. A mechanism is proposed to ensure the self-stability of such objects, which are then referred to as plugstars.

Keywords

Black Hole, Quasar, Janus Cosmological Model

1. Introduction: Alternative to Black Holes

Recent observational data from EHT ref. [1] [2], do not coincide with the expected images of hypermassive black holes. Their central parts, while dark, are not black. Attention was then turned to alternative models, mainly the various models of gravastar, objects hypothesized in a 2001 paper by Pawel O. Mazur and Emil Mottola ref. [3]-[5] as an alternative to the black hole theory. It has the usual black hole metric outside of the horizon, but de Sitter metric inside. On the horizon there is a thin shell of matter. This solution to the Einstein equations is stable and has no singularities. In their original formulation, a gravastar is composed of three regions, differentiated by the relationship between pressure p and energy

density ρ. The central region consists of false vacuum or "dark energy", and in this region $p=-\rho$. Surrounding it is a thin shell of perfect fluid f where $p=\rho$. On the exterior is true vacuum, where $p=\rho=0$. The dark-energy-like behavior of the inner region prevents collapse to a singularity, and the presence of the thin shell prevents the formation of an event horizon, avoiding the infinite blue shift. The inner region has thermodynamically no entropy and may be thought of as a gravitational Bose-Einstein condensate. Severe red-shifting of photons as they climb out of the gravity well would make the fluid shell also seem very cold, almost absolute zero. In addition to the original thin-shell formulation, gravastars with continuous pressure have been proposed. These objects must contain anisotropic stress ref. [6]. Externally, a gravastar appears similar to a black hole: it is visible by the high-energy radiation it emits while consuming matter, and by the Hawking radiation it creates. Astronomers search the sky for X-rays emitted by infalling matter to detect black holes. A gravastar would produce an identical signature. It is also possible, if the thin shell is transparent to radiation, that gravastars may be distinguished from ordinary black holes by different gravitational lensing properties, as null geodesics may pass through ref. [7]. Mazur and Mottola suggest that the violent creation of a gravastar might be an explanation for the origin of our universe and many other universes because all the matter from a collapsing star would implode "through" the central hole and explode into a new dimension and expand forever, which would be consistent with the current theories regarding the Big Bang ref. [8]. This "new dimension" exerts an outward pressure on the Bose-Einstein condensate layer and prevents it from collapsing further. Gravastars also could provide a mechanism for describing how dark energy accelerates the expansion of the universe. One possible hypothesis uses Hawking radiation as a means to exchange energy between the "parent" universe and the "child" universe, and so cause the rate of expansion to accelerate, but this area is under much speculation. Anyway gravastars have been considered as a serious alternative to black holes in the past decades. Stable models of gravastar have been constructed in many of the alternate gravity modelsbesides standard General Relativity. The Randall-Sundrum braneworld model ref. [9] has been apopular alternative to GR, specially in the cosmological and astrophysical context. In ref. [10] gravastar is considered in RS brane gravity. In ref. [11] the model includes the impact of Kuchowicz metric function. In ref. [12] an extension to Gauss-Bonnet gravity. In ref. [13] the collapase of gravastar is driven by a scalar field, taking account of back-reaction effects. In ref. [14] the authors suggest how to detect the gravastar shadow and how one can distinguish from the black hole event horizon while in ref. [15] various electrically charge gravastars configurations are explored. For recent works, see also references [16] [17].

However, to date there has been no successful comparison of data from a gravastar model with the only observational data available for the supermassive objects M87* and SgrA*. In what follows, we present a model, based on Schwazrschild's inner metric solution, which offers remarkable agreement with these data

as they emerge from the current data processing work carried out by the Event Horizon Telescope teams ref. [1] [2].

2. The Schwarzschild model for an Incompressible Fluid Star

In his article from February 1916 ref. [18] Karl Schwarzschild constructed a metric describing the geometry inside a sphere filled with an incompressible fluid. We reproduce this expression exactly as it appears in Equation (35) of the original German edition:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0}\left(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi \mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\chi \sin^2\vartheta \mathrm{d}\phi^2\right) \quad (1)$$

Schwarzschild takes the value c of the speed of light in vacuum to be equal to 1. ρ_0 is the density, which is constant inside the sphere. We have:

$$\kappa = 8\pi G \quad (2)$$

Angles (χ, ϑ, ϕ) are classical spherical coordinates. The characteristic length is given by expression:

$$\hat{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho_0} \quad (3)$$

We can pass from the angular coordinate to the radial coordinate r, and Euclidean norm of the space vector (x, y, z) as

$$r = \hat{R}\sin\chi \quad (4)$$

The radius of the star is given by:

$$R^* = \hat{R}\sin\chi_a \quad (5)$$

Schwarzschild denotes by f_4 the term g_{tt} of the metric

$$f_4 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)^2 \quad (6)$$

The time factor is an expression corresponding to a stationary observer located inside the sphere.

$$f = \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \quad (7)$$

Then we have

$$\mathrm{d}s = f\mathrm{d}t \quad (8)$$

Schwarzschild then obtained (Equation (10)) as the way in which the pressure inside the sphere varies.

$$(\rho_0 + p)\sqrt{f_4} = konst. = \gamma \quad (9)$$

In this parenthesis, Schwarzschild sums the constant energy density $\rho_0 c^2$ (with $c = 1$) and the pressure. We can consider that the matter at the centre of a star, when the energy density becomes very high, is in the form of radiation, with a radiation pressure:

$$p = \frac{\rho_0 c^2}{3} \tag{10}$$

The modern form of this internal metric ref. [19] is:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{R^{*2}}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right)^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \tag{11}$$

The term $f_4 = g_{tt}$ becomes zero when $\cos\chi_a = 1/3$, *i.e.* when

$$R^* = R_{crit,phys} = \sqrt{\frac{8}{9}}\hat{R} = \frac{c}{3\pi G\rho_0} \tag{12}$$

According to relation (9), as Schwarzschild notes, the pressure at the centre of the star becomes infinite. We are therefore faced with a first physical singularity. As the star's mass increases, at constant density (which could describe a neutron star where the centrifugal force linked to rotation could be neglected), this physical singularity occurs before a geometric singularity. This last occurs when the star's radius identifies with its Schwarzschild radius, *i.e.* when:

$$R^* = R_{crit,geom} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho_0}} \tag{13}$$

The two critical radii are linked by the relation:

$$R_{crit,phys} = \sqrt{\frac{8}{9}} R_{crit,geom} \tag{14}$$

We can consider that this situation does not belong to the physical world ref.[20], which amounts to considering that this exact solution to Einstein's equation, independent of time, does not belong to physics, by invoking a "peed of sound"? varying as the square root of the pressure gradient. But if we consider that the medium can be assimilated to radiation, then this speed of propagation becomes that of light. This leads us to consider, as Schwarzschild was the first to do, that the speed of light varies, and can reach an infinite value at the centre of the star. He gives the law of variation of this speed of light in his equation (44):

Die Lichtgeschwindigeit in unserer Kugel

(The speed of light in our sphere)

$$V = \frac{2}{3\cos\chi_a - \cos\chi} \tag{15}$$

This fraction must be multiplied by the value c of the speed of light in a vacuum:

$$V = \frac{2c}{3\cos\chi_a - \cos\chi} \tag{16}$$

This variation in the speed of light when matter reaches conditions of extreme density is considered in ref. [21] [22]. Unlike other attempts at modeling c variable, this model, based on a generalized gauge relation, preserves Lorentz invariance and the fine structure constant. If we assume that the speed of light can

take on a value, if not infinite, then at least very high, at the centre of the object, we obtain a situation where the force of pressure balances the force of gravity. All that remains is to examine the stability of such an object.

What happens when it benefits from an influx of matter, which would be the case for a subcritical neutron star receiving matter from a nearby standard star?

If we rely on the mathematical solution, the time factor f then becomes negative, but along a geodesic it is impossible to turn back:

$$\mathrm{d}s > 0 \Rightarrow f\mathrm{d}t > 0 \tag{17}$$

In this central part of the object, the time coordinate t reverses. Following the dynamic group theory of mathematician J.M.Souriau (ref. [23] [24]), this inversion of the time coordinate implies the inversion of energy and mass.

General relativity opposes the presence of negative mass in the universe ref. [25], because of the unmanageable runaway effect. To go a step further, we need to place ourselves in the geometric framework of the Janus model ref. [26].

In this new scheme, masses of opposite signs repel each other. We also conjecture that a gravitational and quantum phenomenon occurs under these conditions of criticality, in which the excess masses are reversed.

The object in criticality, having received mass from the outside, contains an equivalent quantity in a small sphere filled with negative mass and initially centered on the origin.

The presence of negative mass at the star's center only makes a very weak contribution to the gravitational field mainly created by the positive mass. Thus negative mass is expelled from the object and then expelled from the galaxy into the negative-mass environment between galaxies.

We thus obtain a mechanism that guarantees the stability of such subcritical objects, which we propose to call "plugstars"? like an overflow valve that evacuates excess water.

3. Calculation of the Gravitational Redshift

Such objects will exhibit a gravitational redshift effect with respect to a distant observer. This corresponds to:

$$1+z = \frac{\lambda(\text{observer})}{\lambda(\text{emitter})} = \frac{\sqrt{g_{tt}(\text{observer})}}{\sqrt{g_{tt}(R^*)}} = \frac{1}{f(R^*)} \tag{18}$$

In a situation close to criticality:

$$f = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{8}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3} \tag{19}$$

An observer will therefore see an object whose central part has an attenuated luminosity, such that the ratio of wavelengths resulting from a gravitational redshift effect is

$$\frac{\lambda(\text{observer})}{\lambda(\text{emitter})} = 3 \tag{20}$$

4. Observational Data

Let us refer to the images of supermassive objects obtained using the EHT Collaboration (ref. [1] [2]). The chromatic bars provide equivalent temperature values, which are in fact indications of luminosity (Figure 1 and Figure 2). This light, in any case, is emitted by photons of energy $h\nu$. By forming the ratio of maximum and minimum luminosity, we obtain the wavelength ratio.

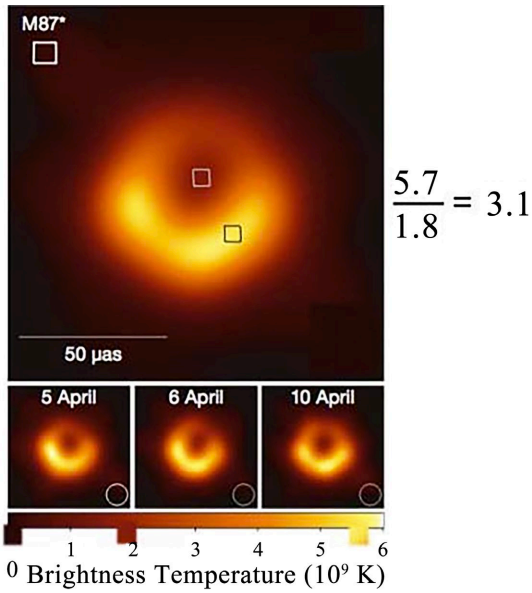


Figure 1. Images of M87*.

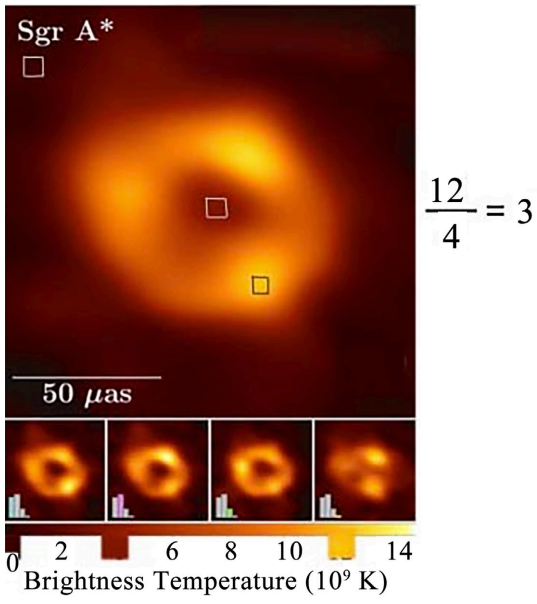


Figure 2. Images of SgrA*.

In the image of the hypermassive object at the centre of M87, the colour bar shows that:

- The maximum equivalent temperature is 5.7×10^9 K.
- The minimum equivalent temperature is 1.8×10^9 K.

The corresponding wavelength ratio is:

$$\frac{\lambda(\text{observer})}{\lambda(\text{emitter})} \approx 3.2 \pm 0.3 \tag{21}$$

On the image of the hypermassive object at the centre of SgrA* the colour bar shows that:

- The maximum equivalent temperature, approximately, is 12×10^9 K.
- The minimum equivalent temperature is 4×10^9 K.

The corresponding wavelength ratio is:

$$\frac{\lambda(\text{observer})}{\lambda(\text{emitter})} \approx 3.0 \pm 0.3 \tag{22}$$

This result is in very agreement with observational data.

Of course, these central objects are not giant neutron stars. But the very high pressure inside them, due to the increase in the speed of light, allows the radiation pressure to counterbalance the force of gravity.

5. Physical Implications of Plugstars

Unlike black holes, these objects:

- have a finite gravitationnal redshift, explaining the darkening of their central part.
- have no horizon or internal singularity.
- are stabilized by the masse inversion processes, in the case of the Janus model, preventing collapse.

When the axes of symmetry of the objects are accessed through the axes of symmetry of the jets, they often correspond to the axes of symmetry of the galaxies ref.[27]. If this phenomenon is general, then these objects would not be formed by mass accretion.

6. An Alternative Interpretation of the Quasar Phenomenon

They could be the result of the convergence of a centripetal density wave, like the one suggested in the Hoag galaxy (**Figure 3**).

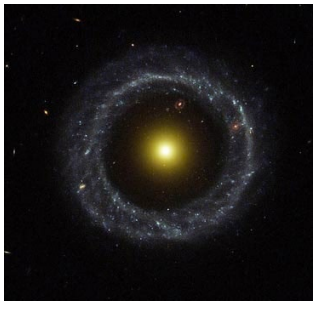


Figure 3. Hoag galaxy.

This galaxy, located in the constellation Serpens Caput, was discovered by Arthur Hoag in 1950. The absence of neighbouring galaxy and debris seems to rule out the possibility that it formed as a result of a collision. Its structure resembles that of a density wave, whose propagation would then be radial.

If a density wave propagates in a galaxy, whether it is a spiral wave or this type of circular, converging wave, its speed of propagation is not that of the matter itself.

This is the classic difference between group velocity and phase velocity. The wave from the Hoag galaxy, if its propagation is centripetal, would then be comparable to a circular tsunami. The rise in density in the wave gives rise to young stars which, emitting in the UV, ionise the medium, making the formation visible, as is the case for spiral waves. In this plasma, if the magnetic Reynolds number is high, this wave will drag along the field lines of the very weak magnetic field (one microgauss) that already exists in the galaxies (see Figure 4).

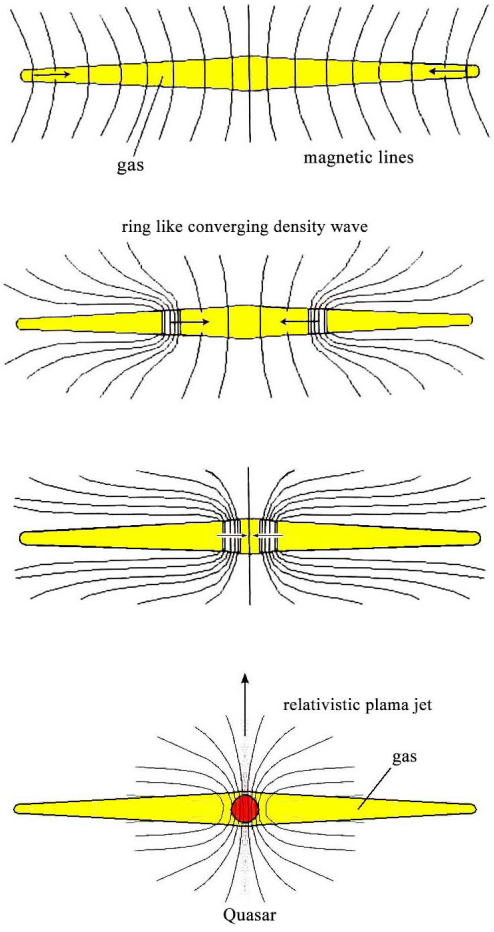


Figure 4. Model for a quasar formation.

Such a rise in the field in the ring could be demonstrated by polarisation measurements.

When the wave would reaches the centre of the galaxy, there would be a sudden

rise in density and temperature[1]. Lawson's conditions would be then realised in a considerable mass, triggering a massive production of energy by fusion. Such model would explain the quasar phenomenon.

The convergence of the magnetic field lines would give to the object a very high dipolar magnetic field. The fusion energy would be then focused on the two jets with which M87* is equipped.

This field has a gradient that accelerates charged particles over very large distances, giving them very high energies. This is how cosmic rays would be formed.

The M87* jet is discontinuous, which seems to indicate that the phenomenon is sporadic. The absence of jets for SgrA* would qualify it as an "extinct quasar"? This model is based on the hypothesis of the repetitive birth of spiral density waves.

We still need a theory to explain their appearance. This is what we are currently trying to construct, within the framework of the Janus model, in terms of joint fluctuations in the metrics of positive and negative masses.

We conjecture that future images of hypermassive objects located at the center of galaxies will all present the same wavelength ratio 3.

7. Discussion

To moderate our conclusions, it should be noted that our model is consistent with the images of the objects M87* and SgrA*, which are produced by model-dependent decoding. In any case, it seems difficult to envisage a decoding based on a model in which the central part is completely non-emissive, unless this model is a priori that of a black hole. There will therefore remain a finite gravitational redshift and a maximum/minimum wavelength ratio. The future will tell whether this value close to three can be considered reliable, and above all whether such a ratio will appear in future images of other supermassive objects. It is hoped that images obtained from orbital radio telescopes will provide finer images, which can then be compared with the brightness profiles from the model, which will be produced in a future article. Nevertheless, a few ideas can be outlined. The supermassive objects M87* and Sgr* are obviously not "giant neutron stars". They still need to be modeled. This attempt to describe them as objects with constant density, entirely contained within a sphere, can only be indicative. The fact remains that these objects emit radiation and that a gravitational redshift effect $z=2$ is present in their central part. Their radius (schematic) is therefore $\sqrt{9/8}R_s = 1.06066R_s$. **Figure 5** shows the schematic evolution of z as a function of distance from the center. If the object is surrounded by a vacuum, the gravitational redshift tends toward zero at infinity.

[1]When the wave causes a rise in density, the angular momentum of the mass concerned is conserved, and the speed of rotation increases. But this phenomenon generates a centrifugal force that cannot be compared with the forces of gravity and pressure. This explains the excellent agreement with the data derived from the Schwarzchild solution.

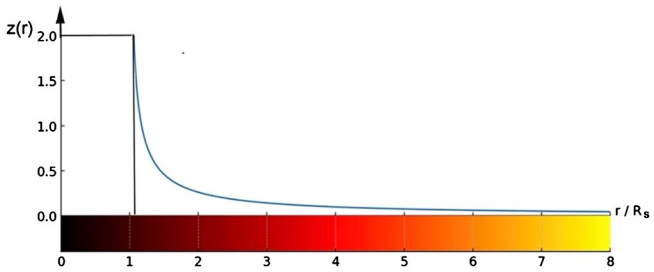


Figure 5. Schematic gravitational redshift as a function of distance.

However, there must be a source of radiation at a distance. The chromatic bar gives us the darkening towards the central part (which is not black). We can assume that the object is surrounded by plasma, which is emissive but whose temperature gradually decreases. This gives us another cause of reddening: the fact that the radiation temperature decreases. And we then have a change in wavelength according to:

$$\lambda_{obs} = \frac{b}{T(r)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R_s}{r}}} \tag{23}$$

By combining the two, we can then, very schematically, produce an image that matches the observational data (see **Figure 6**).

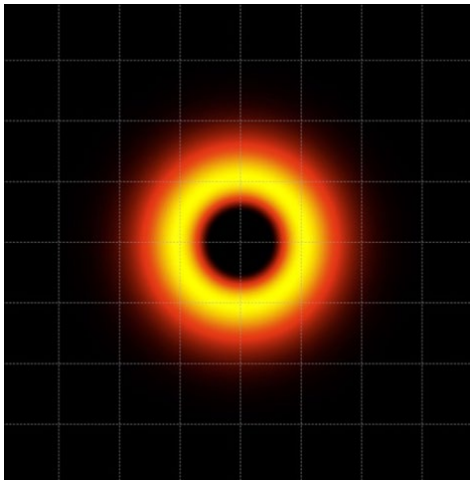


Figure 6. Schematic representation of a plugstar.

But until we have a coherent physical vision of the object, with density decreasing from the center to the edge and where magnetohydrodynamics undoubtedly plays a role, all this cannot be considered a model. It merely combines two phenomena that alter the wavelength: a gravitational redshift effect toward the center and a drop in radiation temperature toward the periphery, without specifying the mechanism of radiation emission. All this is, we admit, only a rough draft. Others will develop it further, younger people. We are old, and there is so much work to be done in this immense project that is the Janus Cosmological Model.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

[1] Event Horizon Telescope Collaboration (2019) First M87 Event Horizon Telescope Results, Volume 875. The Astrophysical Journal Letters.

[2] Event Horizon Telescope Collaboration (2022) First Sagittarius an Event Horizon Results, Volume 930. The Astrophysical Journal Letters.

[3] Mazur, P.O. and Mottola, E. (2001) Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes.

[4] Mazur, P.O. and Mottola, E. (2004) Gravitational Vacuum Condensate Stars: An Alternative to Black Holes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **101**, 9545-9550. https://doi.org/10.1073/pnas.0402717101

[5] Mazur, P.O. and Mottola, E. (2023) Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes. *Universe*, **9**, Article No. 88. https://doi.org/10.3390/universe9020088

[6] Cattoen, C., Faber, T. and Visser, M. (2005) Gravastars Must Have Anisotropic Pressures. *Classical and Quantum Gravity*, **22**, 4189-4202. https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/20/002

[7] Sakai, N., Saida, H. and Tamaki, T. (2014) Gravastar Shadows. *Physical Review D*, **90**, Article ID: 104013. https://doi.org/10.1103/physrevd.90.104013

[8] Chown, M. (2006) Is Space a Superfluid. New Scientist.

[9] Randall, L. and Sundrum, R. (1999) Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Physical Review Letters*, **83**, 3370-3373. https://doi.org/10.1103/physrevlett.83.3370

[10] Sengupta, R., Ghosh, S., Ray, S., Mishra, B. and Tripathy, S.K. (2020) Gravastar in the Framework of Braneworld Gravity. *Physical Review D*, **102**, Article ID: 024037. https://doi.org/10.1103/physrevd.102.024037

[11] Rikpatrick, S., Saibal, R. and Shounak, G. (2020) Gravastar in the Framework of Braneworld Gravity II: Effect of the Kuchowicz Metric Function. *Modern Physics Letters A*, **37**.

[12] Farasat, S. and Mushtaq, A. (2018) Gravastars in f(g,t) Gravity. *Physical Review D*, **97**. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.104031

[13] Bellini, M. (2024) Gravastars Formation with Back-Reaction Effects from Extended General Relativity. *The European Physical Journal C*, **84**, Article No. 1097. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13381-6

[14] Sahoo, P.K., Mohanty, D. and Gosh, S. (2024) Study of Charged Gravastars in f(q) Gravity. *Annals of Physics*, **461**.

[15] Horvat, D., Ilijić, S. and Marunović, A. (2008) Electrically Charged Gravastar Configurations. *Classical and Quantum Gravity*, **26**, Article ID: 025003. https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/2/025003

[16] Mohanty, D., Ghosh, S. and Sahoo, P.K. (2025) Impact of Chaplygin Gas Model on the Characteristics of Gravastar in F(q,t) Gravity. *International Journal of Modern Physics D*, **34**, Article ID: 2550041. https://doi.org/10.1142/s0218271825500415

[17] Ghosh, S., Pradhan, S. and Sahoo, P.K. (2025) Maximum Mass Limit of Generalized MIT Compact Star: A Theoretical Study of Thin Shell Dynamics and Gravitational Lensing. *Fortschritte der Physik*, **73**, e70020. https://doi.org/10.1002/prop.70020

[18] Schwarzschild, K. (1916) Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flus-sigkeit nach der einsteinschen theorie. Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

[19] Oppenheimer, J.R. and Volkoff, G.M. (1939) On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, **55**, 374-381. https://doi.org/10.1103/physrev.55.374

[20] Wheeler, J.A., Misner, C.W. and Thorne, K.S. (2017) Gravitation. Princeton University Press.

[21] Petit, J. (1995) Twin Universes Cosmology. *Astrophysics and Space Science*, **226**, 273-307. https://doi.org/10.1007/bf00627375

[22] D'Agostini, G. and Petit, J.P. (2024) Variable Speed of Light Cosmological Model with Lorentz and Fine Structure Constant Invariance Maintained.

[23] Souriau, J.-M. (1970) Structure des systèmes dynamiques: Maîtrises de mathématiques. Collection Dunod Université.

[24] Souriau, J.-M. (1997) Structure of Dynamical Systems (Structure des systèmes dynamiques): A Symplectic View of Physics. Progress in Mathematics. Birkhäuser.

[25] Bondi, H. (1957) Negative Mass in General Relativity. *Reviews of Modern Physics*, **29**, 423-428. https://doi.org/10.1103/revmodphys.29.423

[26] Petit, J., Margnat, F. and Zejli, H. (2024) A Bimetric Cosmological Model Based on Andreï Sakharov's Twin Universe Approach. *The European Physical Journal C*, **84**, Article No. 1226. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13569-w

[27] Fernández Gil, D., Hodgson, J.A., L'Huillier, B., Asorey, J., Saulder, C., Finner, K., *et al.* (2024) Detection of an Orthogonal Alignment between Parsec-Scale AGN Jets and Their Host Galaxies. *Nature Astronomy*, **9**, 302-313. https://doi.org/10.1038/s41550-024-02407-4

Ceci rend ce modèle de plusgstar falsifiable au sens où il prédit que ce rapport z = 2, sera présent dans toutes les futures images, quelle que soit la masse des objets.

La conclusion est que dans l'article que nous reproduisons, ci-après, le seconde phrase reçue par Dominguez en 1988 milite pour conforter l'idée que cet interlocuteur était bel et bien extraterrestre, la probabilité pour qu'un plaisantin, ou même un scientifique terrestre, ait pu tenir un tel propos semble peu crédible.

Il nous reste, pour compléter cet ensemble de travaux scientifiques, ayant trouvé leur source dans ces textes Ummite, à insérer un important article récent, représentant l'extension de ce thème d'un régime à constantes variables à une situation bimétrique.

Encore une fois, nous saluons le professionnalisme de la revue Journal of Modern Physics, qui a fait analyser cet article (comme tous les autres) par des referees compétents et consciencieux, alors que d'autres revues plus connues, ont simplement refusé de le faire analyser.

Nous projetons de le soumettre incessamment à arXiv (gr-qc) . Le résultat de la démarche figurera ci-après.

@ Article sur l'extension bimétrique du thème à Ctes variables

Pendant la nuit du 18 octobre 2018 lors d'un coup de téléphone, à 3 heures du matin, voici le contenu de cet échange.

> Moi : *La situation de la planète Terre est bien pitoyable et inquiétante*
>
> Mon interlocuteur : *Ce qu'il vous faudrait, c'est une théorie de la croyance.*
>
> Moi : *Qu'est-ce à dire ?*
>
> Mon interlocuteur : *Vous avez suivi pendant une vingtaine d'années les enseignements du mathématicien-géomètre Jean-Marie Souriau. Vous avez-vous-même étendu ses travaux en exploitant ce qui en découlait : la signification de la T-symétrie en tant qu'inversion de la masse et de l'énergie. Plus généralement, l'idée clé de Souriau revient à dire «donnez-moi un espace et ses propriétés géométriques, et je vous dirai ce qu'il contient ». Ceci grâce à l'étude de l'action du groupe sur le dual de son algèbre de Lie. En 1970, en appliquant cela à l'espace de Minkowski, en faisant agir son groupe d'isométrie restreint, il a fait émerger les grandeurs de la physique en tant qu'invariants ». Refaites la même opération avec un espace de Hermitte.*
>
> *Ce dialogue donne une idée de la concision, de ma précision et de la densité des messages. Point n'était besoin d'en dire plus. Tout cela était à ma portée. Je savais que l'espace de Hermitte était un, espace de Minkowski complexifié. J'ai donc entrepris de d'étendre ce que j'avais appris et ce que j'avais étendu (avec des groupes étendus, incluant la T-symétrie) en calculant l'action du groupe d'isométrie de l'espace de Hermitte sur le dual de son algèbre de Lie.*

Les résultats tombèrent très rapidement.

Le travail de Souriau [95] peut se résumer succinctement

- L'espace de Minkowski (de la relativité restreinte) contient des masses positives et des photons d'énergie positive.
- L'extension du modèle, en introduisant des dimensions additionnelles compactes conduit, à la quantification des charges quantiques[96]

Mes propres travaux font passer au groupe symplectique Janus. Avec comme conclusion :

- Les deux versants d l'univers Janus contiennent des populations de particules CPT symétriques.
- État auquel on ajoute l'hypothèse que leur interaction se limite à une antigravité.

L'extension à l'espace de Hermitte impose de considérer son groupe d'isométrie dans sa plus complète généralité, incluant une T-symétrie.

---

[95] J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhaüser Ed. 1997

[96] idem, chapitre V, quantification géométrique.

L'espace se complexifie alors. Toutes ses dimensions, de temps et d'espace, deviennent complexes. Le groupe devient complexe.

- L'énergie devient complexe
- Les masses deviennent complexes.

Si on procède à des extensions dimensionnelles, les charges deviennent complexes et quantifiées.

On voit se dessiner une conception globale de l'univers incluant une physique mêlée à une métaphysique. Ses implications vont bien au-delà de celles découlant de la physique et de la cosmologie.

Restait à transformer ces calculs sous la forme de publications scientifiques. Mon ami Nathalie Debergh publie d'abord un premier papier en 2021[97]

En 2026, toujours grâce au sérieux et au professionnalisme de la revue Journal of Modern Physics, je publie une autre présentation de ce thème. C'est la reproduction de cet article qui terminera cette annexe scientifique.

Celui-ci aussi sera soumis à arXiv (gr-qc)

[97] N.Debergh, G.D'Agostini, J-P Petit :On the Poincaré Algebra in a Complex Space-Time Manifold. Journal of Modern Physics 2021,12,pp. 218-228

Scientific Research Publishing

Journal of Modern Physics, 2026, 17(9), 1197-1228
https://www.scirp.org/journal/jmp
ISSN Online: 2153-120X
ISSN Print: 2153-1196

Kruskal Coordinates, Semi-Complex Extension of Spacetime

Jean-Pierre Petit

Manaty Research Group, Glanon, France
Email: jppetit1937@yahoo.fr

How to cite this paper: Petit, J.-P. (2026) Kruskal Coordinates, Semi-Complex Extension of Spacetime. *Journal of Modern Physics*, **17**, 1197-1228.
https://doi.org/10.4236/jmp.2026.179053

Received: May 26, 2026
Accepted: September 26, 2026
Published: September 29, 2026

Copyright © 2026 by author(s) and Scientific Research Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

Abstract

In this article, we re-examine the geometric nature of the extension of the Schwarzschild solution into the domain $0<r<\alpha$. A preliminary study of the sphere, the torus, and Flamm's surface demonstrates that real geometries can admit semi-complex extensions beyond the limits of their real embedding domains; in such cases, certain coordinates become purely imaginary, while their projections onto real subspaces remain observable as *ghost images*. Kruskal's standard construction is then repeated line by line, separately in the outer $r>\alpha$ and the inner region $0<r<\alpha$. It appears that the usual actual definition of the tortoise coordinate, $r^{*}=r+\alpha\ln\left|\frac{r}{\alpha}-1\right|$ encompasses two distinct changes of variables on either side of $r=\alpha$, supplemented by different sign choices for the exponential coordinates that allow for the construction of the four sectors of the Kruskal diagram. We then consider another continuation, obtained by maintaining a single analytic change of variables across $r=\alpha$, without introducing the absolute value. In the domain $0<r<\alpha$, the Kruskal coordinates thus extended naturally become purely imaginary. The standard real representation can be recovered via an imaginary translation of the time coordinate, which simultaneously produces the swapping of hyperbolic functions characteristic of the interior regions. A three-dimensional representation $r=H(u,v)$ allows for the visualization of the connection between the real and semi-complex sectors. This analysis leads to an alternative interpretation of the Schwarzschild extension: rather than attributing swapped causal roles to the coordinates r and t in the interior region, the latter can be viewed as belonging to a semi-complex extension of spacetime geometry. Finally, the physical consequences of this interpretation are discussed, along with the possibility of alternative compact states, such as *plugstars*, that could potentially lead to discriminating observational tests.

Keywords

Semi-Complex Extension, Kruskal Coordinates, Kruskal Diagram, Schwarzschild Geometry, Autoparallel Curves, Ghost Images, Ghost Geometry, Ghost Symmetry, Pseudo-Real Coordinates

1. Real and Semi-Complex Geometric Extension: The Ghost Phenomenon

Let us consider the sphere S^2, defined by its metric, expressed in terms of the two angular coordinates θ and φ:

$$ds^2 = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{1}$$

Introduce the change of coordinate:

$$\theta = \arcsin\frac{r}{R} \tag{2}$$

The line element becomes:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} \tag{3}$$

We thus have a Riemannian metric, in the sense that the signs of the signature (+ +) are identical. One can construct the geodesics of this object as length-minimizing curves:

$$J = \int ds = \int\sqrt{r^2 d\varphi^2 + \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2}} \tag{4}$$

By locating the position of the point using a parameter λ:

$$J = \int\sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{R^2}{R^2 - r^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2} \tag{5}$$

By posing:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \qquad \dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} \tag{6}$$

We get:

$$J = \int\sqrt{r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{R^2}{R^2 - r^2}\dot{r}^2}\, d\lambda = \int F\left(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}\right) d\lambda \tag{7}$$

The quantity $F\left(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}\right)$ ...being the corresponding Lagrange function. Minimizing the length would lead us to the Lagrange equations:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial F}{\partial r} \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \tag{9}$$

What happens if we replace the Lagrange function F by its square F^2?

$$J=\int\left(r^2\dot{\varphi}^2+\frac{R^2}{R^2-r^2}\dot{r}^2\right)\mathrm{d}\lambda=\int F^2\left(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}\right)\mathrm{d}\lambda=\int\Phi\mathrm{d}\lambda \tag{10}$$

The Lagrange equations are:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{r}}\right)+F\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{r}}\right)=F\frac{\partial F}{\partial r} \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}\right)+F\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}\right)=F\frac{\partial F}{\partial\varphi} \tag{12}$$

To obtain the same equations, a specific parameterization is required, such as:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}=0 \tag{13}$$

But we have:

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=r^2\dot{\varphi}^2+\frac{R^2}{R^2-r^2}\dot{r}^2=F^2=\Phi \tag{14}$$

The condition $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}=0$ means that λ is an affine parameter along the geodesic. Since $F=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}$, this condition imposes a constant rate of variation of arc length with respect to λ. Choosing $F=1$ simply amounts to taking $\lambda=s$.

We now choose an affine parameterization, and more precisely the normalization $F=1$, which, in the Riemannian sector, amounts to choosing $\lambda=s$. Thus:

$$1=r^2\dot{\varphi}^2+\frac{R^2}{R^2-r^2}\dot{r}^2 \tag{15}$$

Since we have a cyclical nature:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0 \tag{16}$$

Choosing Φ/2 as Lagrangian:

$$r^2\dot{\varphi}^2=\mathrm{Cst}\rightarrow\dot{\varphi}=\frac{h}{r} \tag{17}$$

By combining these two equations, one immediately obtains the differential equation yielding the solution curves:

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{hR}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\left(R^2-r^2\right)\left(r^2-h^2\right)}}) \tag{18}$$

From which we can construct two families of curves:

- For $r<R$ with $|h|<R$
- For $r>R$ with $|h|>R$

For $r<R$, these are ellipses—planar projections of the geodesics of the sphere S^2, which are its great circles. For $r<R$, these elliptical projections can be viewed as the planar projections of the great circles of the sphere S^2 embedded in $\mathbb{R}^3$.

But what about the curves corresponding to $r>R$, and what meaning should be assigned to them? Let us first show that they are ellipses. Let us set:

$$r = \frac{1}{u} \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = -\frac{hRu}{\sqrt{\left(R^2u^2-1\right)\left(1-h^2u^2\right)}} \tag{20}$$

$$v = u^2 = \frac{1}{r^2} \tag{21}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 = \frac{4}{h^2R^2}\left(R^2v-1\right)\left(1-h^2v\right) \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\varphi^2} + 4v = 2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{R^2}\right) \tag{23}$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{R^2}\right) + A\cos 2\left(\varphi-\varphi_0\right) \tag{24}$$

The turning points are

$$r = R \text{ et } r = |h| \tag{25}$$

What fixes the origin and provides, after the angular origin has been chosen:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\left(\varphi-\varphi_0\right)}{h^2} + \frac{\sin^2\left(\varphi-\varphi_0\right)}{R^2} \tag{26}$$

With:

$$x = r\cos\left(\varphi-\varphi_0\right) \tag{27}$$

$$y = r\sin\left(\varphi-\varphi_0\right) \tag{28}$$

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \tag{29}$$

All these curves are ellipses, as shown in Figure 1.

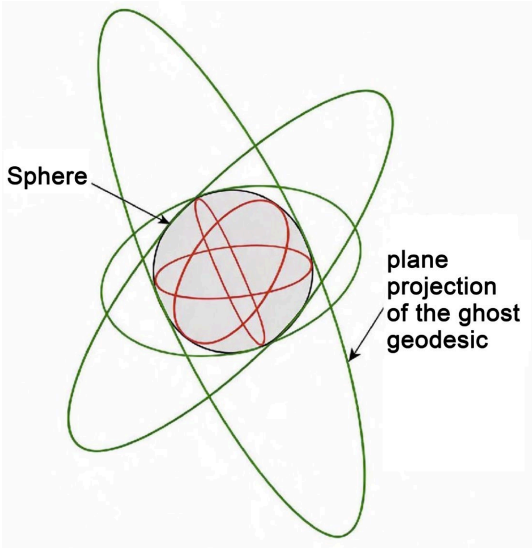


Figure 1. Real plane projections of geodesics and ghost images of antiparallels inscribed on the semi-complex extension of the sphere for $r > \alpha$.

The curves lying outside the projection of the sphere's apparent contour are therefore also ellipses. However, these real curves are 2D projections; they cannot be regarded as the projections of actual curves capable of being embedded in $\mathbb{R}^3$. (See Figure 2.)

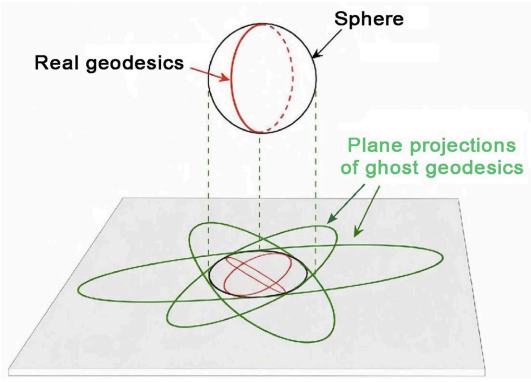


Figure 2. Sphere and projection of the sphere, plus geodesics, and ghost images of antiparallel curves that belong to the semi-complex geometric extension.

Let us show that they can be embedded in a three-dimensional semi-complex space with coordinates (r,φ,η), where

$$(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \qquad \eta\in\mathbb{C} \tag{30}$$

That is to say, where the first two are real and the third is purely imaginary.

Regarding the region $r < R$ the sphere S^2, embedded in the space described by the real coordinates (r,φ,z) and projected onto the subspace—exhibits an apparent contour in the form of the circle:

$$r^2+z^2=R^2 \tag{31}$$

For $r > R$, if we attempt to embed the geometric object defined by its metric into $\mathbb{R}^3$, using coordinates (r,φ,z), we obtain

$$\mathrm{d}z=\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}} \tag{32}$$

z becomes purely imaginary. If we then move to an embedding in a semi-complex space described by the coordinates (r,φ,η) where

$$(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \qquad \eta\in\mathbb{C} \tag{33}$$

We would have an apparent contour corresponding to the equation:

$$r^2+\eta^2=R^2 \tag{34}$$

The curves we have obtained thus lie within a space formed by joining, along the sphere S^2, which serves as a common boundary—the portion of the space $(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3$ contained inside ($r < R$) that sphere and the portion of a semi-complex space (r,φ,η) corresponding to ($r > R$). The embeddings are merely systems of representation. Let us set:

$$\eta = i\zeta \qquad \zeta \in \mathbb{R} \tag{35}$$

The semi-complex geometric object upon which the curves corresponding to $r > R$ are traced then becomes a hyperboloid of one sheet with the equation:

$$r^2 - \zeta^2 = R^2 \tag{36}$$

For $r < R$, the metric of the sphere $\mathcal{S}^2$ is Riemannian, with signature (+, +). For $r > R$, in this representation (r, φ, ζ), the (induced) metric becomes Lorentzian, with signature (+, −).

$$\mathrm{d}s^2 = r^2 \mathrm{d}\varphi^2 - \frac{R^2}{r^2 - R^2}\mathrm{d}r^2 \tag{37}$$

In the figure below, we have the extension of the meridian constructed in this way. In **Figure 3**, this extension corresponds to the blue curve:

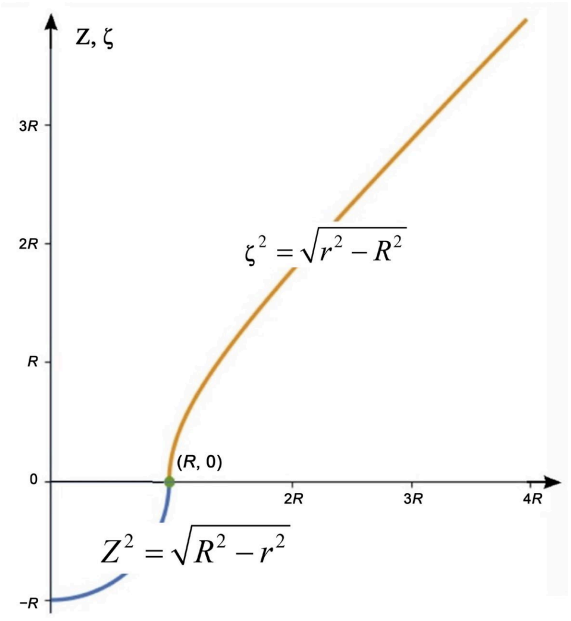


Figure 3. Extended apparent outline.

And its representation as a double 3D embedding. In **Figure 4** below, we have only the half part of the global semi-complex extension.

Of course, this needs to be completed by the reflection of this figure, including the symmetrical part:

$$z \to -z \qquad \zeta \to -\zeta \tag{38}$$

Note the analogy with the same operation applied later to Flamm's surface. These figures serve merely to illustrate the extension of a real geodesic arc on the sphere $\mathcal{S}^2$ by a branch lying within the semi-complex spatial region. We shall not pursue this concept of extending real geodesics from the sphere $\mathcal{S}^2$ into a semi-complex extension of space any further. Nevertheless, this sheds light on the nature of the curves shown in the figure, which arise from Lagrange's equations. These curves fall into two families.

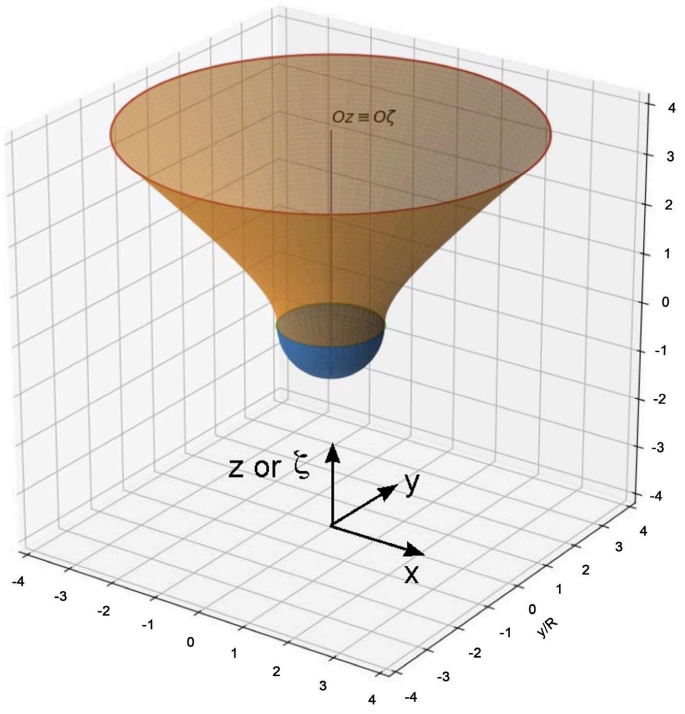


Figure 4. Part of the semi-complex extension of the S^2 sphere.

- Real curves
- Curves embedded in a semi-complex space

We have immediate access to the projection of these paths onto the real component of these possible projections. For $r < R$, these curves are geodesics of the sphere. But what name should be given to the semi-complex extensions corresponding to $r > R$? We might consider classical geodesics as belonging to the "here and now," whereas those lying within the semi-complex extension inhabit a sort of "beyond." Yet, we have access to their projection via the real coordinates of the semi-complex extension; they thus behave like ghosts. Our existence in the "here and now" unfolds within a real four-dimensional space (t, x, y, z). Let us suppose that death transports us to a semi-complex space (τ, x, y, z), where the "beyond" is simply a space in which the time coordinate becomes purely imaginary (which would, of course, make communication problematic).

2. The Ghost Symmetry

However, if an observer in the "here-and-now" were to glimpse a ghost, they would gain access to the projection—onto the real (x, y, z) component of the semi-complex space—of the realm where that ghost exists. By analogy, we propose terming these curves (where $r > R$) "ghost images."

Conversely, if the observer were situated within the semi-complex world, the great circles of the sphere would appear to them as ghosts. Under this hypothesis, death would correspond to a shift from the real world to a semi-complex world—a phenomenon comparable to a 90˚ rotation of the time vector. This brings to

mind individuals in extreme situations who report seeing their entire life's events flash before them in rapid succession; this could be likened to the onset of a time-vector rotation that was subsequently aborted.

3. Autoparallel Curves of the Torus

Let us leave aside these digressions. What do Lagrange's equations represent? They yield autoparallel trajectories, the existence of which in no way requires length and coordinates to be real. We could repeat this exercise with the torus, defined by its metric:

$$\mathrm{d}s^2 = r_0^2 \mathrm{d}\theta^2 + \left(R + r_0 \cos\theta\right)^2 \mathrm{d}\varphi^2 \tag{39}$$

The topology $S^1 \oplus S^1$ then appears. The corresponding signature is (+ +).

By considering the paths at $\theta = \mathrm{Cst}$ and then at $\varphi = \mathrm{cst}$, we immediately highlight the non-contractility of this surface. Let's now introduce the change of variable:

$$\theta = \arccos\frac{r-R}{r_0} \tag{40}$$

The line element becomes:

$$\mathrm{d}s^2 = r^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{-R^2 + r_0^2 - r^2 + 2rR} \tag{41}$$

It is immediately apparent that the signature (+ +) will only be maintained if:

$$R - r \le r \le R + r_0 \tag{42}$$

Otherwise, we are outside the torus. The length s is expressed as follows:

$$s = \int \sqrt{r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{-R^2 + r_0^2 - r^2 + 2rR}}\,\mathrm{d}s \tag{43}$$

But we know that we will obtain the same system of Lagrange equations by doing:

$$\delta \int \left(r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{-R^2 + r_0^2 - r^2 + 2rR} \right) \mathrm{d}s = 0 \tag{44}$$

Lagrange's equations give us the projection of the curves resulting from this variation calculation onto the plane (r, φ):

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\pm h \mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{\left(-R^2 + r_0^2 - r^2 + 2rR\right)\left(1 - \frac{h}{r^2}\right)}} \tag{45}$$

This allows us to plot the projection of a geodesic of the torus. See Figure 5.

But this solution also generates real curves that are the projection of curves equipped with an imaginary length. Below are the planar projections of these virtual geodesics, "inside and outside the torus", as shown in Figure 6.

Things become clearer when we group these results into a perspective view. See Figure 7.

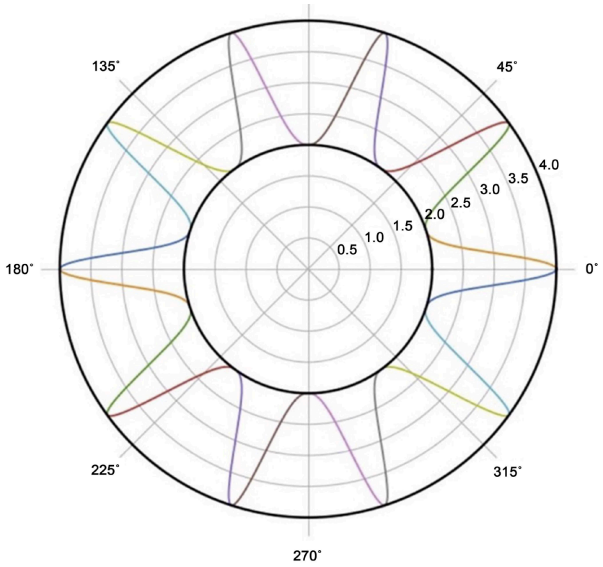


Figure 5. Plane projection of the real geodesics of the torus.

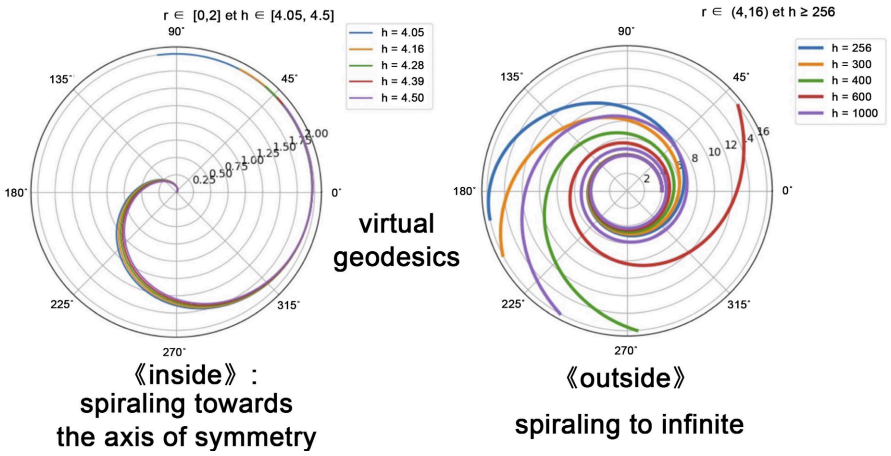


Figure 6. Projections of ghost geodesics of the torus.

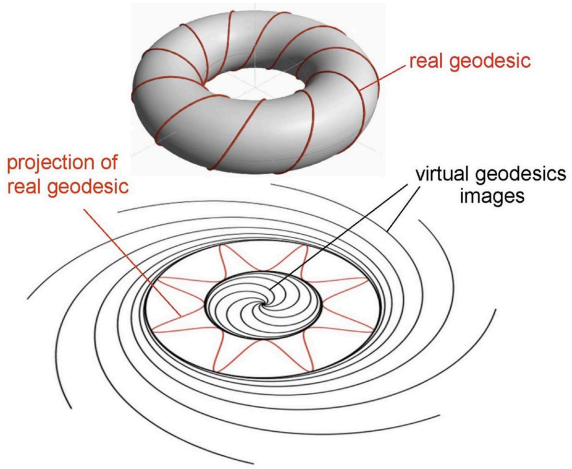


Figure 7. The torus. Projections of real and ghost images of autoparallel curves inscribed on the semi-complex extension of the torus.

By extending the meridian curves, one could visualize the double semi-complex extension of the torus—"inside its throat circle" and "outside its rim circle."

We shall not dwell on this, moving on instead to another, far more interesting 2D geometric object: the surface presented by L. Flamm as early as 1916 [1].

4. Semi-Complex Extension of the Flamm Surface

Its line elements is:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{\alpha}{r}} + r^2\mathrm{d}\varphi^2 \tag{46}$$

For $r > \alpha$ the two coefficients are positive. The metric is Riemannian and the signature is (++). Let us embed this geometric object in 3D Euclidean space. In the 3D Euclidean space (x, y, z):

$$x = r\cos\varphi \tag{47}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{48}$$

The corresponding line element is:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{49}$$

We have:

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2 = \frac{r}{r-\alpha} \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{r-\alpha}} \tag{51}$$

$$z = \pm 2\sqrt{\alpha(r-\alpha)} \tag{52}$$

It is the horizontal parabola:

$$r = \alpha - \frac{z^2}{4\alpha} \tag{53}$$

We therefore have two layers that meet at the throat circle in

$$r = \alpha z = 0 \tag{54}$$

For $r < \alpha$, we can consider an embedding into the semi-complex space (r, φ, η) with:

$$(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \qquad \eta \in \mathbb{C} \tag{55}$$

Posing:

$$\eta = i\zeta \tag{56}$$

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 - \frac{r}{r-\alpha}\mathrm{d}r^2 \tag{57}$$

The induced metric becomes Lorentzian, with signature:

$$(+-) \tag{58}$$

Two embeddings can be considered. The autoparallel curves for $r > \alpha$, which

lie on Flamm's surface—and thus serve as its geodesics—can be embedded in a 3D Euclidean space (r,φ,z), and the meridian of this surface of revolution is a sideways-oriented parabola. The surface generated by rotating this sideways parabola consists of two sheets located on either side of the throat circle; we will designate these as regions I and III. The autoparallel curves corresponding to $r<\alpha$ lie on a 2D object that constitutes the semi-complex extension of Flamm's surface. This object can be embedded in a 3D Euclidean space $(r,\varphi,\eta=-\zeta)$. A representation can be created by identifying ζ with *z*. This yields two surface elements—portions of sideways parabolas—that meet at the throat circle, each featuring a conical point on the Oz axis. The real meridian and the meridian of the semi-complex extension are shown in Figure 8 below.

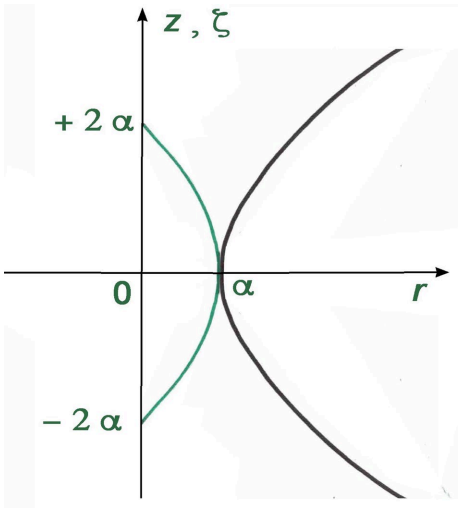


Figure 8. Meridians. In black, from the Flamm surface. In green, of its semi-complex extension.

In Figure 9, 3D-views.

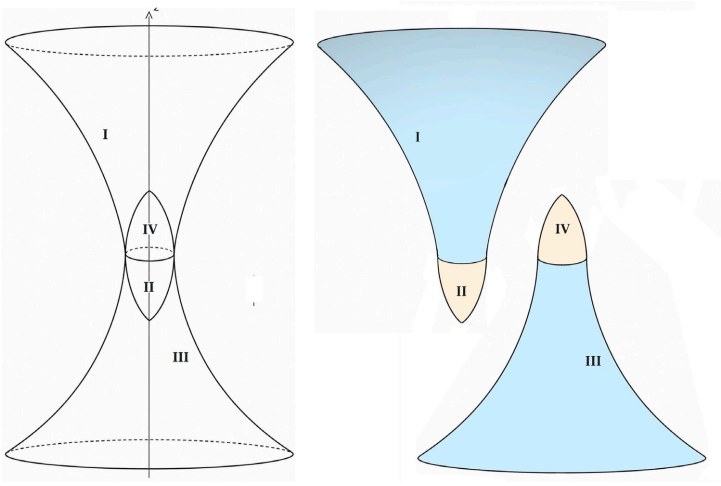


Figure 9. Semi complex extension of the Flamm's surface.

Let's deal with the calculation of the autoparallel curves.

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right] \tag{59}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} = h \tag{60}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2} \tag{61}$$

$$1 = \frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{62}$$

$$r > \alpha \to r > |h| \tag{63}$$

$$r < \alpha \to r < |h| \tag{64}$$

In the semi-complex part:

$$|h| > \alpha \tag{65}$$

In the vicinity of the throat, when r tends to α :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \sim \frac{\mathrm{cst}}{\sqrt{\alpha - r}} \tag{66}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \to 0 \tag{67}$$

In its embedding, the parallel curve is tangent to the circle of striction, the junction between the two surfaces.

Behaviour in $r = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha r}} \tag{68}$$

$$\Delta\varphi \cong 2\sqrt{\frac{r}{\alpha}} \tag{69}$$

The curve does not spiral. In its semi-complex part, the meridian is the section of a horizontal parabola:

$$\zeta^2 = 4\alpha(\alpha - r) \tag{70}$$

In $r = 0$, we have $\zeta = \pm 2\alpha$ and:

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \to 0 \tag{71}$$

$$g_{rr} = -\frac{r}{\alpha - r} \to 0 \tag{72}$$

The induced metric is degenerate. In **Figure 10**, below, a perspective view of the Flamm's surface, imbedded in à 3D Euclidean space. Joined, the plane projections of real and ghost geodesics.

5. Where Is the Physical World?

In 1909, H. Minkowski invented the concept of spacetime [2] [3] and proposed an initial set of rules of the game. Hereafter, in **Figure 11**, the English translation

of his axiom, presented [3] in 1909.

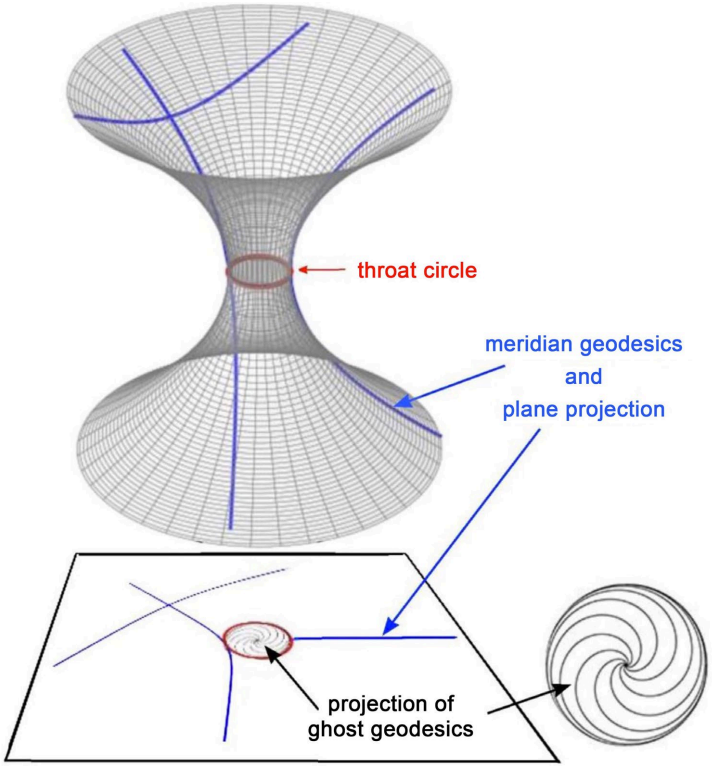


Figure 10. Flamm's surface and the ghost images of the autoparallels of its semi-complex extension.

The axiom means that at every point in the universe the expression

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

is always positive, or, equivalently, that the speed v is always less than c. Thus, c is the upper limit for the speed of any substantial point, and this is precisely where its true meaning lies.

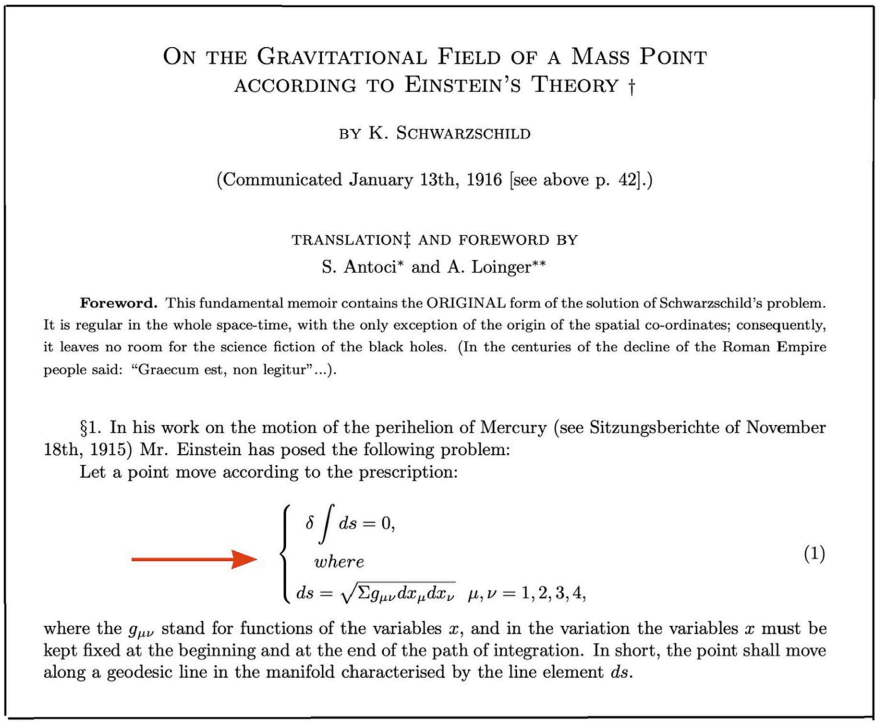
$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

The integral $\int d\tau$ of this quantity taken on the world line will be called the proper time (Eingeinzeit) of the substantial point.

Figure 11. Minkowski's axiomatic definition [3] of spacetime (1909).

According to its prescriptions, material particles follow geodesics defined by a length equated to a real proper time. Photons follow geodesics of zero length within the manifold. This approach would subsequently be adopted—either explicitly or implicitly—by Einstein [4] and Schwarzschild [5] [6]. In **Figure 12**, the English translation of the very beginning of his paper [5].

Droste [7], Flamm [1], and Weyl [8] adopt the same view of physics. In **Figure 13**, the English translation of Weyl's article.



ON THE GRAVITATIONAL FIELD OF A MASS POINT
ACCORDING TO EINSTEIN'S THEORY †

BY K. SCHWARZSCHILD

(Communicated January 13th, 1916 [see above p. 42].)

TRANSLATION‡ AND FOREWORD BY
S. Antoci* and A. Loinger**

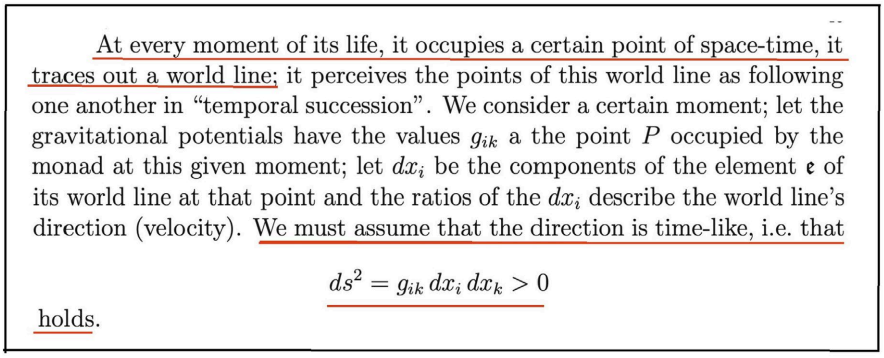
Foreword. This fundamental memoir contains the ORIGINAL form of the solution of Schwarzschild's problem. It is regular in the whole space-time, with the only exception of the origin of the spatial co-ordinates; consequently, it leaves no room for the science fiction of the black holes. (In the centuries of the decline of the Roman Empire people said: "Graecum est, non legitur"...).

§1. In his work on the motion of the perihelion of Mercury (see Sitzungsberichte of November 18th, 1915) Mr. Einstein has posed the following problem:
Let a point move according to the prescription:

$$\begin{cases} \delta \int ds = 0, \\ where \\ ds = \sqrt{\Sigma g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \quad \mu,\nu = 1,2,3,4, \end{cases} \tag{1}$$

where the $g_{\mu\nu}$ stand for functions of the variables x, and in the variation the variables x must be kept fixed at the beginning and at the end of the path of integration. In short, the point shall move along a geodesic line in the manifold characterised by the line element ds.

Figure 12. Schwarzschild foreword [5].



At every moment of its life, it occupies a certain point of space-time, it traces out a world line; it perceives the points of this world line as following one another in "temporal succession". We consider a certain moment; let the gravitational potentials have the values g_{ik} a the point P occupied by the monad at this given moment; let dx_i be the components of the element $\mathfrak{e}$ of its world line at that point and the ratios of the dx_i describe the world line's direction (velocity). We must assume that the direction is time-like, i.e. that

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k > 0$$

holds.

Figure 13. Weyl restricts himself to real proper time [8].

For H. Weyl, the path of a material particle lies along a trajectory endowed with a necessarily real length [8]. In this context, any solution curve possessing an imaginary length element does not belong to the physical world and lies outside the real hypersurface. All this is consistent with a Lorentzian signature $(+---)$.

6. In Search of the Geometry of the Hypersurface

In 1916, L. Flamm provided a complete geometric interpretation of the two solutions presented by Schwarzschild. In the exterior region, where $r > R_a$, the cross-section of the solution hypersurface at constant t and θ is a portion of one of the two sheets of the surface generated by rotating a sideways-oriented parabola. In the interior region, where $0 < r < R_a$, the cross-section of the solution hyper-

surface at constant t and θ is a portion of a sphere of radius. In Figure 14, building the final cut of the Schwarzschild global surface at t and θ constants.

$$\hat{R} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} \tag{73}$$

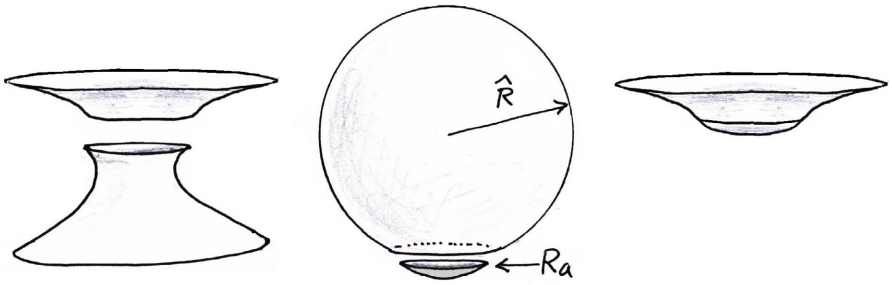


Figure 14. The Flamm's construction [9].

However, in January 1916, Karl Schwarzschild did not present the true expression of his exterior metric solution [5], expressed in terms of his coordinates (t,r,θ,φ) which would not be published in that form until 2026 [9].

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\frac{\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}-\alpha}{\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}}c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{r^4\mathrm{d}r^2}{\left(r^3+\alpha^3\right)\left[\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}-\alpha\right]} \\ &-\left(r^3+\alpha^3\right)^{2/3}\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{74}$$

With:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq 0 \qquad x,y,z,r \in \mathbb{R} \tag{75}$$

In this context (with real variables x, y, z, and r), the topology of the solution hypersurface is clearly revealed. The variable r—a simple spatial marker—is not a "radius" in the Euclidean sense. The surface can be foliated by a family of S^2 spheres with area:

$$A = 4\pi\left(r^3+\alpha^3\right)^{2/3} \tag{76}$$

With a minimum value in $r = 0$

$$A_{\min} = 4\pi\alpha^2 \tag{77}$$

The hypersurface associated with the exterior metric solution is therefore non-contractible, a fact confirmed by its cross-sections at constant t and θ (Flamm's paraboloid). However, Schwarzschild published his result in this form:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{\alpha}{R}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}R^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \qquad R = \left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3} \tag{78}$$

By explicitly stating, in a letter sent to Einstein [10], that this quantity R is merely an "intermediate quantity" (*Hilfsgrobe*).

David Hilbert modified his ambitious 1915 article, "The Foundations of Physics"

[11], and set out to incorporate Schwarzschild's exterior metric solution into a new paper published in December 1916 [12]—a paper in which he made no mention whatsoever of the existence of an interior metric solution. He defined geometry as deriving not from the expression of an elementary length (the term "ds" is absent from his article) but from a bilinear form that could take on either sign; depending on that sign, this approach led to the definition of two lengths associated with two sets of solution curves, described either as timelike trajectories or as "segments" (spacelike). He made no mention of the interior metric. As explained in detail in [9], in his reconstruction of the solution to the Einstein equation, he "de facto" conflated Schwarzschild's coordinates "r" and "R" while making what appeared to him to be a logical simplification to reach the solution more quickly—a confusion first pointed out in 1989, 73 years later, by the Canadian mathematician Abrams [13].

This confusion is implicitly reflected in the works published by A. Eddington in 1918 [14] and R. C. Tolman in 1934 [15]—extensively documented works that subsequently popularized general relativity worldwide.

In 1939, Albert Einstein published a paper [16] containing a few lines in which—without relying on substantive arguments—he expressed skepticism regarding the description of geometry within masses as presented by Schwarzschild in his second paper of 1916. This may well have deterred many scientists from focusing on that work, particularly given that Schwarzschild's paper was difficult to read, was written in German, and was not translated into English until 1999.

These two factors focus the scientific community's interest on the exterior metric. Many propose changes of variables aimed at eliminating the singularity at $r=\alpha$. The challenge is, in particular, to ensure that the metric coincides with the Lorentz metric at infinity. In 1935, A. Einstein and N. Rosen proposed [17] the change of variable:

$$u^2 = r - 2\alpha \tag{79}$$

And get:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{u^2}{u^2+\alpha}\mathrm{d}t^2 - 4\left(u^2+\alpha\right)\mathrm{d}u^2 - \left(u^2+\alpha\right)^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\right) \tag{80}$$

Their goal was to propose a geometric description of masses. They introduce the concept of wormhole, writing:

We *call such a connection between two sheets a "bridge"*.

However, this metric is not Lorentzian at infinity. In 1924, however, A. Eddington [18] proposed a change of variable involving the time coordinate that resolves the issue. Denoting "Schwarzschild time" by t_S and Eddington time by t_E, we have:

$$t_s = t_E + \varepsilon\frac{\alpha}{c}\ln\left(\frac{r}{\alpha}-1\right) \qquad \varepsilon=\pm 1 \tag{81}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)c^2\mathrm{d}t_E^2 + \varepsilon c\alpha\frac{\mathrm{d}t_E\mathrm{d}r}{r} - \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{82}$$

The coordinate singularity is eliminated, but a cross-term in $\mathrm{d}r\mathrm{d}t_E$ appears.

In 1923, G.D. Birkhoff [19] stated a theorem:

Any spherically symmetric solution to Einstein's vacuum field equations is locally isometric to the Schwarzschild metric.

This result does not rule out the presence of a cross-term in the metric, provided that it arises from a simple coordinate change and the new formulation remains isometric to the Schwarzschild solution. This is precisely the case for the Eddington-Finkelstein metric, which is derived from the Schwarzschild metric via a transformation of the time coordinate and introduces a *dtdr* cross-term without altering the underlying geometry. A metric lacking a cross-term and admitting a hypersurface-orthogonal timelike Killing field is termed static. The Eddington-Finkelstein solution, by contrast, is stationary but not static, while remaining isometric to Schwarzschild.

In 1939, Oppenheimer and Snyder [20]—drawing on the fact that, in the Schwarzschild solution to the vacuum Einstein field equations, an external observer assigns an infinite Schwarzschild time to the crossing of the surface $r=\alpha$ (an infinite value for the free-fall time of a test particle, corresponding to an infinite escape time)—proposed [19] that this solution describes the highly non-stationary phenomenon of the implosion of a massive star at the end of its life.

D. Finkelstein [21] in 1958 and H. A. Buchdahl [22] in 1959—recalling that non-static solutions containing a cross-term in *drdt* are solutions to the vacuum Einstein equations—begin by presenting the most general form of the exterior metric, as given by Tolman [15]:

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2+q\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}r}{r}-\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\dfrac{\alpha}{Rr}}-r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{83}$$

However, they do not associate this form with a physical solution and hasten to point out that the cross term can be eliminated by a change of variable involving the time coordinate (the inverse of the Eddington coordinate transformation [18]). Nevertheless, Finkelstein, focusing on the idea of a past-future asymmetry, writes:

The surface is thus a true unidirectional membrane: causal influences can pass through it only in one sens. This again demonstrates the asymmetry between past and future. Moreover it demonstrates the existence of two distinct completions of the Schwarzschild solution is asserted. One has the structure:

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2+\frac{2\alpha c\mathrm{d}t\mathrm{d}r}{r}-\frac{dr^2}{1-\dfrac{\alpha}{Rr}}-r^2\Omega^2 \tag{84}$$

and the other, obtained by time-reversal, has a negative coefficient for drdt. The completions must be distinct even if the resulting manifolds are isomorphic under t, because a particular geodesic segment reaches the center and in the other completion does not. A transformation of the variable t that cancels the cross term

shows that the "core" of the manifold is that of the interior solution[1]. *The only information, in this work, accordingly, is the connection between the interior and exterior solutions to form a single manifold.*

The community is thus still seeking a geometric interpretation of this Schwarzschild solution. It is worth noting that Finkelstein suggests a two-sheeted, T-symmetric extension.

Incidentally, in the post-war period—and without any supporting paper—the cosmology community gradually opted for a change of signature:

$$(+---)\rightarrow(-+++) \tag{85}$$

Thus, what is henceforth considered the standard form of the Schwarzschild metric becomes:

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\dfrac{\alpha}{Rr}}+r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{86}$$

In 1959, during a private meeting, Martin Kruskal presented to John Archibald Wheeler a coordinate transformation he had devised to eliminate the coordinate singularity at $r=\alpha$. Wheeler immediately grasped its significance and presented the construction a few weeks later at a colloquium in Royaumont, France. He was so enthusiastic and eager to share this with the scientific community that he wrote the paper [23] himself and proposed that Kruskal put his name to it—a proposal Kruskal accepted[2]. It should be noted that the change of variable is presented without details regarding its construction.

We now arrive at the core of this article's subject. We must therefore present a version that can be considered standard, and we opt for the one found in Wald's work [24].

7. The Standard Construction of the Kruskal Representation [24]

Région I	**Région II**
$r>\alpha \qquad A(r)>0$ (87.I)	$r<\alpha \qquad A(r)<0$ (87.II)
	→ *We then decide to define the length, and the proper time, according to*:
$\mathrm{d}s^2=A(r)\mathrm{d}t^2-\dfrac{1}{A(r)}\mathrm{d}r^2$ (88.I)	$\mathrm{d}s^2=\dfrac{1}{\lvert A(r)\rvert}\mathrm{d}r^2-\lvert A(r)\rvert\mathrm{d}t^2$ (88.II)
t is timelike. r is spacelike.	→ r *becomes timelike and* t *is spacelike*, in other

[1] Finkelstein thus discusses Schwarzschild's second solution—describing the geometry inside the mass—which he implicitly cites by referring to Tolman's writings.

[2] It would be of considerable historical interest to determine to what extent the global four-region interpretation already existed in Kruskal's original work or whether it emerged through Wheeler's physical interpretation of the new coordinate system. The proceedings of the Royaumont conference (June 1959), where Wheeler first presented Kruskal's construction before its publication, could shed light on this question.

We perform the change of variable:

$$r^* = r + \alpha \ln\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right) \quad (89.I)$$

$$\mathrm{d}r^* = \mathrm{d}r\left(1 + \frac{1}{\frac{r}{\alpha} - 1}\right) = \mathrm{d}r\left(\frac{1}{1 - \frac{r}{\alpha}}\right) \quad (90.I)$$

$$\mathrm{d}r^* = \frac{\mathrm{d}r}{A(r)} \quad (91.I)$$

The line element becomes:

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^{*2}\right) \quad (92.I)$$

We introduce null coordinates:

$$x^- = t - r^* \quad (93a.I)$$

$$x^+ = t + r^* \quad (93b.I)$$

Whence:

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ + \mathrm{d}x^-\right) \quad (94.I)$$

$$\mathrm{d}r^* = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ - \mathrm{d}x^-\right) \quad (95.I)$$

$$x^- = t - r^* \quad (96.I)$$

$$x^+ = t + r^* \quad (97.I)$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ + \mathrm{d}x^-\right) \quad (98.I)$$

$$\mathrm{d}r^* = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ - \mathrm{d}x^-\right) \quad (99.I)$$

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^{*2}\right) = A(r)\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- \quad (100.I)$$

In the outer region $r > \alpha$ we set up:

$$U = -\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right) \quad (101.I)$$

$$V = \exp\left(\frac{x^+}{2\alpha}\right) \quad (102.I)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2\alpha}\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right)\mathrm{d}x^- - \frac{U}{2\alpha}\mathrm{d}x^- \quad (103.I)$$

$$\mathrm{d}V = \frac{V}{2\alpha}\mathrm{d}x^+ \quad (104.I)$$

words, the causal and temporal nature of the directions $\frac{\partial}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial}{\partial r}$ are swapped.

→ We use a *different* change of variable:

$$r^* = r + \alpha \ln\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) \quad (89.II)$$

$$\mathrm{d}r^* = \mathrm{d}r\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{r}{\alpha}}\right) = \mathrm{d}r\left(-\frac{\alpha}{\alpha - r}\right) \quad (90.II)$$

$$\mathrm{d}r^* = \frac{\mathrm{d}r}{A(r)} \quad (91.II)$$

The line element becomes:

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^{*2}\right) \quad (92.II)$$

We introduce null coordinates:

$$x^- = t - r^* \quad (93a.II)$$

$$x^+ = t + r^* \quad (93b.II)$$

Whence:

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ + \mathrm{d}x^-\right) \quad (94.II)$$

$$\mathrm{d}r^* = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ - \mathrm{d}x^-\right) \quad (95.II)$$

$$x^- = t - r^* \quad (96.II)$$

$$x^+ = t + r^* \quad (97.II)$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ + \mathrm{d}x^-\right) \quad (98.II)$$

$$\mathrm{d}r^* = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^+ - \mathrm{d}x^-\right) \quad (99.II)$$

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^{*2}\right) = A(r)\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- \quad (100.II)$$

→ In the inner region $r < \alpha$ we set up:
(This is the second act of this mathematical artifice).

$$U = +\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right) \quad (101.II)$$

$$V = \exp\left(\frac{x^+}{2\alpha}\right) \quad (102.II)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2\alpha}\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right)\mathrm{d}x^- - \frac{U}{2\alpha}\mathrm{d}x^- \quad (103.II)$$

$$\mathrm{d}V = \frac{V}{2\alpha}\mathrm{d}x^+ \quad (104.II)$$

$$\mathrm{d}U\mathrm{d}V = -\frac{UV}{4\alpha^2}\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- \quad (105.\mathrm{I})$$

$$\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- = -\frac{4\alpha^2}{UV}\mathrm{d}U\mathrm{d}V \quad (106.\mathrm{I})$$

Moreover:

$$UV = -\exp\left(\frac{x^+ - x^-}{2\alpha}\right) \quad (107.\mathrm{I})$$

$$x^+ - x^- = 2r^* \quad (108.\mathrm{I})$$

$$\frac{r^*}{\alpha} = \frac{r}{\alpha} + \ln\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right) \quad (109.\mathrm{I})$$

$$\mathrm{e}^{r^*/\alpha} = \left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)\mathrm{e}^{r/\alpha} \quad (110.\mathrm{I})$$

$$UV = -\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)\mathrm{e}^{r/\alpha} \quad (111.\mathrm{I})$$

The line element becomes:

$$ds^2 = -4\alpha^2\frac{A(r)}{UV}dUdV \quad (112.\mathrm{I})$$

That's to say:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-r/\alpha}\mathrm{d}U\mathrm{d}V \quad (113.\mathrm{I})$$

In four dimensions:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-r/\alpha}\mathrm{d}U\mathrm{d}V - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad (114.\mathrm{I})$$

$$U = v - u \qquad V = v + u \quad (115.\mathrm{I})$$

$$\mathrm{d}U\mathrm{d}V = \mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2 \quad (116.\mathrm{I})$$

Whence:

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-2\alpha}\left(\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2\right) - r^2\mathrm{d}\Omega^2} \quad (117.\mathrm{I})$$

$$UV = (v-u)(v+u) = v^2 - u^2 \quad (118.\mathrm{I})$$

In this region I: $U < 0$ $V > 0$ we set up:

$$q_{ext} = \mathrm{e}^{r/2\alpha}\sqrt{\frac{r}{\alpha} - 1} \quad (119.\mathrm{I})$$

$$U = -q_{ext}\mathrm{e}^{-t/2\alpha} \quad (120.\mathrm{I})$$

$$V = q_{ext}\mathrm{e}^{t/2\alpha} \quad (121.\mathrm{I})$$

$$u = \frac{V-U}{2}q_{ext}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \quad (122.\mathrm{I})$$

$$\mathrm{d}U\mathrm{d}V = -\frac{UV}{4\alpha^2}\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- \quad (105.\mathrm{II})$$

$$\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- = -\frac{4\alpha^2}{UV}\mathrm{d}U\mathrm{d}V \quad (106.\mathrm{II})$$

Moreover:

$$UV = -\exp\left(\frac{x^+ - x^-}{2\alpha}\right) \quad (107.\mathrm{II})$$

$$x^+ - x^- = 2r^* \quad (108.\mathrm{II})$$

$$\frac{r^*}{\alpha} = \frac{r}{\alpha} + \ln\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) \quad (109.\mathrm{II})$$

$$\mathrm{e}^{r^*/\alpha} = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{r/\alpha} \quad (110.\mathrm{II})$$

$$UV = +\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{r/\alpha} \quad (111.\mathrm{II})$$

The line element becomes:

$$\mathrm{d}s^2 = -4\alpha^2\frac{A(r)}{UV}\mathrm{d}U\mathrm{d}V \quad (112.\mathrm{II})$$

That's to say:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-r/\alpha}\mathrm{d}U\mathrm{d}V \quad (113.\mathrm{II})$$

In four dimensions:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-r/\alpha}\mathrm{d}U\mathrm{d}V - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad (114.\mathrm{II})$$

$$U = v - u \qquad V = v + u \quad (115.\mathrm{II})$$

$$\mathrm{d}U\mathrm{d}V = \mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2 \quad (116.\mathrm{II})$$

→ We get the *same* line element:

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-2\alpha}\left(\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2\right) - r^2\mathrm{d}\Omega^2} \quad (117.\mathrm{II})$$

$$UV = (v-u)(v+u) = v^2 - u^2 \quad (118.\mathrm{II})$$

In this region II: $U > 0$ $V > 0$ we set up:

$$q_{int} = \mathrm{e}^{r/2\alpha}\sqrt{1 - \frac{r}{\alpha}} \quad (119.\mathrm{II})$$

$$U = +q_{int}\mathrm{e}^{-t/2\alpha} \quad (120.\mathrm{II})$$

$$V = q_{int}\mathrm{e}^{t/2\alpha} \quad (121.\mathrm{II})$$

→ And that is where the *permutation* $\mathrm{sh} \leftrightarrows \mathrm{ch}$ appears.

$$u = \frac{V-U}{2}q_{int}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \quad (122.\mathrm{II})$$

$$v=\frac{V+U}{2}q_{ext}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \quad (123.I)$$

Hence the change of variables:

$$\boxed{u=\mathrm{e}^{r/2\alpha}\sqrt{\frac{r}{\alpha}-1}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2\alpha}\right)} \quad (124.I)$$

$$\boxed{v=\mathrm{e}^{r/2\alpha}\sqrt{\frac{r}{\alpha}-1}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2\alpha}\right)} \quad (125.I)$$

$$\boxed{u^2-v^2=\left(\frac{r}{\alpha}-1\right)>0}. \quad (126.I)$$

$$v=\frac{V+U}{2}q_{int}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \quad (123.II)$$

Hence the change of variables:

$$\boxed{u=\mathrm{e}^{r/2\alpha}\sqrt{1-\frac{r}{\alpha}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2\alpha}\right)} \quad (124.II)$$

$$\boxed{v=\mathrm{e}^{r/2\alpha}\sqrt{1-\frac{r}{\alpha}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2\alpha}\right)} \quad (125.II)$$

$$\boxed{u^2-v^2=-\left(1-\frac{r}{\alpha}\right)<0} \quad (126.II)$$

We thus see that this result is obtained through the use of two computational devices:

A—We have two changes of variables that differ for $r>\alpha$ and for $r<\alpha$.

$r>\alpha$:

$$r^*=r+\alpha\ln\left(\frac{r}{\alpha}-1\right) \quad (127.I)$$

$r<\alpha$

$$r^*=r+\alpha\ln\left(1-\frac{r}{\alpha}\right) \quad (127.II)$$

B—Different sectors are created through different choices of signs in the definition of the exponential variables U and V.

Sector I

$$U=-\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right) \quad (128.I)$$

$$V=+\exp\left(-\frac{x^+}{2\alpha}\right) \quad (129.I)$$

Sector II

$$U=+\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right) \quad (128.II)$$

$$V=+\exp\left(-\frac{x^+}{2\alpha}\right) \quad (129.II)$$

Additional calculations could be performed based on the choices:

Sector III

$$U=+\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right) \quad (130.I)$$

$$V=-\exp\left(-\frac{x^+}{2\alpha}\right) \quad (131.I)$$

Sector IV

$$U=-\exp\left(-\frac{x^-}{2\alpha}\right) \quad (130.II)$$

$$V=-\exp\left(-\frac{x^+}{2\alpha}\right) \quad (131.II)$$

It is thanks to this that the permutation of hyperbolic lines appears in the various changes of variable. $\boxed{\mathrm{sh}\rightleftarrows\mathrm{ch}}$

These calculations gave rise to the Kruskal diagram. See **Figure 15** below.

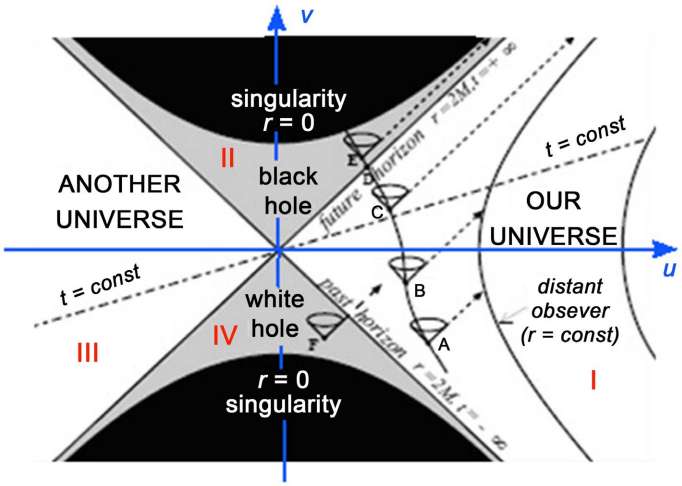


Figure 15. The Kruskal diagram.

8. Interpretation of the Region $r < \alpha$ as a Semi-Complex Extension of the Manifold

We start again from the form of the metric with constant θ and φ:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} \tag{132}$$

The 1960 article specifies that the aim is to express it in the form:

$$ds^2 = F^2(r)\left(dv^2 - du^2\right) \tag{133}$$

The curves with $ds = 0$ correspond to:

$$\frac{du}{dv} = \pm 1 \tag{134}$$

The coordinates u and v form a conformally Minkowskian pair; their combinations $v-u$ and $v+u$ are null coordinates in the strict sense.

Let's introduce a change of variable of the form:

$$u = f(r)\,\mathrm{ch}(\eta t) \tag{135}$$

$$v = f(r)\,\mathrm{sh}(\eta t) \tag{136}$$

η being a constant to be determined.

$$du = f'(r)\,\mathrm{ch}(\eta t)dr + \eta f(r)\,\mathrm{sh}(\eta t)dt \tag{137}$$

$$dv = f'(r)\,\mathrm{sh}(\eta t)dr + \eta f(r)\,\mathrm{ch}(\eta t)dt \tag{138}$$

This allows the cross-terms to be eliminated by forming:

$$dv^2 - du^2 = \eta^2 f^2 dt^2 - f'^2 dr^2 \tag{139}$$

By identifying:

$$F^2\eta^2 f^2 = A \tag{140}$$

$$F^2 f'^2 = A^{-1} \tag{141}$$

Whence:

$$\frac{f'}{f} = \pm\frac{\eta}{A} \tag{142}$$

We choose the sign +

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \eta\left(1+\frac{\alpha}{r-\alpha}\right)\mathrm{d}r \tag{143}$$

By integrating:

$$\ln f = \eta r + \alpha\ln\left(r-\alpha\right) + C \tag{144}$$

As long as $r > \alpha$, we have the logarithm of a positive quantity—that's fine, let's continue. So:

$$f\left(r\right) = C\mathrm{e}^{\eta r}\left(r-\alpha\right)^{\alpha\eta} \tag{145}$$

The preceding relations yield:

$$f^2 = C^2\mathrm{e}^{2\eta r}\left(r-\alpha\right)^{2\alpha\eta} \tag{146}$$

Whence:

$$F^2 = \frac{1}{\eta^2C^2r}\mathrm{e}^{-2\eta r}\left(\frac{r}{\alpha}-1\right)^{1-2\alpha\eta} \tag{147}$$

Which gives:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{\eta^2C^2r}\mathrm{e}^{-2\eta r}\left(\frac{r}{\alpha}-1\right)^{1-2\alpha\eta}\left(\mathrm{d}v^2-\mathrm{d}u^2\right) \tag{148}$$

If $\eta < \dfrac{1}{2\alpha}$ then, when:

$$r\to\alpha \Rightarrow F^2\to 0 \tag{149}$$

If $\eta > \dfrac{1}{2\alpha}$ then, when:

$$r\to\alpha \Rightarrow F^2\to +\infty \tag{150}$$

To avoid this, we choose:

$$\eta = \frac{1}{2\alpha} \quad \text{et} \quad C = 1 \tag{151}$$

Which gives:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-r/\alpha}\left(\frac{r}{\alpha}-1\right)^{0}\left(\mathrm{d}v^2-\mathrm{d}u^2\right) \tag{152}$$

For $r > \alpha$, this factor is identically equal to unity. Its value at $r = \alpha$ is defined by the continuous extension of the conformal factor, rather than by an independent evaluation of the formal expression 0^0. We thus obtain:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-r/\alpha}\left(\mathrm{d}v^2-\mathrm{d}u^2\right) \tag{153}$$

And, in four dimensions:

$$ds^2 = \frac{4\alpha^3}{r} e^{-r/\alpha}\left(dv^2 - du^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{154}$$

And:

$$u = e^{r/2\alpha}\sqrt{r-\alpha}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \tag{155}$$

$$v = e^{r/2\alpha}\sqrt{r-\alpha}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \tag{156}$$

Let us revisit this construction for $0 < r < \alpha$. We obtain:

$$u = ie^{r/2\alpha}\sqrt{\alpha-r}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \tag{157}$$

$$v = ie^{r/2\alpha}\sqrt{\alpha-r}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \tag{158}$$

If t is real, then the coordinates u and v become purely imaginary. Let us introduce a translation by a purely imaginary amount $-i\frac{\pi}{2}$ and make use of the relation:

$$\mathrm{ch}\left(\tau - i\frac{\pi}{2}\right) = -i\,\mathrm{sh}(\tau) \tag{159}$$

$$\mathrm{sh}\left(\tau - i\frac{\pi}{2}\right) = -i\,\mathrm{ch}(\tau) \tag{160}$$

When applied to the time variable t, a purely imaginary translation suffices:

$$t \to t - i\pi\alpha \tag{161}$$

Then, for $0 < r < \alpha$ we get:

$$u = e^{r/2\alpha}\sqrt{r-\alpha}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \tag{162}$$

$$v = e^{r/2\alpha}\sqrt{r-\alpha}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2\alpha}\right) \tag{163}$$

This refers to Kruskal's change of variables. However, for a purely imaginary translation to be performed on a variable, that variable must be complex.

We are thus dealing with a genuine sleight of hand, enabling the description of a complex geometric extension using coordinates that can be termed pseudo-real.

An alternative construction thus emerges, leading to a semi-complex geometric object. Just as we did earlier with the 2D objects—the sphere and Flamm's surface—we obtain, in **Figure 16**, the drawing below.

The blue folds correspond to the real values of the coordinates u and v; the yellow surfaces, to imaginary folds.

Thus, the four-dimensional solution hypersurface in (t, r, θ, φ) lends itself to two representations based on the form of two intersections:

- At t and θ constants, this gives us a semi-complex representation in (r, φ)

- At θ and t φ constants this gives us a semi-complex representation in (t,r)

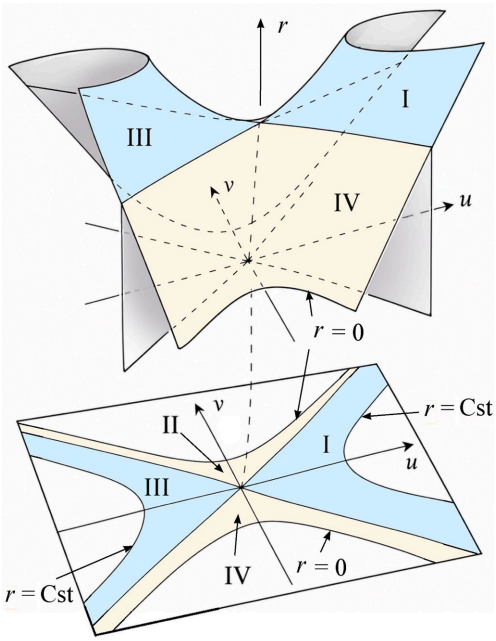


Figure 16. Kruskal complex extension (yellow).

In both cases, one obtains a complex hypersurface comprising four sectors that correspond to one another in pairs. This reflects a fundamental concept in differential geometry: that the nature of a geometric object cannot depend on the choice of coordinates used to describe it.

At the bottom, the Kruskal diagram. At the top, the surface $r(u,v)$. It indeed possesses four sheets. Sheets II and IV correspond to purely imaginary values of the coordinates u and v which a sleight-of-hand maneuver allows to be converted into real quantities. There is thus a one-to-one correspondence with the four sheets of the complex extension of the Flamm surface. This demonstrates that the geometric properties of this object—existing in a complex space—are intrinsic and independent of the chosen mode of representation, a fact that aligns with the principles of differential geometry.

This surface can be constructed using a foliation of hyperbolas defined by the equations:

$$u^2 - v^2 = \frac{e^{r/\alpha}}{r-\alpha} \tag{164}$$

Depending on the values of $r>0$, four branches are obtained. The real branches connect to the complex branches along lines $u=\pm v$ situated in the plane $r=\alpha$. The point $(0,0,\alpha)$ lies on a saddle point of the surface. The surface is bounded by hyperbolas located at $r=0$, which are the image of the central singularity. It has been arbitrarily bounded by the plane $r=2\alpha$, but these elements I and III extend to infinity.

To the best of our knowledge, the literature generally depicts the Kruskal diagram in the (u,v) plane. We have found no study interpreting the implicit relation $r = H(u,v)$ as a three-dimensional surface foliated by hyperbolas of constant r.

Here are some other images—this time, computer-generated. See Figure 17.

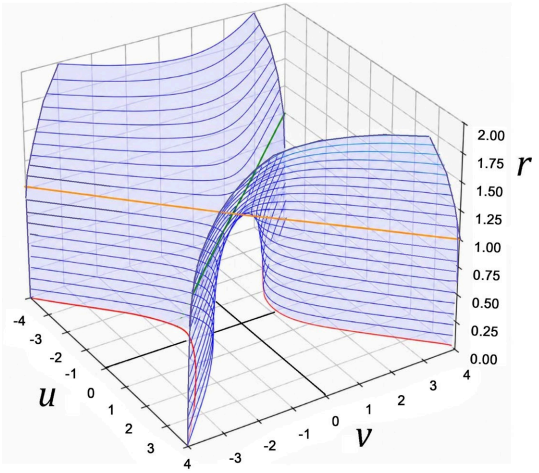


Figure 17. Kruskal complex extension. r > 1 corresponds to real world.

And in Figure 18, another view.

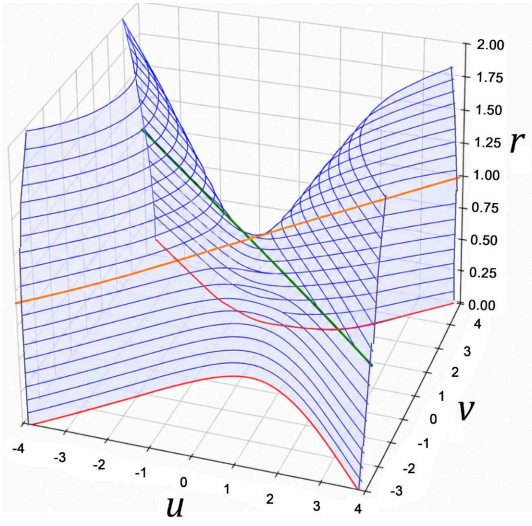


Figure 18. Kruskal complex extension. 0 < r < 1 is the semi-complex world.

We will now consider another way of proceeding.

9. Two Different Representations of the Schwarzschild Geometry

On the left, the Kruskal representation. On the right, construction using a single change of variables.

The Kruskal representation:

It is arbitrarily decided that the following expression will henceforth be called the standard form of the Schwarzschild solution to the source-free Einstein equation.

The line element becomes:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{\alpha}{r}} - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad (169)$$

In the real field, coordinate singularity for g_{RR} in $r=\alpha$ and $r=0$.

At this stage, the signature is still $(+---)$

But one suddenly ceases to regard the reality of length as a criterion for belonging to physics.

So, arbitrarily and without any argument, they decide to change their signature.

$$(+---)\rightarrow(-+++) \quad (171)$$

It is decided that this spherically symmetric stationary solution describes a physical object and that the "standard Schwarzschild metric" is:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{\alpha}{r}} + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad (173)$$

It is decided that if we obtain a representation of the geometric object using real coordinates (u,v,θ,φ) this corresponds to a real physical object, known as a black hole. This representation is obtained from the coordinates.

(t,r,θ,φ). But they are the coordinates (t,R,θ,φ) where the intermediate Schwarzschild's quantity R is assimilated to a radial r coordinate.

It is set out to eliminate the singularity at $r=\alpha$ and to obtain a representation using two variables, u and u such that light rays correspond to:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \pm 1 \quad (177)$$

We consider a cross-section at constant θ and φ. Then, two different changes of variable

Construction using a single change of variables:

We stick to the coordinates chosen by Schwarzschild:

$$(t,x,y,z)\in\mathbb{R}^4 \quad (165)$$

With its polar variable:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq 0 \quad (166)$$

He gets:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}-\alpha}{\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}}c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{r^4\mathrm{d}r^2}{\left(r^3+\alpha^3\right)\left[\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}-\alpha\right]} \quad (167)$$

It is noted that this representation is free of singularities and that this portion of spacetime is non-contractible: within a foliation at constant r, the area of this sphere has a minimum value of $4\pi\alpha^7$

Schwarzschild opts for a simpler presentation by introducing an intermediate variable R

$$R=\left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3} \Rightarrow R\geq\alpha \quad (168)$$

The line element becomes:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{\alpha}{R}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}R^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad (170)$$

In the real field, coordinate singularity for g_{RR} in $R=\alpha$

The signature is $(+---)$

Quel que soit l'usage qui soit fait de cette métrique on ne lui attribue un lien avec la physique que si l'élément ds (le temps propre) est réel.

Schwarzschild n'attribue de sens physique à cette métrique que si celle-ci se trouve raccordée à une métrique intérieure, de mêmes symétries.

We keep the signature:

$$(+---) \quad (172)$$

We're staying in shape:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{\alpha}{R}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}R^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad (174)$$

We use Eddington's time change of variable [14] to eliminate the coordinate singularity in $r=\alpha$

$$t=t_E+\varepsilon\frac{\alpha}{c}\ln\left(\frac{R}{\alpha}-1\right) \quad \varepsilon=\pm 1 \quad (175)$$

are implemented:

For $r>\alpha$

$$r^* = r + \alpha \ln\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right) \tag{178}$$

For $r<\alpha$

$$r^* = r + \alpha \ln\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) \tag{179}$$

Exponential coordinates U and V are then introduced:

$$U = \varepsilon_1 \exp\left(\frac{r^* - t}{2\alpha}\right) \tag{180}$$

$$V = \varepsilon_2 \exp\left(\frac{r^* + t}{2\alpha}\right) \tag{181}$$

A description is then obtained using a single metric:

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^3}{r}\mathrm{e}^{-2\alpha}\left(\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2\right) - r^2\mathrm{d}\Omega^2} \tag{184}$$

We then introduce four possible choices regarding the pairs ($\varepsilon_1 = \pm 1$; $\varepsilon_2 = \pm 1$) that arbitrarily define four sectors.

	ε_1	ε_2
Sector I	−1	+1
Sector II	+1	+1
Sector III	+1	−1
Sector IV	−1	−1

Sectors I and III are then treated as two external regions, situated in two different spacetimes.

Sector II is likened to the interior of a black hole, organized around a central singularity.

Sector IV is identified with the interior of a white fountain, also organized around a central singularity.

From a physical standpoint, one is led to consider that, within these objects, the roles of the time and space coordinates are interchanged.

With $R>\alpha$ still holding in the real domain. The choice $\varepsilon = \pm 1$ introduces two possible solutions (two sheets).

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)c^2\mathrm{d}t_E^2 + \varepsilon c\alpha\frac{\mathrm{d}t_E\mathrm{d}R}{R} \\ &-\left(1 + \frac{\alpha}{R}\right)\mathrm{d}R^2 - R^2\mathrm{d}\Omega^2\end{aligned} \tag{176}$$

We merge these two sheets into a single one by choosing $\varepsilon = -1$ and introducing the change of variable:

$$R = \alpha\left(1 + \ln \mathrm{ch}\,\rho\right) \tag{182}$$

We get:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\frac{\ln \mathrm{ch}\,\rho}{1 + \ln \mathrm{ch}\,\rho}c^2\mathrm{d}t_E^2 - \frac{c\,\mathrm{th}\,\rho\mathrm{d}t_E\mathrm{d}\rho}{1 + \ln \mathrm{ch}\,\rho} \\ &-\alpha^2\left[\frac{1 + \ln \mathrm{ch}\,\rho}{\ln \mathrm{ch}\,\rho}\mathrm{th}^2\rho\mathrm{d}\rho^2 + \left(1 + \ln \mathrm{ch}\,\rho\right)^2\mathrm{d}\Omega^2\right]\end{aligned} \tag{183}$$

This representation depicts a single *non-contractile* sheet with two leaves, $\rho>0$ and $\rho<0$, connected at a throat sphere $\rho = 0$ with an area of $4\pi\alpha^2$

This object is a bridge between two sheets of Lorentzian spacetime. This metric coincides with the Lorentz metric at infinity on both sheets.

$$\rho \simeq \frac{R}{\alpha} \tag{185}$$

$$g_{t_E t_E} \to c^2 \tag{186}$$

$$g_{\rho t_E} \to 0 \tag{187}$$

$$g_{\rho\rho} \to -\alpha^2 \left(g_{RR} \to -1\right) \tag{188}$$

$$g_{\theta\theta} \to -\alpha^2\rho^2 = -R^2 \tag{189}$$

$$g_{\varphi\varphi} \to -\alpha^2\rho^2\sin^2\theta = -R^2\sin^2\theta \tag{190}$$

All of this (upon grouping terms) is achieved using a single change of variables applied to the initial Schwarzschild variables:

$$r = \alpha\left[1 - \left(1 + \ln \mathrm{ch}\,\rho\right)^3\right]^{1/3} \tag{191}$$

$$t = t_E - \frac{\alpha}{c}\ln\left(\ln\rho\right) \tag{192}$$

This representation and its topology are consistent with the analysis of sections at constant t and θ (Flamm's paraboloid).

10. A Look Back at the Use of a Stationary Solution to Describe a Highly Unsteady Phenomenon

This question was raised by P. Koiran in 2021 [25]. The use of the Schwarzschild exterior metric solution—a specific form of the solution to Einstein's vacuum field equations—was proposed in 1939 by Oppenheimer and Snyder [20]. In this context, the variable t appearing in the line element is intended to correspond to the proper time of a distant observer. Consequently, for such an observer, the time taken for a test mass to fall freely or to escape appears infinite. Based on this, the authors suggest that the solution describes the implosion of a mass—such as a massive star—as a process akin to "freezing the film"; this extremely brief event (lasting a few days) would appear to a distant observer as a virtually static image. However, is this feature an intrinsic property of the solution? The answer is no. Introducing a cross-term involving $drdt$ alters the scenario, as demonstrated in [25].

- If the sign of $drdt$ term is negative, the free-fall time becomes finite and is measured in days, whereas the escape time remains infinite.
- If the sign of $drdt$ term is positive, opposite conclusion

As mentioned in the article, the presence of this term is by no means ruled out by Birkhoff's theorem. The theorem merely requires the form in question to be isometric to the diagonal form, which is indeed the case.

If the validity of this solution is called into question, what alternative scenario might describe the outcome of a massive star's implosion? One proposed model is that of "plugstars" [26]. It predicts that all future images of supermassive objects at galactic centers will exhibit the same 3:1 ratio between maximum and minimum dimensions—a prediction that already appears consistent with data from the first two such objects, M87* and SgrA*. This model relies on the assumption of constant, or quasi-constant, mass density. Regarding subcritical neutron stars—which could also be described by this model, with a mass limit of around 2.5 solar masses (compared to 3 for a black hole)—this description is not unreasonable; beyond a certain threshold of matter compression, treating the matter as a gas is no longer appropriate. Furthermore, nucleons become so closely packed that quantum effects—which are not accounted for in the gas model—must come into play.

In a future article, we will introduce a time-dependent perturbation term into both the interior and exterior metrics—including cross-terms in both—along with a topological discontinuity at the center. If it can then be shown that the core conversion of the excess positive mass into negative mass, and its subsequent expulsion from the celestial body, tend to cancel out the perturbation term, then self-stability will be demonstrated.

11. Conclusions

The aim of this article was to re-examine the geometric significance of the maximal extension of the Schwarzschild solution, starting from a fundamental require-

ment: the geometric nature of an object should not depend on the coordinate system chosen to represent it.

A preliminary study of simple two-dimensional examples has shown that the equations defining autoparallel curves can possess solutions extending beyond the domain where the corresponding metric admits a real Euclidean embedding. In the case of the sphere, the torus, and Flamm's surface, these additional branches can be described using semi-complex extensions of their embedding spaces. Although some coordinates become purely imaginary, their projections onto the real-coordinate subspaces remain real. We have termed these projections "ghost images."

Flamm's surface provides a particularly significant example in this regard. Its real domain $r > \alpha$ and its semi-complex extension ($0 < r < \alpha$) join continuously at the throat $r = \alpha$. These two domains thus appear as two parts of a single, extended geometric construction.

We then revisited the Kruskal construction, detailing separately—line by line—the standard calculation in regions I and II. In its usual physical formulation, the tortoise coordinate is written as follows:

$$r^* = r + \alpha \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

This compact notation actually encompasses two distinct real expressions on either side of $r = \alpha$. Added to this are different sign choices in the definition of the exponential coordinates U and V, which allow for the construction of the four sectors of the Kruskal diagram and lead to the swapping of hyperbolic functions between the exterior and interior regions.

We therefore pursued a different approach. Instead of requiring the coordinates to remain real on both sides of $r = \alpha$, we retained a single coordinate transformation—derived in the exterior region—and analytically continued it into the domain $0 < r < \alpha$. In this continuation, the coordinates u and v naturally become purely imaginary. The standard real Kruskal representation can then be recovered via a complex translation of the time variable, an operation that results in the swapping of the hyperbolic sine and cosine functions.

From this perspective, regions II and IV can be interpreted as belonging to a semi-complex extension of spacetime geometry, represented in the standard Kruskal construction by coordinates endowed with a pseudo-real character. The three-dimensional representation:

$$r = H(u, v)$$

...foliated by the curves r = const., makes this structure geometrically visible and shows the continuous connection of the four sectors along $r = \alpha$.

Two descriptions of the continuation of the Schwarzschild geometry thus emerge. The conventional description maintains real coordinates throughout the Kruskal manifold and leads, in the domain $0 < r < \alpha$, to an inversion of the causal nature of the directions associated with the Schwarzschild coordinates: r

becomes timelike while t becomes spacelike. By contrast, the description proposed here employs a single analytic change of variables and leads to the interpretation of the interior sectors as belonging to a semi-complex extension.

The question therefore goes beyond the mere elimination of a coordinate singularity at $r = \alpha$. It concerns the geometric nature and, ultimately, the physical status attributed to the domain obtained by extending the solution.

A second difficulty then arises. The Schwarzschild solution is stationary, whereas the gravitational collapse supposed to lead to the formation of a black hole is, by nature, a time-dependent phenomenon. Moreover, Eddington-Finkelstein-type representations and the calculations of free-fall time discussed in this article demonstrate that the divergence of Schwarzschild time at the horizon is not an invariant property of the geometry. The interpretation of an essentially dynamic process based on a stationary solution therefore warrants re-examination.

This situation leaves open the possibility of other descriptions of the final state of gravitational collapse. The previously proposed "plugstar" model constitutes one such alternative. In particular, it leads to observational predictions that could, in principle, allow for a distinction between the two scenarios. A dynamic extension of this model, incorporating time-dependent perturbation terms as well as cross-terms in the interior and exterior metrics, will be the subject of future work.

When it comes to choosing between these two interpretations, the principle of Occam's razor would suggest opting for the simpler one. Furthermore, can Nature accept a physics in which space and time coordinates swap roles? If the black hole model were ever to be abandoned, could the "plugstar" model take its place? If the ratio between the maximum and minimum wavelengths turned out to be significantly close to 3, the question would have to be raised.

Only Nature holds the answer to these questions.

Acknowledgements

We thank J-C Pechinot for his assistance in producing the images.

Conflicts of Interest

The author declares no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

[1] Flamm, L. (1916) Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zestschrift*, **XVII**, 448-454.

[2] Minkowski, H. (1909) Das Relativitätsprinzip. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 104-111.

[3] Minkowski, H. (1909) Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 75-88.

[4] Einstein, A. (1916) Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, **354**, 769-822. https://doi.org/10.1002/andp.19163540702

[5] Schwarzschild, K. (1916) Über das Gravitationsfeld Messenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 189-196.

[6] Schwarzschild, K. (1916) Über das Gravitionalsfeld einer Kugel Aus incompressibler

Flü-ssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

[7] Droste, J. (1917) The Field of a Single Centre in Einstein's Theory of Gravitation and the Motion of a Particle in That Field. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, **19**, 197-215.

[8] Weyl, H. (2012) Republication of: 3. On the Theory of Gravitation. *General Relativity and Gravitation*, **44**, 779-810. https://doi.org/10.1007/s10714-011-1310-7

[9] Petit, J., d'Agostini, G. and Pechinot, J. (2026) The True Schwarzschild Solution and Its Subsequent Geometry. *Journal of Modern Physics*, **17**, 997-1027. https://doi.org/10.4236/jmp.2026.178045

[10] Schwarzschild, K. (1915) Letter to A. Einstein. Collected Papers of Albert Einstein, The Berlin Years, Correspondence 1914-1918, Document n°169.

[11] Hilbert, D. (1915) The Foundations of Physics (First Communication). In: Janssen, M., Norton, J.D., Renn, J., Sauer, T., Stachel, J., Eds., *The Genesis of General Relativity. Boston Studies in the Philosophy of Science*, Vol. 250. Springer, Dordrecht. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-4000-9_44

[12] Hilbert, D. (1916) The Foundations of Physics (Second Communication). In: Janssen, M., Norton, J.D., Renn, J., Sauer, T. and Stachel, J., Eds., *The Genesis of General Relativity*, Springer, 1939-1961. https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4020-4000-9_45

[13] Abrams, L.S. (1989) Black Holes: The Legacy of Hilbert's Error. arXiv: gr-qc/0102055.

[14] Eddington, A. (1919) The mathematical Theory of Relativity. Cambridge University Press.

[15] Tolman, R.C. (1934) Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Clarendon Press.

[16] Einstein, A. (1939) On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of Many Gravitating Masses. *The Annals of Mathematics*, **40**, 922-936. https://doi.org/10.2307/1968902

[17] Einstein, A. and Rosen, N. (1935) The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Physical Review*, **48**, 73-77. https://doi.org/10.1103/physrev.48.73

[18] Eddington, A. (1960) The Mathematical Theory of Relativity. 2nd Edition, Cambridge University Press.

[19] Birkhoff, G.D. (1923) Relativity and Modern Physics. Harvard University Press.

[20] Oppenheimer, J.R. and Snyder, H. (1939) On Continued Gravitational Contraction. *Physical Review*, **56**, 455-459. https://doi.org/10.1103/physrev.56.455

[21] Finkelstein, D. (1958) Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle. *Physical Review*, **110**, 965-967. https://doi.org/10.1103/physrev.110.965

[22] Buchdahl, H.A. (1959) General Relativistic Fluid Spheres. *Physical Review*, **116**, 1027-1034. https://doi.org/10.1103/physrev.116.1027

[23] Kruskal, M.D. (1960) Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Physical Review*, **119**, 1743-1745. https://doi.org/10.1103/physrev.119.1743

[24] Wald, R.M. (1984) General Relativity. University of Chicago Press.

[25] Koiran, P. (2021) Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application to Einstein-Rosen Bridges. *International Journal of Modern Physics D*, **30**, Article ID: 2150106. https://doi.org/10.1142/s0218271821501066

[26] Petit, J. and D'Agostini, G. (2025) Alternatives to Black Holes: Gravastars and Plugstars. *Journal of Modern Physics*, **16**, 1479-1490. https://doi.org/10.4236/jmp.2025.1610072

Scientific Research Publishing

Journal of Modern Physics, 2026, 17(10), 1461-1487
https://www.scirp.org/journal/jmp
ISSN Online: 2153-120X
ISSN Print: 2153-1196

Alternative to Inflation. Variable Speed of Light Cosmological Model with Lorentz and Fine Structure Constant Invariance Maintained

Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini

Manaty Research Group, Glanon, France
Email: jppetit1937@yahoo.fr

How to cite this paper: Petit, J.-P. and D'Agostini, G. (2026) Alternative to Inflation. Variable Speed of Light Cosmological Model with Lorentz and Fine Structure Constant Invariance Maintained. *Journal of Modern Physics*, **17**, 1461-1487.
https://doi.org/10.4236/jmp.2026.1710061

Received: June 7, 2026
Accepted: October 25, 2026
Published: October 28, 2026

Copyright © 2026 by author(s) and Scientific Research Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

Abstract

Within the framework of the Janus cosmological model, we investigate an alternative to the inflationary scenario based on the existence of an early phase preceding decoupling and the radiation-dominated era. During this phase, the six fundamental physical constants—along with the space and time gauge factors associated with the model's two sheets—evolve in a correlated manner through a generalized gauge process. This evolution is constrained by the invariance of the fundamental equations of physics, the Einstein constant appearing in the coupled field equations, and the fine-structure constant, while Lorentz invariance is preserved in both sheets. We show that this generalized gauge process is consistent with the conservation of various forms of energy and implies that characteristic physical lengths evolve in proportion to the corresponding spatial scale factors—notably the cosmological horizons. Since radiation itself acts as a source of the gravitational field, Jeans instability can occur during the radiation-dominated era. Due to the intrinsic asymmetry between the two sheets of the Janus model, their cosmological horizons evolve on vastly different scales. Consequently, fluctuations developing in the negative-mass sector can affect the positive-mass sector during its subsequent matter-dominated era. This mechanism provides a possible alternative origin for the primordial fluctuations observed in the cosmic microwave background (CMB), without invoking an inflationary phase. A quantitative test of this scenario requires determining the spectrum of non-linear fluctuations generated in the negative-mass sector, establishing their transfer to the positive-mass sector, and then comparing the resulting spectrum with CMB observations. This asymmetry also leads to a higher speed of light in the negative-mass sector. Should a material object transition to this sector by inverting the sign of its mass, this property would open up the possibility of significantly reducing interstellar travel times as measured in the positive sector. In this context, we outline a geometric mechanism for transition between the two sheets, based on a localized concentration of energy around the object in question.

Keywords

Lorentz Invariance, Variable Speed of Light, Variable Constants Regime, Radiative Era, Compton Length, Inflation, Generalized Gauge Phenomenon

1. Introduction

It is no exaggeration to say today that cosmology and astrophysics are facing an unprecedented crisis. For decades, efforts were made to salvage the Standard Model by augmenting it with two new components: dark matter and dark energy. By reintroducing the cosmological constant Λ into the general relativity equation, equating it to a constant negative energy density, the model was able to account for a constant acceleration of expansion, implying exponential growth over time. However, in 2025, initial results reported by the DESI collaboration [1] suggest that this acceleration was greater in the past—a topic that remains a subject of debate within the scientific community. This represents a phenomenon that the Standard Model cannot explain. In contrast, the Janus Cosmological Model (JCM), based on a system of coupled field equations, has predicted this cosmic dynamic since 2014 [2], relying on a twin-universe model characterized by a strong asymmetry between its two components.

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\chi\left(T_{\mu\nu}+\sqrt{\frac{\overline{g}}{g}}K_{\mu\nu}\right) \tag{1}$$

$$\overline{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\overline{R}\overline{g}_{\mu\nu}=-\chi\left(\overline{T}_{\mu\nu}+\sqrt{\frac{g}{\overline{g}}}\overline{K}_{\mu\nu}\right) \tag{2}$$

Presented below is the expansion law, the exact solution to the system of JCM field equations [2].

$$a(u)=\alpha^2\cosh^2 u \tag{3}$$

$$t(u)=\alpha^2\left(1+\frac{\mathrm{sh}2u}{2}+u\right) \tag{4}$$

On **Figure 1** the corresponding curve:

It should be noted that this solution, in which the negative energy density decreases over time, yields an expansion that gradually approaches a linear time dependence, whereas in the ΛCDM model—where dark energy density is invariant—the expansion is exponential. **Figure 2** shows the evolution of the acceleration:

It is well known that, in the late 1980s, the discovery of the extreme homogeneity of the early universe—specifically the CMB—immediately posed a major problem. **Figure 3** illustrates the situation in which the distance traveled by the electromagnetic wave—propagating at a constant speed creaches neighboring particles only after a certain time t_h.

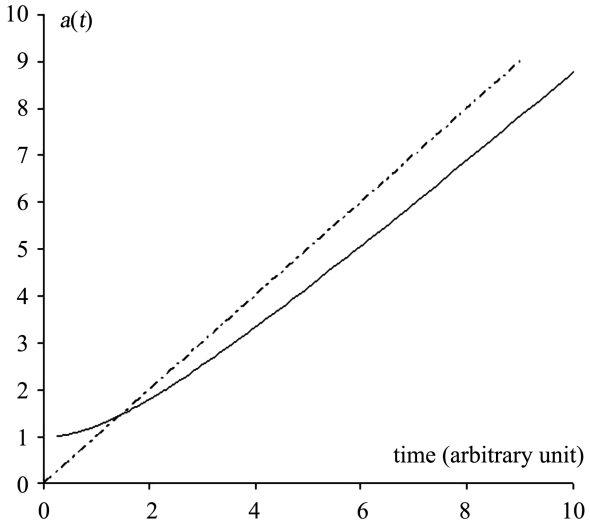


Figure 1. Janus expansion law, in the form of an exact solution [2].

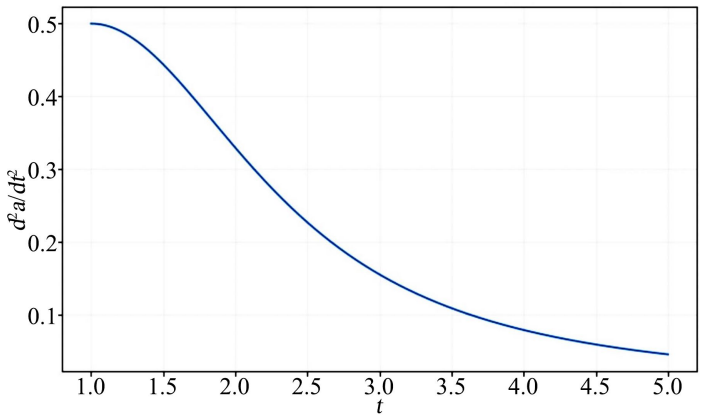


Figure 2. Evolution of acceleration [2].

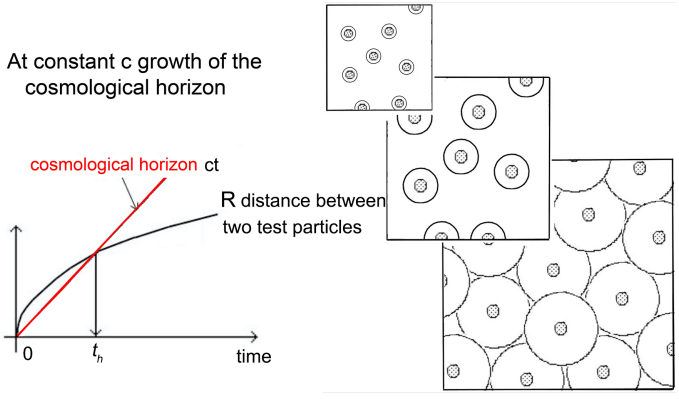


Figure 3. The problem of the homogeneity of the early universe.

For more than three decades, the inflation model has served as the scientific community's answer to this problem, forming part of the standard cosmological scenario. Between 10^{-36} and 10^{-32} seconds, the universe, thought to be populated by inflatons, is believed to have undergone an expansion by a factor of 10^{26}. At the

end of this phase, these inflatons would have given rise to the menagerie of particles we know today. Unfortunately, there is no complete description of this entire scenario.

An alternative solution would be to consider that the speed of light had a higher value in the past, in order to account for such homogeneity. However, such variability in this fundamental physical parameter immediately breaks the invariance of the fine-structure constant, which is then no longer guaranteed.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \tag{5}$$

The entire field of atomic physics then immediately suffers an impact that is difficult to manage.

There is another objection, of a purely geometric nature. Special relativity imposes local invariance under the Lorentz group. This is a subgroup of the Poincaré group, the isometry group of Minkowski space. Relativistic length is given by the Lorentz metric:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{6}$$

Its invariance is thus immediately broken if one allows c to vary. To draw a comparison: imagine that one of the dimensions of 3D Euclidean space were affected by a gauge variation. It would then no longer be possible to perform a rotation within it. The rotation group would "cease to function". A variation in c has a similar impact in 4D, with the Lorentz group "ceasing to function". In such an affected spacetime, it becomes impossible to perform those 4D rotations that constitute the very source of special relativity.

As early as 1988 [3] [4], the idea was proposed of varying a certain set of constants, but all of them simultaneously. There are six physical constants:

- Speed of light: c
- Planck's constant: h
- The constant of Gravitation: G
- Unit electrical charge: e
- Magnetic permeability of free space: μ_0
- The unit masses m

The dielectric constant of the vacuum ε_0 can be derived from the relation:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{7}$$

Consequently, if simultaneous variations of μ_0 are introduced, the quantity ε_0 must then be treated as an absolute constant (an arbitrary choice, given that one could just as well take ε_0 as variable and μ_0 as constant).

But that is not enough. Lorentz invariance must still be maintained. This can only be achieved by introducing a gauge phenomenon that affects space and time variables alike. Let us now look for guiding ideas that would allow us to envisage the early universe undergoing a phase of evolution characterized by "variable constants and space-time gauge factors".

2. The Principles behind the Construction of Such a Model

A first idea, in the search for a generalized gauge phenomenon, is to construct it in such a way that all the equations of physics remain invariant—namely, the field equation and the equations of quantum mechanics, electromagnetism, and fluid mechanics.

This framework leads us to consider the state of the universe in the distant past. Directly usable information, carried by light, only becomes available after decoupling, at t = 380,000 years. For the period prior to this, we can only make inferences based on what we observe today. In 1920, the discovery of cosmic expansion by E. Hubble and the solutions provided by A. Friedmann compelled scientists to consider—by tracing time backward—that the universe had once been much hotter and denser. The model showed that photon wavelengths evolved in step with the cosmic scale factor, *a*. Observations had demonstrated that high-energy photons could give rise to matter-antimatter pairs. This scenario was vividly described by S. Weinberg in his famous book "The First Three Minutes" [5]; he depicts the universe as filled with "all sorts of radiation"—using the plural to indicate that massive components (both matter and antimatter) were moving with thermal agitation speeds approaching the speed of light.

It was here that the standard cosmological model found an observational anchor, aligning with the discovery of cosmic expansion. The universe—teeming with high-energy photons—was constantly giving rise to matter-antimatter pairs; these particles, bearing opposite electric charges and thus attracting one another, would quickly annihilate each other a short distance away, transforming back into radiation. Consequently, as the photons lost energy simply due to the expansion, they were no longer able to compensate for the losses caused by annihilation. This explains the existence of the 2.7 K background radiation, serendipitously detected by Penzias and Wilson in 1967. Detecting this "ash" from cosmic expansion reinforced the hypothesis of a primordial explosion, while also making it possible to trace events back to $t = 10^{-2}$ second.

It is worth noting in passing that this advance in knowledge—this ability to look further back into the past—brought with it a new and significant problem: why did one particle in a billion remain? Why was the annihilation of this primordial matter and antimatter not total? It is a question that, to this day, still awaits a satisfactory answer. Setting this new problem aside, a question then arises:

- *And before* $t = 10^{-2}$ *second*?

On what factual evidence can a description of cosmic history in an earlier era be based? Scientists envisioned that experiments conducted in their particle accelerators would enable them to propose answers to this question. These experimental devices were intended to recreate the state of the universe as it existed in earlier epochs. The first success was, of course, the ability to create antimatter in the laboratory. However, the progressive increase in energy levels now faces a new problem: the particles that this escalation was expected to produce, superparticles, categorically refuse to appear. The impasse is so glaring that those proposing to

invest vast sums in expanding the LHC find themselves unable to answer the question:

- *And what do you hope to find with this device*?

In any case, what is missing from these experiments is the density parameter, which these setups cannot reproduce. After initially inducing proton collisions, the approach is now being extended to collisions involving heavy ions, specifically lead or gold. However, we are still far from the mark. A rarefied or moderately dense medium does not, a priori, behave like a hyperdense one. We have no reliable model to offer for this state, found at the core of hyperdense neutron stars and described as a "soup of quarks and gluons".

The calculation then shows that the average distance separating the hadrons approaches their Compton wavelength:

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \tag{8}$$

The standard explanation for how density can increase is that hadrons can fragment into smaller components—specifically, the appearance of free quarks. Indeed, this general concept applies as one delves deeper into a neutron star. After the constituent atoms have disintegrated into a plasma of protons and electrons, and the distance between these components falls below the electron Compton wavelength, the electrons vanish by combining with protons to form neutrons. At even greater depths, it is the mesons that, in turn, disappear.

Is there, then, a mechanism that could serve as an alternative to this hierarchical fragmentation? To illustrate this idea, we employ a 2D toy model. The masses represent local concentrations of curvature. Let us imagine a closed universe containing eight masses. The resulting shape of such a universe is a truncated cube. The total curvature of this cube is 4π. The eight truncated vertices of the cube are spherical octants, each concentrating a curvature of π/2. These elements are joined by curvature-free surfaces consisting of quarter-cylinders and flat sections; the latter represent the "void" separating the eight masses. The expansion of this universe—which possesses the topology of an S^2 sphere—results from the stretching of the flat sections. This reflects the standard model, in which photons bear the cost of expansion, with their wavelengths tracking the pace of cosmic stretching. Figure 4 shows the toy model used to illustrate the idea.

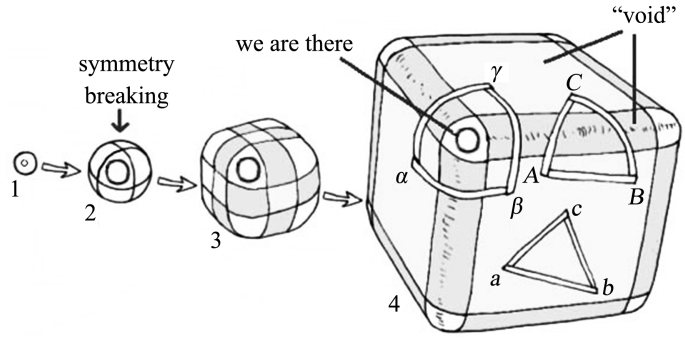


Figure 4. A toy model to schematize evolution.

From this perspective, masses can be likened to "frozen space". Figure 5 shows the didactic image illustrating the idea that masses are equivalent to regions of space that are unaffected by the phenomenon of expansion.

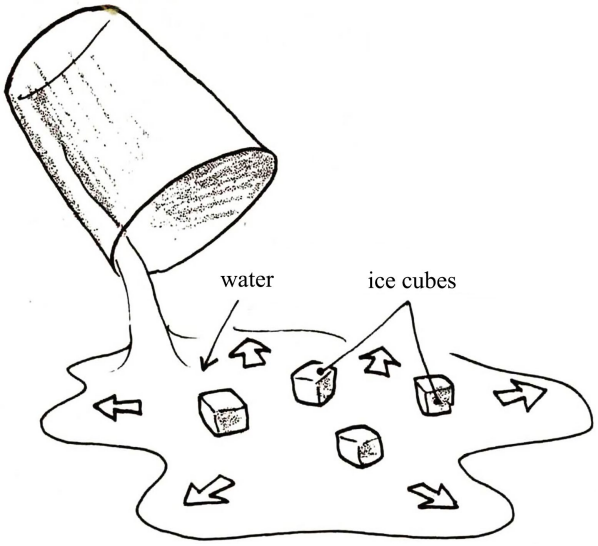


Figure 5. Didactic model in which the masses are represented by ice cubes.

Tracing the history of this universe back, we observe in Figure 4 that the eight sphere-octants come into contact with one another. This corresponds to the moment when the masses make contact, when the distance separating them becomes comparable to their Compton wavelength. Instead of seeing these "masses" fragment into smaller components, we can envision a transition to a regime with variable constants, where the Compton wavelength varies in proportion to the spatial scale factor a:

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \sim a \tag{9}$$

We thus have here an initial idea suggesting a possible link between various constants, specifically Planck's constant, mass, and the speed of light, through what we will term a "gauge link". Let us now see what can be derived from this invariance of the equations of physics.

3. Invariance of the Field Equation

Let us begin by considering Einstein's field equation in the absence of a cosmological constant:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \tag{10}$$

The Einstein constant will be given the form:

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2} \tag{11}$$

This search for a generalized gauge relationship is analogous to the dimensional

analysis used by physicists, in which elements such as mass, electric charge, and energy are replaced by dimensionless quantities. Here, we apply the same approach to the variables of time and space.

For space, we set: $r = \hat{a}a_0\zeta$, a_0 is the standard scale factor. Let t_{cr}. be the moment when evolution driven by gauge fluctuations takes over. At this moment, all quantities have the following values:

$$\left(c_0, h_0, G_0, m_0, e_0, \mu_{0-act}, r_0, t_0, v_0\right) \tag{12}$$

We thus have a snapshot of the state of the universe, with the values of the various constants.

We can extend this concept back in time by envisioning a different evolutionary mechanism—a generalized gauge process in which all these quantities vary in tandem. While this is a rather unusual scenario to picture, we must first bear in mind that when this mechanism takes over, we are in the era prior to decoupling. Consequently, the universe has effectively returned to a state of homogeneity and isotropy. Let us illustrate this scenario with a simple analogy. Imagine a viewer watching a film—played in reverse—that depicts the history of a universe bounded by a circular edge. On the screen, they first see galaxies disintegrating and stars vanishing. At the moment of decoupling, the interior of the disk appears homogeneous. However, the story then unfolds differently before their eyes as the bounding circle begins to shrink. Inside the circle, one can discern a regular distribution of points representing particles; these appear and disappear at an accelerating rate, acquiring increasingly high random agitation velocities. Simultaneously, the hue within the circle shifts in color and grows brighter.

In short, we are witnessing a scene where "something is happening", yet where the universe nonetheless retains a high degree of homogeneity.

All these quantities will then be modulated and weighted by functions:

$$\left(\hat{c}, \hat{h}, \hat{G}, \hat{m}, \hat{e}, \hat{\mu}_0, \hat{a}, \hat{t}, \hat{v}\right) \tag{13}$$

These functions all equal 1 at the time t_{cr} of the evolutionary transition. Looking further back into the past, some will be increasing while others are decreasing. What we seek is for their variations to leave all the equations of physics invariant. We can express this by writing that, in this "variable-constant" phase:

$$c = \hat{c}c_0 \tag{14}$$

$$h = \hat{h}h_0 \tag{15}$$

$$G = \hat{G}G_0 \tag{16}$$

$$m = \hat{m}m_0 \tag{17}$$

$$e = \hat{e}e_0 \tag{18}$$

$$\mu_0 = \hat{\mu}_0\mu_{0-act} \tag{19}$$

$$a = \hat{a}a_0 \tag{20}$$

$$t = \hat{t}t_0 \tag{21}$$

$$v = \hat{v}v_0 \tag{22}$$

Let us apply this to the field equation (without a cosmological constant):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \tag{23}$$

The Ricci tensor $R_{\mu\nu}$ will evolve according to:

$$R_{(0)\mu\nu} \to \hat{R}_{\mu\nu}R_{(0)\mu\nu} \tag{24}$$

However, we know that the components of the Ricci tensor have the dimension of the inverse of a length. Its gauge variation will therefore result from the variation of the spatial scale factor *a*, and we can write:

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{\hat{a}^2} \tag{25}$$

A physicist will have their own way of expressing this in writing, more directly:

$$R_{\mu\nu} \sim \frac{1}{a^2} \tag{26}$$

The line element is:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} \tag{27}$$

In both members, we find the square of a length. This means that the quantities, which are simple numbers, are not altered by the gauge variation, a fact we can write as follows:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = 1 \tag{28}$$

The Ricci scalar *R* also has the dimension of the inverse of the square of a length.

We shall assume that Einstein's constant χ, taken not in its "modern" form but in its "historical" form, behaves as an absolute constant.

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2} = Cst \tag{29}$$

This corresponds, within the gauge variations under consideration, to:

$$\hat{G} = \hat{c}^2 \tag{30}$$

Or:

$$\boxed{G \sim c^2} \tag{31}$$

We will refer to this type of relationship as a "gauge link". In these joint gauge variations:

The gravitational constant varies as the square of the speed of light.

With this choice of formulation for the Einstein constant χ, the terms of the source tensor have the dimension of a mass density ρ, which undergoes gauge variation through the gauge variations of the mass $\hat{m}$ and the spatial scale factor $\hat{a}$. This results in:

$$\rho = \hat{\rho}\rho_0 = \frac{\hat{m}}{\hat{a}^3}\rho_0 \tag{32}$$

When we incorporate all this into the field equation, we obtain:

$$\frac{1}{\hat{a}^2} R_{(0)-\mu\nu} = \chi \frac{\hat{m}}{\hat{a}^3} T_{(0)-\mu\nu} \tag{33}$$

This immediately gives us two new gauge links, $\hat{m} = \hat{a}$; however:

$$\boxed{m \sim a} \tag{34}$$

With its corollary: Mass varies as the space gauge factor *a*

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\hat{a}^2} \tag{35}$$

The mass density varies inversely with the square of the space factor.

By introducing our hypothesis that treats Einstein's constant as an absolute constant, we are led to:

$$\frac{1}{\hat{a}^2} = \frac{\hat{G}}{\hat{c}^2} \frac{\hat{m}}{\hat{a}^3} \tag{36}$$

The various gauge variations lead to a variation in the characteristic length associated with gravitation, the Schwarzschild length R_s:

$$R_s = \frac{2Gm}{c^2} = \frac{\hat{G}\hat{m}}{\hat{c}^2} \frac{2G_0 m_0}{c_0^2} = \hat{a} R_{s0} \tag{37}$$

$$R_s \sim a \tag{38}$$

In other words, in this evolution via joint gauge variations:

The Schwarzschild radius R_s varies as the space gauge factor *a.*

To proceed, we will add the two operators ∇ and Δ by setting:

$$\nabla = \frac{1}{\hat{a}} \delta \tag{39}$$

$$\Delta = \frac{1}{\hat{a}^2} \delta^2 \tag{40}$$

4. Invariance of Maxwell's Equations

They are:

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{41}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{42}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{43}$$

Let us set:

$$B = \hat{B} B_0 \tag{44}$$

$$E = \hat{E} E_0 \tag{45}$$

The functions $\hat{B}$ and E represent the impact of the generalized gauge process on the values of the magnetic field B and the electric field E (which arise from variations in more fundamental quantities, such as electric charge *e*, charge density, and velocity, all of which are affected by this gauge process).

Maxwell's first equation becomes:

$$\frac{\hat{B}}{\hat{a}}\left(\delta\times E_0\right)=\frac{\hat{E}}{\hat{c}^2\hat{t}}\left(\frac{\partial E_0}{\partial t_0}\right) \tag{46}$$

Invariant, if:

$$\frac{\hat{B}}{\hat{E}}\sim\frac{a}{\hat{c}^2\hat{t}} \tag{47}$$

The second equation is written as:

$$\frac{\hat{E}}{a}\left(\delta\times E_0\right)=-\frac{\hat{B}}{\hat{t}}\left(\frac{\partial B_0}{\partial \tau}\right) \tag{48}$$

Invariant if:

$$\frac{\hat{B}}{\hat{E}}\sim\frac{\hat{t}}{a} \tag{49}$$

From this, we deduce the gauge relationship between $\hat{a}$, $\hat{c}$, and t:

$$\boxed{\hat{a}=\hat{c}\hat{t}} \tag{50}$$

5. Lorentz Invariance

The line element is:

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2 \tag{51}$$

The five terms of this expression undergo the same gauge variation of the quantities $\left(s,c,t,x,y,z\right)$, resulting in variations $\left(\hat{a},\hat{c},\hat{t}\right)$ of the gauge coefficients affecting each of them. These five terms have the dimension of the square of a length. It follows that:

We get:

$$\hat{a}^2\left(\mathrm{d}s_0^2\right)=\hat{c}^2\hat{t}^2\left(\mathrm{d}t_0^2\right)-\hat{a}^2\left(\mathrm{d}x_0^2+\mathrm{d}y_0^2+\mathrm{d}z_0^2\right) \tag{52}$$

Invariance is ensured if $\hat{a}=\hat{c}\hat{t}$. Yet this is precisely what we have just obtained.

Satisfying Maxwell's equations through the joint gauge fluctuations $\left(\hat{a},\hat{c},\hat{t}\right)$ of the quantities $\left(a,c,t\right)$ has geometric implications. The metric is preserved (Lorentz invariance). This means that the resulting isometry group—the Lorentz group—can still act: it remains possible to perform four-dimensional rotations, which is not the case if, as in other proposed approaches [6]-[9], the variation is restricted to *c*.

This action on the metric is equivalent to considering a "conformal" 4D evolution, as suggested by the 2D image in the diagram of **Figure 4**.

6. Invariance of the Schrödinger Equation

This equation is written as:

$$\frac{h^2}{2m}\Delta\psi+U\psi=-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{53}$$

The wave function (everything in this set of physics equations is subject to the effect of this process of generalized gauge variation). We can express this by writ-

ing, a priori:

$$\psi = \hat{\psi}\psi_0 \tag{54}$$

On pose:

$$U = \frac{h^2}{2ma^2}u \tag{55}$$

Since the equation is linear in ψ, the gauge condition on the wave function drops out, and we obtain:

$$\frac{\hat{h}}{2\hat{m}}\left(\frac{1}{\hat{a}^2}\right)\left(\delta^2\psi_0 + u\psi_0\right) = -\frac{\hat{h}}{2\pi}\left(\frac{1}{\hat{t}}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial t_0} \tag{56}$$

But: $a = \hat{c}\hat{t}$. We get:

$$\left(\frac{\hat{h}}{\hat{t}}\right)\left(\frac{1}{\hat{m}\hat{c}^2}\right)\left[\left(\frac{\theta}{2\eta}\right)\left(\delta^2\mathcal{H} + u\mathcal{H}\right)\right] = -\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tau}\right) \tag{57}$$

But $\frac{\hat{h}}{\hat{t}} = \hat{h}\hat{\nu}$ is a form of energy, just as $\hat{m}\hat{c}^2$.

Thus, the conclusion of this passage, reflecting the invariance of the Schrödinger equation under our generalized gauge phenomenon, is that two forms of energy vary conjointly.

$$\hat{h}\hat{\nu} \sim \hat{m}\hat{c}^2 \tag{58}$$

7. Invariance of the Boltzmann Equation

This equation is:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\frac{\partial f}{\partial r} + F\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial_e f}{\partial t} \tag{59}$$

By examining the first two terms and knowing that the velocities undergo the same gauge variation as the speed of light, so as to preserve the quantity $\sqrt{1-v^2/c^2}$, we have:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{\hat{t}} \tag{60}$$

$$v\cdot\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{\hat{c}}{\hat{a}} \tag{61}$$

For the first two terms to vary jointly, we recover the relationship $\hat{a} = \hat{c}\hat{t}$.

F is a force acting on a unit mass, which can represent the gravitational force or the electromagnetic force. Let us choose the gravitational force. Gauge invariance is expressed as:

$$\frac{1}{\hat{t}} \sim \frac{\hat{c}}{\hat{a}} \sim \frac{\hat{G}\hat{m}}{\hat{c}} \tag{62}$$

We find that the characteristic gravitational length, the Schwarzschild radius \$ R_s, varies in the same way as the spatial scale factor *a.*

8. The Hypothesis of the Invariance of Einstein's Constant (in Its Traditional Form) and Its Consequences

We hypothesize that this constant χ, in its traditional form, is a gauge invariant:

$$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2} \quad \text{absolute invariant} \tag{63}$$

$$\hat{G} \sim \hat{c}^2 \tag{64}$$

By combining this with what was obtained earlier, we derive the gauge transformation law for the elementary mass (and thus for "masses" in general).

$$\boxed{\hat{m} \sim a} \tag{65}$$

And the gauge variation of the gravitational constant:

$$\boxed{\hat{G} \sim \frac{1}{a}} \tag{66}$$

Assuming the number of species remains constant, the evolution of the density n corresponds to:

$$\hat{n} \sim \frac{1}{a^3} \tag{67}$$

This immediately gives us the variation of the mass density $\hat{\rho} = \hat{n}\hat{m}$ in this gauge process:

$$\hat{\rho} \sim \frac{1}{a^2} \tag{68}$$

The speed of light, higher in the past, then follows the gauge law:

$$\boxed{\hat{c} \sim \frac{1}{\sqrt{a}}} \tag{69}$$

This leads to the constancy of energies:

$$\hat{h}\hat{\nu} \sim \hat{m}\hat{c}^2 \sim Cst \tag{70}$$

For the reason cited above—Lorentz contraction—velocities follow the same variation as c:

$$\hat{v} \sim \hat{c} \tag{71}$$

We therefore have conservation of thermal agitation energy:

$$\frac{1}{2}\hat{m}\left\langle \hat{v}^2 \right\rangle = Cst \tag{72}$$

The same applies to all forms of energy: magnetic, gravitational, etc. All characteristic lengths, such as mean free paths, scale with the gauge factor a, and all characteristic times, such as mean free-path times, scale with $\hat{t}$. This then yields—and this will be of major importance later on—the scaling of the Jeans length:

$$L_J \sim \frac{\langle \hat{v} \rangle}{\sqrt{\hat{G}\hat{\rho}}} \sim a \tag{73}$$

The Jeans time t_J varies as $\hat{t}$:

$$t_J \sim \frac{1}{\sqrt{\hat{G}\hat{\rho}}} \sim \hat{t} \tag{74}$$

The invariance of the energy $\hat{m}\hat{c}^2$ immediately gives us the gauge link between $\hat{a}$ and $\hat{t}$.

$$\hat{m}\hat{c}^2 = \hat{m}\frac{\hat{a}^2}{\hat{t}^2} = \frac{a\hat{a}^3}{\hat{t}^2} = Cst \tag{75}$$

We recover Kepler's law, and we will have parabolic evolution:

$$\boxed{a \sim t^{2/3}} \tag{76}$$

Conservation of energy $\hat{h}\hat{\nu}$ immediately yields the gauge-variation law for Planck's "constant":

$$\boxed{h \sim t} \tag{77}$$

Adding $\hat{t} = \hat{a}/\hat{c}$, we get:

$$\boxed{h \sim a^{3/2}} \tag{78}$$

La constante de Planck varie comme la puissance 3/2 du space gauge a

This gives us the gauge law for the Compton wavelength:

$$\hat{\lambda}_C = \frac{\hat{h}}{\hat{m}\hat{c}} \sim a \tag{79}$$

This aligns with the 2D schematic diagram presented at the beginning of the article. It also follows immediately that the Planck length varies as a:

$$L_P = \sqrt{\frac{\hat{h}\hat{G}}{\hat{c}^3}} \sim a \tag{80}$$

And that the Planck time varies as:

$$t_P = \sqrt{\frac{\hat{h}\hat{G}}{\hat{c}^5}} \sim \hat{t} \tag{81}$$

Similarly, the Jeans time varies as $\hat{t}$, and this phenomenon holds generally for all characteristic lengths and timescales. Furthermore, since we have:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{82}$$

And since we have chosen, a priori, to treat ε_0 as an absolute constant (unaffected by the generalized gauge process), it follows that:

$$\hat{\mu}_0 \sim \frac{1}{\hat{c}^2} \tag{83}$$

This gives us the law governing the variation of the magnetic permeability of vacuum:

$$\boxed{\hat{\mu}_0 \sim a} \tag{84}$$

All that remains to complete the picture is the law governing the variation of the electric charge.

9. Gauge Invariance of the Fine-Structure Constant

The inability to ensure its constancy has been the weak link in all theories positing variations in the constants. Its invariance provides the missing element: the impact on electric charge.

$$\alpha = \frac{e^2}{hc} \tag{85}$$

Which gives:

$$\boxed{e \sim \sqrt{a}} \tag{86}$$

And this will give us a Bohr radius varying as a:

$$R_{\text{Bohr}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{m_e e^2} \sim a \tag{87}$$

10. Generalized Conservation of All Forms of Energy

At one time, it was proposed to attribute the redshift to a secular variation of Planck's constant [10]. Based on what was established earlier, the energy $h\nu$ of photons propagating through a sufficiently rarefied space is conserved.

$$\boxed{h\nu = Cst} \tag{88}$$

Now, a redshift measurement is simply a measurement of the energy loss of photons. Note that we place the phenomenon termed a "generalized gauge process" prior to decoupling.

Matter-energy is also conserved.

$$\boxed{mc^2 = Cst} \tag{89}$$

The electric field created by an electric charge e is:

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sim a^{-3/2} \tag{90}$$

The corresponding volumetric energy density is:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{91}$$

Therefore, electrostatic energy is conserved:

$$\boxed{u_E a^3 = Cst} \tag{92}$$

The magnetic field created by a current I at a distance r is:

$$B = \frac{\mu_{0I}}{r} \tag{93}$$

We have:

$$I \sim \frac{e}{t} \sim a^{-1} \tag{94}$$

Whence:

$$B \sim a^{-1} \tag{95}$$

The magnetic energy density is:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \sim a^{-3} \tag{96}$$

Thus, energy in magnetic form is conserved in the generalized gauge process:

$$\boxed{u_B a^3 = Cst} \tag{97}$$

The gravitational energy density is:

$$u_G = \frac{1}{a^3}\frac{Gm^2}{a} \tag{98}$$

Here again:

$$\boxed{u_G a^3 = Cst} \tag{99}$$

11. What Would Drive the Evolution in a Universe in Such a Situation?

We essentially have eight quantities involved in a gauge process:

$$(c, h, G, m, e, \mu_o, a, t) \tag{100}$$

Any one of them can be chosen as the governing variable. The one whose physical significance appears most relevant to us is the space scale factor, *a*. This yields the following evolution scheme:

$$\hat{c} \sim \frac{1}{\sqrt{a}}; \hat{h} \sim a^{3/2}; \hat{G} \sim \frac{1}{a}; \hat{m} \sim a; \hat{e} \sim \sqrt{a}; \hat{\mu}_0 \sim a; \hat{t} \sim a^{3/2} \tag{101}$$

Since this evolution occurs at constant energy and the measurement of redshift relates essentially to measuring the energy loss of photons, this process necessarily takes place at an epoch prior to decoupling, and even prior to a radiation-dominated phase, when physical constants behave as invariant quantities. The schematic evolution of the so-called "constants of physics" is therefore be presented as shown on Figure 6.

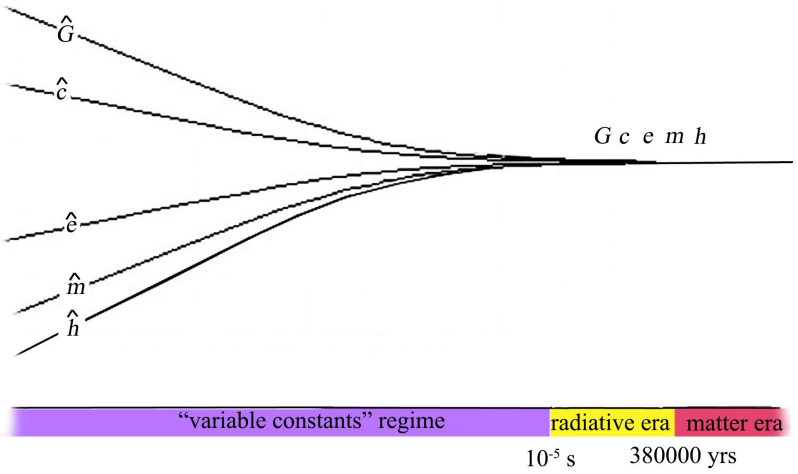


Figure 6. Schematic evolution of the "constants".

Looking back in time—after the transition from the matter-dominated era to the radiation-dominated era—we hypothesize that this "variable-constant" era emerges when the distance between baryons (and antibaryons) becomes comparable to their Compton wavelength, a point in time we place at around 10^{-5} second.

In the context of the Janus cosmological model [11], the evolutionary scheme during the matter-dominated era has already been described in reference [2]. This will be complemented by a description of the evolution during the radiation-dominated era in a subsequent paper. This presents no inherent difficulty; regarding positive mass, the evolution remains one of positive acceleration, dominated by the negative contribution of the negative mass.

As a first step toward integrating this "variable-constant" evolutionary scheme into the Janus cosmological model, and assuming that the negative world, composed of negative-mass antimatter, is subject to the same physical laws, we consider the following quantities:

$$\left(\overline{c},\overline{h},\overline{G},\overline{m},\overline{e},\overline{\mu}_o,\overline{a},\overline{t}\right) \tag{102}$$

Assuming that it obeys the same physical laws, we will have similar laws for the second species:

$$\hat{\overline{c}}\sim\frac{1}{\sqrt{a}};\hat{\overline{h}}\sim a^{3/2};\hat{\overline{G}}\sim\frac{1}{a};\hat{\overline{m}}\sim a;\hat{\overline{e}}\sim\sqrt{a};\hat{\overline{\mu}}_0\sim a;\hat{\overline{t}}\sim a^{3/2} \tag{103}$$

12. An Alternative to Inflation

How, then, does the cosmological horizon evolve? This is where the benefit of this approach lies—the link to observation. The horizon is the distance traveled by light:

$$H=\int^t c\mathrm{d}t \tag{104}$$

But in this different evolution, dominated by this gauge process:

$$\hat{c}\sim\frac{1}{\sqrt{a}}\sim\hat{t}^{-1/3} \tag{105}$$

So, without this variable speed-of-light regime:

$$H=\int^{\hat{t}}\hat{c}\mathrm{d}\hat{t}\sim\int^{\hat{t}}\hat{t}^{-1/3}\mathrm{d}\hat{t}\sim\hat{t}^{2/3}\sim a \tag{106}$$

$$\boxed{\text{Cosmological horizon } H\sim a} \tag{107}$$

We are presented here with an evolutionary scheme in which the homogeneity of the universe is maintained throughout this evolutionary phase characterized by variable constants; this constitutes an alternative to the inflation model, based on the single hypothesis of a generalized gauge process centered on the requirement of invariance for all equations of physics. On **Figure 7** we refer to this expansion, where the horizon grows like the space scale factor.

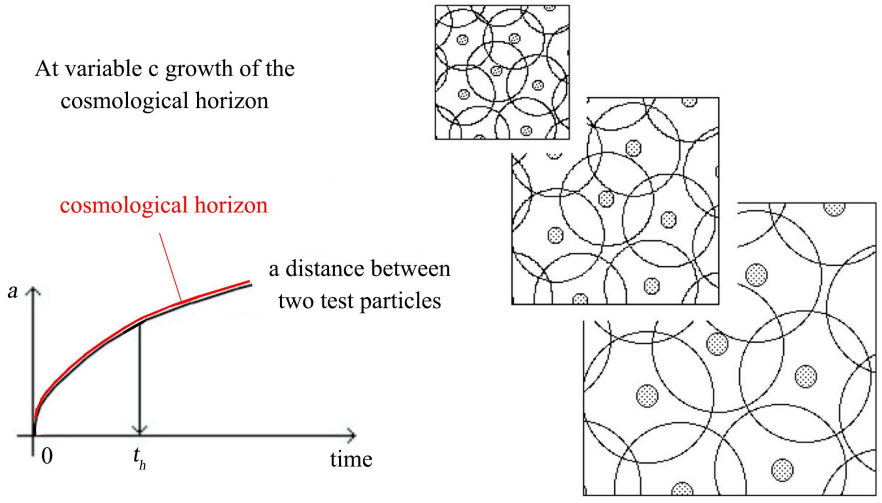


Figure 7. Homogeneity ensured by a variation in the speed of light.

13. The Question of Measuring Time

Cosmological models describe the evolution of the universe in terms of a quantity corresponding to the letter *t*, intended to represent time. However, this relies on a specific choice of coordinate system. Only a quantity that can be measured, even if only conceptually, using a clock belonging to the realm of physics qualifies as time. In the matter-dominated era, one can envision a conceptual clock consisting of two masses moving along the same circular orbit, centered on their common center of gravity. Measuring time then reduces to measuring the number of revolutions or an angle. Since the geodesics lie within planes in this scenario, this concept appears to be coordinate-independent. Similarly, the day corresponds to the Earth's rotation on its axis, the solar year to the Earth's revolution around the Sun, and what might be termed the galactic year to the solar system's revolution around its galaxy, the Milky Way.

If we follow this conceptual, non-relativistic clock back into the past—assuming it has avoided any collisions or exchanges with dangerous neighbors whose speeds (of thermal agitation) increase and approach the speed of light as we go further back—this clock corresponds to the classical conception of time.

But if the past encompasses an era of evolution with variable constants, then the components of our clock—its masses—are altered, as are the forces binding them. The geometric framework along which these masses trace their path varies as well. What, then, of the number of revolutions it completes? Figure 8 shows our elementary clock, consisting of masses orbiting their common center of gravity.

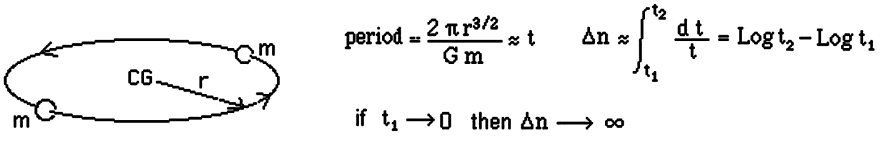


Figure 8. Our conceptual clock.

If we apply the effects of our generalized gauge phenomenon to the calculation of the period, that period varies as $a^{3/2}$. It therefore decreases, and as we look back into the past, our conceptual clock ticks faster and faster. As we approach a hypothetical time zero, the number of cycles completed tends toward infinity.

This yields the temporal equivalent of the myth of Achilles and the tortoise. Let us liken the history of the universe to a book. The character in my comic strips then leafs through the book backwards, attempting to discover, in the preface, the intentions its author might have recorded there. Figure 9 shows a man attempting in vain to reach the first page of a book whose pages—becoming increasingly thin—are infinite in number.



Figure 9. On the impossibility of accessing the "initial moment".

But he never reaches that preface, because the pages of the book tend to become increasingly thin and are therefore infinite in number.

This simply suggests that, when attempting to trace the universe's history back in time, quantum physics eventually comes into play and exerts its effects. Clarity will only be achieved when tools derived from general relativity and those from quantum mechanics can finally be combined through the quantization of the gravitational field—a task that, after decades, remains merely a project. This is an advance that, we believe, will entail constructing the geometric context of quantum mechanics—an extension that will, we believe, involve a systematic complexification of that geometric context.

14. Integration of This Variable-Constant Phase Model into the Janus Cosmological Model

In a future article, we will demonstrate how—starting from an initial state of perfect symmetry where the constants and the spatial and temporal scale factors of the universe's two components are identical—an instability inherent to this variable-constant regime causes the two systems to diverge violently (exponentially). Consequently, they come to possess distinct constants and space-time scales:

$(\hat{a},\hat{t})$ et $(\hat{\bar{a}},\hat{\bar{t}})$. This drift in constants ceases once the bayons and antibayons move apart by a distance exceeding their Compton wavelength (a point that would require further clarification, given that this Compton wavelength would itself increase in step with the scale factor). However, the tools currently employed—lacking a genuine geometric fusion that incorporates quantum mechanics—do not allow us to shed light on this specific issue ("For the possible, we act immediately; for the impossible, we ask for time").

Schematically, as shown in Figure 10, below:

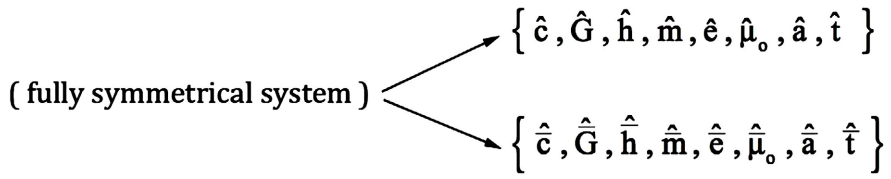


Figure 10. Diagram of the appearance of asymmetry in the phase with variable constants.

We might now have a way to specify the parameters linked to the second system. We already know one thing [2] regarding the scale factors (which, moreover, evolve differently, with acceleration in the positive sector and deceleration in the negative world):

$$a > \bar{a} \tag{108}$$

But in what proportion?

Gravitational instability can occur during the radiation-dominated era, as radiation acts as the source of the gravitational field. One can then adopt the Jeans approach and seek to determine the minimum wavelength for radiation density fluctuations such that the accretion time for additional radiation is shorter than the dissipation time for the radiation already accreted. This yields a value corresponding to the cosmological horizon.

Thus, these fluctuations would be present, yet we would have no way of detecting their existence.

And this brings us back to what emerges from this era of variable constants: the order of magnitude of the cosmological horizon is comparable to the scale factor in each of the two populations. However, we have $a > \bar{a}$, so:

$$\bar{H} < H \tag{109}$$

The two entities interact gravitationally—or, to be more precise, anti-gravitationally—at every stage of cosmic history. Consequently, fluctuations occurring in the negative realm must leave their imprint on the positive realm across all epochs: during the matter-dominated era, immediately following decoupling, the organization of negative mass into a regular distribution of vast, massive spheroidal conglomerates imparts a void-like structure to the positive mass, resembling "contiguous bubbles". Figure 11 illustrates how very rapid energy loss via radiative dissipation—facilitated by a large-scale structure of flat sheets—enables galaxies and stars to form very quickly.

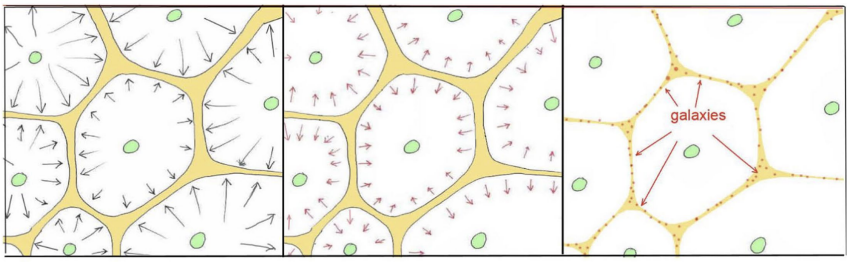


Figure 11. Formation of the large-scale structure. (a): The negative mass (green) forms a regular distribution of spheroidal clusters, imparting a void-like, contiguous-bubble structure to the positive mass (yellow). (b): The positive mass, having been strongly heated, undergoes rapid cooling via radiative losses. (c): Galaxies form [11].

However, this interaction persists in the epochs prior to decoupling. We therefore propose a different interpretation of the CMB fluctuations. **Figure 12** is an image intended to show how the slight fluctuations of the CMB represent the weak response of the positive world to fluctuations of the field arising in the negative world—fluctuations whose characteristic wavelength corresponds to the horizon within that universe sheet.

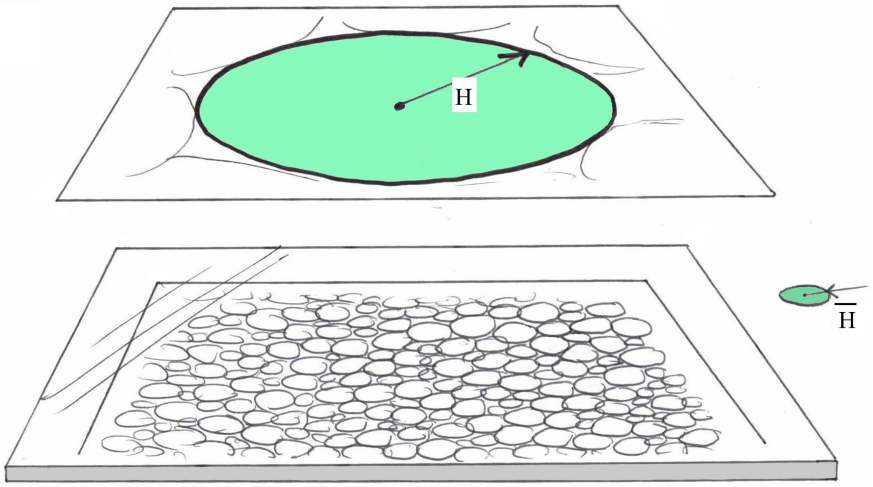


Figure 12. Our interpretation of the CMB inhomogeneity. H and $\bar{H}$ are the cosmological horizons of the two universes.

The non-linear radiation density fluctuations arising in the negative world leave a faint imprint on the positive world. In our view, this explains the CMB fluctuations. In very schematic terms, this yields the order of magnitude of the ratio between the two horizons (and thus the two scale factors), which differ by two orders of magnitude.

$$\frac{\bar{a}}{a} \sim \frac{1}{100} \tag{110}$$

Work is currently underway, focusing on the study of these fluctuations in the radiation density field within the "negative world" via gravitational instability

(specifically Jeans instability), that will enable a comparison of the two models.

That being said, in our model this discrepancy arose during the dual regime of variable constants, in which we have:

$$c \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \overline{c} \sim \frac{1}{\sqrt{\overline{a}}} \tag{111}$$

Whence:

$$\frac{\overline{c}}{c} \sim 10 \tag{112}$$

The scientific community's view that interstellar travel—on a human scale and at necessarily non-relativistic speeds—is forever impossible stems from the sheer duration involved. However, based on this new perspective, if a vehicle could invert its mass, it might undertake the journey via a sort of parallel universe, operating in a negative-mass regime, thereby reducing travel times by a factor of 1,000.

$$\text{travel time} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} \tag{113}$$

This would then place neighboring star systems—at a distance of around ten light-years, within reach, accessible via voyages undertaken at one-tenth the speed of light within this other sheet, with a duration on the order of an Earth month.

Regarding the phenomenon of mass inversion, we find a natural version of it in the phenomenon of plugstars [12].

For a long time, authors have envisioned the possibility of passing from one sheet to another via wormholes. However, for this to be feasible, such structures would need to exist naturally in the cosmos, involving sufficient mass to ensure that tidal forces do not tear apart the vessels venturing into them. Yet, a different scenario can be envisaged.

15. Mass Transfer via Surgery

If inverting a mass M required an energy expenditure on the order of Mc^2, the process would clearly have to be relegated to the realm of science fiction, given our current capabilities. However, let us examine the formula below.

In differential topology, surgery is an operation that consists of excising certain regions of a manifold and reattaching the resulting boundaries according to a specific identification. This operation alters the manifold's topology. In differential geometry, the resulting manifold must then be endowed with a metric compatible with the imposed physical conditions. When applied to two initially disjoint sheets, such an operation conceptually allows for the excision of a region from each sheet and the local reattachment of their boundaries.

Let us illustrate, as shown on **Figure 13**, the principle of such topological surgery using a series of drawings. Imagine two adjacent, flat sheets, F_1 and F_2. One is white, the other blue. A closed curve has been drawn on F_1, defining a region, a simple disk, that we wish to transfer to sheet F_2.

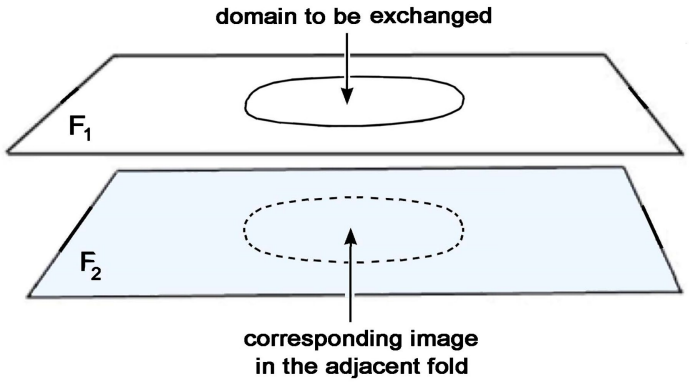


Figure 13. Two adjacent sheets of 2D Euclidean space.

To carry out this operation, we will create a curvature in the vicinity of this boundary. To visualize this, we will cut these two planes. See Figure 14. The curvature introduced into sheet F_1 produces an "induced curvature" in the adjacent sheet F_2, which would correspond to two geometries with coupled metrics, as in the Janus cosmological model [12].

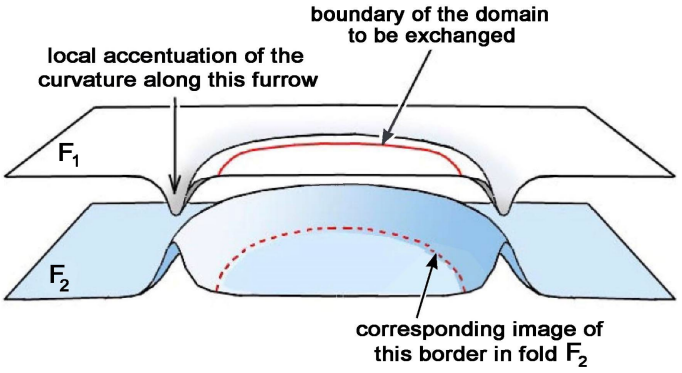


Figure 14. Creation of a curvature in the vicinity of a curve delimiting a domain and its image in the adjacent sheet.

The two sheets are depicted as immersed in $\mathbb{R}^3$. A critical state is reached when the curvature becomes infinite along the boundary of the domain where two tangent planes exist. One can visualize the two sheets coming into contact along the closed curve, with the induced curvature causing the tangent planes to align along that curve. This situation lends itself to what is known in topology as "surgery". The white portion of sheet F_1, lying outside the boundary curve, then connects to the interior of the blue disk located on sheet F_2. A symmetrical phenomenon occurs where the blue part of sheet F_2. (outside the image of the circular curve) suddenly extends into the white disk of sheet F_1. See Figure 15.

The curvatures disappear, resulting in a final configuration with two adjacent planar regions where the interiors of the boundary curve of domain F_1 and its image in the adjacent portion of F_2 have been swapped. In Figure 16, the exchange between the two adjacent regions is complete. A blue disk has been grafted into sheet H1, while a white disk has taken its place in sheet F2.

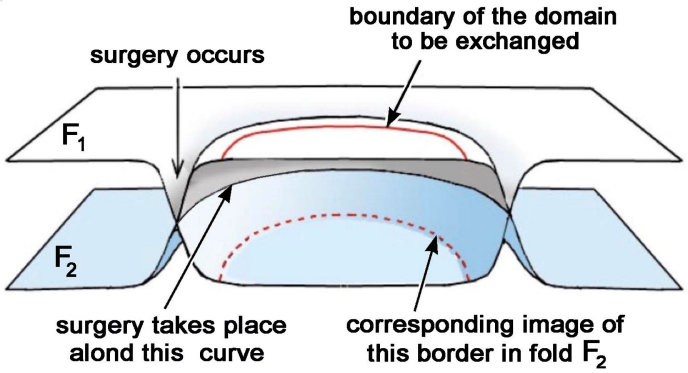


Figure 15. 2D surgery.

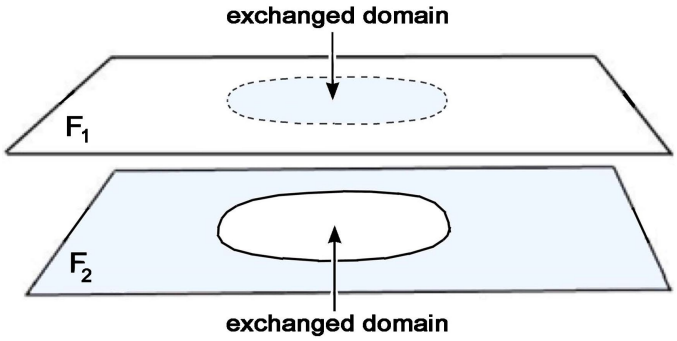


Figure 16. The two domains have been exchanged.

One can then envision such a situation in 3D, where balls B_3, located within two 3D sheets bounded by S2 spheres, are exchanged.

The surgical approach envisaged here therefore suggests a possibility of a different nature: the geometric transformation would not necessarily involve the entire volume occupied by the mass, but could be triggered by a very high concentration of energy within an extremely thin layer surrounding it.

One can envision, as a prospective example, a material whose nuclei are brought into metastable excited states. Certain nuclear isomers do indeed store excitation energies on the order of MeV per nucleus for exceptionally long periods. Their controlled, large-scale production could—in a still-speculative future—rely on coherent gamma-ray photon sources tuned to appropriate nuclear transitions. Such sources do not currently exist with the required characteristics. The fundamental question then becomes quantitative: what volumetric energy density—or, in the limit of a very thin layer, what surface energy density—would need to be achieved to trigger the envisioned topological change?

At this stage, general relativity and quantum mechanics, when used separately, likely cannot provide a meaningful answer. Classical general relativity describes the gravitational effect of an energy-momentum distribution but offers no microscopic mechanism for such controlled topological surgery. Conversely, quantum mechanics describes nuclear states and their transitions without providing a quantized dynamics of geometry itself. The answer to this question will only

emerge once general relativity, and more specifically the Janus Cosmological Model, has been merged with quantum mechanics within a single, complex geometric framework.

If such a transfer were to become physically feasible and controllable, the technological consequences would be immense. In particular, one could envisage transferring materials that currently pose major storage challenges—foremost among them, high-level radioactive waste. An unexpected consequence of such a process would immediately become apparent. Once the mass had been transferred to the conjugate sector, the container that previously held it would find itself in the physical state corresponding to the adjacent region of spacetime: a near-perfect vacuum. By then allowing the external atmosphere to rush into this chamber through a turbine, a portion of the energy associated with this expansion could be converted into electrical energy. This would not, of course, constitute the creation of energy. In the Janus model, transfers between sectors operate within a dynamic framework where the energy balance must be viewed globally. Consequently, conservation cannot be assessed based solely on the energy content of one of the two sectors. Initial applications of the Janus model equations [2] immediately reveal a law of energy conservation that extends across both sheets. This constraint would govern the mass transfer resulting from the exchange of contents between adjacent domains.

16. Conclusions

Within the framework of the Janus cosmological model, we propose, as an alternative to the inflationary scenario, the existence of a phase preceding decoupling and the radiation-dominated era, during which the six fundamental physical constants, as well as the space and time gauge factors of the two sheets, are involved in a generalized gauge process. This process arises simultaneously from the invariance of the fundamental equations of physics, the invariance of the Einstein constant appearing on the right-hand side of the model's coupled field equations, and the invariance of the fine-structure constant. Lorentz invariance is thus preserved within each of the two sheets.

This correlated evolution is accompanied by the conservation of all forms of energy. All characteristic lengths evolve in proportion to the space scale factors of the two sheets, notably their respective cosmological horizons.

Since radiation itself acts as a source of the gravitational field, Jeans instability can also occur during the radiation-dominated era. When the characteristic wavelength is on the order of the cosmological horizon, the corresponding fluctuations cannot be observed within a single causal domain. However, the fundamental asymmetry of the Janus model alters this situation: because the cosmological horizon of the negative-mass sector is much smaller than that of the positive-mass sector, fluctuations developing in the former can produce effects in the latter as it enters its matter-dominated era. This mechanism thus offers a possible origin, alternative to inflation, for the fluctuations recorded in the CMB.

Since radiation itself acts as a source of the gravitational field, Jeans instability can also occur during the radiation-dominated era. When the characteristic wavelength is on the order of the cosmological horizon, the corresponding fluctuations cannot be observed within a single causal domain. However, the fundamental asymmetry of the Janus model alters this situation: because the cosmological horizon of the negative-mass sector is much smaller than that of the positive-mass sector, fluctuations developing in the former can produce effects in the latter as it enters its matter-dominated era. This mechanism thus offers a possible origin, alternative to inflation, for the fluctuations recorded in the CMB.

Naturally, this hypothesis must be tested against observation. In particular, it requires constructing the spectrum of non-linear fluctuations developing in the negative sector during its radiation-dominated era, then calculating their transfer to the positive sector and comparing the resulting spectrum with CMB data. The difference of approximately two orders of magnitude found between the scale factors constitutes, in this regard, a first quantitative characteristic of the proposed mechanism.

Within the framework of the model, the asymmetry arising from phases with variable constants also leads to a speed of light that is an order of magnitude higher in the negative sector. If a material object could transition to this sheet by reversing the sign of its mass, the latter would then act as a "parallel universe", allowing for a considerable reduction in apparent interstellar travel times.

Finally, we have outlined a geometric transition mechanism between adjacent domains, akin to a form of "surgery", that relies on energy concentration within a layer surrounding the object in question. Mechanisms for the storage and release of nuclear energy, particularly involving long-lived metastable states excited by gamma radiation, have been proposed as conceptual avenues. Within this hypothetical framework, such a transition would also necessitate considering the transfer of unwanted material, specifically radioactive waste.

However, these latter considerations must be clearly distinguished from the cosmological results developed in this article. At this stage, it is not possible to calculate the value of the critical energy required for such a transition. Such an assessment would require a theory in which quantum mechanics and gravitation are integrated into a single geometric framework. Constructing such a framework, as well as quantitatively calculating the spectrum of cosmological fluctuations predicted by the mechanism presented here, therefore represents a natural avenue for future work.

Author Contributions

The theoretical section is by Jean-Pierre Petit. Gilles d'Agostini checked the calculations and produced some of the illustrations.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

[1] Lodha, K., et al. (2025) Extended Dark Energy Analysis Using DESI DR2 BAO Measurements. arXiv: 2503.14743v1. https://arxiv.org/html/2503.14743v1

[2] Petit, J.P. and d'Agostini, G. (2014) Negative Mass Hypothesis in Cosmology and the Nature of Dark Energy. *Astrophysics and Space Science*, **354**, 611-615.

[3] Petit, J. (1988) An Interpretation of Cosmological Model with Variable Light Velocity. *Modern Physics Letters A*, **3**, 1527-1532. https://doi.org/10.1142/s0217732388001823

[4] Petit, J. (1995) Twin Universes Cosmology. *Astrophysics and Space Science*, **226**, 273-307. https://doi.org/10.1007/bf00627375

[5] Weinberg, S. (1993) The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe. Basic Books.

[6] Albrecht, A. and Magueijo, J. (1999) Time Varying Speed of Light as a Solution to Cosmological Puzzles. *Physical Review D*, **59**, Article ID: 043516. https://doi.org/10.1103/physrevd.59.043516

[7] Magueijo, J. (2003) New Varying Speed of Light Theories. *Reports on Progress in Physics*, **66**, 2025-2068. https://doi.org/10.1088/0034-4885/66/11/r04

[8] Moffat, J.W. (1993) Superluminary Universe: A Possible Solution to the Initial Value Problem in Cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, **2**, 351-365. https://doi.org/10.1142/s0218271893000246

[9] Moffat, J.W. (2016) Variable Speed of Light Cosmology, Primordial Fluctuations and Gravitational Waves. *The European Physical Journal C*, **76**, Article No. 130. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-3971-6

[10] Milne, E.A. (1948) Kinematic Relativity: A Sequel to Relativity, Gravitation and World-Structure. Oxford University Press.

[11] Petit, J., Margnat, F. and Zejli, H. (2024) A Bimetric Cosmological Model Based on Andreï Sakharov's Twin Universe Approach. *The European Physical Journal C*, **84**, Article No. 1226. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13569-w

[12] Petit, J. and D'Agostini, G. (2025) Alternatives to Black Holes: Gravastars and Plugstars. *Journal of Modern Physics*, **16**, 1479-1490. https://doi.org/10.4236/jmp.2025.1610072

Scientific Research Publishing

Journal of Modern Physics, 2026, 17(7), 905-927
https://www.scirp.org/journal/jmp
ISSN Online: 2153-120X
ISSN Print: 2153-1196

Is the Real World, as a Part of Complex Reality?

Jean-Pierre Petit, Gilles d'Agostini

Manaty Research Group, Glanon, France
Email: Jean-Pierre.petit@manaty.net

How to cite this paper: Petit, J.-P. and d'Agostini, G. (2026) Is the Real World, as a Part of Complex Reality? *Journal of Modern Physics*, **17**, 905-927.
https://doi.org/10.4236/jmp.2026.177040

Received: March 6, 2026
Accepted: July 21, 2026
Published: July 24, 2026

Copyright © 2026 by author(s) and Scientific Research Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

Abstract

By constructing the action of the Poincaré group on the dual of his Lie algebra, Souriau revealed, in 1970, the quantities of physics as objects of pure geometry. A first draft of a complex extension is presented.

Keywords

Hermite Space, Minkowski Space, Adjoint Action, Coadjoint Action, Lie Algebra, Dynamic Group, Complex Lorentz Group, Complex Poincaré Group

1. Introduction

The approach of mathematician Jean-Marie Souriau [1] provided his own path through the difficult process of systematically geometrizing physics, by applying the tools of symplectic geometry. At the end of his work, he established a link with quantum mechanics through its geometric quantization. We propose to attempt to follow this path through a complex extension. Before that, we present a description of his construction of the classical elements of physics in a form more accessible to the widest possible audience. At the end of this article, the reader will find a first draft of the complex extension, whose sole merit is to show that, as soon as one undertakes this type of approach, new elements naturally appear in the formalism. These should not be interpreted as established results, but rather as indications, signals suggesting that this path deserves to be explored further, which will be the subject of the following article.

This article is aimed at engineers, students, and teachers in scientific disciplines. Its ambition is simple and explicit: to show that by using familiar tools such as matrices and differential calculus, it is possible to reach very high levels of understanding of modern physics.

The reader does not need prior mastery of differential geometry or notoriously difficult abstract formalisms. The starting point is deliberately elementary: matri-

ces, linear transformations, invariants. Step by step, these tools lead to a deep geometric structure where the fundamental quantities of physics—energy, momentum, angular momentum, spin—naturally appear; that is to say, precisely the objects that experiment allows us to measure.

Some technical steps will require the reader to provisionally accept results without immediately having all the justifications. But the essential point lies elsewhere: at the end of the process, we discover that these physical quantities are not added from outside the model. They are already present, inscribed in the initial, very simple geometric structure.

In 1970, Jean-Marie Souriau built what can be considered a veritable cathedral of geometric physics. The aim of this work is not to present its complete architecture, but to offer a staircase of access. By following it, the reader can gradually ascend to a viewpoint where the overall structure becomes visible, and where one can perceive how geometry organizes and unifies seemingly disparate physical concepts.

This text is therefore intended as an invitation: to observe, through the experience of calculation, that simple tools, used rigorously, allow access to the upper platform, at the top of the cathedral, and to enjoy the view. The reader will be tempted to say to themselves, "*I didn't think it was possible to climb so high*, *to understand so much*, *with such simple tools*." The reward for this effort is a renewed vision of physics, where geometry reveals the hidden framework within which the laws of motion operate.

2. The Construction of Euclid's Group

3D Euclidean space is defined by its metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1}$$

We choose to introduce the column vector:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

And its transpose, the line vector:

$$X^t = (x, y, z) \tag{3}$$

This allows us to translate the expression of the metric (1) into the matrix form of a scalar product, using row-column multiplication:

$$\langle X, X \rangle = X^t X \tag{4}$$

We will now search for a group of matrices a that preserve this length. We have:

$$X' = aX \tag{5}$$

Which means:

$$\langle X', X' \rangle = \langle X, X \rangle \tag{6}$$

First, consider the translations:

$$X' = X + \Delta X = X + C \quad \text{with} \quad \Delta X = C = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \tag{7}$$

Consider two points A and B in space. Translations preserve the length of the segment $X = X_B - X_A$ simply because:

$$X' = X'_B - X'_A = X_B + \Delta X - X_A - \Delta X = X_B - X_A = X \tag{8}$$

Therefore, (6) is automatically satisfied. We will represent this "translation" action in the form of this matrix with format (4, 4):

$$X' = TX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta x \\ z + \Delta x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + C \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

We have just constructed, in matrix form, the group of 3D translations. Let us take another matrix a, and express that it preserves the length:

$$X^{t\prime} X' = X^t X \tag{10}$$

$$\left(aX\right)^t \left(aX\right) = X^t X \tag{11}$$

But:

$$\left(AB\right)^t = B^t A^t \tag{12}$$

Therefore, relation (11) is satisfied if the matrices a obey the relation:

$$a^t a = I \quad \text{(identity matrix)} \tag{13}$$

This implies that the inverses a^{-1} of matrices a have their transposes ${}^t a$. The determinant of these matrices is ±1. When it is +1, they are the matrices of 3D rotations. Since this set contains the identity matrix, it is a "special orthogonal" subgroup denoted by SO(3). When the set consists of elements whose matrices are −1, its elements associate a rotation with a P-symmetry, a "right-left" inversion. The union of the two forms the "three-dimensional orthogonal" group O(3). We will opt for another matrix representation of this group, using (4, 4) matrices:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

By combining these two elements, we obtain the three-dimensional Euclidean group:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

The Euclidean group is the isometry group of Euclidean space, as defined in (1).

3. Construction of the Poincaré Group

Let us consider the metric of space introduced in 1909 by Minkowski [2], whose points are located using the four coordinates $\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right)$, where $\left(x_1, x_2, x_3\right)$

are the space coordinates and x_0 the time coordinate, the chronological coordinate.

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \tag{16}$$

We will opt for the representation of quadratic forms introduced by the Dane Jørge Gram in 1883 [3]. We will use a Gram matrix for this:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

In this case, that of special relativity, presented by Einstein in 1915 [4], is:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Which is equivalent to a signature:

$$(+---) \tag{19}$$

The metric then takes the form:

$$ds^2 = dX^t G dX \tag{20}$$

We can immediately see that in Euclidean space, the Gram matrix is simply the identity matrix:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

We will similarly search for the matrices that will constitute the isometry group of the Minkowski space. We first find the subgroup of spacetime translations, which we will represent in the form of (5, 5) matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

We will proceed in the same way by searching for matrices L which, acting on the points X of 4D space, preserve length, that is to say, such that:

$$X''^t G X' = (LX)^t GLX = X^t L^t GLX = X^t GX \tag{23}$$

This will give us the axiomatic definition of the Lorentz group:

$$L^t GL = G \tag{24}$$

It is thus understood that the complete axiomatic definition of the orthogonal

group O(3) is in fact:

$$a^t I a = I \tag{25}$$

In 1905, Henri Poincaré identified a group structure in the transformation introduced by Lorentz in 1904 [5]. He included spacetime translations in the process [6], which gave the isometry group of Minkowski space, which would henceforth be called the Poincaré group.

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

We see that the Lorentz group represents 4D translations in a Minkowski space, which some interpreted as four-dimensional "Euclidean" rotations, where one of the dimensions, that of time, is then purely imaginary.

4. Minkowski Space Geodesics

Geodesics are the shortest paths, therefore falling under the variational approach:

$$\begin{aligned} &\delta\int\sqrt{\mathrm{d}x_0^2-\mathrm{d}x_1^2-\mathrm{d}x_2^2-\mathrm{d}x_3^2} \\ &=\delta\int\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}p}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}p}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}p}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}p}\right)^2}\,\mathrm{d}p=0 \end{aligned} \tag{27}$$

or:

$$\delta\int\sqrt{\dot{x}_0^2-\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2-\dot{x}_3^2}\,\mathrm{d}p=0 \tag{28}$$

We are therefore in a situation that leads to the Lagrange equations, with the Lagrangian:

$$L=\sqrt{\dot{x}_0^2-\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2-\dot{x}_3^2} \tag{29}$$

and Lagrange equations:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

But we saw [7] that if the derivatives were taken with respect to the length *s*, we also obtained the geodesics with the Lagrangian:

$$L'=L^2=\dot{x}_0^2-\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2-\dot{x}_3^2 \tag{30}$$

The Lagrange equations then give:

$$\ddot{x}_0=\ddot{x}_1=\ddot{x}_2=\ddot{x}_3=0 \tag{31}$$

Geodesics are lines in spacetime:

$$x_0=a_0s+b_0 \tag{32}$$

$$x_1=a_1s+b_1 \tag{33}$$

$$x_2=a_2s+b_{21} \tag{34}$$

$$x_3=a_3s+b_3 \tag{35}$$

However, in shifting from the L-Lagrangian function to the L^2-Lagrangian function, the Lagrange equations reveal real curves, see Equations (32) to (35), but no longer satisfying the condition of non-negativity of the quantity under the radical. These real lines are then equipped with an imaginary length. They can be called virtual geodesics. They do not belong to the solution hypersurface. Light follows geodesics of zero length. From (16), by setting the condition of non-negativity of the length s or the proper time, and setting $s = c\tau$ and $x_0 = ct$, we obtain:

$$c^2 \geq \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v^2 \tag{36}$$

The speed cannot exceed the value c.

5. Connected Components of the Isometry Group

We have seen that the orthogonal group has two components, called connected components. These are components that preserve the orientation of objects and components that include a P-symmetry, which reverses this orientation. We can perform the same analysis with the Lorentz group. In Minkowski space, we will therefore seek to identify components involving time inversion (T-symmetry) and space inversion (P-symmetry). The Lorentz group contains the identity element, which reverses neither time nor space:

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Among all the elements of this group of matrices, we will group together all those which, like the identity element, do not invert time or space. They will form the identity subgroup $\{L_n\}$. Among these elements, we will find an infinite number of elements that invert space, such as:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

We will group them into a set $\{L_s\}$. We will also have the elements that reverse time, but not space, such as:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

We will group them into a set $\{L_t\}$. Finally, there will be the elements that invert both space and time. Among these:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Elements that will constitute the set $\{L_{st}\}$. Thus, the complete group will be the union of its four connected components:

$$\{L\} = \{L_n\} \cup \{L_s\} \cup \{L_t\} \cup \{L_{st}\}. \tag{41}$$

The set:

$$\{L_o\} = \{L_n\} \cup \{L_s\} \tag{42}$$

Forms the orthochronous subgroup, or restricted Lorentz group. The set of time-reversing elements will form the orthochronous subset:

$$\{L_a\} = \{L_t\} \cup \{L_{st}\}. \tag{43}$$

From the orthochronous components, we can form the restricted Poincaré group:

$$\begin{pmatrix} L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Until 1970, until the mathematician Jean-Marie Souriau [1] explained the function of these antichronous components of the group, the use of the Poincaré group was exclusively limited to the restricted group, equipped with its orthochronous components. Before addressing the central theme of this article, we will use the axiomatic definition of the group to construct its inverse, which we will need later. To do this, we start from (23) and multiply by G^1 on both sides. We obtain.

$$G^{-1}L^tGL = I \tag{45}$$

Taking into account that $G^1 = G$, we get:

$$L^{-1} = GL^tG \tag{46}$$

We will now move on to the main body of the article:

6. The Two Ways a Group Acts: Adjoint Action

It is easier, mentally, to refer to the Euclid group, which encompasses the operations of translation, rotation, and symmetry. The initial idea is that a group "transports". We have a point X in space, and an element a of the group. In the case of the Euclid group, we consider a segment AB. By acting on this segment, we transport it to another point in space by performing a translation.

$$\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \tag{47}$$

And a rotation:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \quad \text{(three angles)} \tag{48}$$

At a point X, let a be the element of the group. This depends on the point, that is, the coordinates used to locate X, and on the six parameters defining the action

of this group, the quantities ΔX and Ω. Let's summarize this action from the perspective of "transport":

The group, acting on the segment AB, transports it to $X' = X + \Delta X$ by rotating it by angles $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_{21}\}$. This gives the parameters of the segment $A'B'$ (this operation preserving the length of this segment $\overline{AB}$, or "$\overrightarrow{AB}$").

But we can consider it differently and say that these components of $\overrightarrow{A'B'}$ reflect how this vector is perceived from this new point of view $X' = X + \Delta X$, and this is the very essence of special relativity. Let's limit the Poincaré group to the action of its subgroup, the Lorentz group L. By applying an element of this group to a "motion," represented by a segment connecting two points X and R in four-dimensional Minkowski spacetime, we "see it from another angle" (the action of the Lorentz group being equivalent to this 4D rotation). We "change our frame of reference," and we observe that something is conserved (the quantity $\Delta s = s_B - s_A$). In the particular case of photons, when they travel from a point A to a point B in Minkowski spacetime, the quantity Δs is zero. By observing this motion of the photon from another angle, the quantity is conserved; therefore, it remains zero. And, referring to (16), this means that the measurement of the speed of these photons will also remain at c, whatever the "point of view" (the action of the Lorentz group), meaning that at the same point we observe this motion using a measuring instrument moving at any speed (Michelson experiment).

Returning to Euclid's group, this means that if an observer observes a segment $\overrightarrow{AB}$ "by turning their head", or "by observing it from a different point", or "by observing it through its image in a mirror", or all three at once, the length of this segment will be the same.

We can consider this vector $\overrightarrow{AB}$ as an object in Euclidean space. Now imagine that our operator changes its point of view, its frame of reference, but now observes not a vector but a matrix A_{ij}. This matrix, by maintaining more than one object, is an operator acting on objects in Euclidean space, a linear operator.

The group is also a linear operator, limited to rotations and translations. A linear operator is much more general. Let's imagine we decide to observe this matrix A from another viewpoint $\{\Delta X, \Omega\}$. That is, "from afar," by "turning our heads," and then possibly "using a mirror". How will the components of this matrix appear to us if we preserve its functionality, its identity?

The "identity" of a linear (matrix) operator is its determinant, its trace, and its eigenvalues. If we can conceive of a group action that preserves these three elements, then we will have what we are looking for, in particular, how a linear operator presents itself, seen from another point of view. If we consider the action:

$$aAa^{-1} \tag{49}$$

The first requirement is satisfied, since we know that the determinant of a^{-1} is equal to the inverse of the determinant of a.

The second follows from a theorem on matrices, which tells us that the trace of a product of n matrices, $Tr(ABC)$, is equal to the trace of a product constructed using a circular permutation: $Tr(ABC) = Tr(CAB)$, therefore:

$$Tr\left(aAa^{-1}\right)=Tr\left(a^{-1}aA\right)=Tr\left(A\right) \tag{50}$$

We recall the definition of the concept "eigenvectors v-eigenvalues λ".

v is an eigenvector of the linear operator A if:

$$Av=\lambda v \tag{51}$$

or:

$$\left(\lambda I-A\right)=0 \tag{52}$$

This is a system of n linear equations. This system gives a non-trivial solution $v\neq 0$ if and only if:

$$\det\left(\lambda I-A\right)=0 \tag{53}$$

This gives us the polynomial equation that yields the eigenvalues. These will be preserved since the polynomial equations giving the eigenvalues are identical.

$$\det\left(\lambda I-A\right)=\det\left(\lambda I-A'\right)=\det\left(\lambda I-aAa^{-1}\right) \tag{54}$$

But we can write that:

$$\lambda I=\lambda aa^{-1}=a\lambda Ia^{-1} \tag{55}$$

Thus:

$$\det\left(\lambda I-aAa^{-1}\right)=\det\left[a\left(\lambda I-A\right)a^{-1}\right]=\det\left(\lambda I-A\right) \tag{56}$$

The action in question does indeed retain its inherent values. A group, therefore, gives us two possible actions, which we must interpret as changes in perspective:

- With respect to vectors A, that is to say, the action aA called "regular left" (we call it "Right Regular Action")
- With respect to linear operators, the adjoint action (also called conjugation) is written aAa^{-1}

Tha action:

$$a^{-1}Aa \tag{57}$$

It is then only the adjoint action constructed with the element of the group a^{-1}.

7. Action of the Group on Its Lie Algebra

We will continue to clarify elements of calculation using only matrix calculus, without delving into the details of symplectic geometry—that is, without explaining why the coadjoint action of the group on the dual of its Lie algebra reveals this second space, which Souriau calls the momentum space and which complements the Minkowski space. We have just constructed a tool: the adjoint action, acting on matrices. We will now apply this tool to a set of matrices constituting what is called the Lie algebra of the group.

The Poincaré group is a Lie group, a group of matrices. The differential δa of the group is a set of matrices (which do not form a group since they do not contain

the identity element) called the Lie algebra of the group:

$$\delta a = \delta \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Z = \begin{pmatrix} \delta L & \delta C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Let G be the Gram matrix of the Minkowski space, also called the "metric matrix". We will differentiate in the neighborhood of an element $L_{(0)}$, according to:

$$L = L_{(0)} + \varepsilon \delta L = L_{(0)} + \Lambda \tag{59}$$

And we will pose:

$$\Lambda = G\omega \tag{60}$$

By differentiating (19) and doing:

$$L_{(0)} = I \tag{61}$$

That is, by differentiating in the neighborhood of the group's identity element, we show that the matrix Λ is antisymmetric:

$$\Lambda^t = -\Lambda \tag{62}$$

We will construct the adjoint action of a^{-1} on this Lie algebra δa of the group *a*. That is to say, the expression:

$$Z' = \begin{pmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a^{-1} Z a \tag{63}$$

We need the inverse matrix a^{-1} of the one representing the Poincaré group. We find easily:

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

By forming (63), we easily find, after having made explicit and taken into account that $GG = I$

$$\omega' = L^t \omega L \tag{65}$$

$$\gamma' = GL^t \omega C + GL^t G\gamma \tag{66}$$

This result represents the result of the adjoint action of the element a^{-1} of the group on the element of its Lie algebra Z' (58).

8. Action of the Group on the Dual of Its Lie Algebra

The aim of this article is not to explain the path (symplectic geometry) by which J-M Souriau establishes this link between geometry and physics, but rather to demonstrate to students, engineers, and teachers who have access to matrix calculus, the simplicity, elegance, and clarity of the calculations. At this point, we must introduce duality. The element of the Lie algebra consists of an antisymmetric matrix ω, of size (4, 4), therefore with six components. Let us write:

$$Z = \left\{ \omega_{sx}, \omega_{sy}, \omega_{sz}, \omega_{fx}, \omega_{fy}, \omega_{fz}, \gamma_t, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z \right\} \tag{67}$$

It is therefore logical to imagine that the moment represents this set of ten com-

ponents.:

$$\mu = \left\{ s_x, s_y, s_z, f_x, f_y, f_z, E, p_x, p_y, p_z \right\} \tag{68}$$

The duality corresponding to the relationship:

$$\left\langle Z, \mu \right\rangle = Cst \tag{69}$$

The six components of an antisymmetric matrix M can be arranged in the form:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -s_z & s_y & f_x \\ s_z & 0 & -s_x & f_y \\ -s_y & s_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

Let's multiply this matrix by an antisymmetric matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -s_z & s_y & f_x \\ s_z & 0 & -s_x & f_y \\ -s_y & s_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 & \omega_{34} \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

I simply calculate the diagonal terms to get the trace, and I obtain:

$$\begin{aligned} & s_z \omega_{12} - s_y \omega_{13} - f_x \omega_{14} \\ & s_z \omega_{12} + s_x \omega_{23} - f_y \omega_{24} \\ & -s_y \omega_{13} + s_x \omega_{23} - f_z \omega_{34} \\ & -f_x \omega_{14} - f_y \omega_{24} - f_z \omega_{34} \end{aligned} \tag{72}$$

When I add them up, I see that I have twice what I'm looking for. So I just need to form:

$$\frac{1}{2} Tr\left(M \omega \right) \tag{73}$$

With:

$$\mu\left(Z \right) = \frac{1}{2} Tr\left(M \omega \right) + P^t G \gamma \tag{74}$$

The combination $\left\{ M, P \right\}$ of an antisymmetric matrix and a vector forms what is called a torsor. This term will take on its full meaning when we apply all of the above to the Euclid group. It is then appropriate to express the duality in terms of scalar conservation (a simple trick for handling matrix calculations):

$$\frac{1}{2} Tr\left(M \cdot \omega \right) + P^t \cdot G\gamma = \frac{1}{2} Tr\left(M' \cdot \omega' \right) + P'^t \cdot G\gamma' \tag{75}$$

It will then suffice to substitute the quantities ω' and γ' into this equation, from (65) and (66), to construct the desired dual transformation:

$$\left\{ M, P \right\} \to \left\{ M', P' \right\} \tag{76}$$

Let's perform this replacement:

$$\frac{1}{2} Tr\left(M \cdot \omega \right) + P^t \cdot G\gamma = \frac{1}{2} Tr\left(M' \cdot L^t \omega L \right) + P'^t \cdot G\left(GL^t \omega C + GL^t G\gamma \right) \tag{77}$$

This equation must be satisfied for all ω and γ. Identification on γ gives, taking into account that $GG = I$:

$$P^t = P'^t L^t \tag{78}$$

Or:

$$P = LP' \tag{79}$$

The calculation for the application $M \to M'$ has been returned in the appendix. The set represents the expression of the coadjoint action of the Poincaré group on its moment space, a result which was first given by the mathematician J-M Souriau in 1970 [1].

9. The Euclid Group, a Particular Dynamic Group

If the reader has followed all these calculations closely, constructing the action of the Euclid group on the dual of its Lie algebra—that is, on its moment—will be a useful exercise. The result is absolutely similar to what emerges from the Poincaré group:

$$P = aP' \tag{80}$$

$$M = aM'a^t + CP'^t a - aP'^t C \tag{81}$$

The formulas are the same, with the matrix of the orthogonal group O(3) replacing that of the Lorentz group. The objects P and M then acquire an elegant physical meaning. P is a force, and M is a torsional moment. The Euclid group is therefore a special dynamic group, that of statics. Any change of reference frame in this uniform medium preserves its "state of stress".

10. Significance for the Physicist, the Engineer, and the Student

We started with a four-dimensional space, Minkowski spacetime, the spacetime of special relativity, defined by its metric (16).

In Section 2, we constructed its isometry group, the complete Poincaré group (26), formed from the spacetime translation subgroup (22) and the Lorentz subgroup (24).

In Section 3, we showed that the Lorentz group decomposes into four connected components: two orthochronous components (not reversing time), forming the subgroup known as the restricted Lorentz group, and two antichronous components (reversing time).

In Section 4, we considered two types of action: one acting on vectors and the other, the adjoint action, acting on matrices. The fundamental idea of special relativity was to show that masses and photons correspond to different ways of moving through Minkowski space, the former along geodesics of zero length, the latter along geodesics of zero length. Here we find Souriau's favorite expression.

- *Tell me how you move, and I'll tell you what you are.*

We thus identify particles with specific motions. However, joining two distinct

points A and B in spacetime with a geodesic is not enough to define the object in question. It lacks its attributes: energy, momentum, and spin. The idea is to group all these objects according to a matrix, constituting the object moment μ. We then consider a change of reference frame, which translates into a group action. The action on the left of the group preserves the length s. This action preserves the nature of the motion, the nature of the particle. We then seek to construct an action that preserves the identity of an object, which takes the form of a matrix, and we then define this operator, which is the coadjoint action. We then examine what this change of reference frame preserves: these other attributes of the motion that the action on the left does not allow us to "see". We obtain a wrench, an antisymmetric matrix, plus a four-vector P. Let's show that the coadjoint action preserves its length $P^tGP = \left(LP'\right)^t GLP$ is satisfied due to the axiomatic definition of L. Therefore, the dot product $\langle P, P \rangle$ is conserved. This is a property of motion. Let's introduce the scalar E and the 3-vector p by decomposing P according to:

$$P = \begin{pmatrix} E \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{82}$$

With $c = 1$ and:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \tag{83}$$

We get:

$$E^2 - p^2 = Cst \tag{84}$$

We can therefore change our frame of reference, "consider a motion from another angle," using an observational or measuring instrument determined by this change of frame in spacetime. This quantity will be conserved and will thus constitute a characteristic of this particular motion. Souriau thus reveals, starting solely from the space where these motions occur, defined by his metric alone, essential characteristics of the entire range of motions that can correspond to the geodesics of this spacetime. Quantities familiar to the relativistic physicist, such as energy E and momentum p, emerge from this purely geometric approach. But these two parameters are not sufficient to categorize a particular motion. Spin is missing.

The spin 3-vector is one of the two 3-vectors involved in the construction of the antisymmetric matrix M, the second being the "passage" 3-vector. Souriau shows that this third vector is merely an artifact that must be eliminated by opting for the specific coordinate system that accompanies the particle's motion. For the coadjoint action of the group on the spin, we refer the reader to the appendix; we wish to focus here on the action on the energy-momentum pair. That being said, it is quite remarkable that Souriau, in 1970, brought spin to the fore as an object of pure geometry, leading to the concept of a dynamical group. We can say that the entire approach illustrates Souriau's statement:

- *A little mathematics takes you away from reality, a lot brings you back to it.*

11. Physical Meaning of T-Symmetry

What does the existence of antichronous components in the complete Poincaré group mean?

Geometrically, this means that, in Minkowski space, if we start with a set of motions oriented in a past-future direction, by introducing antichronous elements, we create their T-symmetrics, the same motions, but with an inverse temporal orientation, oriented in a future-past direction. Can we then consider that they belong to the world of physics?

What impact will this have on the parameters of the movement?

Equation (79) tells us that time reversal, T-symmetry, reverses both energy and momentum (referring to the appendix, we will see that it conserves spin).

Using the relation $E = mc^2$, we see that this reversal of energy is synonymous with a reversal of mass. Thus, the subsidiary question that arises is: can negative masses coexist with our positive masses in our spacetime?

In 1970, the emergence of objects with negative energy and mass was viewed with perplexity, as physicists preferred to continue limiting themselves to the restricted Poincaré group, restricted to its orthochronous components. The Janus cosmological model, on the other hand, exploited the complete group [8], involving the use of the geometric concept of a covering [9].

12. Geometric Translation of C-Symmetry

In chapter 5 of a work published in 1964 [10], J-M Souriau adds a fifth dimension, x_5, of the spacelike type, to spacetime. He notes that the inversion of this additional dimension accounts for charge conjugation. In Chapter 5 of [1], entitled "A Method of Quantization," the link between quantization and the compactness of the additional dimension is illustrated. Article [9] is a simple outline, through the theory of dynamical groups, of the geometrization of quantum mechanics, by taking into account additional, closed dimensions. C-symmetry then follows from the inversion of the additional dimensions. By coupling this C-symmetry to P and T symmetries, through the Janus group, the Janus model then becomes the geometric translation of a CPT symmetry of the two sheets of the coating. But these additional dimensions remain real. It seems to us that a geometrization including gravitation and quantum mechanics could emerge from a fibration of spacetime using compact complex dimensions. Geometrically, if we add a single compact dimension (fibered in a circle), the symmetry can be illustrated in **Figure 1**.

13. When Quantum Field Theory Rejects a Priori States of Negative Energy

In quantum field theory [11], we find P and T operations of space and time inversion. Two options then present themselves, depending on whether these operators are:

- Linear and unitary
- Antilinear and antiunitary

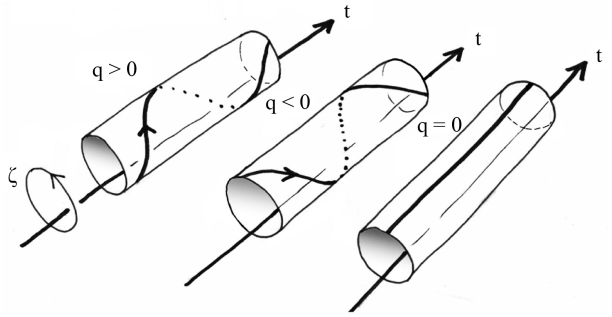


Figure 1. Educational image illustrating C-symmetry. *q* is the charge.

The imperative to avoid generating the existence of negative energy states, considered a priori impossible [12], leads this theory to the restrictive choice:

- Linear and unitary P
- Antilinear and antiunitary T

In 2014, in [12], it was suggested that the emergence of the Janus Cosmological Model calls into question this absolute principle of the a priori negation of negative energy states. The mathematician Nathalie Debergh takes up this idea, showing that with a linear and unitary operator T, such states naturally emerge from the Dirac and Schrödinger equations [13] [14]. In 2021 [15], the technique for constructing the elements of physics, based on calculating the action on the dual of its Lie algebra, was applied, extending it to the complex extension of the Poincaré group. This approach seems to us to constitute a tool for a geometrization of quantum mechanics, which remains to be done. However, this highly technical study has not garnered much attention from theoretical physicists. We will revisit this technique in the following section, attempting to make it more accessible.

14. Construction of the Coadjoint Action of the Dual of the Lie Algebra of the Complexified Poincaré Group

There are works in the literature that represent various attempts to translate quantum mechanics into a geometric approach. Our aim is not to be exhaustive in this regard, and interested readers can refer to the articles cited in reference [15]. What follows essentially reiterates part of that article, but with detailed calculations to make it more appealing to our target audience. It represents one way of presenting the extension of the group into complex numbers.

The real Poincaré group emerges as an isometry group of the Minkowski space, defined by its metric (16). Here we will focus on the complexified Minkowski space. In 1854, the French mathematician became interested in complex quadratic forms [16]:

$$\sum a_{ij} z^i \overline{z}^j \tag{85}$$

where z^i is a complex vector, defined in the set $\mathbb{C}^4$ and its conjugate (such that the imaginary part of each of these complex numbers is inverted):

$$z = a + ib \rightarrow \overline{z} = a - ib \tag{86}$$

The following metric corresponds to the reduced canonical form:

$$\mathrm{d}s^2 = z^i \overline{z}^i \tag{87}$$

In this case, the dot product is always real and equal to the square of the norm of the vector:

$$\langle z, z \rangle = \|z\|^2 = a^2 + b^2 \tag{88}$$

In the real case, considering matrices M, we introduced the transposition operation M^t, consisting of performing a symmetry with respect to the main diagonal:

$$\left(M_{ij}\right)^t = M_{ji} \tag{89}$$

The vector X could then be expressed in two forms. A "standard form": the column vector, and its transpose, the row vector. In reality, the Euclidean metric could then be written in the form:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}X^t I \mathrm{d}X \tag{90}$$

where I is the identity matrix (the Gram matrix of Euclidean space). We will use the adjoint of a matrix, where there is not only symmetry with respect to the main diagonal, but where these terms are also conjugate:

$$M = z_{ij} M_{ij} \rightarrow M^\dagger = \overline{z}_{ji} \tag{91}$$

This also applies to vectors. The adjoint of a column vector then becomes the row vector where the components are replaced by their conjugates. Thus, in a three-dimensional space:

$$\mathrm{d}X = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{d}X^\dagger = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\overline{x}_1 & \mathrm{d}\overline{x}_2 & \mathrm{d}\overline{x}_3 \end{pmatrix} \tag{92}$$

So, the complexified Euclidean space has the (real) metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}X^\dagger I \mathrm{d}X \tag{93}$$

Similarly, the complexified 4D Minkowski space $\mathbb{C}(1,3)$, will have the (real) metric:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}X^\dagger G \mathrm{d}X \tag{94}$$

where G is the classic Gram matrix (18). We will now search for the isometry group of this complexified Minkowski space. Let L be a complex matrix. Let's write that it preserves the length:

$$\mathrm{d}X'^\dagger G \mathrm{d}X' = \mathrm{d}\left(LX^\dagger\right) G \mathrm{d}\left(LX\right) = \mathrm{d}X^\dagger G \mathrm{d}X \tag{95}$$

Earlier, we saw how the transpose of a product is constructed. An analogy theorem works for the adjoint of a product:

$$\left(AB\right)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \tag{96}$$

Thus, relation (95) becomes:

$$dX^{\dagger}L^{\dagger}GLdX = dX^{\dagger}GdX \tag{97}$$

This gives us the axiomatic expression:

$$L^{\dagger}GL = G \tag{98}$$

This is nothing other than the complexified Lorentz group. By adding the complexified 4D translations, we find that the isometry group of the complexified Minkowski space is simply the complexified Poincaré group, where L and C are complex. Formally, this is similar to (26).

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{99}$$

We will then extend the calculations of the coadjoint action of the group on the dual of its Lie algebra. To perform this calculation, we will need to acquire new tools. In the real calculus, we saw the appearance of symmetric and antisymmetric matrices, defined by:

$$\text{Matrice symétrique:}\quad M + M^{t} = 0 \tag{100}$$

$$\text{Matrice antisymétrique:}\quad M - M^{t} = 0 \tag{101}$$

Here, we have:

$$\text{Matrice hermitienne:}\quad M + M^{\dagger} = 0 \tag{102}$$

$$\text{Matrice anti hermitienne:}\quad M - M^{\dagger} = 0 \tag{103}$$

In the real world, an antisymmetric matrix has its main diagonal composed of zeros. In the complex world, this diagonal will consist of purely imaginary numbers. Let's begin by constructing the inverse matrix of L:

$$L^{\dagger}GL = G \to \left(G^{-1}L^{\dagger}G\right)L = I \to L^{-1} = G^{-1}L^{\dagger}G \tag{104}$$

This is the same as (46), but with the transpose replaced by the adjoint. We will expand the matrix L around the identity element:

$$L = I + \varepsilon\delta L \tag{105}$$

By introducing into (104) and neglecting the second order:

$$\left(G\delta L\right)^{t} + G\delta L = 0 \tag{106}$$

This means that $G\delta L$ is an anti-Hermitian matrix which we will denote by ω.

$$G\delta L = \omega \text{ and } GG = I \to \delta L = G\omega \tag{107}$$

We will therefore write the element of the Lie algebra according to:

$$Z = \begin{pmatrix} \delta L & \delta C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{108}$$

If we construct the group's action on its Lie algebra:

$$Z' = a^{-1} Z a \tag{109}$$

Using calculations entirely similar to those performed in the real domain, we obtain the same equations, where the adjoint replaces the transpose.

$$\omega' = L^{\dagger} \omega L \tag{110}$$

$$\gamma' = G L^{\dagger} \omega C + G L^{\dagger} G \gamma \tag{111}$$

This time, we will put the complex moment in the form of a pair consisting of an anti-Hermitian matrix M and a complex four-vector P.

$$\mu = \{M, P\} \tag{112}$$

An antisymmetric matrix of size (4, 4) depends, in complex numbers, on 12 scalars.

The element Z of the Lie algebra of the Poincaré group belongs to a vector space of dimension 20 (the dimension of the group). We can therefore write:

$$Z = \left\{\omega_{sx}, \omega_{sy}, \omega_{sz}, \omega_{fx}, \omega_{fy}, \omega_{fz}, \gamma_t, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\right\} \tag{113}$$

It is therefore logical to imagine that the moment represents this set of ten complex components:

$$\mu = \left\{s_x, s_y, s_z, f_x, f_y, f_z, E, p_x, p_y, p_z\right\} \tag{114}$$

The duality corresponding to the relationship:

$$\left\langle Z, \mu \right\rangle = Cst \tag{115}$$

Let us form the anti-Hermitian matrix:

$$M - \begin{pmatrix} 0 & -\overline{s}_z & s_y & f_x \\ s_z & 0 & -\overline{s}_x & f_y \\ -\overline{s}_y & s_x & 0 & f_z \\ -\overline{f}_x & -\overline{f}_y & -\overline{f}_z & 0 \end{pmatrix} \tag{116}$$

Let's multiply this matrix by the anti-Hermitian matrix ω:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\overline{s}_z & \overline{s}_y & \overline{f}_x \\ s_z & 0 & -\overline{s}_x & \overline{f}_y \\ -s_y & s_x & 0 & \overline{f}_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \overline{\omega}_{12} & \overline{\omega}_{13} & \overline{\omega}_{14} \\ -\omega_{12} & 0 & \overline{\omega}_{23} & \overline{\omega}_{24} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 & \overline{\omega}_{34} \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{117}$$

Once again, keeping only the trace:

$$\begin{aligned} &\overline{s}_z \omega_{12} - \overline{s}_y \omega_{13} - \overline{f}_x \omega_{14} \\ &s_z \overline{\omega}_{12} + \overline{s}_x \omega_{23} - \overline{f}_y \omega_{24} \\ &-s_y \overline{\omega}_{13} + s_x \overline{\omega}_{23} - \overline{f}_z \omega_{34} \\ &-f_x \underline{\omega}_{14} - f_y \overline{\omega}_{24} - f_z \overline{\omega}_{34} \end{aligned} \tag{118}$$

These quantities are all of the form $a\overline{b} + \overline{a}b$. We obtain the desired scalar quantity by introducing: $\mu(Z) = \frac{1}{2} Tr(M\omega) + P^{\dagger} G \gamma$ où where M and γ are anti-

hermitian. We can therefore write:

$$\mu \equiv \{M, P\} \quad \text{with} \quad M^{\dagger} = -MP \in \mathbb{C}^4 \tag{119}$$

$$\frac{1}{2}Tr(M\omega) + P^{\dagger}G\gamma = \frac{1}{2}Tr(M'\omega') + P'^{\dagger}G\gamma' \tag{120}$$

We get:

$$\frac{1}{2}Tr(M\omega) + P^{\dagger}G\gamma = \frac{1}{2}Tr(M'L'^{\dagger}\omega L) + P'^{\dagger}G(GL^{\dagger}\omega C + GL'^{\dagger}G\gamma) \tag{121}$$

$$\frac{1}{2}Tr(M\omega) + P^{\dagger}G\gamma = \frac{1}{2}Tr(M'L'^{\dagger}\omega L) + P'^{\dagger}L^{\dagger}\omega C + P'^{\dagger}L'^{\dagger}G\gamma \tag{122}$$

Identifying the term γ gives:

$$P^{\dagger} = P'^{\dagger}L^{\dagger} \rightarrow P = LP' \tag{123}$$

In the trace, a circular permutation can be performed:

$$Tr(M'L'^{\dagger}\omega L) = Tr(LM'L'^{\dagger}\omega) \tag{124}$$

Separating the terms into ω:

$$\frac{1}{2}Tr(M\omega) = \frac{1}{2}Tr(LM'L'^{\dagger}\omega) + P'^{\dagger}L^{\dagger}\omega C \tag{125}$$

- The term $P'^{\dagger}L^{\dagger}\omega C$ is the dot product of two vectors
- There is a row vector $P'^{\dagger}$
- And the column vector $L^{\dagger}\omega C$

If I have a scalar that is the product of two vectors (the components are complex this time):

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = AC + BD \tag{126}$$

I can form the matrix:

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & BC \\ AD & BD \end{pmatrix} \tag{127}$$

We can see that:

$$\begin{pmatrix} B & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = Tr\begin{pmatrix} AC & BC \\ AD & BD \end{pmatrix} \tag{128}$$

The second term of the second member is equal to the product of a line-matrix by a column-matrix. This is equal to the reversed product. Hereafter, schematically, the product of a line-matrix by a column-matrix:

$$P'^{\dagger}L^{\dagger}\omega C = Tr(L^{\dagger}\omega CP'^{\dagger}) \tag{129}$$

In the trace, one can achieve a circular permutation:

$$P'^{\dagger}L^{\dagger}\omega C = Tr(CP'^{\dagger}L^{\dagger}\omega) \tag{130}$$

whence:

$$\frac{1}{2}Tr(M\omega) = \frac{1}{2}Tr(LM'L'^{\dagger}\omega) + Tr(CP'^{\dagger}L^{\dagger}) \tag{131}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M = LM'L^{\dagger} + 2CP'^{\dagger}L^{\dagger} \\ P = LP' \end{array}} \tag{132}$$

We then see that the group's action on the anti-Hermitian matrix is expressed in the form:

$$\boxed{\mu' = a\mu a^{\dagger}} \tag{133}$$

This is the action of the complex Poincaré group, the isometry group of the complexified Minkowski space, on the dual of its Lie algebra. The formula is derived from that of the action, in real numbers (see the appendix), by replacing transposed with adjoint.

15. Conclusions

In this work, we have shown that, starting from the sole geometric structure of Minkowski space and its isometry group, it is possible to derive, through essentially algebraic means, the fundamental quantities of relativistic physics. The approach introduced by Jean-Marie Souriau, based on the action of the Poincaré group on the dual of its Lie algebra, thus reveals energy, momentum, and spin as intrinsic geometric objects. The value of this presentation lies in the fact that it relies on accessible tools, while leading to a unified understanding of physical concepts generally introduced independently. It highlights the structuring role of symmetry groups and their actions in the organization of physical laws.

The extension of this construction to the complex framework, proposed here as an exercise, constitutes only a first sketch. It nevertheless shows that, as soon as one undertakes this type of approach, new elements naturally appear in the formalism. These should not be interpreted as established results, but rather as indications, signals suggesting that this path deserves to be explored further, which will be the subject of the following article.

We have deliberately kept the present work within a pedagogical framework intended to remain accessible to engineers and physics students, using only finite-dimensional matrix methods and avoiding the technical formalism of infinite-dimensional functional spaces.

In the following article, the situation will become substantially different. The transition toward quantum mechanics and quantum field theory naturally leads to new classes of groups acting on infinite-dimensional spaces. It is only within this broader framework that questions related to asymptotic symmetry groups, infinite-dimensional representations, spinorial structures, or formalisms such as Newman–Penrose may naturally arise and be meaningfully discussed.

Author Contributions

The body of the article is by J.-P. Petit. G. d'Agostini verified the calculations.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

[1] Souriau, J.M. (1977) Structure des systèmes dynamiques. Birkhaüser.

[2] Minkowski, H. (1909) Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 75-88.

[3] Gram, J.P. (1883) Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **94**, 41-73. https://doi.org/10.1515/crll.1883.94.41

[4] Einstein, A. (1915) Erlklärung der Perihelbewegung des Merkur aus allgemeinen Relarivitätstheorie. Königlish Preubische Akademie der Wissenschaften.

[5] Lorentz, H.A. (1904) Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than That of Light. *The Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, **6**, 809-831.

[6] Poincaré, H. (1906) Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

[7] Petit, J.P. and D'Agostini, G. (2026) Mathematical and Geometrical Inconsistency of the Black Hole Model. Part I. *Journal of Modern Physics*, **17**, 199-239. https://doi.org/10.4236/jmp.2026.172014

[8] Petit, J.P. and Zejli, H. (2024) Study of Symmetries through the Action on Torsors of the Janus Symplectic Group. *Reviews in Mathematical Physics*, **37**, Article 2450054. https://doi.org/10.1142/s0129055x24500545

[9] Petit, J.P., Margnat, F. and Zejli, H. (2024) A Bimetric Cosmological Model Based on Andreï Sakharov's Twin Universe Approach. *The European Physical Journal C*, **84**, Article No. 1226. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13569-w

[10] Souriau, J.M. (1964) Géométrie et Relativité. Hermann (French Edition Only).

[11] Steven, W. (2005) The Quantum Theory of Fields. Cambridge University Press.

[12] Petit, J.P. and D'Agostini, G. (2014) Negative Mass Hypothesis in Cosmology and the Nature of Dark Energy. *Astrophysics and Space Science*, **29**, 145-182.

[13] Debergh, N., Petit, J.P. and D'Agostini, G. (2018) On Evidence for Negative Energies and Masses in the Dirac Equation through a Unitary Time-Reversal Operator. *Journal of Physics Communications*, **2**, Article 115012. https://doi.org/10.1088/2399-6528/aaedcc

[14] Debergh, N. and Petit, J.P. (2022) On Some Reasons Why the Time Reversal Operator Could Be Unitary. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.3940205

[15] Debergh, N., D'Agostini, G. and Petit, J.P. (2021) On the Poincaré Algebra in a Complex Space-Time Manifold. *Journal of Modern Physics*, **12**, 218-228. https://doi.org/10.4236/jmp.2021.123017

[16] Hermite, C. (1854) Sur la théorie des formes quadratiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 215-234.

Appendix

This appendix represents the completion of the calculation of the coadjoint action of the group on the dual of its Lie algebra, with respect to the matrix *M*, a result presented by Souriau in 1970 [1]. As will be seen, this formula shows that the antichronous components of the group do not modify the spin. This section makes use of theorems concerning matrices.

We therefore start from Equation (77) of the text, which gives us:

$$\frac{1}{2}Tr\left(M\cdot\omega\right)=\frac{1}{2}Tr\left(M'\cdot L^{t}\omega L\right)+P'^{t}L^{t}\omega C \tag{1}$$

We will use the fact that the trace of a matrix product does not change if we perform a circular permutation within that product.

$$\frac{1}{2}Tr\left(M\cdot\omega\right)=\frac{1}{2}Tr\left(LM'\cdot L^{t}\omega\right)+P'^{t}L^{t}\omega C \tag{2}$$

The second term of this equation is equal to the product of a row matrix P'^{t} by a column matrix $L^{t}\omega C$. Hereafter, schematically, this is equal to the trace of a row-matrix by a column-matrix:

$$P'^{t}L^{t}\omega C=Tr\left(L^{t}\omega CP'^{t}\right) \tag{3}$$

And, within this trace, a new circular permutation is performed.

$$Tr\left(L^{t}\omega CP'^{t}\right)=Tr\left(CP'^{t}L^{t}\omega\right) \tag{4}$$

Whence:

$$\frac{1}{2}Tr\left(M\cdot\omega\right)=\frac{1}{2}Tr\left(M'\cdot L^{t}\omega L\right)+Tr\left(CP'^{t}L^{t}\omega\right) \tag{5}$$

where ω is an antisymmetric matrix. We know that a matrix's trace is equal to the product of another matrix by a symmetrical matrix. Any matrix can be symmetrized or antisymmetrized. In addition, the trace of the product of a matrix by an antisymmetric matrix is zero. Whence:

$$Tr\left(A\omega\right)=Tr\left[antisym\left(A\right)\times\omega\right] \tag{6}$$

We can apply that to the matrix $CP'^{t}L^{t}$ where we take the trace of its product by an antisymmetric matrix ω.

$$CP'^{t}L^{t}=sym\left(CP'^{t}L^{t}\right)+antisym\left(CP'^{t}L^{t}\right) \tag{7}$$

But:

$$Tr\left[sym\left(CP'^{t}L^{t}\right)\times\omega\right]=0 \tag{8}$$

So that:

$$Tr\left(CP'^{t}L^{t}\omega\right)=Tr\left[antisym\left(CP'^{t}L^{t}\right)\times\omega\right] \tag{9}$$

$$antisym\left(CP'^{t}L^{t}\right)=\frac{1}{2}\left[CP'^{t}L^{t}-\left(CP'^{t}L^{t}\right)^{t}\right] \tag{10}$$

$$\left(CP'^{t}L^{t}\right)^{t}=LPC^{t} \tag{11}$$

$$Tr\left(CP'^{t}L^{t}\right)=\frac{1}{2}Tr\left(CP'^{t}L^{t}-LPC^{t}\right) \tag{12}$$

Finally:

$$M=LM'L^{t}+CP'^{t}L^{t}-LPC^{t} \tag{13}$$

The intrinsic invariance of the magnitude s of the spin vector then becomes apparent when the motion is inscribed along a world line (along a geodesic of Minkowski space where the length is real). Under these conditions, the vector C is collinear with P. In this case, the last two terms of the right-hand side are zero. But the transition vector of M is also zero, which gives the matrix M a row and a column composed of zeros. What remains is the omega submatrix, the spin submatrix. The action then represents an orthogonal rotation of the spin vector, which preserves its magnitude s. Incidentally, let us recall that the momentum matrix is

$$\mu=\begin{pmatrix} M & -P \\ P^{t} & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

So that the action of the group on its momentum is:

$$\boxed{\mu=a\mu' a^{t}} \tag{15}$$

Physical and mathematical inconsistency of T. Damour's criticisms of the Janus Cosmological Model

Jean-Pierre Petit[1]

Key words:

Bimetric gravity; Janus cosmological model; negative mass; positive and negative masses; gravitational coupling constants; opposite gravitational couplings; Damour-Kogan bigravity; Hossenfelder bimetric theory; runaway problem; interacting metrics; Bianchi identities; FLRW cosmology; accelerated expansion; Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations; Newtonian limit.

Abstract:

Since 2019, two articles by T. Damour—published on his personal webpage hosted by the IHES site and addressing the alleged physical and mathematical inconsistency of the Janus cosmological model—have posed a major obstacle to the scientific community's consideration of this model, despite several points of qualitative agreement with astrophysical and cosmological observations. As these criticisms were not published in peer-reviewed journals, the controversy could not unfold within the standard editorial framework where critiques and responses are subject to review by referees. We first outline the independent origins of the Janus cosmological model, its theoretical foundations, its main results, and its qualitative observational consequences. We revisit the simultaneous satisfaction of the constraints arising from the two Bianchi identities—established in an explicit solution published as early as 2019 but overlooked in T. Damour's subsequent critiques. We then re-examine, point by point, the objections he raised. In particular, although a variational derivation of the coupled Janus field equations has already been published, we present a particularly direct illustration of their variational origin. In 2002, Damour and Kogan introduced an action describing two interacting dynamical metrics within the framework of non-linear massive bigravity. We show that by choosing gravitational coupling constants equal in magnitude but opposite in sign, the characteristic structure of the Janus model's coupled field equations emerges naturally from this construction. Regarding the contradiction concerning the nature of gravitational interactions raised by T. Damour in 2019—and maintained in his 2022 article—we demonstrate that his reasoning requires the same four-velocity field of a test particle to simultaneously satisfy the geodesic equations associated with both metrics. This prescription is not among the assumptions defining the Janus model: positive-mass test particles follow the geodesics of the first metric, whereas negative-mass test particles follow those of the second. In the stationary regime, spherically symmetric exterior metrics thus allow for the direct recovery of mutual attraction between masses of the same sign and mutual repulsion between masses of opposite signs.

---

[1] Jppetit1937@yahoo.fr

1 – **Introduction**.

The standard cosmological model is based on the field equation introduced in 1915 by A. Einstein [1]. It assumes that the universe is a four-dimensional manifold associated with a Lorentzian metric $g_{\mu\nu}$, wherein masses follow non-null geodesics derived from that metric, while light follows null geodesics. In its most general form, this equation includes a constant Λ —known as the cosmological constant—whose role was long overlooked, as there was no clear observational data to which it could be linked.

(1) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$$

By adding the assumption of homogeneity and isotropy—where k is the curvature index, (u, θ, φ)represents the dimensionless forms of the spatial coordinates under spherical symmetry, and *a(t)* is a scale factor—the metric takes the FLRW form:

(2) $$ds^2 = c^2 dt^2 - a\left(\frac{du^2}{1 - k\,u^2} + u^2 d\theta^2 + u^2 sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

When introduced into the field equation, this metric leads to three possible solutions, depending on the value of the curvature index $k \in \{-1, 0, +1\}$

$\rho > 10^{-29} gr/cm^3 \longrightarrow \quad k = +1$ Positive curvature, elliptic model

$\rho < 10^{-29} gr/cm^3 \longrightarrow \quad k = -1$ Negative curvature, hyperbolic model

$\rho = 10^{-29} gr/cm^3 \longrightarrow \quad k = 0$ Zero curvature, parabolic model

In all scenarios, the expansion proceeded with a deceleration:

(3) $$\frac{d^2 a}{dt^2} < 0$$

One problem remained—and still remains unresolved: this solution confirmed the observational discovery of the universe's expansion. Consequently, tracing back in time implied the existence of a hyper-dense, extremely hot state in which the universe's content consisted of a mixture of antimatter in equilibrium with radiation; high-energy photons were constantly creating pairs of matter and antimatter particles, which would almost immediately annihilate each other, regenerating those same high-energy photons. As the wavelength of these photons increased with the scale factor, the persistence of such primordial radiation would manifest as the observation of centimeter-wavelength photons forming an isotropic, homogeneous background—a phenomenon indeed observed as early as the 1960s. However, since these photons could no longer offset the annihilations, the result should have been the complete disappearance of those matter and antimatter particles. Yet:

- One particle of matter in a billion survived.

- No trace of its antimatter counterpart is found.

All attempts to detect this primordial antimatter have ended in failure. Thus, in this model, one begins by losing half the universe's content—no small matter. To date, no theoretical

justification has been proposed to account for this state of affairs. The situation has reached the point where there is no debate comparing competing theories, nor any international conference where this issue is addressed.

In the 1970s, the shape of galactic rotation curves—exhibiting a plateau in the outer regions—could no longer be reconciled with the gravitational field generated solely by visible matter. Specialists were thus led to propose that this field might be attributed to a vast halo of a new, unknown component termed "dark matter." Despite decades of experimental research, no particle constituting dark matter has yet been conclusively identified.

Twenty years later, measurements taken from distant sources led specialists to acknowledge that the universe was undergoing accelerated expansion. The cosmological constant was simply reintroduced into the field equation, on the grounds that its mere presence accounted for this phenomenon—though the nature of this new component, termed "dark energy," remained unexplained. In any case, within this model, the expansion and the acceleration are exponential.

The DESI results from the first three years, announced in March 2025 [2], reinforce the indication that dark energy might evolve over time. DESI indicates that the preference for dynamic dark energy strengthens when BAO, CMB, and Type Ia supernova data are combined. Notably, extended analyses show that this indication is robust at low redshift ($z < 0.3$). This remains a statistical indication, not a definitively established discovery.

Once the map of the cosmic microwave background radiation was produced, its extreme uniformity became apparent. Consequently, the standard model was supplemented by a phase known as inflation, during which—in a timespan ranging from 10^{-36} to 10^{-30} seconds—the universe is thought to have expanded by a factor exceeding 10^{26} under the influence of a field generated by particles dubbed "inflatons." To date, there is no model for such particles, nor any mechanism explaining their conversion into the known and measured constituents of the universe.

Nevertheless, in-depth analysis of CMB fluctuations has given rise to a new discipline based on the use of a six-parameter model—namely, baryon density, cold dark matter density, the acoustic angular scale, the optical depth of reionization, and the amplitude and spectral index of primordial perturbations
This involved adjusting the value of one of the parameters—the Hubble constant—to a very specific figure: $H_0 = 67\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1} \pm 0.5\ km\ s^{-1}$. For a long time, this value could be considered to fall within the margin of uncertainty associated with the observational data. However, improved precision leading to a value of $H_0 = 73\ \ Mpc^{-1} \pm 0.8\ km\ s^{-1}$ has given rise to what has been termed the "Hubble tension". See Figure1.

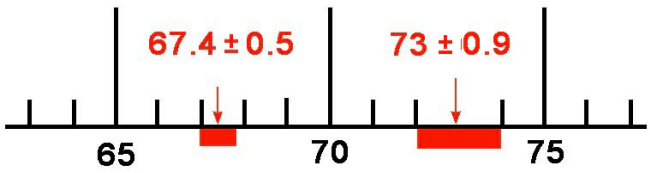


Fig.1 : The Hubble tension. The two ranges do not overlap [3]

All these factors justify considering a shift in the cosmological paradigm. This is what the Janus Cosmological Model proposes; it essentially involves introducing particles with negative mass and energy into the model.

2 – **Negative masses? Impossible, because of the runaway effect**!

Such an introduction was proposed as early as 1975 by Hermann Bondi [4]. General relativity, through its Newtonian approximation, immediately reveals the nature of the forces acting on test particles, leading to an immediate observation: in a field created by a given source, there exists only a single family of geodesics, which are followed by any test particle—whether it possesses positive or negative mass. The simplest approach is to focus on non-null geodesics associated with a field created by a mass M. If this mass is positive, the resulting metric is:

$$(4) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

The geodesics corresponding to positive or negative test masses then have the form as shown on figure 2:

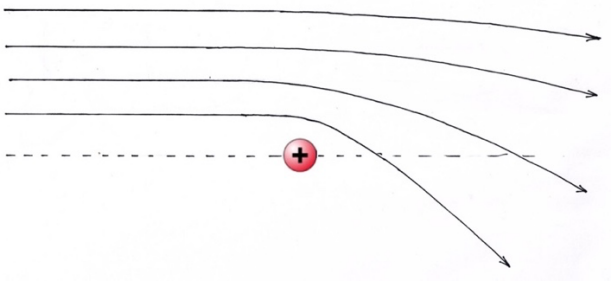


Fig. 2: Geodesics in a field created by a positive mass in general relativity.

Let us now imagine that this field is created by a negative mass. The external metric gives geodesics paths as shown on figure 3:

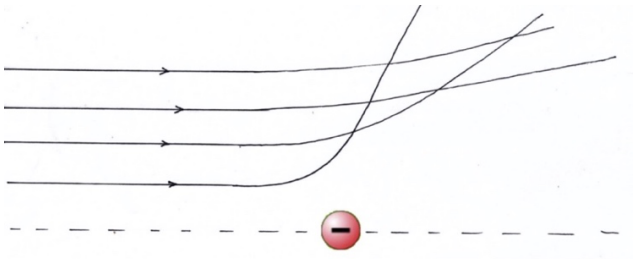


Fig.3 : Géodésiques dans un champ créé par une masse négative en relativité générale

This leads to the force configuration shown below, which immediately gives rise to a paradox known as "runaway": when two masses of equal absolute value but opposite signs are placed near each other, the negative mass flees, pursued by the positive mass. Both acquire kinetic energy (negative for the negative mass), and their absolute values increase indefinitely. Furthermore, the action-reaction principle is violated. See the schema of Figure 4.

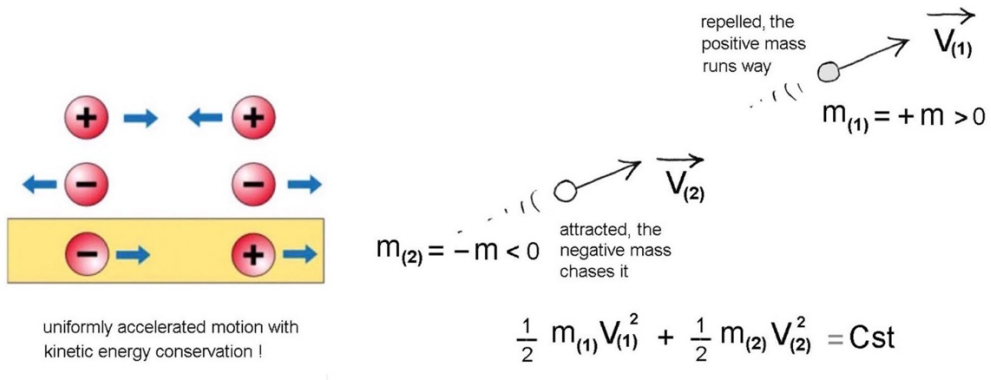


Fig.4 : Runaway phenomenon.

Hence the rejection by the entire scientific community of the idea of introducing negative masses into the cosmological model.

3 – **In search of a different geometric context**.

As early as 1974, in the now-defunct journal Il Nuovo Cimento, we published [5] what can be considered an initial sketch of the geometric framework of the Janus model.
The article proposed a rudimentary field equation:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi \left[T_{\mu\nu} - A(T_{\mu\nu}) \right] \quad (5)$$

A evoking antipodality.

The central geometric idea is to view a closed spacetime as the double covering of a projective space. The involution that swaps the two sheets of this covering is the antipodal involution. We will show how this can induce a *PT* symmetry.

To make this construction immediately visualizable, let us begin with its two-dimensional analogue.

Let us consider a compact two-dimensional spacetime, comprising one spatial dimension and one temporal dimension. We represent it as a sphere, S^2. The meridians represent the lines of time, while the parallels represent space. Its extent is zero at the first pole—representing the Big Bang—increases to a maximum value at the equator, and then decreases to the second pole, representing the Big Crunch. See the Figure 5.

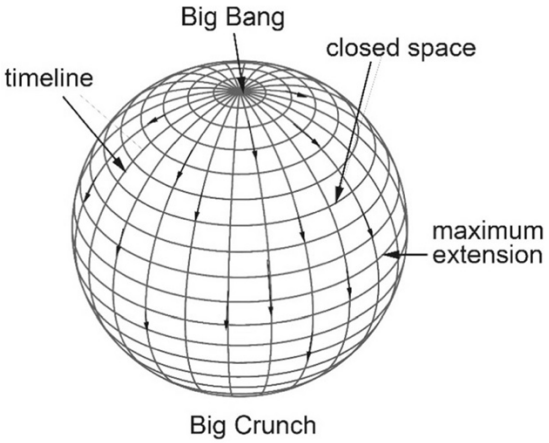


Fig. 5. A two-dimensional spacetime.

Let us now consider the antipodal involution.

(6) $$A : X \mapsto -X$$

It maps every point *M* on the sphere to its antipode *M'*. Identifying all pairs of antipodal points defines the real projective plane:

(7) $$\mathbb{RP}^2 = S^2/(X \sim -X)$$

Its canonical projection

(8) $$\pi : S^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$$

is a two-sheeted covering. For any point $q \in \mathbb{RP}^2$

(9) $$\pi^{-1}(q) = \{X, -X\}$$

Le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ ne peut être plongé dans $\mathbb{R}^3$ sans auto-intersections. Il peut en revanche y être immergé, et la surface de Boy constitue l'une de ses représentations classiques.

The projective plane $\mathbb{RP}^2$ cannot be embedded in $\mathbb{R}^3$ without self-intersections. It can, however, be immersed, and Boy's surface is one of its classical representations.

Figure 6 provides a visual representation of this construction. On the left are two antipodal points. In the center and on the right is an immersion of the projective quotient. In this particular representation, the neighborhood of the equator takes the form of a Möbius strip with three half-twists. See Figure 6.

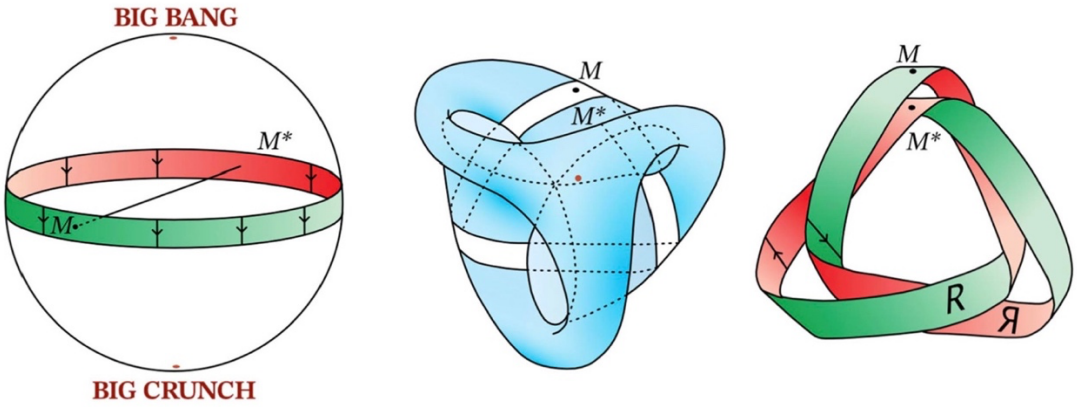


Fig. 6. Identification of antipodal points on S^2 and representation of the projective quotient by a Boy immersion [6]

This construction has an interesting consequence when the meridians are interpreted as timelines. The two points X and $-X$, which correspond to the same point of the projective quotient, belong to regions of the covering in which the time orientations are opposite.

This is illustrated in Fig. 7: antipodal identification brings into correspondence portions of spacetime endowed with antiparallel arrows of time. See Figure 7.

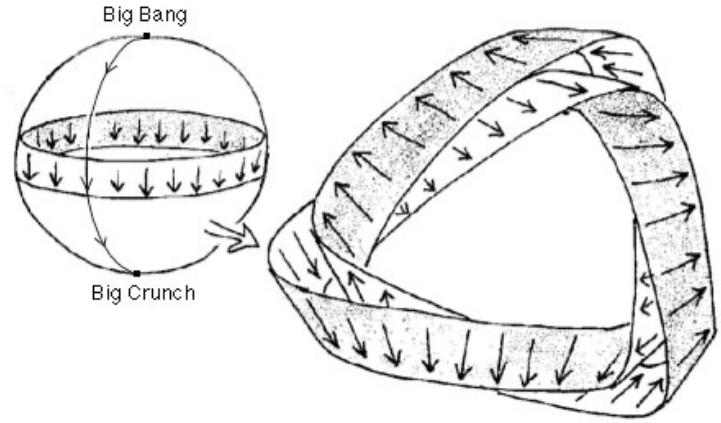


Fig. 7. Opposite time orientations induced by the two-sheeted covering of a spherical 2D spacetime [6].

Let us now examine this property in the neighborhood of the meridians.

On a sphere, all meridian curves issuing from one pole converge at the diametrically opposite pole. These two poles are antipodal and therefore correspond to the same point of the quotient $\mathbb{RP}^2$. In the Boy immersion, they consequently appear joined at a single point.

Figure 8 shows the meridian lines and the neighborhood of each of them. Whereas the neighborhood of the equator is represented in this immersion by a Möbius strip with three half-twists, the neighborhood of a meridian curve has the structure of a Möbius strip with one half-twist. See Figure8.

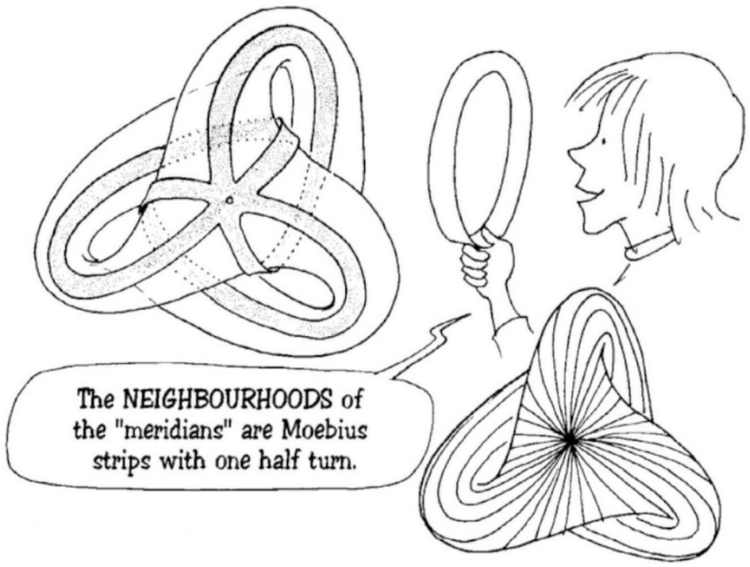


Fig. 8. Meridian lines of Boy's surface and their neighborhoods [6].

This representation also makes it possible to visualize separately the two families of curves derived from the meridians and parallels of the initial sphere.

A shown on Figure 9. Figure 9a shows the meridians, Fig. 9b the parallels, and Fig. 9c their superposition.

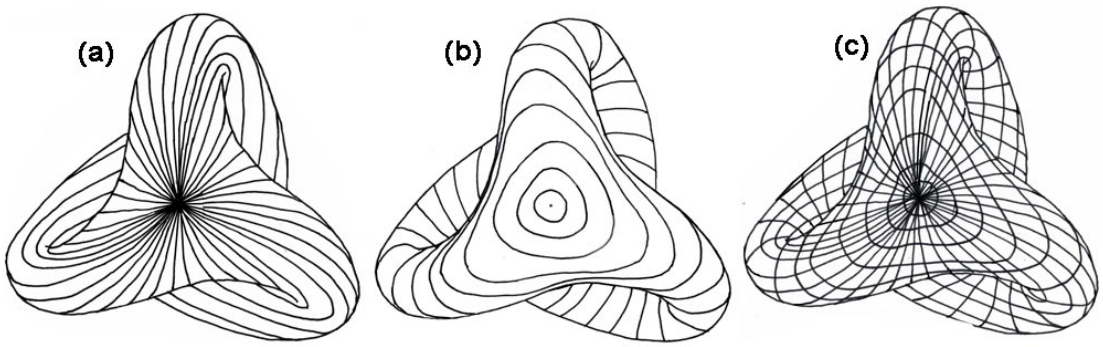


Fig. 9. Meridian and parallel curves on Boy's surface. (a) Meridians; (b) parallels; (c) superposition of the two families [6].

We can now recover on the meridians the phenomenon already observed in Fig. 7 in the neighborhood of the equator.

Figure 10 shows how the two determinations of the covering related by the antipodal involution carry opposite time orientations. See Figure 10.

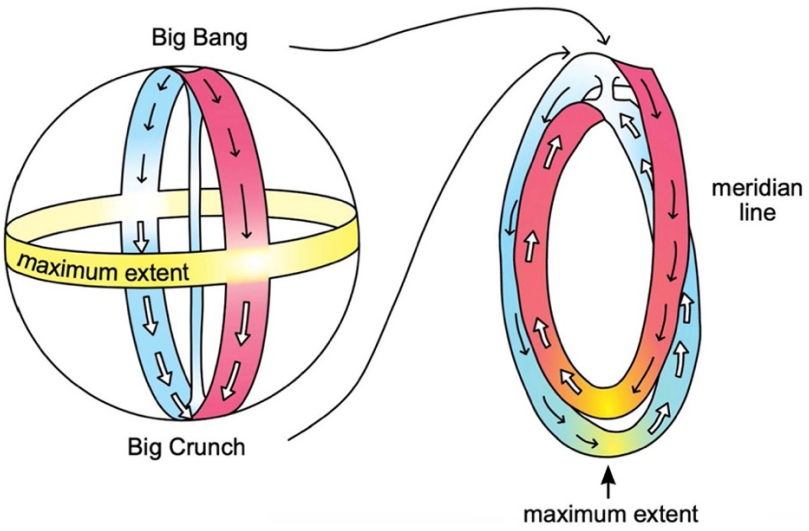


Fig. 10. Opposite time orientations on the two determinations of the covering in the neighborhood of a meridian of Boy's surface.

This two-dimensional construction thus geometrically exhibits a reversal of time orientation, which we denote by *T*.

The non-orientability of the projective quotient likewise entails a reversal of spatial orientation. Figure 11 gives an elementary representation of this effect: two objects carried by the two determinations of the covering appear as enantiomorphs. This spatial reversal corresponds to the parity operation *P*. See Figure 11.

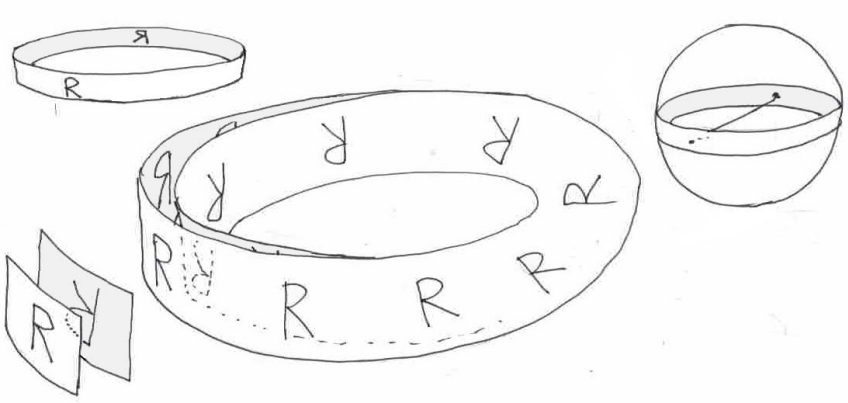


Fig. 11. Enantiomorphism induced by the covering of a non-orientable structure [6].

We can now make the dimensional transition that constitutes the essential element of this construction.

Consider a four-dimensional spacetime, with three spatial dimensions and one time dimension. We represent it by a sphere immersed in a five-dimensional space.

We write

(10*)* $$X = (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$$

With

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = R^2 \quad (11)$$

The four intrinsic coordinates are locally identified with

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (12)$$

the fifth coordinate being required to represent the sphere S^4 in the ambient space.
We then consider the four-dimensional real projective space:

$$\mathbb{RP}^4 = S^4/(X \sim -X) \quad (13)$$

whose S^4canonical two-sheeted covering is given by:

$$S^4 \overset{2:1}{\rightarrow} \mathbb{RP}^4 \quad (14)$$

The antipodal involution is

$$A : X \mapsto -X \quad (15)$$

On the four intrinsic coordinates, it therefore acts as

$$(t, x, y, z) \mapsto (-t, -x, -y, -) \quad (16)$$

Let us define separately the time reversal

$$T : (t, x, y, z) \mapsto (-t, x, y, z) \quad (17)$$

and the spatial inversion

$$P : (t, x, y, z) \mapsto (t, -x, -y, -z) \quad (18)$$

Thus, on the intrinsic spacetime coordinates,

$$A = PT \quad (19)$$

The antipodal transformation that exchanges the two determinations of the covering $S^4 \longrightarrow \mathbb{RP}^4$ therefore induces a PT transformation.

This direct passage from two to four dimensions is not arbitrary. One might be tempted to introduce an intermediate step involving a three-dimensional real projective space $\mathbb{RP}^3$. However, real projective spaces satisfy

$$\mathbb{RP}^4 \text{ orientable} \Leftrightarrow \text{odd} \quad (20)$$

Thus, the even-dimensional cases $\mathbb{RP}^2$ and $\mathbb{RP}^4$ considered here are non-orientable, whereas the three-dimensional real projective space $\mathbb{RP}^3$is orientable. The property sought here would therefore disappear at this intermediate step.

Let us now return to the two-dimensional model.

In Fig. 10, the two polar singularities correspond to the Big Bang and the Big Crunch. One may consider removing these two singularities by connecting their neighborhoods. The preceding projective construction is then replaced by a topology whose classical two-dimensional model is the two-sheeted covering of the Klein bottle by the torus:

(21) $$T^2 \overset{2:1}{\rightarrow} K^2$$

Figure 12 illustrates this construction.

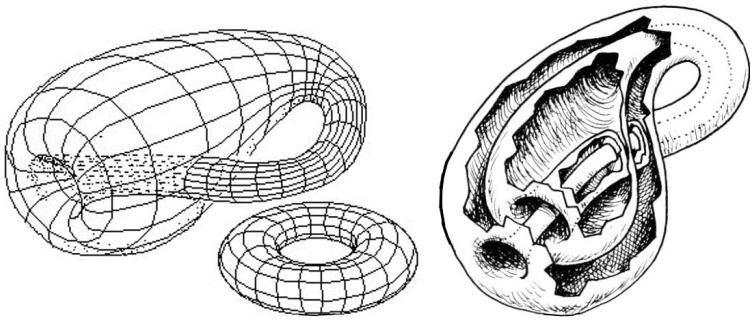


Fig. 12. Two-sheeted covering of the Klein bottle by the torus [6].

An analogous generalization may be sought in four dimensions in order to replace the initial and final singularities by a regular structure. In four dimensions, however, the quotient manifold under consideration and the free involution generating its covering must be defined explicitly. We shall return to this point.

This construction is conceptually related to that envisaged by Andrei Sakharov, who considered two conjugate universes related by a CPT symmetry, without introducing between them the gravitational interaction considered here.CPT

Figure 13 gives a didactic representation of this cosmology, first with a singularity and then in a form in which the singularity disappears.

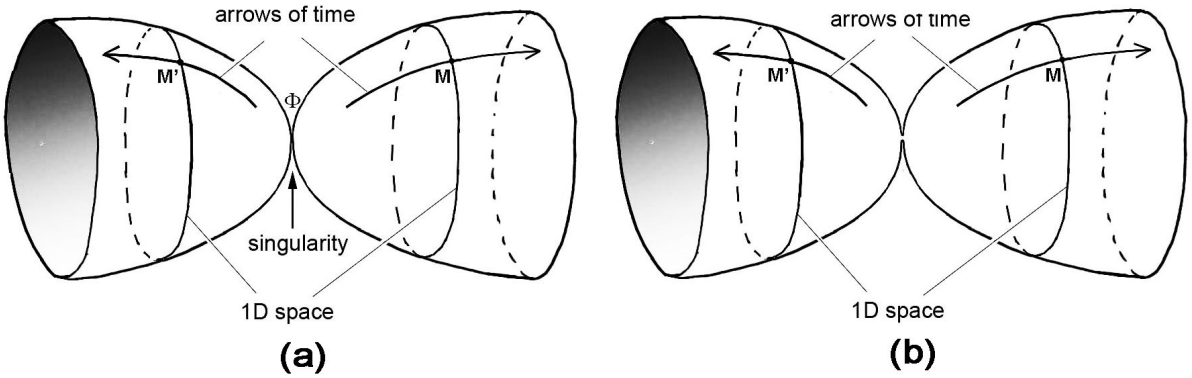


Fig. 13. Didactic representation of Andrei Sakharov's cosmology:
(a) with a singularity; (b) without a singularity.

It remains to examine how the C symmetry, i.e. charge conjugation, could be incorporated into this geometrical construction.

In [7], drawing on Souriau's theory of dynamical groups and on the Janus group, an extension of the full Poincaré group [8], we proposed introducing a fibration involving p compact dimensions.

To each spacetime event x is thus associated a compact fiber

(22) $$F = T^p = (S^1)^p$$

described by p angular coordinates

(23) $$\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_p$$

The motion of a material point then has two components: its motion in four-dimensional spacetime and its motion along the compact internal dimensions.

The continuous translations

(24) $$\theta_i \longmapsto \theta_i + \varepsilon_i$$

constitute symmetries $U(1)$. When the dynamics is invariant under these translations, Noether's theorem associates conserved quantities with them

(25) $$Q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}$$

which may play the role of charges or quantum numbers.

These continuous translations must then be distinguished from a discrete transformation of the fiber.

An involution

(26) $$C_F : F \longrightarrow F \qquad {C_F}^2 = id$$

may be chosen so as to induce

(27) $$Q_i \longmapsto - Q_i$$

Such an involution provides a geometrical candidate for representing charge conjugation C.

Figure 14 shows the didactic picture originally proposed to illustrate this idea: motion in a compact dimension is added to the trajectory in spacetime, with the two orientations associated with the two signs of the charge. See Figure 14.

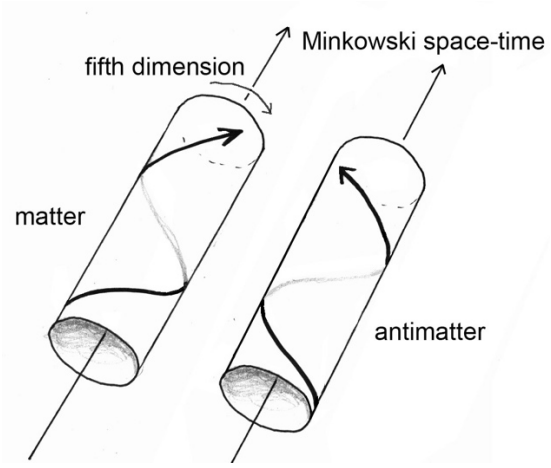


Fig. 14. Outline of a geometrical interpretation of matter–antimatter symmetry based on a compact internal dimension. [9]

The proposed construction thus has two distinct components

(28) $$PT : (X \longmapsto -X)$$

in spacetime geometry, and

(29) $$C : (Q \longmapsto -Q)$$

in the internal dimensions.

It therefore suggests the mapping

(30) $$\boxed{(X, Q) \longmapsto (-X, -Q)}$$

combining the transformations PT and C.

4 – **Result of a heuristic exploration**.

Pending the development of a more sophisticated system of field equations, a heuristic exploration is attempted using the following force scheme, which satisfies the action-reaction principle, as shown on Figure 15:

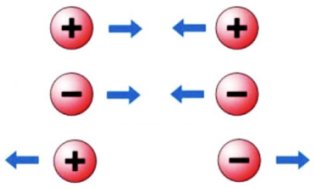


Fig. 15: The heuristic hypothesis concerning the force field.

The initial trials in 1994 [5], involving the interaction of sets of positive and negative point masses, produced a percolation phenomenon that did not appear to be readily linkable to observations. See Figure 16.

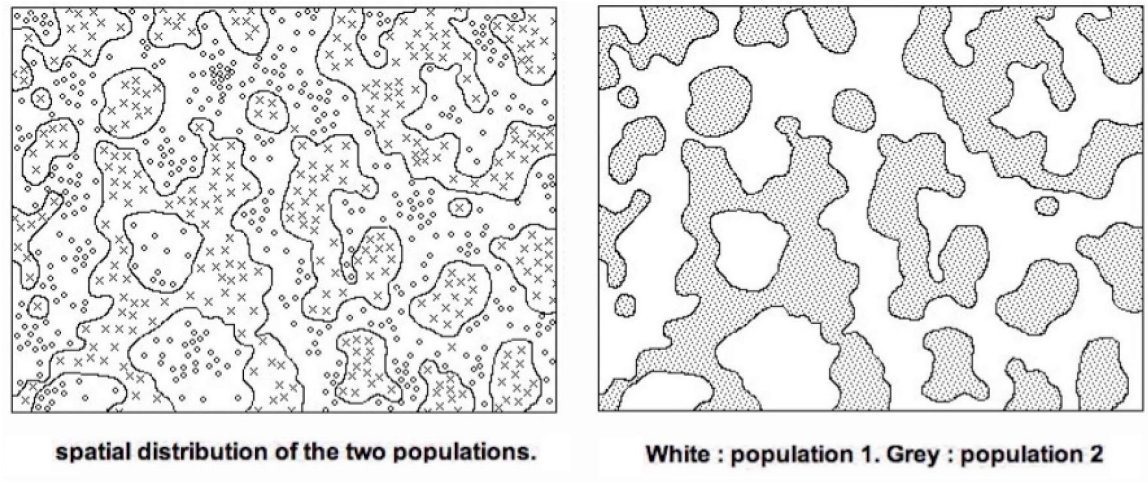


Fig.16 : Full symmetry ($|\bar{\rho}| = \rho$): percolation phenomenon [5]

However, by choosing to introduce significant asymmetry ($|\bar{\rho}| > \rho$), this simulation immediately results in the formation of a very large-scale structure, in which the negative mass forms a regular network of spheroidal clusters, while the positive mass is confined to the remaining space, taking the form of contiguous bubbles. See Figure 17.

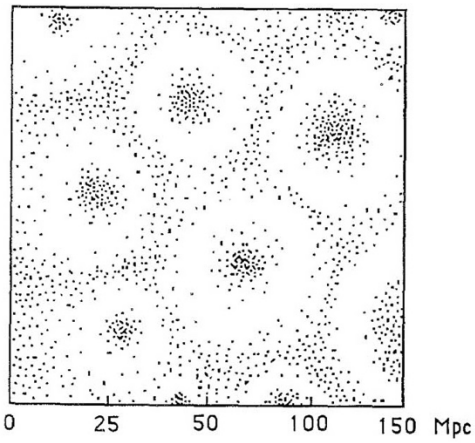


Fig.17 : Formation of the very large structure [10]

The explanation is immediately apparent. Since the Jeans timescales of the two populations differ significantly, it is the one with the shorter timescale—the negative population—that gives rise to an organized structure first.

(6) $$\bar{t}_J = \frac{1}{\sqrt{8\,\pi\,G\,\bar{\rho}}} << t_J = \frac{1}{\sqrt{8\,\pi\,G\,\rho}}$$

Even before considering the geometric and mathematical context, the approach appears promising. The two subsystems mutually confer stability upon one another. The contiguous spheres of matter entrap the negative-mass clusters, preventing them from meeting and merging; these clusters, in turn, serve as anchor points for this porous structure. See Figure 18.

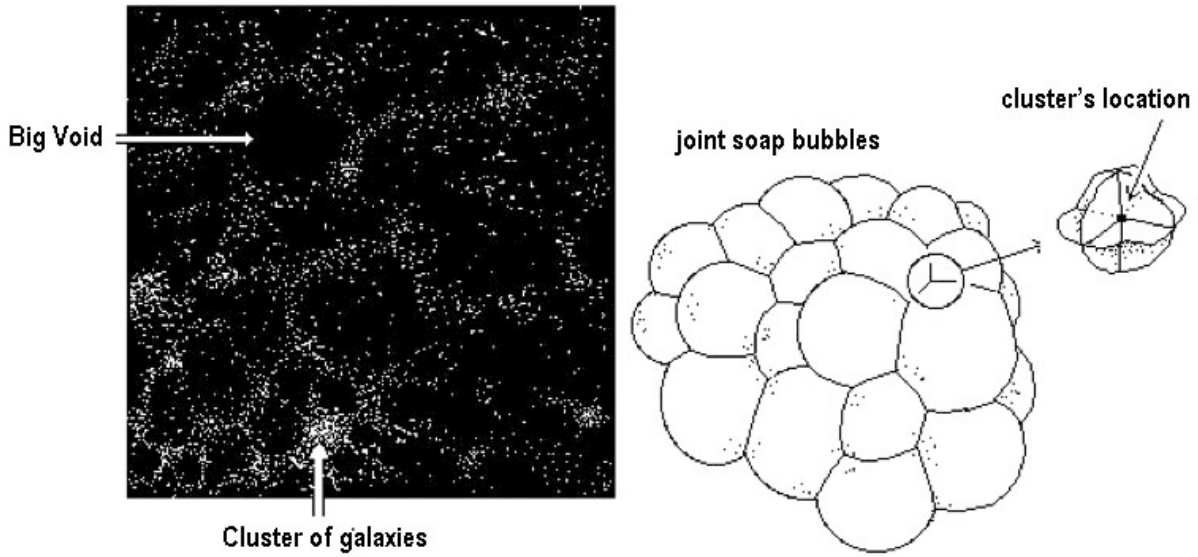


Fig.18 : Joint soap bubbles VLS structure

This suggests a novel scenario for the formation of stars and galaxies. The scientific community is currently faced with the appearance of massive, fully formed spiral galaxies at an extremely early stage—phenomena that standard models cannot explain. The primary obstacle lies in the time required to dissipate the heat generated as matter compresses into spheroidal structures. Here, however, the situation is quite different. The positive mass is not left to its own devices but undergoes intense compression between sheets; this geometry is optimal for maximizing energy dissipation through radiation. While 3D simulations could quantify this phenomenon, we lack the resources to carry out such a project. We believe that, in this context, massive spiral galaxies could form within the first hundred million years. See Figure 19.

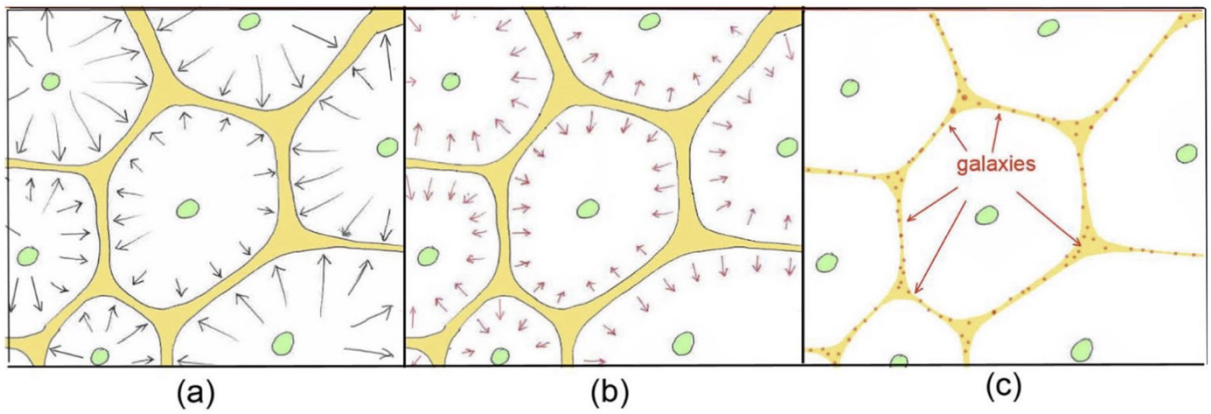


Fig. 19: Rapid galaxy formation [9]

In Figure 12a, the matter (in yellow), subjected to the back-compression exerted by negative-mass clusters (in green), undergoes violent heating. In 12b, this energy is rapidly dissipated through radiation. In 12c, having become unstable, the positive mass gives rise to all the galaxies as we observe them today.

There is no subsequent galaxy formation; all galaxies are born within the first hundred million years. As early as 1992, 2D simulations—with initial conditions describing a rotating galaxy confined by its negative-mass environment—showed the very rapid emergence (within a few rotations) of a barred spiral structure. See Figure 20.

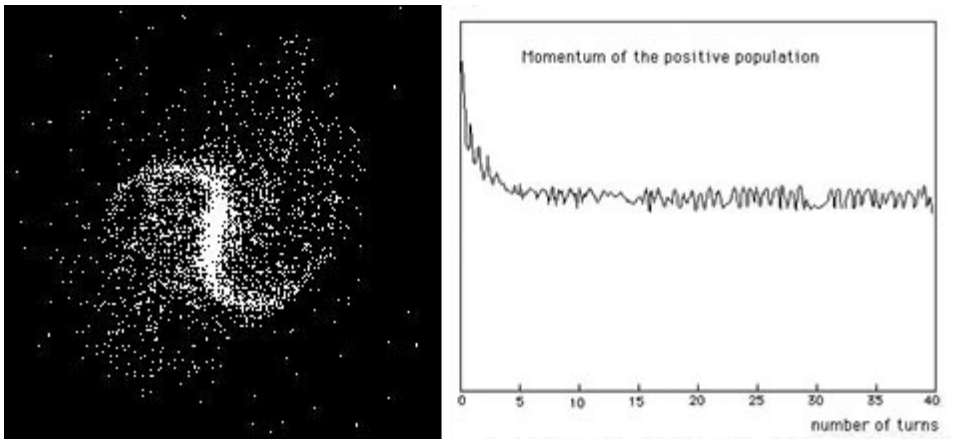


Fig. 20: Barred spiral and the evolution of its angular momentum as a function of the number of rotations [9]

The initial conditions governing these simulations were based on solving a system of two Vlasov equations coupled by the gravitational field, yielding these density profiles [5]. See Figures 21 and 22.

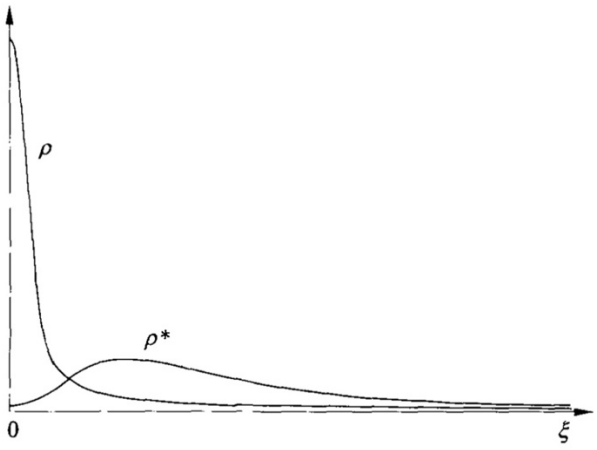


Fig. 21: Elliptic solution of two coupled Vlasov equations. Densities of positive masses ρ and negative masses ρ^* (i.e., of negative mass) [5].

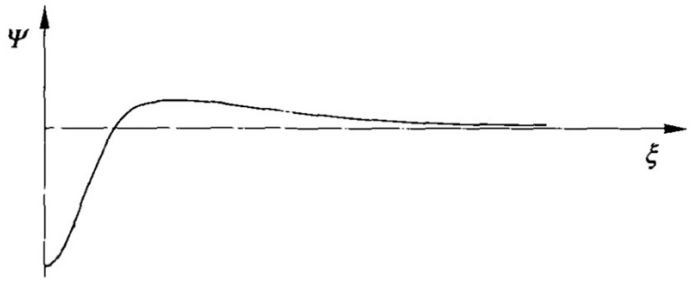


Fig. 22: The corresponding gravitational potential [5].

Thirty-four years ago, these simulations thus provided the answer to the question that the entire community of specialists continues to ask: why does this spiral structure form, and why does it persist?

> *- The answer is that it is the way in which collisionless systems exchange energy and angular momentum with their environment, through the agency of density waves. Thus, this spiral structure is destined to persist as long as the galaxy contains gas—that is, virtually indefinitely.*

Despite the very positive result obtained using this simple heuristic hypothesis regarding the direction of the forces, all specialized journals refused to review the submitted article, replying, "Sorry, we don't publish speculative works." We can only hope that today, thirty-four years later, a team with sufficient resources will take up this research again.

In this regard, one might wonder whether there is a fairly simple reason why other teams have not attempted—even on an exploratory basis—this type of computational experiment. Simulation programs—evolving from 2D to 3D—have undergone considerable development over recent decades. Thanks to tree-coding, it has become possible to handle increasingly large numbers of point masses and to incorporate both multiple stellar populations and gas. Yet, is there any program that asks the user to "specify the sign of this component's mass"? This seems unlikely, given that the scientific community operates on the basis of an irrevocable decision to exclude negative masses from cosmology and astrophysics.

However, a cosmological model cannot be based on mere heuristic speculations, however fruitful and encouraging they may be. Since a dynamic based on a single field equation immediately ran up against the "runaway" phenomenon, a bimetric approach was considered.

5- **First bimetric description by T. Damour and I. Kogan** [11]

In 2002, a 40-page article presenting the first bimetric approach was published in Physical Review D, the highest-ranked journal in the field. The authors initially envisioned the interaction of *n* branes, each equipped with its own metric, before narrowing the scope of their project to two branes: "Left" and "Right." Their aim was not to introduce negative masses. From the outset, the authors referred to the concept known as "massive gravity." Back in 1939, Fierz and Pauli [12] had added a mass term to the tensor field, thereby assigning a non-zero mass to the graviton. This gives rise to a characteristic wavelength equivalent to the Compton wavelength.

$$\lambda_g = \frac{\hbar}{m_g} \quad (7)$$

By linking this to the Hubble constant and associating it with a modification of gravity at large distances, this yields an estimate of the order of magnitude of this hypothetical graviton mass:

$$m_g c^2 = \hbar H_0 \sim 10^{-33}\, eV \quad (8)$$

In 2011, C. de Rham, G. Gabadadze, et al. [13] linked this graviton mass to the recently discovered phenomenon of accelerated expansion, leading them to a graviton mass value of the same order of magnitude.

In 1972, Boulware and Deser [14] investigated the extension of Fierz-Pauli theory to the non-linear regime. They demonstrated that such an extension generically gives rise to a sixth degree of freedom—absent from the linear theory—associated with a "ghost" instability. In this context, any cosmological model based on a modification of gravitational dynamics must therefore satisfy a crucial requirement:

- *Is this model ghost-free?*

This question lies at the heart of the concerns of the authors, T. Damour and I. Kogan [11]. Not only do their gravitons possess mass—distributed according to a specific spectrum—but they also posit a hypothetical gap separating light gravitons from heavy ones. See Figure 23.

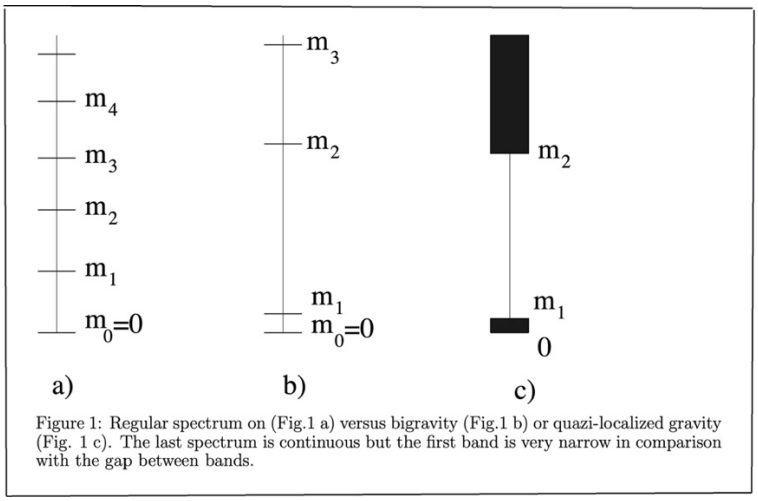


Figure 1: Regular spectrum on (Fig.1 a) versus bigravity (Fig.1 b) or quazi-localized gravity (Fig. 1 c). The last spectrum is continuous but the first band is very narrow in comparison with the gap between bands.

Fig. 23: The hypothetical gap between light gravitons and heavy gravitons [11]

The fact that this article has become a major reference in the bimetric literature has contributed to the frequent association of bigravity with *massive gravity*—often referred to as "*massive bigravity*"—yet this association is not a mathematical necessity. The bimetric nature of a theory does not, in itself, imply the existence of a massive graviton. The Janus Cosmological Model is precisely not based on such an assumption. Consequently, the specific problem of the Boulware-Deser ghost, which arises in certain non-linear extensions of massive gravity, cannot be applied to it without first demonstrating that the mechanism generating this degree of freedom is indeed present in the Janus system.

Therefore, the question of whether the Janus cosmological model is free from the Boulware-Deser ghost is irrelevant in this context, since the Janus model is not constructed as a non-linear theory of massive gravitons. This specific instability, which is a central concern in massive gravity, is thus not the one governing its construction.

The same applies to a second bimetric model, introduced between 2006 and 2008 by S. Hossenfelder [15, 16]. Here, the focus is different, aiming to construct an antigravitational interaction capable of having cosmological consequences. Indeed, the 2006 paper explicitly frames the approach within the context of "antigravity." Hossenfelder demonstrates that the kinetic energy of the new fields remains positive, while the fields themselves can contribute negatively to the source term in Einstein's equations.

Damour-Kogan, Hossenfelder, and the Janus model thus propose constructions involving two gravitational sectors and coupled field equations, albeit with different physical motivations. The question of interest here is the construction of a Lagrangian that allows such a system to be obtained variationally. To this end, we will adopt the construction proposed by Damour and Kogan.

6 – **Construction of the system of coupled field equations by T. Damour and I. Kogan** [11].

The authors consider two sectors, "left: L" and "right: R". The proposed action is then:

(9)

$$S = \int \left({M_R}^2 R^R - L^R - \Lambda^R \right) \sqrt{|g^R|}\, d^4x + \int \left({M_L}^2 R^L - L^L - \Lambda^L \right) \sqrt{|g^L|}\, d^4x - \mu^4 \int d^4\,\mathrm{x}\,(g_L\, g_R)^{\frac{1}{4}}\, V(g_L, g_R).$$

The constants M_L and M_R are "Planck masses." The inverses of their squares play the role of the Einstein-Hilbert gravitational coupling constants. What emerges from this formalism is the fact that the authors assign them the same sign.

Dans cette action on trouve deux hypervolumes élémentaires $\sqrt{|g_R|}\ d^4x$ an $\sqrt{|g_L|}\ d^4x$ \ ainsi qu'un hypervolume élémentaire équivalent $d^4\,\mathrm{x}\,(g_L\, g_R)^{\frac{1}{4}}$ lié au terme traduisant l'interaction entre les deux populations. μ is an interaction constant and $V(g_L, g_R)$ is an interaction potential.

Let us forget the two cosmological constants.Λ^R and Λ^L.

When performing the variational calculation, the terms $R^R\sqrt{|g_R|}$ and $R^L\sqrt{|g_L|}$ yield the "geometric tensors" $G^R_{\mu\nu}$ and $G^L_{\mu\nu}$\$—that is, the left-hand sides of the two field equations.

The two Lagrangian densities of the two materials $L^R\ \sqrt{|g^R|}$ et $L^L\sqrt{|g_L|}$ give source tensors $T^R_{\mu\nu}$ and $T^L_{\mu\nu}$

The variations on the interaction term $-\mu^4 \int d^4x \, (g_L \, g_R)^{\frac{1}{4}} \, V(g_L \, , g_R \,)$.

Gives interaction tensors $K_{\mu\nu}^{L/R}$ and $K_{\mu\nu}^{R/L}$

- The notation $K_{\mu\nu}^{L/R}$ represents the contribution of matter L to the field acting on matter R.
- The notation $K_{\mu\nu}^{R/L}$ represents the contribution of matter R to the field acting on matter L.

Hence the system of two field equations coupled by their interaction terms.:

(10a) $$G_{\mu\nu}^R \; = \; R_{\mu\nu}^R \; - \; \frac{1}{2} \, R^R \, g_{\mu\nu}^R \; = \; \frac{1}{{M_R}^2} \left[\, T_{\mu\nu}^R \; + \; t_{\mu\nu}^{L/R} \right]$$

(10b) $$G \, {}_{\mu\nu}^{L} \; = \; R \, {}_{\mu\nu}^{L} \; - \; \frac{1}{2} \, R^L \, g_{\mu\nu}^L \; = \; \frac{1}{{M_L}^2} \left[\, T_{\mu\nu}^L \; + \; t_{\mu\nu}^{R/L} \; \right]$$

Which can be written by explicitly showing the gravitational coupling constants χ_R and χ_L:

(11a) $$G_{\mu\nu}^R \; = \; R_{\mu\nu}^R \; - \; \frac{1}{2} \, R^R \, g_{\mu\nu}^R \; = \; \chi_R \left[\, T_{\mu\nu}^R \; + \; t_{\mu\nu}^{L/R} \right]$$

(11b) $$G \, {}_{\mu\nu}^{L} \; = \; R \, {}_{\mu\nu}^{L} \; - \; \frac{1}{2} \, R^L \, g_{\mu\nu}^L \; = \; \chi_L \left[\, T_{\mu\nu}^L \; + \; t_{\mu\nu}^{R/L} \; \right]$$

Noting that the Damour-Kogan approach posits that:

(12) $$\chi_R \chi_L \; > \; 0$$

Based on the two metrics, we have covariant derivative operators.∇_R^ν and ∇_L^ν

As we have, by construction:

(13) $$\nabla_R^\nu G_{\mu\nu}^R \; = \; \nabla_L^\nu G \, {}_{\mu\nu}^{L} \; = \; 0$$

The mathematical consistency of the system requires:

(14a) $$\nabla_R^\nu \left(\, T_{\mu\nu}^R \; + \; t_{\mu\nu}^{L/R} \, \right) \; = \; 0$$

(14b) $$\nabla_L^\nu \left(\, T_{\mu\nu}^L \; + \; t_{\mu\nu}^{R/L} \, \right) \; = \; 0$$

After reviewing various forms of interaction potentials, this 40-page article leads to no results that can be compared with observational data.

7 – **S. Hossenfelder's system of coupled field equations**. [16]

S. Hossenfelder's approach also relies on an action. :
(15)

$$S = \int d^4x \left[\sqrt{-g}\left({}^{(g)}R/8\pi G + \mathcal{L}(\psi)\right) + \sqrt{-h}\, P_{\underline{h}}\left(\underline{\mathcal{L}}\left(\underline{\phi}\right)\right)\right]$$

$$+ \int d^4x \left[\left({}^{(h)}R/8\pi G + \underline{\mathcal{L}}\left(\underline{\phi}\right)\right) + \sqrt{-\underline{g}}\, P_g\left(\mathcal{L}(\psi)\right)\right]$$

We have added the brackets, which are missing from the article. Its way of managing the interaction between its two sectors g and h is different in that two terms appear representing:

- One, the action of the field ϕ, originating from the population h, on the elements of the sector g a term weighted by the elementary hypervolume $\sqrt{-h}\, d^4x$
- The other, the action of the field ψ, originating from the population g, on the elements of the sector h a term weighted by the elementary hypervolume $\sqrt{-g}\, d^4x$

It is this approach that leads to the system of coupled field equations.:

(16a) $$ {}^{(g)}R_{\kappa\nu} - \frac{1}{2} g_{\kappa\nu}\, {}^{(g)}R = T_{\kappa\nu} - \underline{V}\sqrt{\frac{\underline{h}}{g}}\; a_{\underline{\nu}}^{\underline{\nu}}\, a_{\underline{\kappa}}^{\underline{\kappa}}\, \underline{T}_{\underline{\nu}\,\underline{\kappa}} $$

(16b) $$ {}^{(\underline{h})}R_{\underline{\nu}\,\underline{\kappa}} - \frac{1}{2} h_{\underline{\nu}\,\underline{\kappa}}\, {}^{(h)}R = \underline{T}_{\underline{\nu}\,\underline{\kappa}} - W\sqrt{\frac{g}{\underline{h}}}\; a_{\underline{\kappa}}^{\kappa}\, a_{\underline{\nu}}^{\nu}\, T_{\kappa\,\nu} $$

It is the similarity in construction that also gives rise to the square root of the ratio of the determinants of the two metrics—and its inverse—in the Janus cosmological model, subject to a change of notation: the metrics are then $g_{\mu\nu}$ and $\bar{g}_{\mu\nu}$.

(17a) $$ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}}\,\hat{\bar{T}}_{\mu\nu}\right) $$

(17b) $$ \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = -\chi\left(\bar{T}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}}\,\hat{T}_{\mu\nu}\right) $$

A strong similarity is thus observed between the three systems of coupled field equations. But how do they differ? In the Janus model, the gravitational coupling constants are equal and opposite. In Hossenfelder's model, they are equal. In the Damour-Kogan model, they have the same sign.

8 – **Standardization of notation**.

The shift to a bimetric system sheds new light on this issue. What about the approaches proposed by Damour and Hossenfelder? Since the components of their coupled field equation

systems satisfy the mathematical constraints arising from the shared form of the Bianchi identities, the choice of free parameters allows for a wide range of possible models. Let us express both systems in a common form by changing the notation:

(18) $$g^L_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}$$

(19) $$g^R_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu}$$

(20) $$R_{\mu\nu}(g^L) = {}^{(g)}R_{\mu\nu} \longrightarrow R_{\mu\nu}$$

(21) $$R_{\mu\nu}(g^R) = {}^{(h)}R_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{R}_{\mu\nu}$$

(22) $$R(g^L) = {}^{(g)}R \longrightarrow R$$

(23) $$R(g^R) = {}^{(h)}R \longrightarrow \bar{R}$$

(24) $$T^L_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \longrightarrow T_{\mu\nu}$$

(25) $$T^R_{\mu\nu} = \underline{T}_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{T}_{\mu\nu}$$

(26) $$t^L_{\mu\nu} = -\underline{V}\sqrt{\frac{\underline{h}}{g}}\; a_{\underline{\nu}}^{\nu}\, a_{\underline{\kappa}}^{\kappa}\, \underline{T}_{\underline{\nu}\,\underline{\kappa}} \longrightarrow \bar{K}_{\mu\nu}$$

(27) $$t^R_{\mu\nu} = -W\sqrt{\frac{\underline{g}}{\underline{h}}}\; a_{\underline{\mu}}^{\mu}\, a_{\underline{\nu}}^{\nu}\, T_{\mu\nu} \longrightarrow K_{\mu\nu}$$

In summary, in both models we have two types of matter associated with masses m and $\bar{m}$, which follow geodesics derived from metrics $g_{\mu\nu}$ and $\bar{g}_{\mu\nu}$. From these, Ricci tensors $R_{\mu\nu}$ and $\bar{R}_{\mu\nu}$ and corresponding Ricci scalars R and $\bar{R}$. are constructed. The source tensors associated with these two types of matter are $T_{\mu\nu}$ and $\bar{T}_{\mu\nu}$.

- $\bar{K}_{\mu\nu}$ est un tenseur que l'on qualifiera de tenseur d'interaction, (désigné par $t^L_{\mu\nu}$ chez Damour et Kogan), qui prend en charge l'action du champ de matière $\bar{m}$, sur les géodésiques empruntée par les masses m .

- $K_{\mu\nu}$ is a tensor—referred to as the interaction tensor (denoted by $t^R_{\mu\nu}$ by Damour and Kogan)—that accounts for the action of the matter field m on the geodesics followed by the masses $\bar{m}$.

Under these conditions, the two systems—those of Damour and Hossenfelder—can be written in the form :

(28a) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \bar{K}_{\mu\nu}$$

(28b) $$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}$$

In both approaches, the authors assume the conservation of both types of matter—that is to say:

$$(29) \qquad \nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = \bar{\nabla}^{\nu} \bar{T}_{\mu\nu} = 0$$

∇^{ν} and $\bar{\nabla}^{\nu}$ being the two covariant derivative operators constructed from the metrics $g_{\mu\nu}$ and $\bar{g}_{\mu\nu}$ this immediately leads to the two constraints that determine the form of the interaction tensors:

$$(30) \qquad \nabla^{\nu} \bar{K}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}^{\nu} K_{\mu\nu} = 0$$

Following the two cited articles, the discussions depend on the intended objectives. In [11], there is no mention of negative masses at any point. In that article, the observer is assumed to reside on one of the two branes, which therefore corresponds to matter—to standard mass. The authors note (in Section 4.3) that bigravity exactly satisfies the equivalence principle and that this model is compatible with local observational data. Regarding what is termed a "bi-cosmological configuration," they suggest that the action of this second type of matter could account for the recently discovered phenomenon of accelerating cosmic expansion. In Section VII of [11], which addresses potential observables, the author writes—we quote:

- *Since the matter contents of both types of fields is identical the source terms in the second members of the field equations cancel identically, no matter how large their values are.*

The equations of the Janus cosmological model also derive from an action (EPJC 2024 [9]). For reasons to be explained later, we will show that the Janus model equations can be derived from the Damour-Kogan action, subject to a slight modification.

9 – **Thanks to a slight modification, the Janus model becomes a variant of** [11].

The gravitational coupling constants χ_R and χ_L are already present in the action of [11].

(31)

$$S = \int (R^R - \chi_R L^R - \Lambda^R)\sqrt{|g^R|}\, d^4x + \int (R^L - \chi_L L^L - \Lambda^L)\sqrt{|g^L|}\, d^4x$$
$$- \mu^4 \int d^4\mathrm{x} (g_L\, g_R)^{\frac{1}{4}}\, V(g_L, g_R).$$

The system of equations being:

$$(32a) \qquad R^R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^R\, g^R_{\mu\nu} = \chi_R \left[T^R_{\mu\nu} + t^{L/R}_{\mu\nu}\right]$$

$$(32b) \qquad R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^L\, g^L_{\mu\nu} = \chi_L \left[T^L_{\mu\nu} + t^{R/L}_{\mu\nu}\right]$$

Given that at Damour and Kogan $\chi_R \chi_L > 0$

Or, using our notation, by posing $\chi_R = \chi$ and $\chi_L = \bar{\chi}$:

(32c) $$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}\,\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\chi}\left[\bar{T}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}\right]$$

As we are opting to preserve both types of materials:

(33) $$\nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = \bar{\nabla}^{\nu} \bar{T}_{\mu\nu} = 0$$

Which will necessitate:

(34) $$\nabla^{\nu} \bar{K}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}^{\nu} K_{\mu\nu} = 0$$

If this condition is met, one is then free to choose the signs of the source terms, except for the one that would be identified with standard, self-attractive matter.

This is where the benefit of the Janus model's heuristic approach lies; at the outset, this approach involved assigning a priori force directions corresponding to Figure 9. We therefore chose, heuristically, to adopt a system in which the two types of masses repel each other. We will adjust the signs of the terms in the various tensors and the Einstein constants to align with these force directions. Let us consider the Newtonian approximation regime. Under these conditions:

(35) $$T_{00} = \rho > 0 \quad (i \neq 0\,;\, j \neq 0) \longrightarrow \quad T_{ij} \cong 0$$

(36) $$\bar{T}_{00} = \bar{\rho} < 0 \quad (i \neq 0\,;\, j \neq 0) \longrightarrow \quad \bar{T}_{ij} \cong 0$$

For the second type of matter to be self-attractive as well, the coupling constants must have opposite signs. And we shall choose them to be equal and opposite:

(37) $$\boxed{\bar{\chi} = -\chi}$$

We shall assume that the Newtonian approximation has the same effect on the interaction tensors and , that is to say:

(38) $$K_{00} > 0 \quad (i \neq 0\,;\, j \neq 0) \longrightarrow \quad K_{ij} \cong 0$$

(39) $$\bar{K}_{00} < 0 \quad (i \neq 0\,;\, j \neq 0) \longrightarrow \quad \bar{K}_{ij} \cong 0$$

Under these conditions, the heuristic laws hold true. The principles of equivalence and action-reaction are satisfied. We recall the benefits gained from the heuristic approach. A similar procedure could be carried out starting from Sabine Hossenfelder's model and also adding Einstein constants of opposite signs ($\bar{\chi} = -\chi$); however, we shall limit ourselves to the derivation presented in [9].

It now remains for us to revisit the construction of solutions for the Janus cosmological model and the issue of their satisfying the Bianchi conditions.

10 – **Unsteady-state solution for isotropic and homogeneous media**.

By assigning the following forms to the interaction tensors:

$$K_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad ; \quad \bar{K}_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} \tag{40}$$

We obtain the trivial unsteady solution:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} \tag{41}$$

With :

$$|\bar{\rho}| = \rho \tag{42}$$

In other words, zero density and a zero gravitational field. This recovers the Dirac-Milne linear expansion model [17].

Still seeking a time-dependent solution under conditions of isotropy and homogeneity, we looked for a solution [18] such that:

$$K_{\mu\nu} = \phi\, T_{\mu\nu} \quad ; \quad \bar{K}_{\mu\nu} = \varphi\, \bar{T}_{\mu\nu} \tag{43}$$

where φ and ϕ are functions of time. Symmetry gives the metrics the following FLRW forms:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{du^2}{1 - k\,u^2} + u^2\, d\Omega^2 \right) \tag{44}$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{c}^2 dt^2 - \bar{a}^2 \left(\frac{du^2}{1 - \bar{k}\,u^2} + u^2\, d\Omega^2 \right) \tag{45}$$

By introducing these FLRW metrics into our bi-metric system, we obtain a system of four second-order differential equations yielding the scale factors a and $\bar{a}$.. Requiring the system to be consistent will provide the equivalent of the Bianchi condition for this type of solution. The system of field equations becomes:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \chi \left[T_{\mu\nu} + \varphi\, \bar{T}_{\mu\nu} \right] \tag{46a}$$

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = -\chi \left[\bar{T}_{\mu\nu} + \phi\, T_{\mu\nu} \right] \tag{47b}$$

With : :

$$\chi = -\frac{8\,\pi\,G}{c^2} \tag{48}$$

By considering the two scenarios using the equation of state:

$$p = \frac{\beta\,\rho\,c^2}{3} \qquad \bar{p} = \frac{\beta\,\bar{\rho}\,\bar{c}^2}{3} \tag{49}$$

With $\beta = 0$ for the matter-dominated era and $\beta = 1$ for the radiation-dominated era, compatibility is ensured (Appendix 1) by the equation:

(50) $$\boxed{\rho\, c^2 a^{(3+\beta)} + \bar{\rho}\, \bar{c}^2 \bar{a}^{(3+\beta)} = E = Cst}$$

Which translates to a generalized conservation of energy. The system then gives (Appendix 1), for the matter-dominated era:

(51a) $$\dot{a} = c\sqrt{-k - \frac{8\pi G E}{3a}}$$

(52a) $$\ddot{a} = -\frac{4\pi G E}{3a^2}$$

(51b) $$\dot{\bar{a}} = \bar{c}\sqrt{-\bar{k} + \frac{8\pi G E}{3\bar{a}}}$$

(52) $$\ddot{\bar{a}} = \frac{4\pi G E}{3\bar{a}^2}$$

Observation yields $\ddot{a} > 0$, hence $E < 0$. Negative mass dominates and drives galactic dynamics. This provides an alternative interpretation to that of dark energy. It also implies $k = -1$.

The evolution of the negative species occurs for $\ddot{\bar{a}} < 0$ and corresponds to the hyperbolic Friedmann solution. At infinity, it tends toward $\bar{c}\, t$. Similarly, at infinity, a tends toward ct. The equations also impose $\bar{k} = -1$.

The exact solution to equation (52a) was constructed by William Bonnor [19] in parametric form. With $x^\circ = ct$:

(53) $$a(\mu) = \alpha^2 c\ ch^2 u$$

(54) $$t(\mu) = 2\alpha^2 c\left(1 + \frac{sh\,2u}{2} + u\right)$$

Which give us the curves of Figure 24:

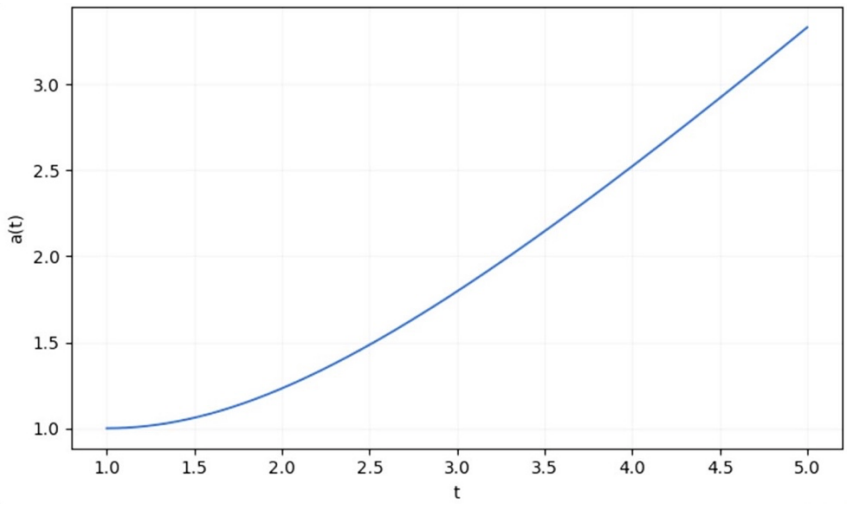


Fig.24 : Expansion of the universe

Profile corresponding to variable acceleration is shown on Figure 25:

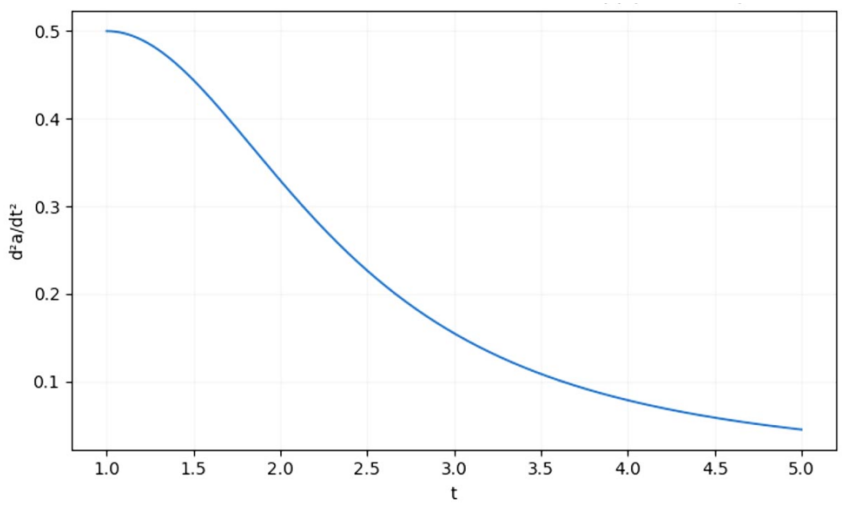


Fig. 25: Evolution of acceleration.

This yields an interpretation of the origin of the accelerated expansion as an alternative to the dark energy hypothesis. The model predicts a significant acceleration value in the past—a finding seemingly supported by initial observational data from DESI [20], though confirmation from further observational data is still required.
Data regarding the dynamics of the negative species are not amenable to observation. For the radiation-dominated era and positive mass, the choice is made to extend the model with a curvature index of -1.

It is thus evident that the system of field equations is capable of yielding a mathematically consistent non-stationary solution describing isotropic and homogeneous media.

11 - **Spherically symmetric stationary solution**.

In a vacuum, the satisfaction of the Bianchi conditions is automatic.

(55a) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 0$$

(55b) $$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = 0$$

In a region of space with non-zero matter density, two cases must be considered.

First case: The field is created by a positive mass. The system becomes:

(56a) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$$

(56b) $$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = -\chi\, K_{\mu\nu}$$

The solution to the first equation is the classical solution—along with its TOV equation—which applies equally to the Newtonian approximation and to very dense objects such as neutron stars. The classical TOV equation is then:

$$(57) \qquad \frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p/c^2)(m + 4\pi G p r^3/c^4)c^2}{r(r-2m)}$$

Et la métrique intérieure :

$$(58) \quad ds^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{{R_a}^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{R^2}{\hat{R}^2}}\right]^2 c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{R}^2}{1-\frac{R^2}{\hat{R}^2}} - R^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

If one were to consider constructing the interior metric $\bar{g}_{\mu\nu}^{int}$, it would then be necessary to define the form of the interaction tensor $K_{\mu\nu}$. However, this approach would not yield any elements capable of being compared with observational data, since our measuring instruments are unable to detect negative-energy photons. We are therefore not required to provide these elements.

Second case: the field is created by a negative mass. The system becomes:

$$(59a) \qquad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} = \chi\,\bar{K}_{\mu\nu}$$

$$(59b) \qquad \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}\,\bar{g}_{\mu\nu} = -\chi\,\bar{T}_{\mu\nu}$$

In this instance, we must define the interaction tensor $\bar{K}_{\mu\nu}$, as it is what yields the observables. The two equations will give rise to their own TOV equations—the equivalents of the Bianchi identities in this context. For the solution to be mathematically consistent, compatibility must be ensured.

As early as 2019 [21], it was shown that by opting for:

$$(60) \qquad \bar{K}_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\bar{c}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{q} \end{pmatrix}$$

Namely, the source tensor with the signs of the pressure terms inverted; this led to the TOV equation:

$$(61) \qquad \bar{q}' = -\frac{(\bar{\rho}\,\bar{c}^2 + \bar{q}')(-\bar{m} + 4\pi G\,\bar{q}'\,r^3/c^4)}{r(r+2\bar{m})}$$

Compatibility is then ensured—asymptotically, in the Newtonian approximation—with $\bar{q} = \bar{p}$. The two TOV equations then yield the same Euler equation, representing the equilibrium between pressure forces and the force of gravity:

$$(62) \qquad \bar{p}' = \frac{\bar{\rho}\,\bar{c}^2\bar{m}}{r^2} = \frac{G\,\bar{\rho}\,\bar{M}}{r^2}$$

The Newtonian approximation means that this type of solution cannot handle cases where the negative-mass object—the source of the field—falls outside that framework. However, numerical simulations modeling the universe's large-scale structure produce vast, spherically

symmetric negative-mass conglomerates made of negative-mass antihydrogen and antihelium. The cooling time for such objects exceeds the age of the universe; they do not evolve. Their temperature remains around 3,000 K, and they simply radiate in the red and infrared spectra as negative-energy photons that escape detection. Yet, for travelers aboard a spacecraft capable of inverting its mass—thereby utilizing this negative realm as a sort of parallel universe—this is the spectacle that would meet their eyes. This world does not evolve and gives rise to neither stars nor galaxies; life is absent from it.

In conclusion, this Newtonian solution suffices to describe the full range of phenomena, as the negative-mass realm does not harbor superdense objects. From an observational standpoint, the interior metric $g_{\mu\nu}^{int}$ will be used to calculate the luminosity attenuation effect for objects located behind a negative-mass conglomerate—specifically, the one we believe lies at the center of the formation known as the "dipole repeller" [22]. Details regarding the construction of this metric are provided in Appendix 2.

In the vicinity of this negative-mass object, the exterior metric is:

$$(63) \qquad ds^2 = \left(1 + \frac{8\,\pi\,G\,\rho\,r^2)}{3\,c^2}\right) c^2\,dt^2 - \left(1 - \frac{8\,\pi\,G\,\rho\,r^2)}{3\,c^2}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Which matches the external metric, also linearized.

$$(64) \qquad ds^2 = \left(1 + \frac{2\,G\,|\bar{M}|)}{c^2 r}\right) c^2\,dt^2 - \left(1 - \frac{2\,G\,|\bar{M}|)}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

This result should make it possible to assess the loss of brightness of background sources due to negative lensing, in order to compare them with observational data once the latter become available.

12. **Re-examination of objections raised against the consistency of the Janus model.**

12.1. **Chronology of objections and responses**.

On January 4, 2019, based on a paper published in 2014 [23], T. Damour posted an initial highly critical titled "On the Janus cosmological model" [24] on his personal page on the IHES website. He informed J.-P. Petit of this via a registered letter with acknowledgment of receipt [25] sent to his home address.

A reply was sent to him, pointing out that some of his criticisms concerned equations affected by a typographical error in the article on which he based his analysis—specifically, the notation distinguishing interaction tensors from matter tensors had been omitted in the published version. This reply was accompanied by an article titled "Physical and Mathematical Consistency of the Janus Model," published in *Progress in Physics* that same month [21], as well as a proposal for a meeting to examine the calculations in question directly. This proposal received no response.

It should be noted, however, that although T. Damour specifies that his analysis is based on the two articles published in 2014, he does not discuss—nor does he subsequently do so—the non-

stationary, homogeneous, and isotropic cosmological solution constructed in one of them [18]. Yet this solution constitutes an explicit case in which both systems of field equations are simultaneously satisfied, including the constraints resulting from the Bianchi identities.

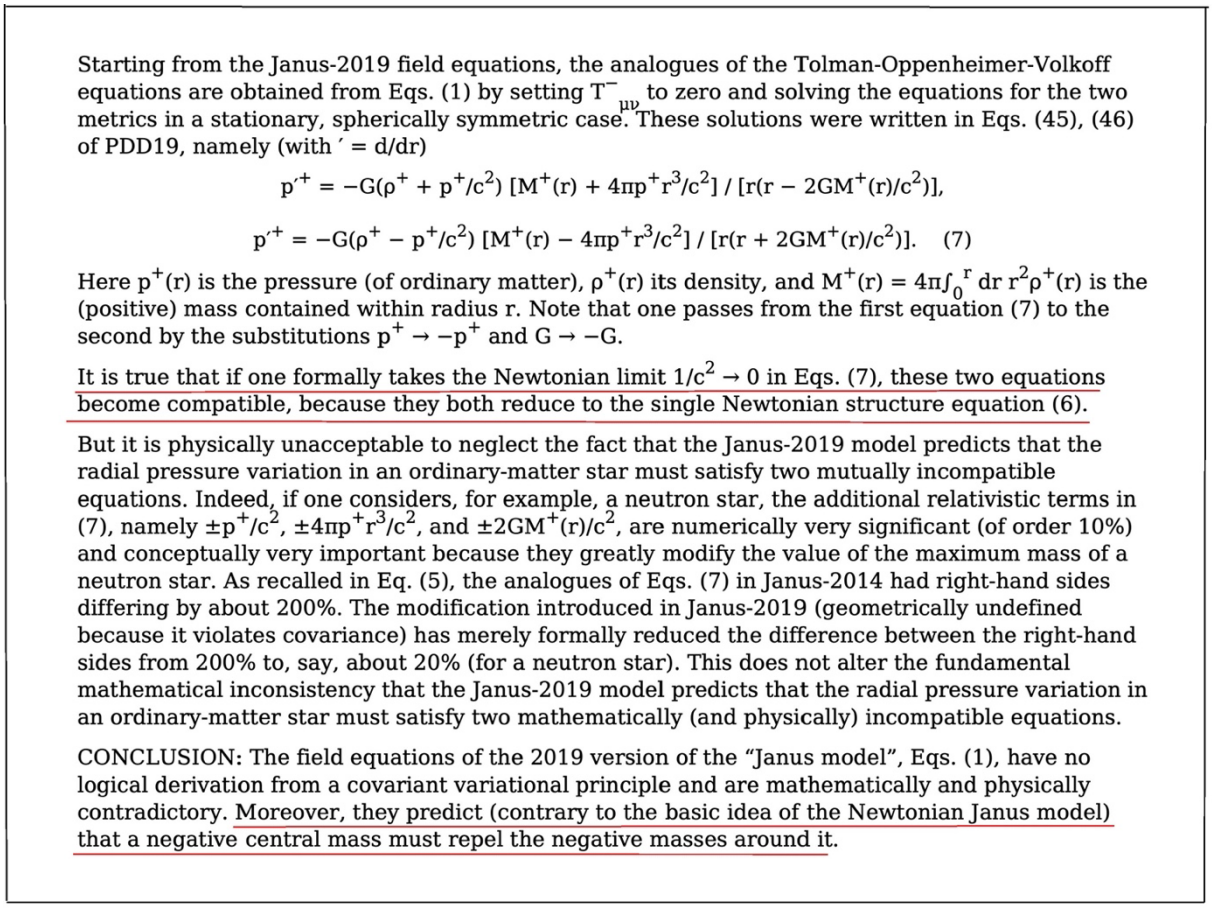
In September 2019, a much more detailed document—explicitly setting out the calculations and, in particular, the analysis of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations in the Newtonian limit—was sent to T. Damour via registered mail with acknowledgment of receipt [26]. This letter also went unanswered. The document was made public in 2020, in both French and English, as an open letter posted on Jean-Pierre Petit's website, so that the calculations could be independently examined.

In the years that followed, the published document prompted several French and foreign scientists to examine the calculations. In 2022, Marie-France Duval, a former astrophysics lecturer at the University of Marseille, initiated a new approach to T. Damour together with several colleagues. A joint letter, accompanied by an analysis of the calculations in question, was sent to him via registered mail with acknowledgment of receipt on November 31, 2022 [27].

On December 12, 2022, T. Damour informed J.-P. Petit by email that he had posted a new article [28] on the IHES website—bearing the same title as before, "Physical and mathematical inconsistency of the Janus cosmological model"—which, in his view, contained "serious inconsistencies."

While in this article—as in the 2019 one—he reiterates that his analysis focuses on the two papers published in 2014 K [18, 23], he says nothing about the paper published in “Astrophysics and Space Science” [18], which presents a non-stationary solution—under conditions of homogeneity and isotropy—that satisfies the Bianchi conditions. Everything suggests, therefore, that he has still not consulted it.

However, with a three-year delay, he shows that he has examined the details of the calculations published in January 2019 [21]—the details of which had been sent to him in September 2019 [26] and which demonstrated the possibility of constructing a solution in the Newtonian approximation under steady-state conditions—and writes, see Figure 26.



Starting from the Janus-2019 field equations, the analogues of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations are obtained from Eqs. (1) by setting $T^{-}_{\mu\nu}$ to zero and solving the equations for the two metrics in a stationary, spherically symmetric case. These solutions were written in Eqs. (45), (46) of PDD19, namely (with $' = d/dr$)

$$p'^{+} = -G(\rho^{+} + p^{+}/c^2)\,[M^{+}(r) + 4\pi p^{+} r^3/c^2]\,/\,[r(r - 2GM^{+}(r)/c^2)],$$

$$p'^{+} = -G(\rho^{+} - p^{+}/c^2)\,[M^{+}(r) - 4\pi p^{+} r^3/c^2]\,/\,[r(r + 2GM^{+}(r)/c^2)]. \quad (7)$$

Here $p^{+}(r)$ is the pressure (of ordinary matter), $\rho^{+}(r)$ its density, and $M^{+}(r) = 4\pi\int_0^r dr\, r^2\rho^{+}(r)$ is the (positive) mass contained within radius r. Note that one passes from the first equation (7) to the second by the substitutions $p^{+} \to -p^{+}$ and $G \to -G$.

It is true that if one formally takes the Newtonian limit $1/c^2 \to 0$ in Eqs. (7), these two equations become compatible, because they both reduce to the single Newtonian structure equation (6).

But it is physically unacceptable to neglect the fact that the Janus-2019 model predicts that the radial pressure variation in an ordinary-matter star must satisfy two mutually incompatible equations. Indeed, if one considers, for example, a neutron star, the additional relativistic terms in (7), namely $\pm p^{+}/c^2$, $\pm 4\pi p^{+} r^3/c^2$, and $\pm 2GM^{+}(r)/c^2$, are numerically very significant (of order 10%) and conceptually very important because they greatly modify the value of the maximum mass of a neutron star. As recalled in Eq. (5), the analogues of Eqs. (7) in Janus-2014 had right-hand sides differing by about 200%. The modification introduced in Janus-2019 (geometrically undefined because it violates covariance) has merely formally reduced the difference between the right-hand sides from 200% to, say, about 20% (for a neutron star). This does not alter the fundamental mathematical inconsistency that the Janus-2019 model predicts that the radial pressure variation in an ordinary-matter star must satisfy two mathematically (and physically) incompatible equations.

CONCLUSION: The field equations of the 2019 version of the "Janus model", Eqs. (1), have no logical derivation from a covariant variational principle and are mathematically and physically contradictory. Moreover, they predict (contrary to the basic idea of the Newtonian Janus model) that a negative central mass must repel the negative masses around it.

Fig. 26: Excerpt from the article posted on the IHES website by T. Damour on December 12, 2022 [28].

However, in the last line (underlined in red), he writes that the Janus equations predict that negative masses must repel each other. In a letter dated December 14, 2022 [29], we pointed out his error. T. Damour then withdrew the version dated December 12 and replaced it with a new document dated December 28, 2022 [30], bearing the same title. This second version, like the January 2019 document, remains accessible—four years after its initial posting—via T. Damour's personal page on the IHES website. The differences between the versions dated December 12, 2022 [28] and December 28, 2022 [30], as well as their relationship to the objection raised in the letter dated December 14, 2022 [29], will be examined later.

A further step was taken in 2024 with the publication in European Physical Journal [9] of a derivation of the Janus system from an action. This formulation notably allows for the definition of interaction tensors via variation of the action and enables the issue of compatibility with Bianchi identities to be revisited within this framework. The article also reviews the analysis conducted as early as 2019 [21] regarding the spherically symmetric stationary case and its Newtonian limit.

In 2025, a draft letter calling for a scientific debate on the Janus model to be held at the Academy of Sciences was made public on J.-P. Petit's website to gather co-signatures. This letter, co-signed by 54 French and international scientists, was subsequently sent to Françoise Combes, President of the Academy of Sciences. As of the time of writing, this request has received no response [31].

This chronology is presented neither as an argument in favor of the Janus model nor as a response to the objections raised against it. Its purpose is to identify the various documents to which we will refer and to specify the sequence in which arguments were formulated, responses were communicated, and texts were modified. The question of the model's consistency must be resolved independently of this history, through an examination of the field equations, the Bianchi identities, and the solutions they admit.

The two articles by T. Damour addressing the alleged inconsistency of the Janus cosmological model—published in January 2019 [24] and December 2022 [30] respectively, and still available on his personal IHES webpage—were not published in a peer-reviewed scientific journal but were instead posted online on that personal institutional page. This circumstance obviously implies nothing regarding the validity or invalidity of the arguments contained therein. However, it has significant implications for the conditions under which scientific debate takes place. When a critique explicitly targeting an author's published work appears in a scientific journal, editorial procedures generally allow the author in question to submit a response—such as a "Letter," "Comment," or "Reply," depending on the journal's specific guidelines. The author can then address the objections raised in detail and refer back to published articles where the issues in question were already discussed. This response is, in turn, subject to the journal's editorial process and can thus become part of the scientific literature on the same footing as the critique to which it responds. Posting T. Damour's two critiques on his personal IHES webpage did not provide such a framework for a structured exchange of views. Therefore, we will now examine the objections raised in these two articles one by one and compare them against the equations, solutions, and scientific publications presented or cited in the preceding sections.

12.2. **First objection: compatibility of the two Bianchi identities**.

In his document dated January 4, 2019 [24], he examines the system of equations he then attributes to the Janus model and concludes that it is physically and mathematically inconsistent.

This question must be distinguished from the issue of whether arbitrarily chosen source tensors could simultaneously satisfy two independent sets of differential constraints. In the model considered here, the interaction tensors are precisely not arbitrary; they are subject to the conservation conditions resulting from the Bianchi identities.

Using the notation employed previously, the field equations are written in the form:

(65a) $$G_{\mu\nu} = \chi \left[T_{\mu\nu} + \bar{K}_{\mu\nu} \right]$$

(65b) $$\bar{G}_{\mu\nu} = -\chi \left[\bar{T}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \right]$$

Geometric identities:

(66) $$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\nu \bar{G}^{\mu\nu} = 0$$

therefore require:

(67) $$\nabla_\nu \left[T_{\mu\nu} + \bar{K}_{\mu\nu} \right] = \bar{\nabla}_\nu \left[\bar{T}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \right] = 0$$

The question of compatibility is therefore not an external condition added to the system; it constitutes a constraint on the form of the interaction tensors.

Let us first consider the non-stationary case describing homogeneous and isotropic media. The initial 2014 paper [16] provides precisely such a mathematically consistent solution. Although this paper is explicitly cited by T. Damour in his two documents [24, 30], the solution itself is not examined therein.

For two homogeneous and isotropic FLRW-type metrics and for the equation of state:

(68) $$p = \beta \frac{\rho c^2}{3} \qquad \bar{p} = \beta \frac{\bar{\rho} \bar{c}^2}{3}$$

The two constraints derived from the Bianchi identities lead, as shown in Appendix 1, to:

(69) $$\varphi = \left(\frac{\bar{a}}{a} \right)^{3+\beta} \qquad \phi = \left(\frac{a}{\bar{a}} \right)^{3+\beta}$$

and consequently to the generalized conservation law:

(70) $$\rho c^2 a^{3+\beta} + \bar{\rho} \bar{c}^2 \bar{a}^{3+\beta} = E = Cst$$

Thus, within this class of solutions, the two Bianchi constraints are satisfied simultaneously. They do not lead to a contradiction but rather determine the relations that the interaction terms must satisfy.

The existence of such a solution obviously does not constitute a proof of the existence of solutions for any arbitrary distribution of matter. It suffices, however, to show that a general and necessary incompatibility between the two Bianchi identities cannot be deduced solely from the bimetric nature of the system.

This point is all the more important given that the homogeneous and isotropic cosmological solution had already been constructed in the 2014 paper Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy [18]—explicitly cited in the January 2019 document—without that solution being examined therein.

12.3. **Second objection: incompatibility of the structural equations**.

In his January 2019 paper [24], T. Damour then considers the spherically symmetric, stationary case. For the equations he employs, he derives—in the Newtonian limit—two structure equations with opposite signs. This objection was mathematically valid regarding the system as it appeared in the second 2014 paper [23]. And this is where an unfortunate set of circumstances comes into play: when the manuscript for that paper was typeset by the publisher, the hats we had included disappeared. See Figure 27.

In our model, the Universe is an M_4 manifold associated not to one single metric, but to two: $g^{(+)}_{\mu\nu}$ and $g^{(-)}_{\mu\nu}$, the former linked to species of positive mass and energy, the latter to species of negative mass and energy. From these metrics, one can build the associated Ricci tensors, $R^{(+)}_{\mu\nu}$ and $R^{(-)}_{\mu\nu}$. A system of two coupled field equations was then proposed:[20]

$$R^{(+)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(+)}g^{(+)}_{\mu\nu} = \chi\left(T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}\right), \tag{2a}$$

hat missing

$$R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(-)}g^{(+)}_{\mu\nu} = -\chi\left(T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}\right). \tag{2b}$$

where the tensors $T^{(+)}_{\mu\nu}$ and $T^{(+)}_{\mu\nu}$ represent positive and negative energy contents (and positive and negative mass contents as well). Previously, in 1957, Bondi[23] did study the possibility of introducing negative masses into the Einsteinian model with a single metric. As a result, positive masses attracted everything and negative masses repelled everything. It then led to a phenomenon that was called "runaway": when a mass $+m$ met a mass $-m$, the positive mass fled, pursued by the negative mass, both undergoing a continuous acceleration, with conservation of energy, since one of the energies was positive and the other negative.

Fig. 27: The field equations, as presented in the second 2014 paper [23]

While in the submitted version, hats marked the fundamental difference between these interaction tensors $\hat{T}^{(+)}_{\mu\nu}$ and $\hat{T}^{(-)}_{\mu\nu}$ and the field tensors $T^{(+)}_{\mu\nu}$ and $T^{(-)}_{\mu\nu}$. See Figure 28.

In our model, the Universe is an M_4 manifold associated not to one single metric, but to two: $g^{(+)}_{\mu\nu}$ and $g^{(-)}_{\mu\nu}$, the former linked to species of positive mass and energy, the latter to species of negative mass and energy. From these metrics, one can build the associated Ricci tensors, $R^{(+)}_{\mu\nu}$ and $R^{(-)}_{\mu\nu}$. A system of two coupled field equations was then proposed:[20]

$$R^{(+)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(+)}g^{(+)}_{\mu\nu} = \chi\left(T^{(+)}_{\mu\nu} + \hat{T}^{(-)}_{\mu\nu}\right) \tag{2a}$$

interaction tensors with «hat»

$$R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(-)}g^{(+)}_{\mu\nu} = -\chi\left(\hat{T}^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}\right) \tag{2b}$$

where the tensors $T^{(+)}_{\mu\nu}$ and $T^{(+)}_{\mu\nu}$ represent positive and negative energy contents (and positive and negative mass contents as well). Previously, in 1957, Bondi[23] did study the possibility of introducing negative masses into the Einsteinian model with a single metric. As a result, positive masses attracted everything and negative masses repelled everything. It then led to a phenomenon that was called "runaway": when a mass $+m$ met a mass $-m$, the positive mass fled, pursued by the negative mass, both undergoing a continuous acceleration, with conservation of energy, since one of the energies was positive and the other negative.

Fig. 28: These equations, in the original manuscript

Thus, upon receiving his registered letter with acknowledgment of receipt at our home address—dated January 4, 2019 [25] and pointing to the article he had just posted on his IHES webpage [24]—the first thing we did was to state that we were fully aware of this requirement for compatibility with Bianchi conditions; we noted that simply identifying interaction tensors with field tensors imposed the degeneracy $g^{(+)}_{\mu\nu} = g^{(-)}_{\mu\nu}$,, a condition that had already been

satisfied in the non-stationary case (assuming homogeneity and isotropy) in the form of a generalized energy conservation law (see Appendix 1). Regarding the stationary solution, we explained that, following discussions with the referee for the journal Progress in Physics, we had secured acceptance for an article—just published in the January 2019 issue [21]—presenting a solution consistent with the Newtonian approximation; we forwarded a copy of this article to him. At the same time, we proposed a meeting to discuss the points raised in his article.

However, in his registered letter with acknowledgment of receipt [25], we find, see Figure 29.

> **Copies:** I reserve the right to send copies of this letter to all the persons whom you cite on your website, in your videos, and in your letters, as well as to any person interested in the "Janus model".

Fig.29 : Damour's 2019 paper recipients [25].

It turned out, in fact, that a great many people within the French and international scientific communities, as well as in the press, had already received a copy of his article. We then proposed a meeting to T. Damour to examine these various points and shared with him the January 2019 article [21], which presented a construction of interaction tensors satisfying the constraints considered in the Newtonian limit. We received no response to this proposal or to the document over the following three years.

The details of the calculations regarding this construction of interaction tensors—which satisfy the Bianchi conditions in the Newtonian approximation—are given in Appendix 2. For an object composed of negative-mass matter, the matter tensor of the negative sector takes the form:

(71) $$\bar{T}^{\nu}_{\mu} = diag\left(\bar{\rho}, -\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}, -\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}, -\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right)$$

The compatibility condition in the Newtonian limit is then satisfied if the interaction tensor of the positive sector is given the form:

(72) $$\bar{K}^{\nu}_{\mu} = diag\left(\bar{\rho}, +\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}, +\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}, +\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}\right)$$

With $\bar{q} = -\bar{p}$. In other words, if the pressure terms of the interaction tensor are equal and opposite to those of the corresponding matter tensor.

The two TOV equations then lead, in the Newtonian limit, to the same Euler equation. With

(73) $$M(r) = 4\pi$$

We get :

(74) $$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\frac{G\bar{M}(r)\bar{\rho}}{r^2}$$

and, for the interaction tensor:

(75) $$\frac{d\,\bar{q}}{d\,r} = \frac{G\,\bar{M}(r)\,\bar{\rho}}{r^2}$$

Avec

(76) $$\bar{q} = -\bar{p}$$

The two relations then become compatible.

It is particularly worth noting that T. Damour's document of December 28, 2022, itself acknowledges that the modification introduced in 2019 eliminates the contradiction between the two Newtonian equations and leads to a single Newtonian structure equation. See Figure 30.

> It is true that if one formally takes the Newtonian limit $1/c^2 \to 0$ in Eqs. (7), these two equations become compatible, because they both reduce to the single Newtonian structure equation (6).

Fig. 30: Sentence from the article posted on the IHES website
by T. Damour on December 12, 2022 [28].

However, the scope of the result must be clarified. We do not claim here to have demonstrated the identity of the two exact TOV equations to all relativistic orders. The result established is their compatibility in the Newtonian limit, which is precisely the regime used here to describe the diffuse negative-mass structures considered in the model.

12.4. **On the management of superdense objects.**

In his 2022 paper, T. Damour acknowledges—three years after receiving the 2019 article presenting the elements discussed in the previous section—that the two structure equations become compatible in the Newtonian limit. Indeed, he writes that as $\frac{1}{c^2} \longrightarrow 0$, both equations become identical to the single Newtonian structure equation. However, he maintains his objection regarding the relativistic regime, citing the example of a neutron star, for which the $\frac{1}{c^2}$ correction terms can no longer be neglected.

He cites the model's inability to describe supermassive objects. This is incorrect for two reasons. In the case of neutron stars, the first field equation—through the exterior and interior metrics—yields the required geometry. However, there is no obligation to formulate the interaction tensor appearing in the second equation, given that pursuing this theoretical work leads to no confrontation with observational data. Indeed, our instruments do not detect negative-energy photons. Finally, developments within the Janus model show that its negative sector is populated solely by vast, low-density, spheroidal conglomerates made of light elements—devoid of structures such as galaxies, stars, or planets. Consequently, they contain no high-density objects. Conversely, the construction of the positive sector's Newtonian metric—generated by the interaction term—predicts a dimming of distant background objects, thereby offering a potential observational confirmation.

12.6. **Fourth objection: variational derivation of the system**.

In his December 2022 document, T. Damour raises two objections to the derivation proposed in the 2019 article. The first concerns the introduction of the matrix

(76) $$\varphi = diag\,(1, -1, -1, -1)$$

which he considers incompatible with general covariance. The second concerns the relation used in this derivation,

(77) $$\delta\, g^{-}_{\mu\nu} = -\,\delta\, g^{+}_{\mu\nu}$$

which, according to him, would not allow for obtaining two independent field equations via variation.

It is not necessary, in the present article, to defend this 2019 variational construction. Since then, the problem has been revisited independently. The derivation published in 2024 in the European Physical Journal C starts from a bimetric action and defines the interaction tensors by varying with respect to the two metrics. The present article goes a step further by demonstrating the close relationship between this construction and the class of bimetric actions introduced by Damour and Kogan. As shown in sections 6 through 9, the essential difference considered here lies in the relative sign of the two gravitational coupling constants. Damour and Kogan use constants of the same sign, whereas the Janus system considered here corresponds to the choice

(78) $$\bar{\chi} = -\chi$$

The criticism regarding the constant matrix and the relationship between variations used in 2019 does not, therefore, constitute an objection to the variational derivation employed in the current formulation. It concerns an earlier derivation that is no longer necessary for the definition of the system studied here.

12.6. **Objection regarding the direction of gravitational interactions**

In his critiques of the Janus model, T. Damour identifies a contradiction regarding the nature of gravitational interactions between positive and negative masses. In his article dated December 28, 2022, his reasoning involves requiring a single four-velocity field—associated with a test particle—to simultaneously satisfy two geodesic equations, constructed respectively from the connections associated with the metrics g^{+} and g^{-}.. In the document dated December 28, 2022 **[30],** T. Damour explicitly states that “the same [...] four-velocity field” must satisfy, in turn, geodesic equations (5) and (6), which are associated with the two metrics.

This prescription is inconsistent with the foundational assumptions of the Janus model. In that model, the two species of particles are associated with two different metrics. Positive-mass test particles follow the geodesics of the metric g^{+} the solution to the first field equation—whereas negative-mass test particles follow the geodesics of the metric g^{-} the solution to the second field equation. A single test particle is therefore not assumed to follow the geodesics of both metrics simultaneously.

The reasoning leading to the contradiction put forward by T. Damour becomes clear when he takes the Newtonian limit. By successively applying the connections associated with the two metrics to the same four-velocity field u_{μ}^{+},, he obtains two accelerations of opposite signs.

(79) $$\frac{dv_{+}^{i}}{dt} = +\partial_i U \qquad\qquad \frac{dv_{+}^{i}}{dt} = -\partial_i U$$

...then interprets this opposition as a contradiction within the model. Yet this contradiction arises precisely from the simultaneous application of the two geodesic prescriptions to the same test particle. It does not occur when each type of particle is subjected to the metric associated with it in the definition of the model.

The most direct way to determine the nature of gravitational interactions is to refer to the exterior metric solutions obtained under spherical symmetry, as was done in the preceding sections. In the weak-field limit of the corresponding Schwarzschild-type metrics, the sign of the Newtonian term directly determines the direction of the acceleration of the test particle in the sector under consideration.

This yields the four situations.:

(+ source , + test particule) ⟶ Attraction

(- source , - test particule) ⟶ Attraction

(+ source , - test particule) ⟶ Repulsion

(- source , + test particule) ⟶ Repulsion

These four results reproduce the interaction laws that constitute one of the founding hypotheses of the Janus model: masses of the same sign attract each other, and masses of opposite signs repel each other.

The origin of the contradiction raised in T. Damour's analysis can thus be unambiguously identified. It lies not in the sign of the forces derived from the system's metric solutions, but in the assumption that a single test-matter motion must simultaneously satisfy the geodesic equations associated with both metrics. This assumption is not part of the definition of the Janus model.

Conclusion

Since 2019, the two texts by T. Damour addressing the alleged inconsistency of the Janus model have constituted—to the best of our knowledge—the most frequently cited explicitly developed mathematical critiques challenging the model's consistency.

Among these criticisms is T. Damour's assertion that the system of two coupled field equations upon which this model rests cannot be derived from an action.

Such a derivation has since been published. However, the present work sheds additional, particularly simple light on this issue. In 2002, Damour and Kogan themselves proposed an

action describing the coupled dynamics of two metrics. Their construction was framed within a different context—that of non-linear bigravity—and was in no way intended to construct the Janus cosmological model. We have shown here that by considering, within a construction of this type, two gravitational coupling constants that are equal in absolute value but opposite in sign, the structure of the system of two coupled field equations characteristic of the Janus model emerges naturally.

This result does not imply that the Janus model should be viewed merely as an application or a historically derived variant of the work of Damour and Kogan. Its genesis is independent, and it addresses a different set of physical issues. However, the comparison drawn in this article demonstrates that the objection—claiming the structure of its field equations is inherently incompatible with a Lagrangian formulation—cannot be sustained.

We review the origins of the Janus model, tracing the path from the introduction of negative masses and the "runaway" problem to the construction of a bimetric system in which positive- and negative-mass particles are associated with two distinct metrics. This structure yields the desired interaction laws: masses of the same sign attract one another, while masses of opposite signs repel. The runaway effect inherent in introducing negative masses within a monometric framework is eliminated.

We also recall the key cosmological and astrophysical properties that motivated the model's development, as well as the various qualitative agreements with observations achieved during its formulation. Taken in isolation, these elements do not constitute a validation of the model. However, they demonstrate that it yields consequences amenable to observational testing, thereby justifying an examination of its mathematical consistency and physical predictions based on its effective equations.

This consistency has been examined here in two situations possessing symmetries high enough to allow for an explicit analysis. In the non-stationary, homogeneous, and isotropic case, the constraints arising from the two Bianchi identities lead to a generalized conservation law and to coupled cosmological solutions; thus, they do not reveal the a priori incompatibility that had been cited as an argument against the model. In the stationary, spherically symmetric case, an analysis of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations demonstrates how the structure of the interaction tensors ensures the hydrostatic compatibility of the two sectors within the Newtonian limit under consideration.

We then re-examine the following criticisms raised by T. Damour. The objection that the two Bianchi identities are necessarily incompatible is countered by the existence of an explicit cosmological solution that simultaneously satisfies the constraints they impose. Finally, the apparent contradiction regarding the direction of the forces stems from the requirement that the same four-velocity field of a test-matter particle simultaneously satisfy the geodesic equations associated with both metrics. This is precisely how the argument is formulated in the document dated December 28, 2022.

This latter prescription is not among the foundational hypotheses of the Janus model. A positive-mass test particle follows the geodesics of the metric $g_{\mu\nu}$, whereas a negative-mass test particle follows those of the metric $\bar{g}_{\mu\nu}$ \$. Directly determining the nature of the interactions from spherically symmetric exterior metric solutions thus unambiguously yields attraction between masses of the same sign and repulsion between masses of opposite signs. In

the December 2022 text, by contrast, the contradictory accelerations are obtained by successively applying the two connections to the same test-matter motion.

With this clarification, we hope that the Janus Cosmological Model can now be examined by the specialist community based on its equations, its solutions, and how they compare with observations.

References :

[1] A. Einstein : Die Feldgleichungen des Gravitation (The Field Equation of Gravitation). Sitzungsber. XLIV , 8 , 778 and XLVI s. 799 (25 nov 1915)
[2] H.Chaudary, S.Capozziello, V.K. Shauma, I.Gomez, G. Mustafa. Evidence for evolving dark energy from DESI DR2 BAO and Pantheon+, DES-Dovekie, and Union3 European Physical Journal C, Vol. 86, article 564 (20*26).
[3] A. G. Riess et al., "A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km s^{-1} Mpc^{-1} Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team", Astrophysical Journal Letters 934 (2022) L7.
[4] H. Bondi: Negative mass in General Relativity : Negative mass in General Relativity. Rev. of Mod. Phys., Vol 29, N°3, july1957
[5] J.P.Petit : The missing mass problem. Il Nuovo Cimento B Vol. 109 July 1994, pp. 697-710
[6] J.P.Petit. Le Topologicon. Editions Belin (french),1986. Topo The World. http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/English/Topo_the_world
[7] J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhaüser Ed. 1997
[8] J.P.Petit, H.Zejli : Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group. Reviews in Mathematical Physics. Vol. 37, n001, 2024.
[9] J.P.Petit, F.Margnat, H.Zejli : A bimetric cosmological model on Andreï's twin universe approach. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024)
[10] J.P.PETIT, Twin Universe Cosmology, Astrophys. and Sp. Science, 226, 273-307, 1995
[11] Damour T. , Kogan I I. Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity Phys. Rev. D 66 (2002) 104024. hep-th/0206042.
[12] Fierz, M. & Pauli, W. (1939), "On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 173, no. 953, pp. 211–232.
[13] C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, "Resummation of Massive Gravity", *Physical Review Letters* 106, 231101 (2011)
[14] G. Boulware and S. Deser, "Can Gravitation Have a Finite Range?", *Physical Review D*, 6, 3368–3382 (1972).
[15] S.Hossenfelder : Antigravitation. Phys Letters B Vol. 636, issue 2 , may 2006
[16] S. Hossenfelder : A bimetric Theory with Exchange Symmetry. Phys. Rev. D78, 044015, 2008 and arXiv : 0807.2838v1 (gr-qc)17 july 2008
[17] Benoit-Lévy.A & G.Chardin : Introducing the Dirac-Milne universe. Astronomy and Astrophysics. Vol. 537 (january 2012) A 78
[18] J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophysics And Space Science,. *A* 29, 145-182 (2014)
[19] W.B.Bonnor : Negative mass and general relativity. General Relativity and Gravitation Vol.21, N°11, 1989?

[20] H.Chaudary, S.Capozziello, V.K. Shauma, I.Gomez, G. Mustafa. Evidence for evolving dark energy from DESI DR2 BAO and Pantheon+, DES-Dovekie, and Union3 European Physical Journal C, Vol. 86, article 564 (2026)

[21] Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini, and Nathalie Debergh. Physical and Mathematical Consistency of the Janus Cosmological Model (JCM). Progress in Physics, Vol.15, issue 1 (January 2019)

[22] The Dipole Repeller : Y Hoffman, D.Pomarède, R.B.Tully, H.Courtois. Nature Astronomy 2017 1 , 0036

[23] J.P.Petit, G.D'Agostini : Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe. Modern Physics Letters. A, Vol.29 ; N° 34, 2014 ; Nov 10th

DOI :10.1142/So21773231450182X

[24] T.Damour. On the "Janus cosmological model model". On his personal page on the IHES website (in french):
https://www.ihes.fr/~damour/publications/JanusJanvier2019-1.pdf
English translation:
http://www.jp-petit.org/Damour/2019-IHES-en-fr.pdf
[25] http://www.jp-petit.org/Damour/2019-Damour-letter-to-Petit.pdf
[26] http://www.jp-petit.org/Damour/2019-Petit-to-Damour-en.pdf
[27] http://www.jp-petit.org/Damour/2022-Duval-to-Damour-nov-30-en-fr.pdf
[28] http://www.jp-petit.org/Damour/2022-Damour-IHES-dec-12-en-fr.pdf
[29] http://www.jp-petit.org/Damour/2022-Petit-to-Damour-dec-14-en-fr.pdf
[30] T.Damour : "Physical and mathematical inconsistency of the "Janus cosmological model". On Damour's personal page, in french:
https://www.ihes.fr/~damour/publications/JanusDecembre2022c.pdf
English translation:
http://www.jp-petit.org/Damour/2022-Damour-IHES-dec-28-en-fr.pdf
[31] http://www.jp-petit.org/Damour/2025-Request-for-the-Exercise-of-a-Right-of-Reply-before-the-French-Academy-of-Science.pdf
[32] R.Adler, M.Bazin & M.Schiffer : Introduction to General Relativity Mc Graw Hill Book 1965-1975

Appendix 1

Generalized law of energy conservation for unsteady conditions and in homogeneous, isotropic media.

1 – **In classical cosmology**:

In general relativity, when the symmetry assumptions of homogeneity and isotropy are applied to a non-stationary solution, the metric takes the FLRW form, and the field equation yields a system of two second-order differential equations involving the scale factor and its first and second time derivatives.

(1) $$G_0^0 - \left(\frac{3k}{a^2} + \frac{3\,\dot{a}^2}{c^2a^2}\right) = \chi\,\rho$$

(2) $$G_i^i = -\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} + \frac{2\ddot{a}}{c^2a}\right) = -\chi\,\frac{p}{c^2}$$

We must then derive a compatibility condition from this system, which will be the equivalent of the Bianchi condition relating to the symmetries of this solution. With:

(3) $$\chi = -\frac{8\,\pi G}{c^2}$$

(4) $$\frac{8\,\pi G}{c^2}\rho = \frac{3k}{a^2} + \frac{3\,\dot{a}^2}{c^2a^2}$$

(5) $$\frac{8\,\pi G}{c^2}\left(\frac{p}{c^2}\right) = -\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} + \frac{2\ddot{a}}{c^2a}\right)$$

By adding and then subtracting these two equations, we obtain:

(6a) $$\frac{4\,\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = -\frac{3\ddot{a}}{c^2a}$$

(6 b) $$\frac{4\,\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \frac{k}{a^2} + \frac{a\prime^2 - a\,\ddot{a}}{c^2a^2}$$

(7) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{k}{a^2} - \frac{4\,\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)$$

We now differentiate (4) with respect to time, and obtain:

(8) $$\frac{8\,\pi G}{c^2}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{6\,k}{a^3}\,\dot{a} + \frac{6\,\dot{a}}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

Inserting (7) into (8) and rearranging we obtain the differential identity

(9) $$\frac{d}{dt}\,(\rho\,a^3) + \frac{p}{c^2}\frac{d\,a^3}{dt} = 0$$

Let us take an element of volume in the co-moving coordinates. Its geometry content will be proportional to a^3 , from the Robertson-Walker metric. This, if $V(t)$ denotes the actual

volume content of the element considered, $M = \rho V$ would measure the mass content and (9) could be written as :

(10) $$dM + \frac{1}{c^2} p\, dV = 0$$

Since $c^2 M$ measures the energy content of the element and $p\, dV$ the work done against the pressure forces, we see that the energy balance under the cosmic evolution, is preserved. If we prescribe the equation of state of the fluid $p = p(\rho)$, we can obtain from (9) the dependance of a upon ρ. Indeed we may write equation (9) in the alternative form:

(11) $$\frac{da}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{d\rho}{\rho + p(\rho)/c^2}\right) = 0$$

It is this relationship that ensures the compatibility of the system of equations (1) + (2)—that is, the mathematical consistency of the solution, or the equivalent of the Bianchi condition for the field equation—within this particular symmetry.

In the denominator, we have a sum of two terms. Pressure is simply a volumetric energy density, just like the term $\rho\, c^2$. It is the volumetric energy density that determines cosmic geometry and dynamics. The relative importance of the term p compared to the term $\rho\, c^2$ determines the type of dynamics under consideration. If we treat the matter fluid as a perfect fluid, and if $< v^2 >$ is the mean square velocity of thermal motion within it, the pressure is given by:

(12) $$p_m = \frac{\rho_m < v^2 >}{3}$$

If the medium is ionized, radiation pressure is added to this material pressure:

(13) $$p_r = \frac{\rho_r c^2}{3}$$

In the general case, pressures are additive:

(14) $$p = \frac{\rho_m < v^2 >}{3} + \frac{\rho_r c^2}{3}$$

In the matter-dominated era, pressure terms are negligible compared to $\rho\, c^2$. In the radiation-dominated era, radiation pressure is comparable to $\rho\, c^2$. In the calculation, both simulations can be handled by expressing the pressure terms in the form:

$$p = \beta \frac{\rho\, c^2}{3}$$

β = 0corresponds to the matter-dominated phase and $\beta = 1$ to the radiation-dominated phase. Equation (11) becomes:

(15) $$\frac{da}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{d\rho}{\rho\,(1 + \beta/3)}\right) = \frac{da}{a} + \frac{d\rho}{(3 + \beta)\,\rho} = 0$$

This results in two distinct dynamics.

Matter-dominated era:

$$E = \rho\, c^2 a^3 = Cst \quad (16)$$

Radiation-dominated era:

$$E = \rho\, c^2 a^4 = Cst \quad (17)$$

Or, overall

$$E = \rho\, c^2 a^{3+\beta} \quad (18)$$

We have added the factor c^2 because this condition represents the conservation of energy. For a dust-filled universe—modeled as masses m—the decrease in volumetric energy density is solely due to expansion. The individual energy $m\,c^2$ of the masses remains constant. During the radiation-dominated era, it is the "photon gas" that expands. However, since these photons constitute the very fabric of space, their wavelength λ stretches in tandem with the scale factor a; consequently, their individual energy hc/λ varies as $1/a$. This explains the exponent 4 in equation (17).

With *E* representing energy, the system becomes:

$$-\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2}\right) = \chi \frac{E}{3\,c^2 a^{3+\beta}} \quad (19)$$

$$-\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{2\ddot{a}}{c^2 a}\right) = -\chi \frac{\beta\, E}{3c^2 a^{3+\beta}} \quad (20)$$

Which leads to the equation:

$$a^{2+\beta}\,\ddot{a} = \frac{\chi\,(1+\beta)E}{6} = -\frac{4\,\pi\,G\,(1+\beta)\,E}{3\,c^2} \quad (21)$$

Consequently, in general relativity, if $E > 0$, then $\ddot{a} < 0$.

When $\beta = 0$, we obtain the Friedmann equation.

When $\beta = 1$, we have:

$$a^3\,\ddot{a} = -\frac{8\,\pi\,G\,E}{3c^2} \quad (22)$$

This equation does not prejudge, a priori, which value to choose for the curvature index:

$$k \in \{-1,\ 0,+1\} \quad (23)$$

In classical cosmology, a zero value is generally chosen. In this case:

$$a(t) = \left(\frac{32\,\pi\,G\,E}{3\,c^2}\right)^{1/4} \sqrt{t} \quad (24)$$

Let us consider (which will be justified later):

(25) $$k = -1$$

As we have:

(26) $$\dot{a} = c\sqrt{-\left(\frac{\chi E}{3 c^2 a^{1+\beta}} + k\right)}$$

He is coming with:

(27) $$A = \frac{8 \pi G E}{3 c^2}$$

(28) $$\dot{a} = \frac{\sqrt{c^2 a^2 + A}}{a}$$

(29) $$dt = \frac{a\, da}{\sqrt{c^2 a^2 + A}}$$

By taking:

(30) $$(t \longrightarrow 0) \Rightarrow (a \longrightarrow 0)$$

(31) $$t = \frac{1}{c^2}\left(\sqrt{c^2 a^2 + A} - \sqrt{A}\right)$$

(32) $$a(t) = \sqrt{c^2 t^2 + 2\sqrt{\frac{8 \pi G E}{3 c^2}}\, t}$$

When t is very small:

(33) $$t << \sqrt{\frac{32 \pi G E}{3 c^6}}$$

Then :

(34) $$a(t) \cong \left(\frac{32 \pi G E}{3 c^2}\right)^{1/4} \sqrt{t}$$

Near the origin, the three solutions—for the three values of the curvature index *k* exhibit the same asymptotic behavior.

Noticed :

Let us now take relation (18)— $E = \rho c^2 a^{3+\beta}$—as a hypothesis. That is to say:

(35) $$\rho = \frac{E}{c^2 a^{3+\beta}}$$

To which is added:

(36) $$\frac{p}{c^2} = \frac{\beta E}{3 c^2 a^{3+\beta}}$$

From the system of equations (1) + (2), we can move to (1) + (6a), which becomes:

(37) $$\dot{a} \;=\; c\sqrt{-\left(\frac{\chi\, E}{3\,c^2\,a^{1+\beta}} \;+\; k\right)}$$

(38) $$\frac{\chi E(\,1+\beta\,)}{6\,a^{2+\beta}} \;=\; \ddot{a}$$

Differentiating (37) yields:

(39) $$\ddot{a} \;=\; \frac{c\,(\,1+\beta\,)\left(\frac{\chi E}{3c^2}\right)a^{-\,(2+\beta)}\,\dot{a}}{2\sqrt{-\left(\frac{\chi\, E}{3\,c^2\,a^{1+\beta}}+k\right)}} \;=\; \frac{(\,1+\beta\,)\,\chi\, E\, a^{\,-\,(2+\beta)}}{6}$$

C'est-à-dire l'équation (38). La cohérence du système est assurée.

2 – **In the Janus Cosmological Model**:

In the first part of the article, we opted to construct the coupled system of field equations using a variant of the Damour-Kogan action [11]. In this case, the system is written as follows:

(40a) $$R_{\mu\nu} \;-\; \frac{1}{2}\,R\,g_{\mu\nu} \;=\; \chi\,\left(\,T_{\mu\nu} \;+\; \overline{K}_{\mu\nu}\right)$$

(40b) $$\bar{R}_{\mu\nu} \;-\; \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{\mu\nu} \;=\; -\;\chi\,\left(\,\overline{T}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}\,\right)$$

where $K_{\mu\nu}$ and $\overline{K}_{\mu\nu}$ are the interaction tensors. In reference **[18],** a non-stationary solution exhibiting isotropy and homogeneity was sought, introducing specific forms for the interaction tensors in which φ and ϕ are functions of time:

(41a) $$\overline{K}_{\mu\nu} \;=\; \varphi\,\overline{T}_{\mu\nu}$$

(41b) $$K_{\mu\nu} \;=\; \phi\,T_{\mu\nu}$$

We will seek solutions derived from symmetry hypotheses—isotropy and homogeneity—that is, FLRW metric solutions, using the same time variable x^0 for both:

(42a) $$ds^2 \;=\; dx^{\circ 2} \;-\; a^2\left(\frac{du^2}{1-k\,u^2} \;+\; u^2 d\theta^2 + \;u^2 sin^2\theta\; d\varphi^2\right)$$

(42b) $$d\bar{s}^2 \;=\; dx^{\circ 2} \;-\; \bar{a}^2\left(\frac{du^2}{1-\bar{k}\,u^2} \;+\; u^2 d\theta^2 + \;u^2 sin^2\theta\; d\varphi^2\right)$$

Posons :

(43) $$H \;=\; \frac{\dot{a}}{a} \qquad \bar{H} \;=\; \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}$$

We write the equations of state, with $\beta \;\in\; \{\,0\,,1\,\}$, in the form:

(44) $$p \;=\; \frac{\beta}{3}\;\rho\,c^2 \;=\; \frac{\beta}{3}\;\varepsilon \qquad\qquad \bar{p} \;=\; \frac{\beta}{3}\;\bar{\rho}\,\bar{c}^2 \;=\; \frac{\beta}{3}\;\bar{\varepsilon}$$

To simplify the calculation, let us set:

$$T_{00} + \overline{K}_{00} = X = \varepsilon + \varphi\,\bar{\varepsilon} \quad (45)$$

Thus, our first field equation is written as:

$$G_0^0 = -\left(\frac{3k}{a^2} + \frac{3\,\dot{a}^2}{c^2a^2}\right) = \chi\,X \quad (46)$$

And the second:

$$-\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} + \frac{2\ddot{a}}{c^2a}\right) = -\frac{\chi\,\beta}{3}\,X \quad (47)$$

Let's set

$$F = \frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} \quad (48)$$

Equation (47) becomes:

$$F + \frac{2\,\ddot{a}}{c^2\,a} = \frac{\chi\,\beta}{3}\,X \quad (49)$$

$$-\frac{\chi\,X}{3} + \frac{2\,\ddot{a}}{c^2\,a} = \frac{\chi\,\beta}{3}\,X \quad (50)$$

$$\frac{\ddot{a}}{c^2\,a} = \frac{\chi}{6}\,(1 + \beta)X \quad (51)$$

Let us now start with the first of the two equations of the system, equation (43), which becomes:

$$-3\,F = \chi\,X \quad (52)$$

Let's derive it:

$$-3\,\dot{F} = \chi\,\dot{X} \quad (53)$$

$$\dot{F} = -\frac{2\,k\,\dot{a}}{a^3} + \frac{2\,\dot{a}\,\ddot{a}}{c^2a^2} - \frac{2\,\dot{a}^3}{c^2\,a^3} \quad (54)$$

With (43) :

$$\dot{F} = 2\,H\left[-\frac{k}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{c^2\,a^2} + \frac{\ddot{a}}{c^2a}\right] \quad (55)$$

But :

$$-\frac{k}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{c^2\,a^2} = -F \quad (56)$$

hence :

$$\dot{F} = 2H\left(-F + \frac{\ddot{a}}{c^2a}\right) \quad (57)$$

Using (51) and (52) we get :

$$-F + \frac{\ddot{a}}{c^2a} = \frac{\chi}{3}\,X + \frac{\chi}{6}\,(1 + \beta)\,X \quad (59)$$

$$-F + \frac{\ddot{a}}{c^2a} = \frac{\chi}{6}\,(3 + \beta)\,X \quad (60)$$

Thus, equation (57) becomes:

$$\dot{F} = \frac{\chi}{3}\,(3 + \beta)\,H\,X \quad (61)$$

Let us substitute it into (53).

(62) $$\dot{X} + (3 + \beta) H X = 0$$

That's to say :

(63) $$\frac{dX}{X} + (3 + \beta)\frac{da}{a} = 0$$

Or :

(64) $$X\, a^{(3+\beta)} = Cst$$

But $X = \varepsilon + \varphi\, \bar{\varepsilon}.\ I$:

(65) $$\dot{\varepsilon} + \varphi\, \dot{\bar{\varepsilon}} + \dot{\varphi}\, \bar{\varepsilon} + (3 + \beta) H\varepsilon + (3 + \beta) H\, \varphi\, \bar{\varepsilon} = 0$$

As $\varepsilon = \rho\, c^2$; $\bar{\varepsilon} = \bar{\rho}\, \bar{c}^2$

(66)) $$C_+ = c^2\dot{\rho} + \varphi\, \bar{c}^2\dot{\bar{\rho}} + \dot{\varphi}\, \bar{c}^2\bar{\rho} + (3 + \beta) H(\rho\, c^2 + \varphi\, \bar{\rho}\, \bar{c}^2) = 0$$

We must now perform the same calculation in the negative sheet.

(67) $$\bar{X} = \bar{\varepsilon} + \phi\, \varepsilon$$

(68) $$-3\left(\frac{\bar{k}}{\bar{a}^2} + \frac{\dot{\bar{a}}^2}{\bar{c}^2\bar{a}^2}\right) = -\chi\, \bar{X}$$

(69) $$-\left(\frac{\bar{k}}{\bar{a}^2} + \frac{\dot{\bar{a}}^2}{\bar{c}^2\bar{a}^2} + \frac{2\,\ddot{\bar{a}}}{\bar{c}^2\bar{a}}\right) = \frac{\chi\,\beta}{3}\,\bar{X}$$

(70) $$\bar{F} = \frac{\chi}{3}\,\bar{X}$$

(71) $$\frac{\chi\,\bar{X}}{3} + \frac{2\,\ddot{\bar{a}}}{\bar{c}^2\bar{a}} - = \frac{\chi\,\beta}{3}\,\bar{X}$$

(72) $$\frac{\ddot{\bar{a}}}{\bar{c}^2\bar{a}} = -\frac{\chi}{6}(1 + \beta)\bar{X}$$

On dérive :

(73) $$\dot{\bar{F}} = 2\bar{H}\left(-\bar{F} + \frac{\ddot{\bar{a}}}{\bar{c}^2\bar{a}}\right)$$

(74) $$-\bar{F} = -\frac{\chi}{3}\,\bar{X}$$

(75) $$-\bar{F} + \frac{\ddot{\bar{a}}}{\bar{c}^2\bar{a}} = -\frac{\chi}{6}(3 + \beta)\bar{X}$$

(76) $$\dot{\bar{F}} = -\frac{\chi}{3}(3 + \beta)\,\bar{H}\bar{X}$$

(77) $$-3\,\dot{\bar{F}} = -\chi\,\dot{\bar{X}}$$

(78) $$\chi(3 + \beta)\,\bar{H}\bar{X} = -\chi\,\dot{\bar{X}}$$

(79) $$\dot{\bar{X}} + (3 + \beta)\,\bar{H}\bar{X} = 0$$

(80) $$\frac{d\bar{X}}{\bar{X}} + (3 + \beta)\frac{d\bar{a}}{\bar{a}} = 0$$

Ou :

(81) $$\bar{X}\,\bar{a}^{(3+\beta)} = Cst$$

(82) $$\dot{\bar{\varepsilon}} + \phi\,\dot{\varepsilon} + \dot{\phi}\,\varepsilon + (3 + \beta)\,\bar{H}\bar{\varepsilon} + (3 + \beta)\,\bar{H}\,\phi\,\varepsilon = 0$$

As $\varepsilon = \rho\,c^2$; $\bar{\varepsilon} = \bar{\rho}\,\bar{c}^2$

(83) $$C_- = \bar{c}^2\dot{\bar{\rho}} + \phi\,c^2\dot{\rho} + \dot{\phi}\,\rho\,c^2 + (3 + \beta)\,\bar{H}(\bar{\rho}\,\bar{c}^2 + \phi\,\rho\,c^2) = 0$$

We had a system of two pairs of second-order differential equations. The compatibility of the first two (derived from the first field equation) yielded equation (66). Let us call this equation C_+. The compatibility of the next two (derived from the second field equation) has thus yielded equation (83). Let us call this equation C_- To ensure the consistency of the four equations, we must therefore determine the time-dependent functions φ and ϕ. Let us identify:

(84) $$C_+ = 0 \quad et \quad \lambda\,C_- = 0$$

(85)

$$\dot{\varepsilon} + \varphi\,\dot{\bar{\varepsilon}} + \dot{\varphi}\,\bar{\varepsilon} + (3 + \beta)\,H\varepsilon + (3 + \beta)\,H\,\varphi\,\bar{\varepsilon} = 0$$

$$\lambda\left[\dot{\bar{\varepsilon}} + \phi\,\dot{\varepsilon} + \dot{\phi}\,\varepsilon + (3 + \beta)\,\bar{H}\bar{\varepsilon} + (3 + \beta)\,\bar{H}\,\phi\,\varepsilon\right] = 0$$

We will therefore perform a term-by-term identification. The coefficient of $\dot{\varepsilon}$ yields:

(85) $$1 = \lambda\,\phi$$

le coefficient de $\dot{\bar{\varepsilon}}$ donne

(86) $$\varphi = \lambda$$

Thus :

(87) $$\varphi\,\phi = 1$$

The two time-dependent functions φ and ϕ are inverses of each other. The coefficient gives:

(88) $$(3 + \beta)\,H = \lambda\left[\dot{\phi} + (3 + \beta)\,\bar{H}\,\phi\right]$$

But $\lambda = \varphi$. Hence :

(89) $$(3 + \beta)\,H = \varphi\,\dot{\phi} + (3 + \beta)\,\bar{H}\,\varphi\,\phi$$

But $\varphi\,\phi = 1$ thus :

(90) $$(3 + \beta)\,H = \frac{\dot{\phi}}{\phi} + (3 + \beta)\,\bar{H}$$

(91) $$\frac{\dot{\phi}}{\phi} = (3 + \beta)(H - \bar{H}) = (3 + \beta)\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\right)$$

(92) $$\phi = C\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^{3+\beta}$$

Hence :

(93) $$\varphi \;=\; \frac{1}{C}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^{3\,+\,\beta}$$

Since the integration constant is absorbed in the normalization of the interaction tensors, we will take $C = 1$.

Let's go back to our equation C_+.

(94) $$\dot{\varepsilon} \;+\; \varphi\,\dot{\bar{\varepsilon}} \;+\; \dot{\varphi}\,\bar{\varepsilon} \;+\; (\,3 \;+\; \beta)\,H\varepsilon \;+\,(\,3 \;+\; \beta)\,H\,\varphi\,\bar{\varepsilon} \;=\; 0$$

(95) $$\frac{d}{dt}\,(\,\varepsilon \;+\; \varphi\,\bar{\varepsilon}\,) \;+\; (\,3 \;+\; \beta)\,H\,(\,\varepsilon \;+\; \varphi\,\bar{\varepsilon}\,) \;=\; 0$$

(96) $$\frac{d}{dt}\,ln\,(\,\varepsilon \;+\; \varphi\,\bar{\varepsilon}\,) + (\,3 \;+\; \beta)\frac{d}{dt}\,lna \;=\; 0$$

But :

(97) $$\varepsilon \;+\; \varphi\,\bar{\varepsilon} \;=\; \frac{\varepsilon\,a^{(3+\beta)} + \bar{\varepsilon}\,\bar{a}^{(3+\beta)}}{a^{(3+\beta)}}$$

Whence:

(98) $$\frac{d}{dt}\,ln\left(\varepsilon\,a^{(3+\beta)} \;+\; \bar{\varepsilon}\,\bar{a}^{(3+\beta)}\right) = 0$$

(99) $$\boxed{\rho\,c^2a^{(3+\beta)} \;+\; \bar{\rho}\,\bar{c}^2\bar{a}^{(3+\beta)} \;=E\;=\;Cst}$$

Let's go back to our equation.

In the matter dominated era :

(100) $$\rho\,c^2a^3 \;+\; \bar{\rho}\,\bar{c}^2\bar{a}^3 \;=E\;=\;Cst$$

The the radiation dominated era :

(101) $$\rho\,c^2a^4 \;+\; \bar{\rho}\,\bar{c}^2\bar{a}^4 \;=E\;=\;Cst$$

On obtient alors, pour le matter dominated era :

(102a) $$\dot{a} \;=\; \sqrt{-\,k \;-\; \frac{8\,\pi\;G\,E}{3\,a}}$$

(103a) $$\ddot{a} \;=\; -\,\frac{4\,\pi\,G\,E}{3\,a^2}$$

(102b) $$\dot{\bar{a}} \;=\; \sqrt{-\,\bar{k} \;+\; \frac{8\,\pi\;G\,E}{3\,\bar{a}}}$$

(103b) $$\ddot{\bar{a}} \;=\; \frac{4\,\pi\,G\,E}{3\,\bar{a}^2}$$

Appendix 2

Dual numbering : This calculation is, in fact, an adaptation of the classic calculation presented in Chapter 14 of the book "Introduction to General Relativity" by Adler, Schiffer, and Bazin. [32]. In what follows, the equations from the article are numbered with digits enclosed in parentheses. These are followed by the corresponding equations from Chapter 14 of the book, enclosed in square brackets. For instance, equation (15c) is followed by [14.12c].

Satisfaction of Bianchi conditions in the stationary case and in the Newtonian approximation.

In the following, tensors are always defined in their "old form":

(1)

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p/c^2 \end{pmatrix}$$

And not in their "modern form":

(2)

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

In order to be able to make use of the symmetry

(3) $$\chi = -\frac{8\pi G}{c^2} = -\bar{\chi} = \frac{8\pi \bar{G}}{c^2}$$

This means that G and $\bar{G}$ have opposite signs but are not equal in absolute value. Assuming a stationary state and spherical symmetry, we can consider the two cases where only one of the two types of mass—positive or negative—is present. When the mass is positive, the system is described as follows:

(4) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathrm{R}\, g_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$$

(5) $$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} = -\chi\, K_{\mu\nu}$$

The solution to (1)—comprising the exterior and interior metrics—is the classical Schwarzschild solution. To construct the solution to equation (2), we would need to define the form of the interaction tensor $K_{\mu\nu}$. This would allow us to construct the metrics $\bar{g}_{\mu\nu}^{ext}$ and $\bar{g}_{\mu\nu}^{int}$. However, this would yield geodesics that cannot be compared with observational data. Consequently, such work would be pointless.

The situation is different when considering the field created by a negative mass, which corresponds to the system:

(6) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathrm{R}\, g_{\mu\nu} = \chi\, \bar{K}_{\mu\nu}$$

(7) $$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{\mu\nu} = -\chi\,\bar{T}_{\mu\nu}$$

Which will be written in the form:

(8) $$R_{\mu\nu} = \chi\,(\,\bar{K}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{K}\,g_{\mu\nu}\,)$$

(9) $$\bar{R}_{\mu\nu} = -\chi\,(\,\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{T}\,\bar{g}_{\mu\nu}\,)$$

This situation corresponds to the "Great Repeller" object, located at the center of the 100-million-light-year-diameter void known as the Dipole Repeller [22]. We conjecture that a negative mass lies at its center, modeled as a sphere filled with negative mass of constant density $\bar{\rho}$. We will need to derive the form of the interaction tensor $\bar{K}_{\mu\nu}$,, followed by the solutions $g_{\mu\nu}^{ext}$ and $g_{\mu\nu}^{int}$. Light rays originating from the background—from distant sources—will undergo a negative gravitational lensing effect in this region, which will serve to attenuate their luminosity. This effect can then be compared with observational data. Under spherical symmetry and stationary conditions, the metrics take the form:

(10) $$ds^2 = e^{\nu}\,dx^{\circ 2} - e^{\lambda}\,dr^2 - r^2\,(\,d\theta^2 + sin^2\theta\,d\varphi^2\,)$$

(11) $$d\bar{s}^2 = e^{\bar{\nu}}\,dx^{\circ 2} - e^{\bar{\lambda}}\,dr^2 - r^2\,(\,d\theta^2 + sin^2\theta\,d\varphi^2\,)$$

Attention will focus on the compatibility between the two metric solutions—between these two geometries—which entails the need to identify the two hydrodynamic equations, specifically the TOV-type (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) equations derived from them. The solutions to the second field equation (7), describing the geometry of the negative sector, are in every respect analogous to the pair of Schwarzschild exterior and interior metric solutions. Taking as the source tensor:

(12) $$\bar{T}_{\mu}^{\nu} = diag\,(\,\bar{\rho}\,\bar{c}^2, -\bar{p}, -\bar{p}, -\bar{p}\,)$$

That's to say :

(A13) [14.8] $$\bar{T}_{\mu\mu} = diag\,(\,\bar{\rho}\,\bar{c}^2\,e^{\bar{\nu}}, \bar{p}e^{\bar{\lambda}}, r^2\,\bar{p}, r^2 sin^2\theta\,\bar{p}\,)$$

Alongside our own equation numbering, we will indicate in square brackets the corresponding numbering from Chapter 14 of reference [32]. The covariant components of the Ricci tensor, derived from the form of the metric (11), are:

(14a)[14.11a] $$\bar{R}_{00} = e^{\bar{\nu}-\bar{\lambda}}\left[-\frac{\bar{\nu}''}{2} + \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} - \frac{\bar{\nu}'^2}{4} - \frac{\bar{\nu}'}{r}\right]$$

(14b)[14.11b] $$\bar{R}_{11} = \frac{\bar{\nu}''}{2} - \frac{\bar{\nu}'\,\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}'^2}{4} - \frac{\bar{\lambda}'}{r}$$

(14c)[14.11c] $$\bar{R}_{22} = e^{-\bar{\lambda}}\left[1 + \frac{\bar{\nu}'r}{2} - \frac{\bar{\lambda}'\,r}{2}\right] - 1$$

By calculating the right-hand sides from the source tensor (13), one obtains the classical system of equations:

(15a) [14.12a] $$e^{-\bar{\lambda}}\left[-\frac{\bar{\nu}''}{2} + \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} - \frac{\bar{\nu}'^2}{4} - \frac{\bar{\nu}'}{r}\right] = -\frac{\chi}{2}\,e^{\bar{\nu}}\left(\bar{\rho} + \frac{3\bar{p}}{\bar{c}^2}\right)$$

(15b) [14.12b] $$e^{-\bar{\nu}}\left[\frac{\bar{\nu}''}{2}-\frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4}+\frac{\bar{\nu}'^2}{4}-\frac{\bar{\lambda}'}{r}\right]=-\frac{\chi}{2}\left(\bar{\rho}-\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right)$$

(15c) [14.12c] $$e^{-\bar{\lambda}}\left[1+\frac{\bar{\nu}'r}{2}-\frac{\bar{\lambda}'r}{2}\right]-1=-\frac{\chi}{2}r^2\left(\bar{\rho}-\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right)$$

The two unknowns in this system of differential equations are the functions $\bar{\lambda}(r)$ and $\bar{\nu}(r)$.. The problem of finding a solution is then (standardly) reduced to finding the single function $\bar{\nu}(r)$ by setting:

(16) [14.15] $$-\bar{g}_{11}=e^{-\bar{\lambda}}=1-\frac{2\,\bar{m}(r)}{r}$$

This is to match the external metric $\bar{g}_{\mu\nu}^{ext}$, which is:

(17C) $$d\bar{s}^2=\left(1-\frac{2\bar{m}_0}{r}\right)dx^{\circ 2}-\frac{dr^2}{1-\frac{2\bar{m}_0}{r}}-r^2\left(d\theta^2+sin^2\theta\,d\varphi^2\right)$$

By combining equation (16) [14.15] with the system (15a) [14.12a], (15b) [14.12b], (15c) [14.12c], what is known as a "geometric mass" emerges:

(18) [14.18] $$\bar{m}=-\frac{4\,\pi\,r^3}{3\,c^2}\,G\,\bar{\rho}>0$$

This reflects the fact that negative masses attract negative masses (compare with metric (11), where $\bar{m}_0>0$). From this system, using standard manipulations, one obtains a TOV-type equation:

(19) [14.22] $$\bar{p}'=-\frac{\left(\bar{\rho}\,\bar{c}^2+\bar{p}\right)\left(\bar{m}-4\,\pi\,G\;\bar{p}\,r^3/c^4\right)}{r\,(r-2\bar{m})}$$

This one, without the Newtonian approximation:

(20) $$|\bar{p}|\ll|\bar{\rho}|\,\bar{c}^2\qquad r>>2\bar{m}\qquad 4\,\pi\,G\;\bar{p}\,r^3/c^2\ll\bar{m}$$

If $\bar{M}(r)$ is the total Newtonian mass contained within a sphere of radius *r*:

(21) $$\bar{M}(r)=\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\bar{\rho}<0$$

The TOV equation then becomes the Euler equation for negative mass.

(22) [14.24] $$\bar{p}'=-\frac{G\,\bar{M}(r)\bar{\rho}}{r^2}$$

We shall not proceed any further with the solution to this second field equation. While we could indeed go so far as to construct the form of the interior metric, doing so would be of purely formal interest, since the geodesics derived from the solutions $\bar{g}_{\mu\nu}$ cannot be compared with observational data.

However, the same does not apply to the metrics $g_{\mu\nu}^{ext}$ and $g_{\mu\nu}^{int}$,; this compels us to specify a form for the interaction tensor $\bar{K}_{\mu\nu}$ —which acts as the source of the field—in a manner consistent with the system's mathematical coherence, that is, leading to a TOV-type equation that can be identified with the one previously derived from the second equation.

It has not been possible to construct such a tensor $\bar{K}_{\mu\nu}$ in the most general form—that is, for a non-linear solution capable of describing objects far removed from the Newtonian regime. This will therefore remain an open problem for the mathematical geometer:

- *How can the interaction tensors $\bar{K}_{\mu\nu}$ and $K_{\mu\nu}$ which appear in the Janus field equations be constructed in their most general, non-linearized form, given that the form of such tensors is constrained by the requirement to satisfy the mathematical consistency of the system?*

Someone may eventually discover this most general, non-linear form. In the meantime, we shall content ourselves with asymptotic satisfaction under Newtonian conditions, while recalling the arguments of a physical nature that justify this approach:

- *If the source of the field is a very dense object with highly concentrated positive mass—such as a neutron star or one of the supermassive objects located at the centers of galaxies—then the Newtonian approximation is no longer valid. In this case, however, the theorist is not required to construct the corresponding interaction tensor $K_{\mu\nu}$ or the solution $g_{\mu\nu}$ to the second equation, since, in essence, such constructs cannot be compared against observational data in any scenario. At most, a mathematician might formulate a theorem guaranteeing the existence of this solution.*

However, if the source of the field is a negative mass, then the Newtonian approximation and the asymptotic satisfaction of the consistency condition suffice, since simulations indicate that these negative masses remain loosely concentrated, taking the form of immense conglomerates located at the centers of large voids in the large-scale structure.

This will therefore be the guiding thread for what follows. We will express the interaction tensor in the following form:

(23) $$K_{\mu}^{\nu} = diag\left(\bar{\rho}, -\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}, -\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}, -\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}\right)$$

Here, $\bar{q}(r)$ will be a function to be determined. We will have (we shall indicate, in square brackets, the corresponding numbers from Chapter 14 of reference [21] to make it easier for the reader to follow, as this is one of the tricky points in this calculation appendix):

(A24) [14.8] $$K_{\mu\mu} = diag\,(\bar{\rho}\ e^{\nu}, \frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}e^{\lambda}, r^2\ \frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}, r^2 sin^2\theta\ \frac{\bar{q}}{\bar{c}^2})$$

From this tensor, the field equation, and the coefficients of the Ricci tensor constructed from the metric, we obtain the system of three equations:

(25a) [14.12a] $$e^{-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right] = \frac{\chi}{2}\ e^{\nu}\left(\bar{\rho} + 3\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}\right)$$

(25b) [14.12b] $$e^{-\nu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right] = \frac{\chi}{2}\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}\right)$$

(25c) [14.12c] $$e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2}\right] - 1 = \frac{\chi}{2}r^2\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}\right)$$

For the student unfamiliar with this calculation, we will detail the steps. By adding (15a) [14.12a] and (15b) [14.12b], we obtain:

(26)[14.13] $$-\chi\left(\bar{\rho}+\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}\right)=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda\prime+\nu\prime}{r}\right)$$

Now, by combining (15c) [14.12c] and (26) [14.13] to extract $\bar{\rho}\,\bar{c}^2$ and $\bar{q}$, and by eliminating ν" from (15b) [14.12b] and (15c) [14.12c], we obtain the system of three equations:

(27a) [14.14a] $$\chi\,\bar{\rho}=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda\prime}{r}\right)-\frac{1}{r^2}$$

(27b) [14.14b] $$\chi\,\frac{\bar{q}}{\bar{c}^2}=\frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu\prime}{r}\right)$$

(27c) [14.14c] $$\frac{e^{\lambda}}{r^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{\nu\prime^2}{4}+\frac{\nu\prime\,\lambda\prime}{4}+\frac{\lambda\prime+\nu\prime}{r}-\frac{\nu\prime\prime}{2}$$

We will now reintroduce a “geometric mass” by ensuring a match with the external metric $g_{\mu\nu}^{ext}$, which reflects a *repulsion* (a negative mass repels positive masses) and thus takes the form:

(28) $$ds^2=\left(1+\frac{2m_0}{r}\right)dx^{\circ 2}-\frac{dr^2}{1+\frac{2m_0}{r}}-r^2\left(d\theta^2+sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\quad with\ m_0>0$$

Earlier, $\bar{m}(r)$ was the "geometric mass" acting on negative masses. Here, we introduce the geometric mass $m(r)$ acting on positive masses. We must therefore have:

(29) [14.15] $$e^{-\lambda}=1-\frac{2\,m(r)}{r}\quad with\ m(r)<0$$

If we calculate:

(30) [14.16] $$-\frac{1}{r^2}\,2\,m\,'=-\frac{1}{r^2}\left[r\left(1-e^{-\lambda}\right)\right]'=-\frac{1}{r^2}+e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda\prime}{r}\right)$$

We see that the right-hand side of this equation is identical to the right-hand side of (27a) [14.14a]. But we have:

But : (31) $$\chi=-\frac{8\,\pi\,G}{c^2}$$

$Thus$:

(32) [14.17] $$m'=\frac{G\,\bar{\rho}}{c^2}\,4\,\pi\,r^2<0$$

Then :

(33) [14.18] $$m=\frac{4\,\pi\,r^3}{3\,c^2}\,G\,\bar{\rho}<0$$

Let us return to (27b) [14.14b]. Applying (29) [14.15], we obtain:

(34) $$\chi\bar{q}=\frac{2m}{r^3}-e^{-\lambda}\,\frac{\nu\prime}{r}=\frac{2m}{r^3}-\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{\nu\prime}{r}$$

So :

(35) [14.19] $$\nu'=2\,\frac{m+4\,\pi\,G\,\bar{q}\,r^3/c^4}{r\,(r-2m)}$$

Comparing with (26)[14.13] we obtain a simple relationship between ν' and p'

(36)[14.21] $$\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{\nu'}{2}\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right)$$

By differentiating (27b) [14.14b] and combining it with (27c) [14.14c], we obtain

(37) [14.21] $$\bar{q}' = -\frac{\left(\bar{\rho}\,\bar{c}^2 + \bar{q}\right)\left(m + 4\,\pi\,G\,\bar{q}\,r^3/c^4\right)}{r\,(r-2m)}$$

That is to say, the equivalent of the TOV equation for the first field equation. We have:

(38) $$m(r) = -\bar{m}(r)$$

Il vient :

(39) $$\bar{q}' = -\frac{\left(\bar{\rho}\,\bar{c}^2 + \bar{q}\right)\left(-\bar{m} + 4\,\pi\,G\,\bar{q}\,r^3/c^4\right)}{r\,(r+2\bar{m})}$$

Which cannot be identified with the TOV equation of the second equation, unless the Newtonian approximation is applied, yielding:

(40) $$\bar{q}' = \frac{\bar{\rho}\,\bar{c}^2\bar{m}}{r^2} = \frac{G\,\bar{\rho}\,\bar{M}}{r^2}$$

To recover the equation:

(41) [14.24]

$$\bar{p}' = -\frac{G\,\bar{M}(r)\,\bar{\rho}}{r^3}$$

That is to say, Euler's hydrostatic equation obtained using the second field equation—representing an asymptotic compatibility of the system; restricted to the Newtonian approximation, the following is required:

(42) $$\bar{q} = -\bar{p}$$

Which gives the interaction tensor the form:

(43)

$$\bar{K}^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \end{pmatrix}$$

In the Newtonian approximation, one then recovers (41) [14.24]. This is what was demonstrated in references [8, 21].

However, since this will lend itself to comparison with observations, we shall have to construct the linearized form of the interior metric.

As early as 1916, K. Schwarzschild had provided the expression for the interior metric. While the behavior of this metric has been extensively studied—particularly to reveal its geometric or physical criticality conditions—its application to the study of photon propagation through a distribution of transparent matter is not typically the aspect highlighted. In the Newtonian

approximation, the interpretation becomes particularly straightforward: the trajectories of photons passing through such a transparent mass would undergo a deflection caused, within that mass, by the mass *M(r)* contained inside a sphere of radius *r*.

(44) $$M(r) = \frac{4\,\pi\,r^3\rho}{3}$$

Taking into account that this deflection would then be negative, we obtain:

(45) $$ds^2 = \left(1 + \frac{2\,G\,M(r)}{c^2 r}\right) c^2\,dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2\,G\,M(r)}{c^2 r}} - r^2 d\Omega^2$$

Taking linearization into account, the interior metric becomes:

(46) $$ds^2 = \left(1 + \frac{8\,\pi\,G\,\rho\,r^2)}{3\,c^2}\right) c^2\,dt^2 - \left(1 - \frac{8\,\pi\,G\,\rho\,r^2)}{3\,c^2}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Which matches the external metric, also linearized.

(47) $$ds^2 = \left(1 + \frac{2\,G\,|\bar{M}|)}{c^2 r}\right) c^2\,dt^2 - \left(1 - \frac{2\,G\,|\bar{M}|)}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$