

Au sujet des solutions de Schwarzschild

J.P Petit¹ , G.D'Agostini²

Manaty Research Group

Keywords : Schwarzschild metric, plugstar, gravastar, singularity, action, field equation, Flamm meridian, two folds cover, signature, Lorentzian metrics, Hamilton's principle, Minkowski spacetime, proper time, elementary volume, topology, induced topology, contractile spacetime, coordinate singularity, Poincaré spacetime, imaginary time coordinate, complex extension, throat sphere, Eddington's coordinates, wormhole, PT-symmetry, time coordinate inversion, physical criticality, geometrical criticality, coordinated singularity, supermassive objects, surgery, mass inversion process, Hoag galaxy.

Abstract : On effectue un large tour d'horizon sur la naissance de l'équation de champ de la relativité générale en 1915, l'apparition des solutions exactes construites par Karl Schwarzschild en 1916 et l'interprétation de ces travaux par Hilbert, Weyl et Flamm en 1916 et 1917. On évoque deux idées directrices : la première étant qu'on ne peut considérer la solution métrique extérieure isolément, et la seconde que les solutions de l'équation d'Einstein sont génératrices de contraintes d'ordre topologique, qui ont totalement échappé, et échappent toujours aux spécialistes de la discipline.

1 - Préambule :

L'article se concentre sur la place des deux articles ([1], [2]) publiés en janvier et février 1916 par l'autrichien Karl Schwarzschild, peu avant son décès, cette même année, d'une maladie infectieuse, place dans le contexte de la relativité générale et de ses développements. Il n'est donc pas question de reprendre, dans le détail, la genèse de tout cet ensemble, qui a déjà fait l'objet d'un grand nombre d'études et d'articles, y compris dans le domaine de l'histoire des sciences [3]. Dans ce préambule nous citerons des articles qui ont jalonné cette démarche.

En 1887, Woldemar Voigt [4] propose des transformations qui anticipent les transformations de Lorentz, dans le cadre de l'optique et de l'éther luminifère. Il ne formalise pas l'idée d'un temps imaginaire, mais ses travaux influencent Lorentz et Poincaré. En 1892 et 1895 Hendrick Lorentz ([7],[8]) développe progressivement l'idée que le temps doit être transformé dans des référentiels en mouvement. Il introduit ce qu'on appelle maintenant les transformations de Lorentz, mais les voit comme un effet dû au mouvement relatif dans l'éther. Il ne passe pas au formalisme géométrique à quatre dimensions et n'utilise pas de temps imaginaire. Il propose l'idée de la contraction des longueurs pour expliquer les résultats négatifs de l'expérience de Michelson-Morley. Une hypothèse qui stipule que les objets en mouvement se contractent dans la direction de leur déplacement relatif à l'éther. En 1904 Henri Poincaré évoque l'idée que le groupe de Lorentz est fondamental et que la notion absolue de simultanéité doit être abandonnée. Toutefois, il ne formalise pas encore un espace-temps à quatre dimensions. Puis il

¹ Jean-pierre.petit@manaty.net

² Gilles.dagostini@manaty.net

évoque [9], à travers son maintien de l'invariance d'une forme bilinéaire, l'idée que le groupe de Lorentz est fondamental et que la notion absolue de simultanéité doit être abandonnée. Toutefois, il ne formalise pas encore un espace-temps à quatre dimensions. En 1905, Albert Einstein publie un article fondamental [10] intitulé « Zur Elektrodynamik bewegter Körper » (« *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* ») dans la revue *Annalen der Physik*. Cet article, soumis le 30 juin et publié le 26 septembre 1905, pose les bases de la théorie de la relativité restreinte. Einstein y introduit deux postulats majeurs : le principe de relativité, stipulant que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, et la constance de la vitesse de la lumière dans le vide pour tous les observateurs, indépendamment de leur mouvement relatif. Ces principes conduisent à une révision profonde des notions d'espace et de temps, introduisant des concepts tels que la dilatation du temps et la contraction des longueurs. Un débat a pendant un temps soulevé la question de l'antériorité, vis-à-vis des articles de Poincaré [11]. Einstein est le premier à avoir présenté de manière lisible et claire les différents aspects de ce qui allait devenir la relativité restreinte. Il restait à définir le contexte géométrique de la relativité restreinte. Il est commode de se référer à la matrice de Gramm, liée à l'espace considéré.

$$(1) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Si les termes, diagonaux, de la matrice sont l'unité, l'espace est euclidien. Si cette diagonale contient un ou des signes moins, l'espace est pseudo-euclidien. La longueur d'un vecteur V , dans un tel espace, est alors définie par :

$$(2) \quad L^2 = {}^t V G V$$

En quatre dimensions, sous une forme différentielle :

$$(3) \quad ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

x_0 étant la coordonnée chronologique et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'espace. Poincaré, et d'autres, optent pour conserver la forme euclidienne de la matrice de Gramm, en optant pour une quatrième coordonnée, une coordonnée chronologique, imaginaire pure.

$$(4) \quad x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = it$$

Ainsi la forme bilinéaire prend-elle la forme :

$$(5) \quad ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Dans des conférences suivantes ([12], [13]), le mathématicien Hermann Minkowski se détourne vers la description de Poincaré, donnant à la coordonnée de temps une nature différente (imaginaire pure) que celle des trois autres coordonnées. Il choisit de lui conférer une nature réelle en introduisant des signes moins dans la matrice de Gramm :

$$(6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La métrique (dite « Lorentzienne ») devient alors ;

$$(7) \quad ds^2 = dx_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Ou :

$$(8) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Dans sa conférence de 1909, Minkowski déclare :

- *Les concepts d'espace et de temps que je souhaite vous présenter découlent de la physique expérimentale. Leur tendance est radicale. Dorénavant, l'espace en soi et le temps en soi sont destinés à s'évanouir en de simples ombres, et seule une union des deux conservera une réalité indépendante.*

Cette citation illustre la révolution conceptuelle introduite par Minkowski, où l'espace et le temps ne sont plus considérés comme des entités séparées, mais comme des entités intimement liées dans une structure à quatre dimensions, l'espace-temps. On peut dire aussi qu'ils sont de même nature. Si les accroissements dx , dy , dz s'expriment en mètres, il en est de même pour la quantité cdt . Mais il faut aussi garder en tête que ce ne sont que des procédés de repérage des points dans l'espace où, précisément, la seule grandeur intrinsèque, invariante par changement de coordonnées et cette longueur s . Semblablement on peut équiper une sphère S^2 de la métrique :

$$(9) \quad ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Si on souhaite alors projeter cet objet dans une réalité physique, seul l'élément de longueur ds a un sens, correspond à une mesure, la latitude et la longitude n'étant que des nombres, des moyens de repérage. Il faut alors garder en tête, surtout quand sera effectué ce saut conceptuel de la relativité générale, qu'il en est de même pour les coordonnées (t, x, y, z) . La coordonnée t n'est pas le temps. En divisant cette grandeur s par c , on voit apparaître l'essence de cette nouvelle physique : le *temps propre* τ .

$$(10) \quad ds = c d\tau$$

Dans le demi-siècle suivant physiciens théoriciens et cosmologistes se référeront à cette manière saine de voir les choses. Ce n'est qu'avec le temps qu'on désignera la suite des nombres constituant la diagonale de la matrice de Gram sous la dénomination de **signature**, celle-ci étant alors :

$$(11) \quad (+ - - -)$$

Toute la relativité restreinte se résume ainsi à l'idée que les mouvements des particules massives et des photons s'inscrivent sur les géodésiques d'un espace de Minkowski. Les photons suivent des géodésiques de longueur nulle et leur vitesse :

$$(12) \quad \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = c^2$$

Le fait qu'il soit impossible dans l'espace physique, dans un espace où toutes les quantités sont réelles, de se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière se résume à la contrainte extrêmement simple :

$$(13) \quad ds^2 \geq 0$$

Ce qui revient au principe physique :

Le temps propre τ (qui est en fait le seul et véritable temps) doit être réel

2 – La construction des équations de champ.

Einstein est avant tout un formidable physicien, mené par son intuition hors du commun. Grâce à son ami Marcel Grossman il acquiert les outils de mathématiques avancées, la géométrie différentielle, le calcul tensoriel de Ricci et de Levi-Civita, qui vont lui permettre de donner corps à ses intuitions. Leur collaboration a abouti en 1913 à un article conjoint [14] : qui se présente comme une esquisse d'une théorie généralisée de la relativité et d'une théorie de la gravitation.

Le mathématicien David Hilbert, avant sa rencontre avec Einstein, croyait que le monde des mathématiques sophistiquées, qu'il contribuait à bâtir, n'avait aucun rapport, présent ou futur, avec la physique. On prétend qu'un jour, devant remplacer son collègue Klein pour donner une conférence devant les ingénieurs, il leur avait d'emblée dit :

- *On dit que les ingénieurs et les mathématiciens ont du mal à se comprendre. C'est inexact : ils n'ont simplement rien à faire ensemble !*

Sa rencontre avec Einstein l'amène à changer radicalement de point de vue. Hilbert envisage alors que, non seulement les mathématiques pouvaient rendre compte de nouveaux éléments, comme cette invariance de la vitesse de la lumière, mais devait lui permettre de construire ce qu'aujourd'hui on nommerait une Theory of everything. Il faut se souvenir qu'à cette époque seule deux forces sont à l'œuvre dans l'univers : la force électromagnétique et la force de gravitation. Par ailleurs personne ne s'imagine une seule seconde que l'univers puissent avoir une histoire, ait évolué. Hilbert ambitionne donc définir *les fondements même de la physique*. Il dispose d'un outil supplémentaire : sa maîtrise du calcul des variations. Le 20 novembre 1915 il dépose un premier article [15]. Dans cette même revue, cinq jours plus tard, Einstein dépose le sien [16] et découvre, catastrophé, qu'Hilbert, avec qui il a noué des relations d'amitié et d'estime mutuelle, présente, lui aussi, une équation tensorielle susceptible de prendre en charge les aspects géométriques de la gravitation.

Hilbert est avant tout un mathématicien. Sa démarche partira donc d'axiomes, déjà mis en lumière par Mie. Les voici :

Axiome I (axiome de Mie de la fonction de l'espace³) : *La loi qui régit les processus physiques est déterminée par une fonction de l'espace H qui contient les arguments suivants :*

$$g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varpi_l}, \quad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial \varpi_l \partial \varpi_k}$$

$$q_s, \quad q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial \varpi_l}, \quad (l, k = 1, 2, 3, 4)$$

où la variation de l'intégrale

$$\int H \sqrt{g} \, d\omega$$

$$(g = |g_{\mu\nu}|, \quad d\omega = d\varpi_1 d\varpi_2 d\varpi_3 d\varpi_4)$$

doit disparaître pour chacun des quatorze potentiels $g_{\mu\nu}, q_s$.

Il est clair que les arguments (1) peuvent être remplacés par les arguments ^[1]

$$g^{\mu\nu}, \quad g_l^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \varpi_l}, \quad g_{lk}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial \varpi_l \partial \varpi_k},$$

où $g^{\mu\nu}$ est le sous-déterminant du déterminant g par rapport à son élément $g_{\mu\nu}$ divisé par g .

Axiome II (axiome d'invariance générale⁴) : *La fonction de l'espace H est invariante par rapport à une transformation arbitraire des paramètres de l'espace ϖ_s .*

L'axiome II est l'expression mathématique la plus simple de l'exigence selon laquelle l'interconnexion des potentiels $g_{\mu\nu}, q_s$ est en soi entièrement indépendante de la manière dont on choisit d'étiqueter les points de l'espace au moyen des paramètres de l'espace.

Le motif qui me guide dans la construction de ma théorie est fourni par le théorème, dont je présenterai la preuve ailleurs.

Suit la construction d'un certain nombre de théorèmes, découlant d'hypothèses d'invariance. Toute la beauté d'une construction axiomatique se déploie sous nos yeux. Hilbert reprend la

³ Les fonctions de l'espace de Mie ne contiennent pas exactement ces arguments ; en particulier, l'utilisation des arguments (2) remonte à Born. Cependant, ce qui est caractéristique de l'électrodynamique de Mie, c'est précisément l'introduction et l'utilisation d'une telle fonction de l'espace dans le principe de Hamilton.

⁴ L'invariance orthogonale avait déjà été postulée par Mie. Dans l'axiome II formulé ci-dessus, l'idée fondamentale d'Einstein sur l'invariance générale trouve son expression la plus simple, même si le principe de Hamilton ne joue qu'un rôle subsidiaire chez Einstein, et que ses fonctions H ne sont en aucun cas des invariants généraux, et ne contiennent pas non plus les potentiels électriques.

démarche du mathématicien Gustav Mie [17], lui aussi tendu dans un effort d'unifier les deux forces connues dans une démarche fondée sur le **Principe de Moindre Action**, revisité selon un **principe de Hamilton**, fondé sur son action :

$$(13) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$

L devient alors le Lagrangien. Le paramètre qui rythme l'évolution est alors le temps t . En imposant une variation δS nulle on débouche alors sur des équations de Lagrange. Mie axe sa démarche sur une fonction d'univers W (*Weltfunction*). La démarche de Hilbert, prolongeant cette de Mie, enlève au temps t son rôle de paramètre d'évolution, en l'incluant dans les coordonnées généralisées. Hilbert centre donc sa démarche sur une fonction d'univers qui devient la somme de deux scalaires,

$$(14) \quad H = K + L$$

Où $K = \sum g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ est le scalaire de Ricci, dérivant du tenseur de Ricci $K_{\mu\nu}$. L est alors censé être le Lagrangien de la matière. La quantité $\sqrt{|g|} (K + L)$ devient la densité Lagrangienne sur la base de laquelle est construite l'action, laquelle est de la forme :

$$(15) \quad \int J \sqrt{g} d\omega$$

Avec :

$$(16) \quad d\omega = dw_1 + dw_2 + dw_3 + dw_4$$

Où ces quantités w_i sont des « coordonnées d'univers ». On voit que la démarche de Hilbert se situe « au-dessus de la physique », comme si l'univers était avant tout une construction mathématique, soigneusement axiomatisée. Ça n'est que dans son second article, du 23 décembre 1916, portant le même titre mais enrichi d'une des solutions trouvées par Karl Schwarzschild que ce formalisme accouchera d'éléments ayant partie liée à la physique.

A ce stade on est en droit de s'interroger sur la nature de cet espace quadridimensionnel sur lequel Hilbert installe sa fonction d'univers. Dans ses axiomes on lit :

$$(17) \quad \int H \sqrt{g} d\omega$$

$$(18) \quad (g = |g_{\mu\nu}|, d\omega = d\varpi_1 d\varpi_2 d\varpi_3 d\varpi_4)$$

Quel sens donner à cette dernière définition ? Le signe valeur absolue se réfère ordinairement à une grandeur scalaire et, en l'occurrence, celle-ci devrait être le déterminant de g , dont le signe diffère selon que l'espace est euclidien ou pseudo-euclidienne. Ce qui est utilisé dans l'action c'est un **volume élémentaire**, qui devrait alors être :

$$(19) \quad \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\omega$$

A ce stade la notation de Hilbert ne nous éclaire guère sur le signe du déterminant de sa métrique. Mais ceci se trouve précisé plus loin :

$$(20) \quad \begin{cases} g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \\ g_{\mu\mu} = 0 \end{cases}$$

Nous avons alors l'information-clé : **l'espace-temps de Hilbert est euclidien**. Il conserve la position de Poincaré, ce qui l'amènera par conséquent, dans son article de 1916, à opter pour **une dimension temporelle imaginaire pure**.

La seconde remarque est plus importante. Dans l'article suivant, ce qu'Hilbert optimisera par calcul variationnel, c'est une action construite, non sur une longueur, réelle, mais sur une forme bilinéaire G . Non verrons les conséquences d'une telle distance prise avec les réalités physiques et leurs conséquences dans la physique théorique et la cosmologie. Toujours est-il qu'en mettant en œuvre les outils du calcul variationnel Hilbert construit la première équation se champ [15] :

$$(21) \quad [\sqrt{g} K_{\mu\nu}] + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

Avec :

$$(22) \quad [\sqrt{g} K_{\mu\nu}] = \sqrt{g} \left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K K g_{\mu\nu} \right)$$

Ceci, au grand dam d'Einstein, qui apporte la sienne cinq jours après, en soumettant son article [16] dans la même revue !

$$(23) \quad R_{i m} = -\kappa \left(T_{i m} - \frac{1}{2} T g_{i m} \right)$$

Les deux formulations étant équivalentes. En précisant :

$$(24) \quad \sqrt{-g} = 1$$

si Hilbert situe l'univers dans une espace euclidien, où la coordonnée de temps est d'une nature différente, imaginaire pure, Einstein suit l'article de Minkowski de 1909 [13], **c'est-à-dire que sa coordonnée chronologique ct est de même nature que les coordonnées d'espace**. Mais cet espace est alors pseudo-euclidien (*Lorentzien*). Einstein marque cependant un point de plus en présentant, le même jour, la première solution, approchée [18], de son équation de champ sans second membre, c'est-à-dire décrivant la géométrie dans une portion de matière, vide, entourant une masse. Dans cet article les composants de la matrice de Gramm sont précisés :

$$(25) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui va de pair avec la définition de la longueur prise par Karl Schwarzschild dans un article présenté quelques semaines plus tard.

La publication de cette rafale d'article est source de turbulences dans les relations liant Hilbert et Einstein, la question centrale étant « qui a produit la première équation tensorielle, décrivant le champ gravitationnel, à qui attribuera-t-on la paternité de ce qui deviendra la théorie de la relativité générale ? ». Cette période d'incertitude a été décrite par Tim Sauer en 1998[19]. Mais elle dure peu et Einstein écrit à Hilbert :

There was a certain resentment between us, the cause of which I do not want to analyse. I have fought against the associated feeling of bitterness, and with complete success. I again think of you with unmixed friendliness, and I ask you to try to think of me in the same way.

Concluons qu'intelligemment ces deux grands esprits, qui avaient l'un pour l'autre la plus grande estime, évitèrent d'un commun accord, le piège d'une discorde, privilégiant le maintien de leurs bons rapports. Ainsi fut-il décidé qu'Einstein deviendrait, pour la postérité, le père de cette équation de champ.

3 – La métrique extérieure de Karl Schwarzschild.

Schwarzschild, comme Einstein, a les pieds solidement ancrés dans la physique. Dès 1900, passionné d'astronomie dès son plus jeune âge, il émet l'hypothèse que l'univers soit, non pas euclidien, mais courbe. Il suit, comme beaucoup d'autres de sa génération, les travaux d'Einstein et en 1915 découvre immédiatement, à la fois l'équation de champ et la solution approchée qu'en donne Einstein, décrivant la géométrie dans le vide entourant une masse et comment cette façon de voir les choses permet de rendre compte de l'avance du périhélie de l'orbite de la planète Mercure. La rapidité avec laquelle il construit, en quelques semaines, l'ensemble de la géométrie de l'espace constituant l'extérieur et l'intérieur de l'étoile est en tous points remarquable. Mais, bien qu'âgé de quarante ans et père de famille il a choisi, par patriotisme, de s'engager dans le conflit qui vient d'éclater et se trouve affectée sur le front est, en tant qu'officier d'artillerie, sur le front russe. Son état de santé se dégrade alors très rapidement et il décède deux mois plus tard d'une infection. Avec le recul je pense que s'il n'avait pas disparu aussi prématurément l'histoire de la cosmologie se serait écrite d'une manière sensiblement différente. Commençons par analyser son premier article [1]. Dès les premières lignes on constate que Schwarzschild a intégré le fait que les trajectoires qu'il se propose de calculer sont des géodésiques qui minimise la longueur s .

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \int ds = 0 \\ \text{where} \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \end{array} \right.$$

Dans ces deux formules, tout est dit, tout est implicitement supposé être réel : les coordonnées et la longueur s (le temps propre) . La quantité sous radical ne peut être négative.

Envisageons une courbe décrite par un paramètre p , inscrite dans l'hypersurface espace-temps.

$$(27) \quad \begin{array}{l} x_0(p) \\ x_1(p) \\ x_2(p) \\ x_3(p) \end{array}$$

L'intégrale d'action s'écrira alors :

$$(28) \quad J = \int \left[\sqrt{\sum g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp}\right) \left(\frac{dx^\nu}{dp}\right)} \right] dp$$

Si on écrit la variation, cela donne :

$$(29) \quad \delta J = \int \frac{\delta \left(\sum g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp}\right) \left(\frac{dx^\nu}{dp}\right) \right)}{2 \sqrt{\sum g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp}\right) \left(\frac{dx^\nu}{dp}\right)}} dp = \int \frac{\delta \left(\sum g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right)}{2 \sqrt{\sum g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} dp$$

La métrique $g_{\mu\nu}$ appartient à un certain espace fonctionnel. La variation de l'action correspondra donc à sa variation $\delta g^{\mu\nu}$, dans cet espace fonctionnel. En écrivant que cette variation est nulle, on obtiendra les équations de Lagrange. Considérons maintenant l'action :

$$(30) \quad J' = \int [\sum g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu] dp$$

Et sa variation :

$$(31) \quad \delta J' = \delta \int [\sum g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu] dp$$

Celle-ci conduit à des équations de Lagrange absolument identiques. Mais dans le cas précédent une contrainte intervenait : que la longueur s , le long des courbes issues des équations de Lagrange, soit réelle, positive ou nulle (dans le cas des géodésiques suivies par les photons). Quand on optimise, non plus la longueur, mais son carré, cette contrainte disparaît. **On peut alors obtenir des géodésiques dont les projections dans l'espace physique sont des courbes réelles, mais qui sont alors dotées d'une longueur imaginaire pure.**

En posant le problème comme il l'a fait, Schwarzschild s'impose d'emblée cette contrainte de **rester dans le monde réel**. Il commence par décrire l'espace-temps avec quatre coordonnées (t, x, y, z) . Des coordonnées qui sont des nombres réels. Puis, pour se concentrer sur des solutions stationnaires (invariantes par translation temporelle) et à symétrie sphérique, invariantes par action du groupe $SO(3)$, il opte pour des coordonnées polaires (t, r, ϑ, ϕ) .

Il considère alors les solutions métriques de la forme :

$$(32) \quad ds^2 = F dt^2 - (G + H) dr^2 - Gr^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)$$

Avec une coordonnée radiale, **réelle** :

$$(33) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$$

Il utilise alors plusieurs changements de variable successifs, pour des commodités de calcul, et présente son résultat, non dans le système de coordonnées (t, r, ϑ, ϕ) mais pour le système (R, r, ϑ, ϕ) , selon :

$$(34) \quad ds^2 = (1 - \alpha/R)dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2), R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

α est une longueur positive à laquelle on donnera le nom de rayon de Schwarzschild R_s . Dans cette présentation, r variant de 0 à $+\infty$, on a nécessairement $R \geq \alpha = R_s$. Dans cet article de 1916, Schwarzschild ne finalise sa solution, remplaçant ce qu'il qualifie de « grandeur intermédiaire » (*Hilfsgroße*). Il n'en éprouve pas le besoin, mais se content de retrouver le résultat obtenu par Einstein, sous la forme d'une solution approchée [18]. Finalisons cette solution en remplaçant R par son expression en fonction de r et de α . Il vient :

(34)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}}\right) dt^2 - \frac{r^4 dr^2}{\left((r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha\right)(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} - (r^3 + \alpha^3)^{2/3}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)$$

Pour la valeur $r = 0$, c'est à dire $R = R_s$, il ne s'agissait donc pas d'une singularité vraie mais d'une **singularité de coordonnées**. Quelle est alors la géométrie de cet objet à quatre dimensions ? Les potentiels métriques g_{tt} et g_{rr} sont nuls en $r = 0$. L'objet résulte d'une translation temporelle de l'hypersurface 3D définie par la métrique :

$$(34) \quad d\sigma^2 = \frac{r^4 dr^2}{\left((r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha\right)(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} + (r^3 + \alpha^3)^{2/3}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)$$

Si on effectue des coupes à r constant, celles-ci sont des sphères parallèles de métrique :

$$(35) \quad d\xi^2 = (r^3 + \alpha^3)^{2/3}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)$$

L'aire de ces sphère $4\pi (r^3 + \alpha^3)^{2/3}$ a une valeur minimale $4\pi \alpha^2$. Cet objet 3D a donc la topologie d'une variété à bord, celui-ci étant cette sphère d'aire minimale. En $r = 0$, sur la sphère d'aire $4\pi \alpha^2$, sur le bord, les termes g_{tt} et g_{rr} sont nuls. **L'objet est donc non-contractile.**

En 1916 Hilbert découvre donc l'existence de cette solution de l'équation de champ sans second membre et entreprend alors de l'intégrer dans une seconde version de son mémoire sur les fondements de la physique, qu'il publie le 23 décembre 1916 [20]. Il procède alors différemment, en se concentrant d'emblée sur la forme bilinéaire :

$$(36) \quad G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu$$

Sous sa forme différentielle :

$$(37) \quad G(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

Dans la suite de l'article il renomme ses coordonnées (w_1, w_2, w_3, w_4) , la quatrième étant la coordonnée chronologique. Il repart de son équation de champ, avec déterminant positif.

$$(38) \quad [\sqrt{g} K_{\mu\nu}] + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

Avec :

$$(39) \quad [\sqrt{g} K_{\mu\nu}] = \sqrt{g} \left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K K g_{\mu\nu} \right)$$

Toujours dans la ligne de Poincaré l'espace à quatre dimensions est doté d'une signature euclidienne, ce qui l'amènera à opter pour une coordonnée de temps imaginaire pure, ce qui se lit quand il évoque la forme approchée de la solution métrique, donnée par Einstein :

$$(40) \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \dots$$

Où $\delta_{\mu\nu}$ est le tenseur de Kronecker. Il décide alors d'intégrer la solution exacte construite par Schwarzschild et, pour tenir compte de l'hypothèse de symétrie sphérique, passe en coordonnées polaires :

$$(41) \quad \begin{cases} w_1 = r \cos\vartheta \\ w_2 = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ w_3 = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ w_4 = l \end{cases}$$

Sa forme bilinéaire a alors la forme :

$$(42) \quad F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dl^2$$

Ainsi est-il amené à envisager la variation :

$$(43) \quad \delta \int \left(F(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + G(r) \left(\left(\frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 + \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \right) + H(r) \left(\frac{dl}{dp} \right)^2 \right) dp$$

D'emblée, il envisage d'étendre l'espace à des portions où cette forme puisse prendre des valeurs aussi bien positive que négatives, ce qui l'amène à introduire deux longueurs. Au passage il utilise la même lettre G pour décrire à la fois cette forme bilinéaire et le coefficient des termes impliquant les angles ϑ et φ . Mais le lecteur ne s'arrêtera pas à ce détail. Cette forme est donc :

$$(44) \quad G \left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp} \right)$$

Les portions d'espace où $G \left(\frac{dx_s}{dp} \right) > 0$ sont alors qualifiées de segments (*Strecke*). Il définit donc une première longueur réelle λ (*Länge der Strecke*), le long de ceux-ci selon :

$$(45) \quad \lambda = \int \sqrt{G \left(\frac{dx_s}{dp} \right)} dp$$

Il qualifie alors les portions où $G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$ de lignes de temps (*Zeitlinie*). Cette seconde longueur, le long de ces seconds éléments est alors qualifié de temps propre (*Eigenzeit der Zeitlinie*), selon :

$$(46) \quad \tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

Enfin il considère un troisième type de courbes selon lesquelles $G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$, qu'il qualifie de « lignes nulles » (*Nulllinie*). Ce sont les courbes sur lesquelles s'inscrivent les rayons lumineux. On voit donc que l'espace qu'Hilbert considère est d'emblée beaucoup plus vaste que l'espace-temps de Schwarzschild, lequel se limite aux géodésiques équipées d'une longueur réelle ou nulle. Cela va de pair avec le fait qu'il construit son action directement sur $G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)$ et non comme le fait Schwarzschild, sur $\sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}$ avec la contrainte que cela entraîne aussitôt. Dans cette évocation de l'article de Hilbert on fait l'impasse sur tout ce qui visait à englober dans un même formalisme la gravitation et l'électromagnétisme. Nous nous sommes concentrés sur sa façon d'intégrer le travail de Schwarzschild dans cette version étendue de son article sur les Fondements de la Physique. Il lui reste à construire sa solution. Revenons sur l'expression de sa forme bilinéaire avec ses trois fonctions inconnues de $r : F, G, H$. Il introduit alors ce qu'il présente comme une simplification, en effectuant le changement de variable :

$$(47) \quad r^* = \sqrt{G(r)}$$

Et sa forme bilinéaire devient :

$$(48) \quad M(r^*)dr^2 + r^{*2}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + W(r^*)dl^2$$

Son but est de se ramener au calcul de deux fonctions, M et W , au lieu de trois. Tout se résume alors à la variation :

$$(49) \quad \delta \int \left[M\left(\frac{dr^*}{dp}\right)^2 + r^{*2}\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^{*2}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + W\left(\frac{dl}{dp}\right)^2 \right] dp$$

Le calcul conduit alors Hilbert à :

$$(50) \quad M = \frac{r^*}{r^*-m} \quad W = w^2 \frac{r^*-m}{r^*}$$

Où m et w sont des fonctions de r^* , qui s'avèrent au final n'être que deux constantes. Afin de retrouver la solution de Schwarzschild, Hilbert pose $m = \alpha$ et $w = 1$. Sa forme bilinéaire-solution s'écrit alors :

$$(51) \quad G(dr^*, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{dr^*}{1-\alpha/r^*} + r^{*2}d\vartheta^2 + r^{*2}\sin^2\vartheta d\varphi^2 + (1 - \alpha/r^*)dl^2$$

On retrouve les quatre signes « plus » de la métrique euclidienne et l'espace de Poincaré. Pour intégrer les aspects de la relativité d'Einstein il suffit, comme le fait Hilbert, de poser :

$$(52) \quad l = i t$$

L'expression devient alors :

$$(53) \quad G(dr^*, d\vartheta, d\varphi, dt) = \frac{dr^{*2}}{1-\alpha/r^*} + r^{*2}d\vartheta^2 + r^{*2}\sin^2\vartheta d\varphi^2 - (1 - \alpha/r^*)dt^2$$

Hilbert l'identifie alors à la forme trouvée par Schwarzschild **en décidant « d'enlever l'étoile »**. Sa variable r^* est en fait la grandeur intermédiaire R de Schwarzschild. Vis-à-vis d'une confrontation avec l'observation cette différence est de peu d'importance, étant donné que, pour le Soleil, et les étoiles ordinaires $r^* \gg \alpha$. Il serait plus correct d'écrire :

$$(54) \quad G(dR, d\theta, d\varphi, dt) = \frac{dR^2}{1-\alpha/R} + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2$$

On retrouve ici la signature moderne (+ + + -). L'approche d'Hilbert se traduit par une extension de l'espace-temps en deux portions d'espace différentes, selon le signe de la forme bilinéaire G , où les longueurs se mesurent dès lors, soit le long des segments à l'aide de la longueur λ soit le long des lignes de temps, avec le temps propre τ . Traitant alors cette fois la grandeur intermédiaire R comme une « variable radiale », Hilbert, et ses successeurs, envisageront désormais de la faire varier de 0 à plus l'infini, alors que, dans le contexte géométrique choisi par Schwarzschild R ne pouvait être inférieur à α . En utilisant le changement de variable inverse :

$$(55) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (R^3 - \alpha^3)^{1/3}$$

Ceci permet de situer la plage des valeurs des coordonnées d'espace (x, y, z) de Schwarzschild correspondant aux valeurs $0 \leq R \leq \alpha$. **Ce positionnement de la solution équivaut à une extension complexe de l'espace-temps**. Hilbert considère que sa propre construction de la solution extérieure est la plus simple et la plus logique. Il perçoit la relation entre les coordonnées R et r , en optant pour les notations de Schwarzschild, comme une simple opération visant à ramener la singularité en $R = \alpha$ (qui s'avèrera plus tard n'être qu'un singularité de coordonnée) à l'origine, en $r = 0$. En ajoutant « qu'il n'en voyait pas l'intérêt et que par ailleurs y avait des façons plus simples de parvenir à ce résultat ».

4 – La métrique intérieure de Schwarzschild.

En février 1916 Karl Schwarzschild publie un second article [2], complétant le précédent et décrivant la géométrie à l'intérieur d'une sphère emplie d'un fluide incompressible de densité constante. Cette métrique intérieure est alors solution de l'équation d'Einstein, équipée de son second membre, source du champ (23). Partant de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) où x_4 est la coordonnée chronologique il exprime alors le tenseur-matière sous une forme mixte (nous faisons réapparaître la vitesse de la lumière dans le vide c) :

$$(56) \quad T_1^1 = -\frac{p}{c^2}, \quad T_2^2 = -\frac{p}{c^2}, \quad T_3^3 = -\frac{p}{c^2}, \quad T_4^4 = \rho c^2$$

Où p représente la pression à l'intérieur de l'astre. Il indique ensuite la formule de passage en notations covariantes.

$$(57) \quad T_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} T_{\mu}^{\sigma} g_{\nu\sigma}$$

Il présente le scalaire de Laue T , présent dans la présentation de l'équation de champ donnée par Einstein en 1915 [16]:

$$(58) \quad T = \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma} = \rho c^2 - \frac{3p}{c^2}$$

Dans la métrique extérieure apparaissait une longueur caractéristique α , qualifiée plus tard de rayon de Schwarzschild R_s et égale à :

$$(59) \quad \alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

Où G est cette fois la constante de la gravitation, M la masse de l'objet créant le champ gravitationnel et c la vitesse de la lumière, que Schwarzschild prend égale à l'unité.

Dans la métrique intérieure apparaît une seconde longueur caractéristique :

$$(60) \quad \hat{R} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}$$

Cette métrique est alors exprimée à l'aide des coordonnées spatiales angulaires (α, ϑ, ϕ) et d'une variable chronologique t . Le passage à une coordonnée radiale correspond à la relation :

$$(61) \quad R = \hat{R} \sin\alpha$$

La surface externe de l'astre correspond à la valeur χ_a . Cette métrique est alors :

$$(62) \quad ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right)^2 c^2 dt^2 - \hat{R}^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\vartheta^2 + \sin^2\chi \sin^2\vartheta d\phi^2)$$

Exprimée à l'aide de la coordonnée R celle-ci devient :

$$(63) \quad ds^2 = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R^2}{\hat{R}^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{R^2}{\hat{R}^2}} - R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)$$

Le raccord est assuré avec l'expression de la métrique extérieure (34)

Dans des conditions adaptées par exemple au Soleil et à son voisinage planétaire cet ensemble métrique intérieure-métrique extérieure d'écrit la géométrie sans la moindre singularité, physique ou géométrique. Mais dès 1916 Schwarzschild a envisagé une criticité physique. En effet lorsque $\cos\chi_a = \frac{1}{3}$ la pression au centre de l'astre devient infinie.

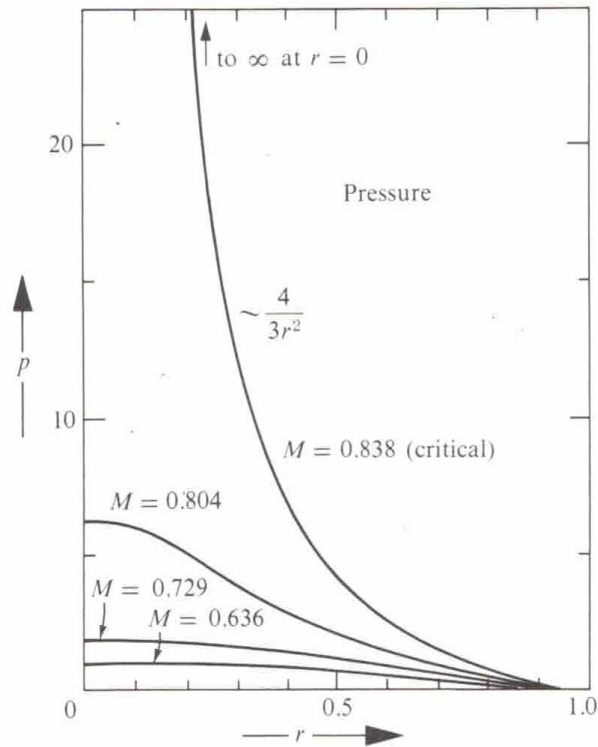


Fig 1 : Evolution de la pression à l'intérieur de l'étoile [22]

Assimilant le fluide à un gaz parfait, Schwarzschild considère que l'équation d'état, à densité ρ constante, correspond à :

$$(64) \quad p = \frac{\rho c^2}{3}$$

Schwarzschild associe alors cette remontée de la pression à une variation locale de la valeur de la vitesse de la lumière, selon la relation :

$$(65) \quad v = \frac{2c}{3\cos\chi_a - \cos\chi}$$

En 1916, Karl Schwarzschild est donc le premier à envisager, tout tranquillement, une possible variation de la vitesse de la lumière dans les masses !!!

Ce problème a été évacué dans l'ouvrage Gravitation, publié en 1973 par C.W.Misner, K.S.Thorne et J.A.Wheeler [22]. Ces auteurs se fondent sur une valeur de la vitesse du son. L'argument est invoqué page 611 de l'édition 2017 de l'ouvrage selon lequel cette vitesse du son, croissant avec le gradient de pression, tendrait vers l'infini, et de ce fait excéderait la valeur de la vitesse de la lumière, considérée comme une grandeur absolue et invariable. Or, si on envisage, à l'aide de cette métrique, de décrire la géométrie à l'intérieur d'une étoile à neutrons, un modèle à densité quasi-constante est acceptable. Par ailleurs la température, au sein de l'étoile, croît à mesure qu'on se rapproche du centre et le milieu se mue en un plasma. Dans ces conditions la vitesse de propagation de toute perturbation devient la vitesse de la lumière c . Il est alors tout-à-fait envisageable d'envisager sa variation. **C'est ce à quoi conduit l'équation d'Einstein.** Dans le modèle

d'étoile de Schwarzschild la vitesse de la lumière n'est pas une constante à l'intérieur de la masse en croit du bord vers le centre. Invoquer la constance absolue de la vitesse de la lumière équivaut à rejeter le modèle et par-delà l'équation d'Einstein elle-même lorsqu'elle est équipée de son second membre.

Cette variation de la vitesse de la lumière va de pair avec l'annulation du « facteur temps » f , en tant que racine carrée du terme g_{tt} .

$$(66) \quad f = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2}} \right] c$$

La courbe ci-après, extraite de l'ouvrage Gravitation [22], page 611, donne la variation du facteur temps.

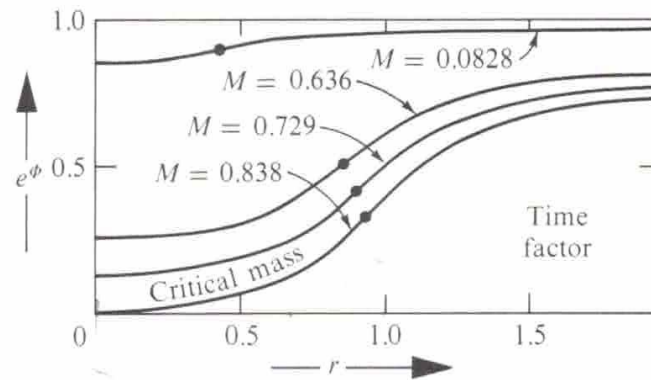


Fig. 2 : Evolution du time factor à l'intérieur de l'étoile [22]

L'interprétation standard consiste à rejeter ces variations des paramètres à l'intérieur des masses. On peut cependant écrire, comme l'avait fait pour la première fois Weyl [23] (voir plus loin)

$$(67) \quad ds = c d\tau = f dt$$

Envisageons de dépasser légèrement cette criticité. Au centre de l'étoile apparaît alors une région située à l'intérieur d'une petite sphère centrée sur l'origine, où f devient négatif. Si nous envisageons de considérer de prolonger une courbe plongeant dans cette sphère, se raccordant à une géodésique à (r, ϑ, ϕ) constants, située à l'intérieur de cette sphère, la longueur ds , rythmant la progression le long de ces courbes, ne saurait s'inverser, pas plus que le temps propre τ . En s'exprimant autrement on pourrait dire « qu'on ne peut « faire demi-tour » sur une géodésique, sur une ligne d'univers. Ceci entraînerait l'inversion, non du temps, rythmé par le temps propre τ , mais de la coordonnée temps t . Cet aspect sera examiné plus loin dans l'article.

5 – En 1916, première interprétation géométrique.

Le jeune Ludwig Flamm, envoie son article en septembre 1916, quelques mois après que les deux articles de Schwarzschild aient été publiés. Il donne immédiatement l'interprétation sous la forme des deux géométries, se raccordant à la surface de l'astre en utilisant des coupes successives, à t constant, puis à ϑ constant, ce qui l'amène à étudier un objet bidimensionnel. Il commence par opter « pour l'expression de la solution la plus simple » de la métrique extérieure de Schwarzschild, en $(t, R, \vartheta, \varphi)$ et écrit :

The spatial part of the line-element is again of a non-Euclidean nature. Once more, due to the spherical symmetry it seems to be enough to restrict the consideration to the metric properties in an arbitrary planar section through the origin, i.e., to $\vartheta = \pi$. Now one obtains :

$$(68) \quad d\sigma_e^2 = \frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} + R^2 d\varphi^2$$

Qu'il combine avec l'expression équivalente dans le système $(t, \chi, \vartheta, \varphi)$:

$$(69) \quad d\sigma_e^2 = \hat{R}^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2)$$

Soit :

$$(70) \quad d\sigma_e^2 = \frac{dR^2}{\cos^2 \chi} + R^2 d\varphi^2$$

$$(71) \quad \cos^2 \chi = 1 - \frac{\alpha}{R}$$

And he writes, we quote :

Denoting by z the coordinate in the direction of the rotational axis, the equation for the meridional curve follows from

$$(72) \quad \frac{dz}{dR} = \operatorname{tg} \chi = \sqrt{\frac{\alpha}{R-\alpha}} \rightarrow z = 4\alpha (R - \alpha)$$

This describes a parabola with parameter $p = 2\alpha$

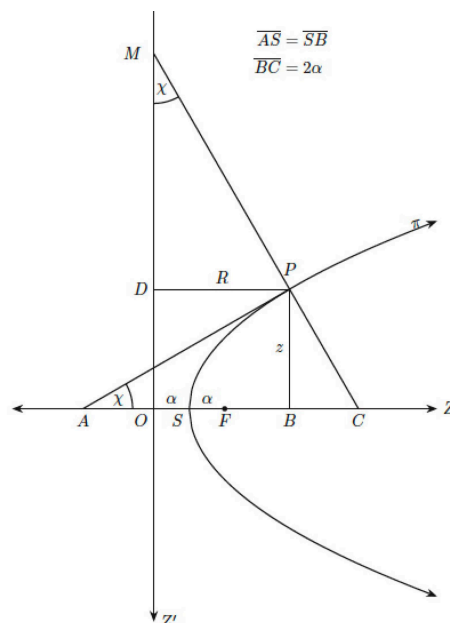


Fig.3 Méridienne parabolique de Flamm [23].

Cette méridienne de Flamm est obtenue en faisant tourner cette parabole couchée autour de l'axe zz' . C'est un objet 2D non-contractile, composé de deux nappes connecté le long d'un cercle de gorge de périmètre $2\pi\alpha$. Cette surface de Flamm relie eux espaces euclidien 2D. En conjuguant cet objet avec les rotation selon l'angle on objet tridimensionnel, qui hérite de cette contractibilité, composé de deux nappes 3D, reliées le long d'une sphère de gorge d'aire $4\pi \alpha^2$, structure qui représente un lien entre deux espaces 3D euclidien. Si on ajoute la translation selon la coordonnée de temps, l'objet 4D qui en résulte conserve cette non-contractibilité et se comporte comme un pont entre deux espaces de Minkowski. Dans sa construction géométrique, Schwarzschild construisait l'objet issu de ce coupes de solutions constituées par une métrique intérieure et une métrique extérieure, en raccordant deux variétés à bord se long de leur bord commun. Sa topologie est $(\mathbb{R}^3 - B) \times \mathbb{R}$; B étant une boule exclue. Après raccordement l'objet était homéomorphe à \mathbb{R}^4 .

Flamm procède différemment. Ayant construit un objet global, non-contractile, il en prend la moitié et, le connectant à l'objet géométrique décrivant l'intérieur de l'étoile il obtient une structure homéomorphe à \mathbb{R}^4 . La méridien est alors :

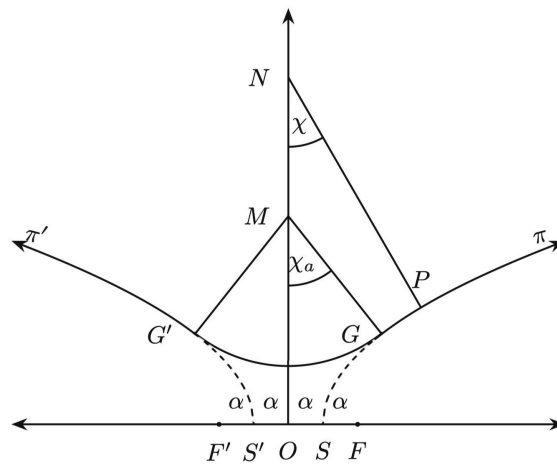


Fig.4 Méridienne de Flamm [23].

Mais Flamm n'envisage pas la criticité physique évoque par Schwarzschild. Celle-ci correspond à $\cos\chi = \frac{1}{3}$ soit à 70,52 degrés. Cette situation est évoquée dans [22] page 611.

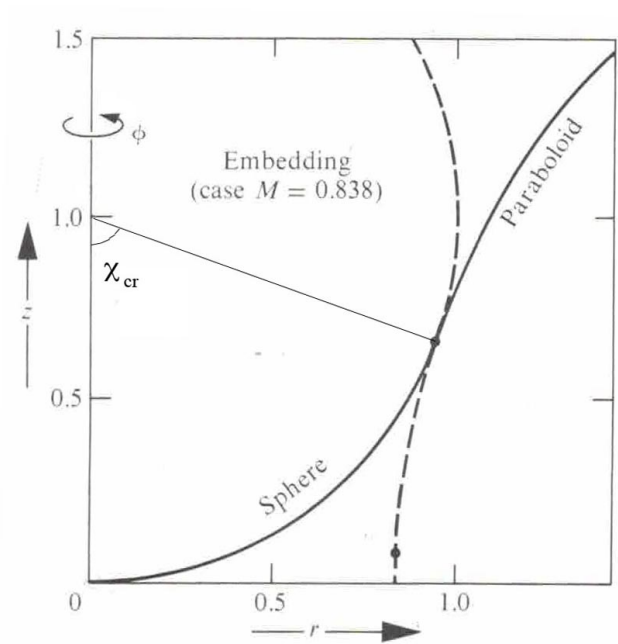


Fig.5 : Méridienne en situation de criticité physique [22].

Avec ce schéma on retrouve immédiatement le fait qu'en accroissant la masse de l'objet la criticité physique survient avant la criticité géométrique, quand la surface de l'étoile coïncide avec la sphère de Schwarzschild, qui correspond à $\chi = \pi/2$. Mais encore faudrait-il attribuer à cette criticité physique, qui implique une variation locale de la vitesse de la lumière, une réalité physique, ce que les cosmologistes n'acceptent pas [22].

6 – 1917 : Hermann Weyl introduit le concept de revêtement [24].

Continuant à évoquer les différentes interprétations de la solution de Schwarzschild, de l'équation d'Einstein dans son second membre, invariante par translation temporelle et sous l'action de $SO(3)$, nous passons à un article qui émane également d'un très jeune chercheur, Hermann Weyl (en 1917 il a le même âge de Flamm : 32 ans. Einstein en a 5 de plus). Comme Hilbert, il mêle électromagnétisme et gravitation. Partant de *world coordinates* (x_1, x_2, x_3, x_4) où x_4 est la coordonnée chronologique il pose d'emblée que le déterminant de la métrique est négatif.

$$(73) \quad d\omega = \sqrt{-g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad , \quad -g = \det|g_{ik}|$$

Il écrit l'action sous la forme :

$$(74) \quad \int \sqrt{g_{ik} dx_i dx_k} dm$$

Ce qui indique qu'il compte limiter le domaine de la physique aux cas où l'élément de longueur est réel, ce qu'il précise explicitement, plus loin :

$$(75) \quad ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k > 0$$

Avec, en outre :

$$(76) \quad ds^2 = g_{44}dx_4^2 - Q(x_1, x_2, x_3) \quad , \quad Q > 0$$

Ainsi Weyl opte pour ce qui sera plus tard appelé « signature » (+ - - -). Il note au passage que le calcul peut être mené avec les deux approches :

$$(77) \quad \delta \int F ds = 0 \quad \delta \int \sqrt{F} ds = 0$$

Puisque conduisant à des ensembles d'équations de Lagrange identiques. Il passe ensuite à une solution indépendante de la coordonnée de temps $x_4 = t$ et précise que la forme quadratique fondamentale peut alors être mise sous la forme :

$$(78) \quad f dt^2 - d\sigma^2$$

where $d\sigma^2$ is a positive quadratic form of the spatial differentials whose coefficients dx_1, dx_2, dx_3 as well as f , the square of the speed of light, do not depend on time t .

Cette fonction f va s'avérer non-constante. Il est à noter que Weyl désigne explicitement cette quantité comme « *the speed of light* ». Comme Schwarzschild il envisage donc que cette vitesse puisse varier « *à l'intérieur des masses* ».

Envisageant la trajectoire des rayons lumineux, il retrouve le principe de Fermat :

If we vary the spatial trajectory of the light signal arbitrarily, holding the ends fixed, and imagine that the varied curve be traversed at the speed of light, then $F = 0$, holds for the original as well as the varied curve and we get:

$$(79) \quad \delta \int dt = 0 \quad \text{or} \quad \delta \int \frac{d\sigma}{\sqrt{t}} = 0$$

i.e. F e r m a t's principle. Time has been eliminated entirely; the last formulation refers only to the spatial path of the light ray and holds for every segment of it, if this segment is varied arbitrarily while keeping its initial and final points fixed.

On retrouve l'idée centrale de Fermat, selon laquelle la Nature opte pour les chemins les plus courts. Ici la lumière chemine dans ce que Weyl veut considérer comme « l'intérieur d'une masse ». En effet, alors que Flamm reprend ce qu'a fait Schwarzschild en considérant que seule l'union des géométries, extérieure et intérieure, a un sens, Weyl imagine que la métrique extérieure, considérée alors isolément, pourrait constituer le modèle de ce que pourrait être une masse élémentaire, en tant que structure géométrique particulière, idée qu'Einstein reprendra avec Rosen en 1934 [25]. Il entreprend alors de définir la géométrie autour d'une masse ponctuelle, dans une situation stationnaire. Il pose aussitôt :

$$(80) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Il fait ensuite la même hypothèse simplificatrice qu'Hilbert en optant pour la forme :

$$(81) \quad ds^2 = f dx_4^2 - d\sigma^2 = f dt^2 - h dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$$

Et trouve rapidement :

$$(82) \quad f = \frac{1}{h} = 1 - \frac{2a}{r}$$

Cette constante d'intégration représentant le « rayon de Schwarzschild » : $R_s = 2a = \alpha$. Sa solution s'identifie donc à l'expression publiée par Schwarzschild avec la grandeur intermédiaire R . Weyl décide alors d'examiner la partie spatiale de la métrique et « en particulier cette correspondant au plan $x_3 = 0$. On retrouve la stratégie de Flamm consistant à examiner un feuilletage à t constant, puis une coupe à $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. et en posant cette fois $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Il retrouve donc la méridienne parabolique de Flamm :

$$(83) \quad z = \sqrt{8a(r - 2a)}$$

Il écrit alors :

*Sa projection sur le plan $z = 0$, dont les points sont repérés par des coordonnées polaires r, ϑ , couvre deux fois le domaine extérieur au cercle de rayon $2a$. Mais la surface ne se projette pas à l'intérieur de ce cercle. De manière analytique et continue, l'ensemble des points de l'espace réel, repérés par les coordonnées x_i , qui est utilisé pour représenter l'objet, **revêtira** deux fois la zone correspondant à $r \geq 2a$. Ces deux **revêtements** sont séparés par la sphère $r = 2a$, sur laquelle se trouve la masse, et qui est un lieu singulier.*

L'objet géométrique qui, selon Weyl, illustre la solution donnée par Schwarzschild est là-encore non-contractile. Mais on voit pour la première fois émerger l'idée d'un revêtement. Dans la représentation obtenue à l'aide de ces coordonnées, aucune dissymétrie n'apparaît. Weyl effectue alors un changement de variable pour obtenir une représentation de l'objet à l'aide de coordonnées isotropes, c'est-à-dire telles que la partie spatiale de la métrique devienne conforme à la métrique euclidienne. Il obtient ce résultat grâce au changement de variable

$$(84) \quad r = \left(r^* + \frac{a}{2} \right)^3 \frac{1}{r^*}$$

Ce qui lui donne :

$$(85) \quad ds^2 = \left(\frac{r^* - a/2}{r^* + a/2} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{a}{2r^*} \right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

On retrouve la non-contractibilité. Mais dans ce nouveau système apparaît un « facteur temps » qui change de signe quand $r^* = a/2$, c'est-à-dire quand $r = 2a$, sur la sphère de gorge. Si on considère deux observateurs immobiles, situés de part et d'autre de cette sphère de gorge, si dans l'une des deux nappes le temps propre (ds) et la coordonnée de temps dt sont de même signe, sur l'autre nappe ils sont de signes opposés. Cette inversion de la coordonnée de temps n'apparaissait pas dans les coordonnées de Schwarzschild.

Avant d'envisager la suite, mentionnons que le jeune Droste, élève de Lorentz, avait construit la solution métrique extérieure, présentée dans un colloque le 27 mai 1916 [26], quelques mois avant la première communication de Schwarzschild, de janvier 1916. Comme Hilbert il simplifie la forme bilinéaire en ramenant la solution à la construction de deux fonctions inconnues au lieu de trois, ce qui lui donne, à l'identique, la forme de la solution de Schwarzschild, où on pose $R = r$.

Il est également nécessaire de mentionner la contribution d'Artur Eddington, sous forme d'un livre de plus de quatre cent pages [27], édité en 1921, puis réédité en 1923. Ce document met à la disposition des chercheurs du monde entier tous les éléments donnant accès à la relativité restreinte, puis générale, y compris tous les outils de géométrie différentielle, dans ce qui allait très rapidement devenir la langue scientifique : l'anglais. L'accès aux textes originaux de Schwarzschild, et de Hilbert, souffrira de plusieurs handicaps : le fait qu'ils soient rédigés en langue allemande et la simple difficulté d'avoir accès à ces documents. Mentionnons que les articles de Schwarzschild n'ont été traduits en anglais que soixante années plus tard pour le premier et en 1999 pour le second. Il en est de même pour les articles de Flamm [23] et de Flamm [24]. Encore aujourd'hui beaucoup d'étudiants et de chercheurs ignorent encore l'importance, et parfois même jusqu'à l'existence de l'article de février 1916 décrivant la géométrie à l'intérieur des masses. Notons que dans son article de décembre 1916 Hilbert ne dit mot sur l'existence de cette seconde solution et qu'il en est de même pour Eddington, en 1921.

Celui-ci considère que la forme bilinéaire doit s'écrire :

$$(86) \quad ds^2 = -U(r)dr^2 - V(r)r^2 d\Omega^2 + W(r)dt^2$$

Puis il fait, comme Hilbert :

$$(87) \quad r_1^2 = r^2 V(r)$$

$$(88) \quad ds^2 = -U_1(r_1)dr_1^2 - r_1^2 d\Omega^2 + W_1(r_1) dt^2$$

Arguant que r et r_1 sont très proches, dans la réalité physique, d'une longueur euclidienne, il laisse tomber le suffixe * et introduit ensuite deux fonctions exponentielle pour signifier que dans le mode réel la signature est invariante :

$$(89) \quad ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2 + e^\nu dt^2$$

Puis il identifie son résultat avec ce qu'il qualifie de présentation initiale produite par Schwarzschild (en confondant R et r).

A partir des années vingt la dynamique stellaire se trouve enrichie par l'apparition de la mécanique quantique. Avant la seconde guerre mondiale il a été établi que des étoiles massives, après avoir épuisé leur carburant de fusion, se trouvent dans une situation où les forces de pression cessent brutalement d'être à même de contrebalancer les forces de gravité. L'astre implose alors.

7 – Comment utiliser une solution stationnaire pour décrire un phénomène hautement instationnaire.

Dans un article de 1939, Oppenheimer et Snyder [28] montrent que si, au cours de son effondrement, le rayon de l'étoile devient inférieur à la longueur caractéristique de Schwarzschild $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, le phénomène, pour un observateur extérieur, lui paraît se dérouler en un temps infini, et cela alors que l'implosion, mesurée à l'aide du temps propre, se déroule en un temps très bref. Il devient alors possible d'envisager de décrire cette situation en utilisant la métrique extérieure. Si le temps de

chute libre d'une particule témoin est, pour l'observateur extérieur, infini, il en est de même pour le temps d'évasion d'une particule, quittant la sphère de Schwarzschild. **Ainsi nait le concept d'horizon des évènements.**

8 – Le problème des termes croisés.

En 1963 Roy Kerr [29] construit la première solution de l'équation d'Einstein sans second membre, avec rotation. Comme dans la solution de Schwarzschild les géodésiques s'inscrivent dans des plans $\theta = Cst$. La métrique contient alors un terme croisé en $dr d\phi$. Elle n'est donc pas invariante en changeant t en $-t$. Lorsque c'est le cas la solution est qualifiée de statique. En 1923 G.D. Birkhoff [30] montre qu'une solution à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide doit nécessairement être statique, c'est-à-dire être invariante en changeant t en $-t$, ce qui exclut la présence d'un terme croisé en $dr dt$. Mais ce théorème prend la forme d'un théorème d'unicité. Cette contrainte cède quand la solution est replacée dans le cadre du modèle cosmologique Janus [31]. Auquel cas l'espace-temps se présente comme le revêtement à deux feuillets d'un espace projectif P^4 où deux points adjacents sont repérés par le même jeu de quatre coordonnées. Dans le vide les métriques découlent de deux équations qui deviennent similaires et qui se traduisent par la simple nullité des tenseurs de Ricci. Ce qui revient à dire qu'en tout point l'équation $R_{\mu\nu} = 0$ doit engendrer, non une solution unique, mais deux solutions non-indépendantes, décrivant la géométrie de deux régions adjacentes. Il n'y a non plus nécessité d'unicité mais au contraire de « bi-unicité » ou dualité. Une contrainte d'ordre physique complète ce tableau. En appliquant à la solution initialement produite par Schwarzschild le changement de variable temporelle introduit en 1924 par A. Eddington [27] :

$$(90) \quad t' = t + \frac{\varepsilon \alpha}{c} \operatorname{Ln} \left| \frac{R}{\alpha} - 1 \right| \quad \text{with } \varepsilon = \pm 1$$

La solution de Schwarzschild, exprimée à l'aide de cette nouvelle coordonnée temporelle s'écrit :

$$(91) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) c^2 dt'^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{R}\right) dR^2 - \frac{2\varepsilon\alpha c}{R} dR dt' - R^2 d\Omega^2 \quad \varepsilon = \pm 1$$

Ce changement de variable avait été initialement introduit pour éliminer la singularité de coordonnées en $R = \alpha$. **Mais il change au passage la façon dont un observateur distant, dont le temps propre se trouve alors identifié à ce nouveau temps t' , perçoit l'objet décrit par cette métrique.** Comme montré par P.Koiran [32] avec $\varepsilon = +1$ **le temps de chute libre d'une particule témoin devient fini**, alors que le temps d'évasion est infini. Conclusion inverse pour $\varepsilon = -1$. En couplant ces deux solutions :

$$(92) \quad ds^{(+2)} = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) c^2 dt'^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{R}\right) dR^2 - \frac{2\alpha c}{R} dR dt' - R^2 d\Omega^2$$

$$(93) \quad ds^{(-2)} = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) c^2 dt'^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{R}\right) dR^2 + \frac{2\alpha c}{R} dR dt' - R^2 d\Omega^2$$

On obtient une structure de one-way membrane, de wormhole, où le temps de chute libre est fini dans le premier feuillet, ainsi que le temps d'évasion dans le second. Inversement Les temps d'évasion dans le premier feuillet et de chute libre dans le second sont infinis. On peut également conserver la même valeur du paramètre ε , mais tenir compte d'une T-symétrie telle que la coordonnée de temps se trouve inversée lorsque la particule témoin franchit la sphère de gorge. Dans on montre qu'à cette T-symétrie se joint une P-symétrie et que cette structure géométrique devient un PT-symétrique wormhole [33].

Cette géométrie est une tentative de considérer la solution de Schwarzschild extérieure isolément, sans la doter de son complément sous la forme de la solution métrique intérieure. Si on opte cette fois pour cette configuration, ce couple de solution est à même de décrire la géométrie dans, et à l'extérieur d'une étoile à neutrons de faible mouvement de rotation. On sait que nombre d'entre elles sont couplées avec une étoiles compagne, génératrice de vent stellaire. Une étoile à neutron, suffisamment proche, captera alors ces exhalaisons et verra sa masse lentement augmenter. Si on suit les différents aspects de la solution intérieure de Schwarzschild, en tant que solution exacte de l'équation d'Einstein avec second membre, on a vu que, si on opte pour une densité approximativement constante, ce qui peut être considéré comme acceptable pour une étoile à neutrons, la pression dans celle-ci n'est pas constante. Classiquement on considère que quand le rayon de l'étoile atteint un rayon critique géométrique :

$$(94) \quad R_{critgeom} = R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Mais, si on admet de considérer comme physique ce qui émane de la solution métrique intérieure, la pression au centre de l'étoile atteint l'infini pour une valeur inférieure du rayon, et donc de la masse :

$$(95) \quad R_{critphys} = \sqrt{\frac{8}{9}} R_{critgeom} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G\rho}}$$

Les cosmologistes rejettent ce scénario, car il implique une variation de la valeur de la vitesse de la lumière au sein des masses. Si on admet que cette variation soit possible, jusqu'à ce que cette pression atteigne une valeur, sinon infinie, du moins très élevée, son gradient permet alors de s'opposer à la force de gravitation. On obtient alors un *corps de Schwarzschild* qui, sur le plan observationnel présentera vis-à-vis d'un observateur distant, un effet de redshift gravitationnel. Celui-ci se traduira alors par un accroissement de la longueur d'onde :

$$(96) \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2G}{Rc^2} \frac{4\pi\rho R^3_{critphys}}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho R^2_{critphys}}{3c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3$$

Nous disposons de deux images des objets hypermassifs M87* et SgrA*. Des barres chromatiques permettent de chiffrer des températures équivalentes, bien que ces émissions, synchrotron, ne correspondent pas à un rayonnement de nature thermique. Mais ceci nous donne accès à des rapports de longueurs d'onde, en considérant un phénomène de redshift gravitationnel. Les valeurs trouvées sont alors significativement proches de 3.

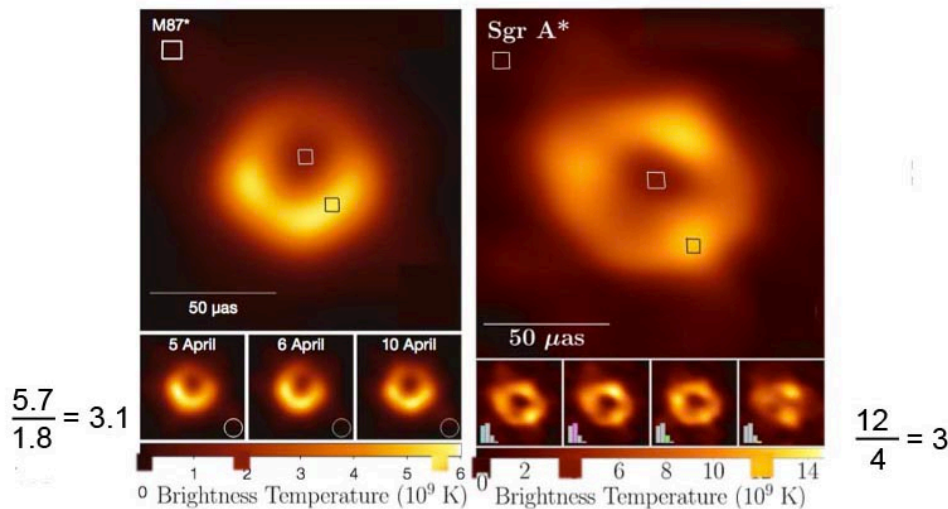


Fig.6 : Images des objets M87* et SgrA* ([34], [35])

Bien entendu, ces objets ne sont pas « des étoiles à neutrons géantes ». Nous reviendrons sur la question, de leur nature plus loin.

Ce schéma suggère que les masses des étoiles à neutrons se trouve limitées à une valeur inférieure à celle au-delà de laquelle on a considéré que celles-ci se mueraient en trou noir. Cette masse est indiquée sur les figures 1 et 2, extraites de la référence [22]. Cette masse critique physique vaut alors

$$(97) \quad M_{critphys} = 0.838 M_{critgeom}$$

Si on donne à une valeur de 3 masses solaires, dans cette approche la masse maximale des étoiles à neutrons serait aux alentours de 2.5 masses solaires, ce qui n'est pas incompatible avec les quelques valeurs de ces masses issues d'une évaluation directe. Cette valeur se trouverait relevée si on tenait compte de la force centrifuge d'étoiles à neutrons en rotation rapide. Un chiffre qui nécessiterait de pouvoir se baser sur une solution métrique intérieure avec rotation (complément naturel de la métrique de Kerr), ce qui n'a pas été construit à ce jour. On notera qu'une interprétation de la nature ces objets hypermassifs, alternative à celle de trous noirs géants, est celle des gravastars⁵.

On peut les qualifier « d'objets subcritiques de Schwarzschild ». Mais que se passe-t-il si ces objets bénéficient d'un nouvel apport en masse ?

9 – Le modèle des plugstars.

On peut se concentrer sur une étoile à neutrons subcritique qui recevrait un faible apport en masse émanant d'une étoile voisine. On peut alors étendre la solution métrique intérieure de Schwarzschild à une situation où apparaît, dans une petite sphère centrée sur le centre de symétrie du système, une portion d'espace où le time factor devient négatif.

⁵ Des boules d'énergie noire entourées d'une fine couche de matière sombre

Facteur Temps

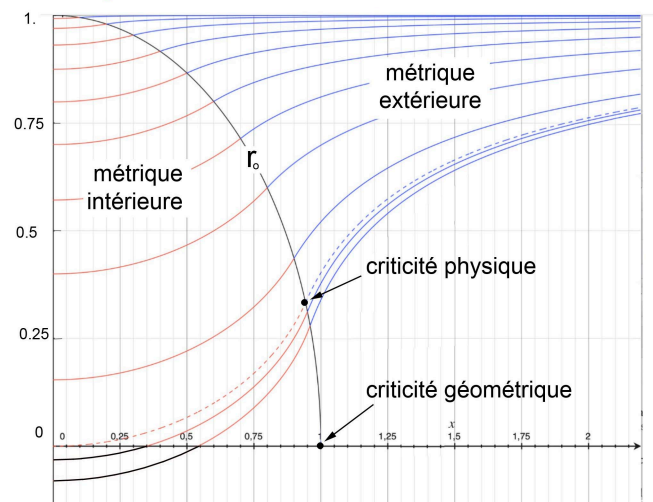


Fig.7 : Facteur temps au-delà de la criticité physique.

Comme évoqué plus haut cette inversion du facteur temps entraîne, en conservant un temps propre positif, une inversion de la coordonnée de temps (T-symétrie), synonyme, d'après la théorie des groupes dynamique ([31], [36],[37]) d'inversion de l'énergie et de la masse. Dans la figure ci-après on a représenté la méridienne dans le modèle du trou noir :

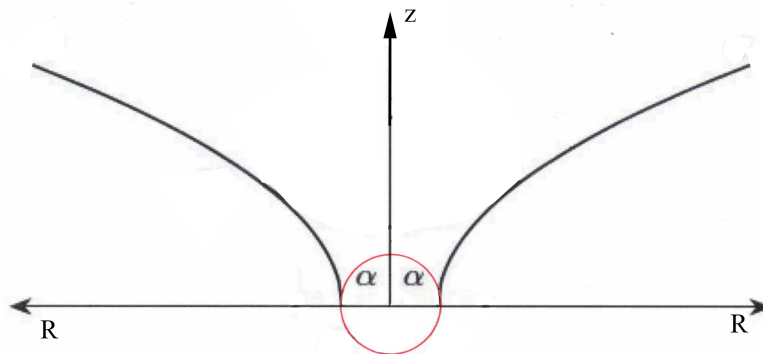
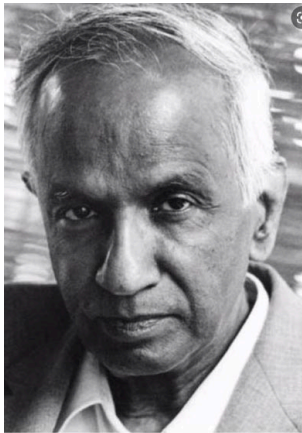


Fig. 8 La méridienne du modèle du trou noir.

Dans le modèle du trou noir on imagine que les géodésiques se poursuivent « à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, en convergeant vers une «singularité centrale ». Effectivement si, au lieu de définir l'action sur l'intégration de ds (28) on opte pour des courbes qui minimisent le carré de la longueur, avec une action (32) construite avec ds^2 on obtient les mêmes équations de Lagrange, produisant, sur un plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, des courbes réelles, mais une ... longueur imaginaire pure ! Chandrasekhar les présente dans son ouvrage [38], et j'avais été moi-même très surpris, en les construisant moi-même, il y a trente ans.



S. Chandrasekhar

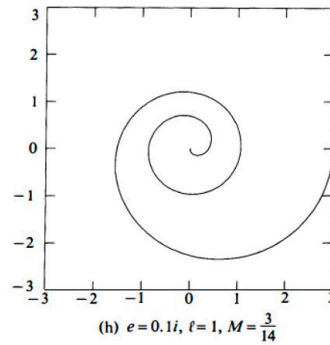


FIG. 7a. Various classes of time-like geodesics described by a test particle with $E^2 < 1$: (a), (b), (c): geodesics of the first and the second kind with eccentricity $e = 1/2$ and latera recta, $l = 11, 75$ and 3 respectively; (d): an example of a trajectory in which the orbits of the first and the second kind coalesce ($e = 1/2, l = 3/2$) for which $2\mu(3+e) = 1$; (e): an example of a circular orbit ($e = 0, l = 3/2$) and the associated orbit of the second kind; (f): the last unstable circular orbit when the orbit of the second kind spirals out of the orbit of the first kind ($e = 0, \mu = 1/6$); (g), (h): bound orbits with $l = 1$ and imaginary eccentricities $e = 0.01i$ and $0.1i$. (In all these figures $M = 3/14$ in the scale along the coordinate axes.)

Fig.8 : Les courbes des géodésiques, « à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild », de longueur imaginaire pure, mais se projetant dans le plan (ρ, φ) selon des courbes réelles.

Ci-après, les deux méridiennes des deux feuillet, dans une configuration subcritique, selon le modèle cosmologique Janus (JCM) :

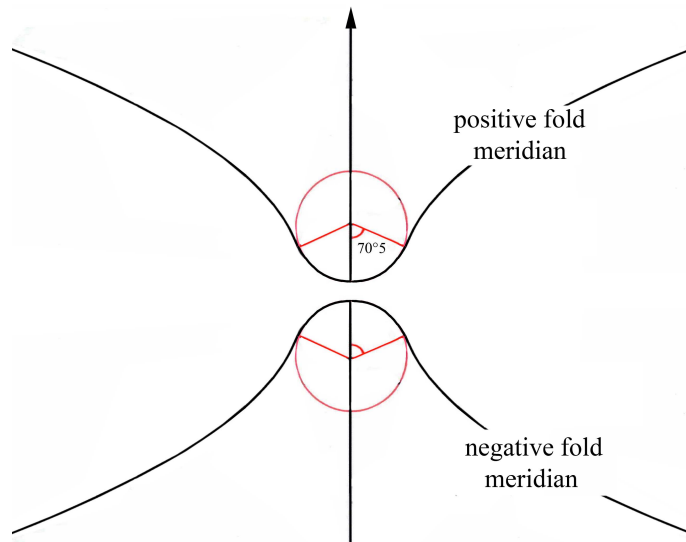


Fig. 8 : Les deux méridiennes des deux feuillet du modèle JCM

Quand un léger apport de masse est opéré, une modification topologique se produit. Le terme technique est une « chirurgie » (*surgery*), qui permet à la masse en excès de s'échapper, dans le second feuillet.

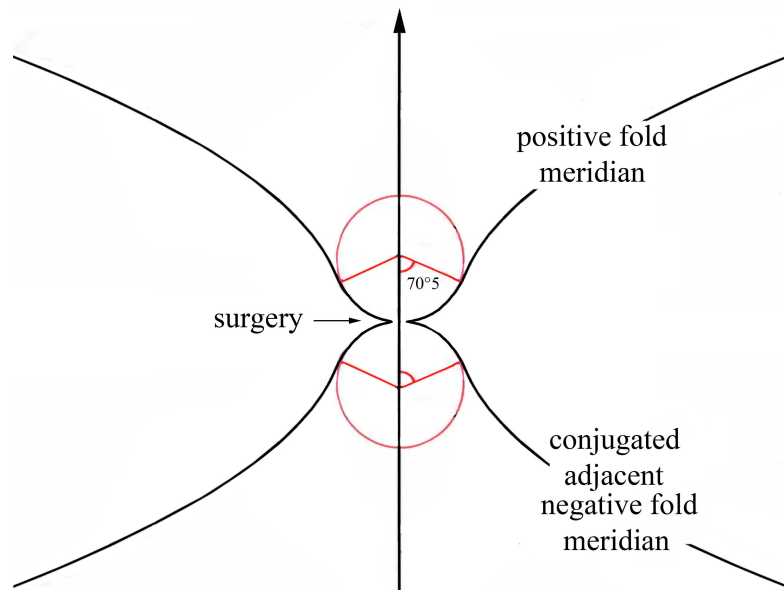


Fig. 9 : Apparition d'une chirurgie 4D mettent les deux feuillets en communication.

Ces courbes méridiennes ne sont pas des courbes représentant le potentiel gravitationnel. Mais celles-ci auraient des allures similaires, avec une tangente horizontale au centre, une valeur maximale de la pente à la surface de l'astre, correspondant au raccord entre la courbe de Flamm et l'arc de cercle figurant la géométrie à l'intérieur de la masse. Puis cette pente tend progressivement vers zéro à l'infini. Or, si ces courbes représentaient le potentiel gravitationnel, cette pente représenterait la force de gravité. Une image consistant à verser de l'eau sur ces deux surfaces donne une bonne image du phénomène. La matière, transféré dans le second feuillet, est alors repoussée. Quand la matière en excès est évacuée, la condition de subcriticité est rétablie : chirurgie inverse, la « fenêtre » se referme. Celle-ci (en fait une sphère de gorge) s'ouvre et se referme à la manière du diaphragme d'un appareil photographique. Le système est donc autostable. On peut exploiter le schéma de la figure 7 en montrant l'évolution (parabolique) du diamètre de cette fenêtre.

**Croissance (parabolique) du rayon de la sphère centrale
où s'opère l'inversion de masse**

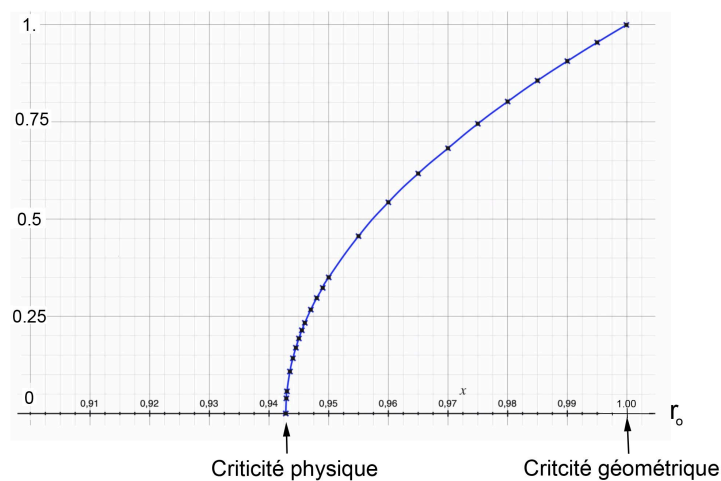


Fig.9 : Croissance parabolique du diamètre de la sphère de gorge.

En abscisse le pourcentage de la masse vis-à-vis de la masse critique géométrique $\frac{2GM}{c^2}$

Le mécanisme ci-après est une bonne image didactique du fonctionnement de ces plugstars.

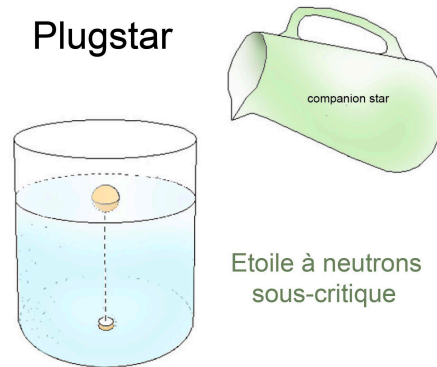


Fig. 10 : Image didactique de l'autostabilité d'un plugstar.

10- Discussion.

L'ensemble de cette étude soulève le problème de l'évolution qu'a connue la cosmologie lorsque les travaux des pères fondateurs, des années 1915-1917, après l'interruption qu'a représenté la seconde guerre mondiale, ont été repris par des gens comme Wheeler, Thorne et Misner. En 1915 Einstein construit l'équation de champ qui deviendra la base de la relativité générale. Ce faisant il reconduit la forme, logique, de la forme bilinéaire correspondant à la relativité restreinte : $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Mais, antérieurement à 1905, le Français Poincaré avait à sa façon rendu compte de de cette « rotation quadridimensionnelle que représente l'action du groupe de Lorentz. Pour lui, la forme bilinéaire devait être euclidienne : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2$. Pour rendre compte de cette invariance de la vitesse de la lumière il suffisait de supposer que la coordonnée de temps $l = i t$ était imaginaire pure. En 1909 le mathématicien Minkowski apporte un peu de lumière sur le contexte géométrique. Il explique avec insistance que les quatre dimensions de l'espace-temps sont toutes de même nature et qu'en somme, le temps ct doit s'évaluer en mètres. La longueur ds s'identifie alors, au facteur c près, au temps propre τ . Le fait que la vitesse ne puisse excéder c se traduit par le simple fait d'opter pour une longueur s réelle. Quand la vitesse est supérieure à c , le temps propre devient imaginaire pur. Donc on quitte le monde de la physique.

On 1915, on l'a vu, quelques jours avant Einstein, le grand mathématicien David Hilbert construit une équation de champ semblable à la sienne. Mais il la construit en utilisant les outils du calcul variationnel. Tout cela remonte à Fermat, qui introduit un « principe du moindre temps », montrant que la lumière emprunte le chemin où la durée de son parcours est minimale. Si la vitesse de la lumière est de 300.000 km/s dans l'air, elle tombe à 200.000 Km/s dans l'eau. D'où ce phénomène étrange de la réfraction et cette loi $\sin i = n \sin r$, que l'on peut retrouver en minimisant le temps de parcours, qui n'est pas « le plus court chemin ».

Avec la relativité restreinte et l'apparition de l'espace de Minkowski, la matière suit des trajectoires où les quatre coordonnées servant à repérer le point varient toutes linéairement. Autrement dit, ce sont « des droites de l'espace-temps », des géodésiques, de longueur

minimale, s représentant cette longueur. Comme c'est aussi un temps, le temps propre, on retrouve ce principe du « moindre temps » de Fermat. La forme bilinéaire est une métrique (du Grec $\mu\epsilon\tau\rho\nu$, mesurer). Mais dans cet espace-temps existent alors des géodésiques très particulières, de longueur nulle. Et ce sont celles que suivent les photons. Le principe du moindre temps est ainsi poussé à l'extrême : On ne peut pas trouver de temps plus court qu'un temps nul ! Tout cela sonne bien entendu le glas de l'intuition. La métrique de Lorentz est solution d'une équation de champ qui se résume alors à la nullité du tenseur de Ricci : $R_{\mu\nu}$

En 1915 se conjuguent deux idées géniales :

- La physique se joue dans un espace où les quatre coordonnées sont « de même nature ».
- Les masses et les photons obéissent au principe du « moindre temps ».
- Il se trouve que ce temps est tout simplement la longueur 4D dans cet espace-temps. Donc ces trajectoires seront des géodésiques.
- Qui dit géodésique, dit principe de moindre action, donc existence d'une « action », qui dans ce cas n'est autre que le calcul de l'intégrale de ds le long d'un trajet. Pour déterminer ces géodésiques on opérera « une variation », c'est-à-dire un écart par rapport au trajet déterminée par les valeurs en chaque point des coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique de cet espace-temps. Une variation $\delta g_{\mu\nu}$.

En écrivant que cette variation entraîne une variation nulle de l'intégrale d'action Hilbert obtient une équation où apparaît le tenseur de Ricci, qui appelle $K_{\mu\nu}$. Alors, comment ça marche ? Eh bien on se donne alors une forme particulière de la métrique, contrainte par des raisons de symétrie.

Première solution, avec stationnarité, homogénéité et isotropie. La solution est alors la métrique de Lorentz, la métrique « du vide ». Mais l'équation de champ contient un « terme source » (tensoriel pour que la solution ne dépende pas des coordonnées) qui traduit la courbure de l'espace dû à la présence de matière. Alors la seconde solution traduira une hypothèse :

- Stationnarité, invariance par « translation temporelle »
- Symétrie sphérique.

On peut opter pour l'idée que cette solution est une « hypersurface 4D » qu'on explorera en construisant ses géodésiques de longueur non-nulle (matière) et nulle (lumière). Quant à la réalité, elle prend un aspect géométrique limpide : le temps propre, la longueur le long des géodésiques doit être réel. Si c'est une valeur imaginaire, c'est qu'on n'est plus dans l'hypersurface. Mais qui « explore cette hypersurface » ? C'est « un observateur », qui vit sa vie avec son temps propre associé à une exigence, bien subjective dans cet univers où on ne sait pas à quoi s'accrocher, d'immobilité (donc on relègue cet observateur à distance).

La règle du jeu a l'air posée de façon limpide par Hilbert, ce qui tranche avec le bricolage du physicien Einstein, qui a construit son équation de champ vaille que vaille, aidé par son Ami mathématicien Grassman. C'est celui-ci qui lui explique que les tenseurs sont la bonne façon

de traduire ses impensables intuitions. Einstein apprend donc le calcul tensoriel auprès de lui. Mais Einstein roule dans une berline, Hilbert pilote une formule I. Il va même plus loin et sa tentative vise d'emblée à intégrer à la fois la gravitation et l'électromagnétisme (les seules forces connues à l'époque) dans un article ambitieux intitulé « les fondements de la physique ». La première théorie du tout. Hilbert cherche alors à embrasser les aspects mathématiques « dans toute leur généralité ». Une longueur réelle ? Il n'en a cure. Cela serait s'imposer des barrières vis-à-vis d'une exploration mathématique en règle. Et la plus grande généralité impose de ne pas se limiter, au champ du réel. Ce qui existe, ça n'est pas la bête longueur, c'est avant tout l'objet central, la forme bilinéaire G avec laquelle on construira l'action. Hilbert envisage d'emblée que cette forme puisse prendre des valeurs aussi bien positives que négatives. Mais, pour obtenir une longueur positive **il va même jusqu'à définir deux formes de longueurs, selon le signe de G !**

$$G > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \int \sqrt{G \left(\frac{dx_s}{dp} \right)} dp$$

$$G < 0 \quad \rightarrow \quad \tau = \int \sqrt{-G \left(\frac{dx_s}{dp} \right)} dp$$

Et l'équation aux variations qui donne les géodésiques est :

$$\delta \int G \left(\frac{dx_s}{dp} \right) dp = 0 \quad \text{et non} \quad \delta \int \sqrt{G \left(\frac{dx_s}{dp} \right)} dp = 0$$

Hic jacet leput, c'est là que gît le lièvre ! Le piège étant que ces deux équations aux variations fournissent les mêmes équations de Lagrange, ce que note Weyl dans son papier. Dans une plage des valeurs des coordonnées la forme bilinéaire G est négative, donc la longueur est imaginaire pure. Mais elle redevient réelle si on opte pour la définition ad hoc de la longueur. Et cela, personne ne l'a vu pendant plus d'un siècle ! Hilbert n'est pas physicien. Cet impératif d'un ds^2 positif, d'un s réel, il ne le voit même pas. Ce qui l'obsède c'est d'appliquer « le principe de Hamilton » (l'extension du principe de « moindre temps ») à l'ensemble de la physique, grâce à une « fonction d'univers » $H = K + L$, grâce à laquelle il espère produire une somptueuse synthèse entre gravitation et électromagnétisme. Il construit ainsi en 1915 son équation de champ sur la base d'une équation de champ à signature euclidienne (++++). ***Si des signes doivent changer, pour que cet espace devienne Lorentzien, il suffit qu'une variable soit imaginaire pure, alors sa contribution à la forme bilinéaire change de signe :***

$$g_{44}(dx_4)^2 = g_{44}(i dt)^2 = -g_{44}dt^2$$

Et la signature passe de (++++) à (+++−), et le tour est joué !

La physique, pour Hilbert, c'est du détail. Mais personne ne voit rien. Avez-vous déjà lu quelque part, sous la plume d'un physicien théoricien une évocation de ces deux définitions de la longueur ? Jamais !

En janvier et février 1916 ce très grand scientifique que fut Karl Schwarzschild intègre le résultat publié en novembre 1915 en un tournemain. En deux mois il produit, coup sur coup,

des deux solutions métriques qui se raccordent et décrivent la géométrie à l'intérieur et à l'extérieur d'une boule fluide emplie d'un matériau incompressible. Mais il définit clairement la variation conduisant aux géodésiques :

$$\delta \int ds = 0 \text{ et non } \delta \int ds^2 = 0$$

Quand Hilbert découvre cette solution exacte il ne saisit pas non plus la nuance et entend retrouver cette solution à la façon sans écrire un $ds^2 =$, simplement en partant de la forme bilinéaire. Et c'est là qu'intervient quelque chose que même les mathématiciens-géomètres d'aujourd'hui n'ont pas perçu. On n'est pas en mesure de choisir la topologie associée à une solution métrique associée à l'équation d'Einstein. La solution dicte la topologie qui lui convient. Comment découvrir cette topologie ? En optant pour un jeu de variable où la longueur devient réelle, pour toutes les valeurs de celle-ci. A titre d'exemple, considérons la métrique :

$$ds^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} + R^2 d\varphi^2$$

Avec α positif. Pour $R < \alpha$ la longueur devient imaginaire. Donc on est en dehors de la surface. Faisons :

$$R = (r^3 + \alpha)^{1/3}$$

Il vient :

$$ds^2 = \frac{r^4 dr^2}{[(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha](r^3 + \alpha^3)^{1/3}} + (r^3 + \alpha^3)^{2/3} d\varphi^2$$

Pour $r > 0$ la longueur devient réelle, mais on constate que cette objet 2D (une surface) est non-contractile avec un périmètre minimal égal à $2\pi\alpha$.

Envisageons un autre changement de variable :

$$R = \alpha (1 + \text{Log } ch\rho)$$

Il vient :

$$ds^2 = \frac{\alpha^2 (1 + \text{Log } ch\rho)}{\text{Log } ch\rho} sh^2\rho d\rho^2 + \alpha^2 (1 + \text{Log } ch\rho)^2 d\varphi^2$$

C'est mieux. L'objet est toujours contractile la nouvelle variable peut prendre n'importe quelle valeur réelle. On peut montrer en outre que cette surface est plongeable dans \mathbb{R}^3 et que cet objet de révolution (invariant par translation selon φ) a pour méridienne :

$$R^2 = \alpha \frac{z^2}{4\alpha}$$

C'est la surface de Flamm. Il se trouve que celle-là on peut la « voir », c'est-à-dire la plonger dans notre espace de représentation 3D, ce qui n'est pas le cas pour tout objet 2D défini par sa métrique. . La conclusion était que la topologie de cet objet était « contenu dans sa métrique », à condition de s'imposer que cette longueur soit réelle. Mais Hilbert ne s'impose pas cette condition, et ses successeurs s'imagineront pouvoir « étendre la solution à tout l'espace-

temps », un espace a priori non-contractile. L'ensemble de l'espace-temps contient donc a priori, pour ces gens, les valeurs $R < \alpha$.

Quand Hilbert intègre ce qu'il croit être « la solution de Schwarzschild, de janvier 1916, il opte pour un changement de variable où les deux termes matérialisant la symétrie sphérique sont :

$$r^{*2} d\theta^2 + r^{*2} \sin^2\theta d\varphi^2$$

Il a le droit de faire n'importe quel changement de variable. Pour lui R et α sont automatiquement différentes formes de « variables radiales » sans percevoir la contractilité. En $R = \alpha$ il voit « une singularité », et ce n'est que plus tard qu'on finira pas comprendre que ça n'est pas une « vraie » singularité mais une « singularité de coordonnées » qui peut être éliminée par un changement de coordonnées. La dimension topologique lui reste étrangère. Il perçoit ce lien entre sa « coordonnée radiale » et la coordonnée r de Schwarzschild que comme « un moyen pour ramener la singularité à l'origine.

La symétrie envisagée n'est pas « une symétrie sphérique » (invariance par action de $SO(3)$) mais une « symétrie centrale ». **Sauf que ce «centre » n'est pas dans l'objet.** De même que l'axe d'un tore n'est pas dans le tore.

Ni lui ni ceux qui, dans l'après-guerre, créeront cette « cosmologie moderne » n'attachent d'importance à la métrique intérieure de Schwarzschild. La situation bascule en 1939 quand Oppenheimer et Snyder utilisent la solution stationnaire de Schwarzschild pour décrire le phénomène hautement instationnaire de l'implosion d'une étoile massive en jouant sur le fait que « pour un observateur distant » ce phénomène dure un temps infini. Cela devient l'acte de naissance du modèle du trou noir.

Dans l'après-guerre, si Oppenheimer est trop occupé par le procès qu'in lui fait, devant son refus de doter les USA de la bombe à hydrogène (ce que fera Edward Teller, en l'appelant « my baby ») Wheeler tente de compléter le modèle. Pour ce faire il faut trouver le moyen de décrire la géométrie « à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild ». En 1960 le mathématicien Kruskal [39] construit un « prolongement analytique » qui permet de passer des variables r et t à un couple v et u tel que la métrique s'écrit :

$$ds^2 = f^2 (dv^2 - du^2) - R^2 d\Omega^2$$

Censée fonctionner en amont et en aval de la sphère de Schwarzschild avec un changement de variable « amont » et « aval ».

A l'extérieur de la sphère :

$$u = \left(\frac{R}{\alpha} - 1 \right)^{\alpha\eta} e^{\eta R} \operatorname{ch} \eta x_0$$

$$v = \left(\frac{R}{\alpha} - 1 \right)^{\alpha\eta} e^{\eta R} \operatorname{sh} \eta x_0$$

« A l'intérieur » : Tapez une équation ici.

$$v = \left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)^{\alpha\eta} e^{\eta R} \operatorname{ch} \eta x_0$$

$$v = \left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)^{\alpha\eta} e^{\eta R} \operatorname{sh} \eta x_0$$

Ceci donne à la fonction f la forme :

A l'extérieur :

$$f^2 = \frac{\alpha}{\eta^2 R} \left(\frac{R}{\alpha} - 1\right)^{1-2\alpha\eta} e^{-\alpha R}$$

« A l'intérieur » :

$$f^2 = \frac{\alpha}{\eta^2 R} \left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)^{1-2\alpha\eta} e^{-\alpha R}$$

Comment faire pour que les facteurs $\left(\frac{R}{\alpha} - 1\right)^{1-2\alpha\eta}$ et $\left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)^{1-2\alpha\eta}$ deviennent égaux ?

Il suffit que l'exposant soit nul grâce à $\eta = \frac{\alpha}{2}$, alors ces relations deviennent :

A l'extérieur :

$$f^2 = \frac{\alpha}{\eta^2 R} \left(\frac{R}{\alpha} - 1\right)^{\text{zéro}} e^{-\alpha R} = \frac{\alpha}{\eta^2 R} e^{-\alpha R}$$

« A l'intérieur » :

$$f^2 = \frac{\alpha}{\eta^2 R} \left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)^{\text{zéro}} e^{-\alpha R} = \frac{\alpha}{\eta^2 R} e^{-\alpha R}$$

Très bien, mais que se passe-t-il quand $R = \alpha$?

Il vient, à l'extérieur :

$$f^2 = \frac{\alpha}{\eta^2 R} (\text{zéro})^{\text{zéro}} e^{-\alpha R} = \frac{\alpha}{\eta^2 R} e^{-\alpha R}$$

« A l'intérieur » :

$$f^2 = \frac{\alpha}{\eta^2 R} (\text{zéro})^{\text{zéro}} e^{-\alpha R} = \frac{\alpha}{\eta^2 R} e^{-\alpha R}$$

Il faut alors accepter que, sur la sphère de Schwarzschild

$$0^0 = 1$$

Au résultat les changements de variable deviennent :

A l'extérieur de la sphère :

$$u = \left(\frac{R}{\alpha} - 1 \right)^{1/2} e^{\frac{R}{2\alpha}} \operatorname{ch} \eta x_0$$

$$v = \left(\frac{R}{\alpha} - 1 \right)^{1/2} e^{\frac{R}{2\alpha}} \operatorname{sh} \eta x_0$$

« A l'intérieur » :

$$v = \left(1 - \frac{R}{\alpha} \right)^{1/2} e^{\frac{R}{2\alpha}} \operatorname{ch} \eta x_0$$

$$v = \left(1 - \frac{R}{\alpha} \right)^{1/2} e^{\frac{R}{2\alpha}} \operatorname{sh} \eta x_0$$

Cette démarche demandera un examen à la loupe, en compagnie de mathématiciens. Toujours est-il que, s'appuyant sur ce résultat, Wheeler, Thorne et Misner, qui très probablement ignoraient l'existence même du second article de Schwarzschild à l'époque, entreprirent la première rédaction de ce qui allait devenir la « bible » de la cosmologie, leur ouvrage « Gravitation » [22] où on peut lire « **qu'à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild la coordonnée temporelle devient donc la variable r !** ».

Le plugstar est un modèle qui exploite cette métrique intérieure. On notera qu'en tant que solution exacte de l'équation d'Einstein elle fait état d'une variation immédiate de la pression, nulle à la surface de l'étoile. Une pression qui n'est qu'une lettre p dans l'expression du tenseur source. Cette augmentation de pression, si elle est modérée, peut être considérée comme due à la croissance d'une vitesse d'agitation thermique, en assimilant le fluide à un gaz parfait, selon :

$$p = \frac{\rho \langle v^2 \rangle}{3}$$

Mais quand cette pression tend, sinon vers l'infini, du moins vers des valeurs très élevées cela signifierait que la vitesse d'agitation thermique (qui est aussi la vitesse du son dans le milieu) excéderait une valeur de la vitesse de la lumière considérée comme constante. Wheeler, Thorne et Misner choisissent alors de considérer que cette partie de la solution n'est plus physique. Schwarzschild va alors, en février 1916, envisager que cette vitesse puisse varier. Donc un est face à un choix :

- Soit on se range à l'argument de Wheeler et on délaisse le modèle des plugstars
- Soit on suit Schwarzschild. Un objet subcritique apparaît alors, présentant, vis-à-vis des observations, un effet de redshift gravitationnel où le rapport des longueurs d'onde est pile 3. Or c'est ce qui ressort très précisément des observations de M87* et de SgrA*. Une coïncidence qui mérite examen.

On remarquera que ces objets auraient alors une symétrie sphérique. Ceci exclut qu'ils puissent avoir été formés par accréation, par réunion de « trous noirs plus légers ». On entendra alors parler de « trous noirs primordiaux ». A moins qu'on n'avance l'idée que des objets « arrivent à passer au travers du Big Bang et soient des reliquats d'évènement antérieurs. Nous pensons qu'ils résultent de la focalisation d'une onde de densité, créée par des fluctuations conjointes des métriques du modèle Janus. L'image de la galaxie découverte par Hoag dans les années cinquante, suggère cette structure d'onde de densité annulaire :

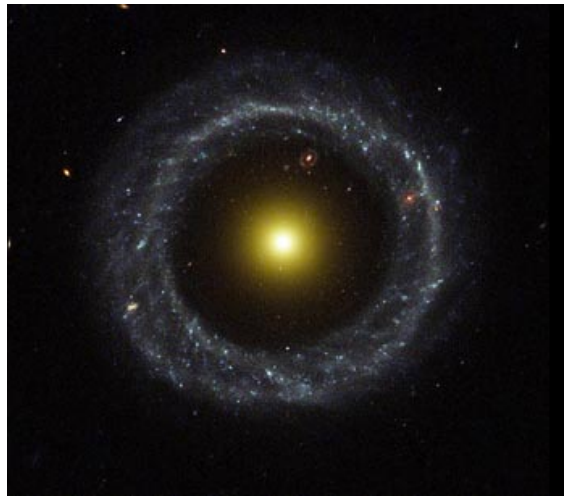


Fig. 11 : Galaxie de Hoag

Dans une onde de densité ce n'est pas la matière qui se déplace, mais l'onde. Le saut de densité donne naissance à la naissance de nouvelles étoiles qui, émettant dans l'ultraviolet, rendent le gaz interstellaire émissif par fluorescence. L'onde est comparable à la vague d'un tsunami, qui se renforce près des côtes. Parvenue au centre galactique, l'onde entraîne un saut de densité et de température, qui crée les conditions de Lawson dans un volume (réactions de fusion). L'énergie émise donne naissance à un quasar.

Dans les ondes de densité le gaz interstellaire et ionisés, particulièrement dans les « régions HII » entourant les étoiles émissives. Le milieu possède alors une conductivité électrique σ élevée. Les galaxies possèdent un champ magnétique faible dont l'ordre de grandeur est un microgauss. Le mouvement des ondes de densité s'accompagne d'un « effet dynamo » dont l'intensité dépend de plusieurs paramètres. On a une vitesse caractéristique V , à laquelle on peut attribuer plusieurs valeurs, dont la vitesse de propagation des ondes de la magnétohydrodynamique, les ondes d'Alfvén. Il y a aussi une longueur L caractéristique où on peut prendre la largeur de l'onde. On considère alors un nombre de Reynolds caractéristique

$$R_m = \mu_0 \sigma V L$$

Où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ est la perméabilité magnétique du vide. L'évaluation a déjà été faite pour les bras spiraux des galaxies. En jouant sur les différentes grandeurs caractéristiques on trouve que ce nombre est couramment supérieur à l'unité. Le champ et le plasma sont donc liés. Les ondes de densité spirales ne changent guère l'intensité du champ, et ne vont que distordre sa géométrie azimuthalement. Par contre une onde centripète, si l'a formation annulaire de la galaxie annulaire correspond à ce cas, rassemble ces lignes de champ vers le centre de la galaxie. La conservation

du flux magnétique entraîne une très forte remontée de la valeur de ce champ. Au moment où le quasar se forme ce champ, dipolaire, entraîne une émission de plasma selon deux jets, perpendiculaires au plan de la galaxie. Cette configuration a récemment été confirmée pour un nombre significatif de galaxies. Ce plasma est émis dans un champ magnétique décroissant avec la distance. Cette configuration se comporte alors comme un accélérateur naturel de particules, sur des distances considérables, ce qui est susceptible de leur conférer des énergies tout-à-fait comparables à celle des « rayons cosmiques ». Par ailleurs ces jets sont « tirés », ce qui suggère des reprises d'activité récurrentes. Pour l'objet M87* cette période est évaluée à 6 millions d'années, avec une très forte activité il y a 70 millions d'années. On peut donc supposer que des fluctuations conjointes des métriques en sont la cause, chacun entraînant la création d'onde de densité qui, parvenant au contact de l'objet, produit non un apport de matière, mais un sursaut de densité et de température, avec relance de la fusion et de l'émission de plasma. L'objet hypermassif central alors « reprend vie », redevient émissif pendant quelques millions d'années, un temps bref vis à vis des phénomènes généraux à l'œuvre dans le cosmos.

Seule une modélisation de fluctuations conjointes des métriques permettrait d'apporter plus de lumière à ce phénomène. On pourrait alors le considérer comme une forme de turbulence altérant le phénomène de l'expansion cosmique. De même que les astrophysiciens sont en train de découvrir que le processus d'expansion, loin d'obéir à une hypothèse d'isotropie, dépend du lieu considéré, de même l'activité liée à cette turbulence pourrait différer d'une région à l'autre. Plus intense dans la région où se situe la galaxie M87, elle pourrait être plus faible, voire quasi inexistante, dans la région où se trouve la voie lactée et ses proches voisines. Si la présence d'objets hypermassifs semble être une loi générale pour les galaxies, avec formation d'un quasar central, au moment même de leur formation, pour certaines galaxies, comme la nôtre, l'objet central serait alors comparable à un quasar éteint.

References :

- [1] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sit. Deut. Akad. Wiss. 1916
English translation by S.Antoci and A.Loinger. On the gravitational field of a mass point according to Einstein theory. arXiv :physics/9912033v1 [physics.hist-ph] 16 dec 1999.
- [2] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916
English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluide according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.
- [3] Einstaedt. J: La relativité générale au tournant des années soixante. (2011) Philosophia Scientia 15-3-2011 : L'espace et le temps. Studies of history of science and Philosophy
- [4] Voigt, W. (1887). *Ueber das Doppler'sche Princip*. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1887, 41-51.

[5] Lorentz, H.A. (1892). "La Théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps en mouvement". *Verslagen Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1, 74-79.

[6] Lorentz, H.A. (1895). *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. Leiden: E.J. Brill.

[7] Lorentz, H.A. (1892). "La Théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps en mouvement". *Verslagen Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1, 74-79.

[8] Lorentz, H.A. (1895). *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. Leiden: E.J. Brill.

[9] Poincaré, H. « Cinquième complément à l'Analysis Situs ». *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 18, 1904, pp. 45-110.

[10] Einstein, A. (1905). « Zur Elektrodynamik bewegter Körper ». *Annalen der Physik*, 17,

[11] Poincaré, Henri. « Sur la dynamique de l'électron ». *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 21, 1906, pp. 129-176.

[12] Minkowski, H. (1908). *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 53–111.

[13] Minkowski, H. (1909). *Raum und Zeit*. *Physikalische Zeitschrift*, 10, 104–111.

[14] Einstein, A. ; Grossmann, M. (1913). "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation" [Outline of a Generalized Theory of Relativity and a Theory of Gravitation]. *Zeitschrift für Mathematik und Physik (in German)*. **62**: 225–261, 245–261.

[15] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (20 nov 1915) 395-407.

[16] A. Einstein : Die Feldgleichungen des Gravitation (The Field Equation of Gravitation). *Sitzungsber. XLIV* , 8 , 778 and *XLVI* s. 799 (25 nov 1915)

[17] Mie, G. (1912). Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper. *Annalen der Physik*, 37(12), 511–534.

[18] A.Einstein : Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus allgemeinen Relativitätstheorie. Königlich Preubische Akademie der Wissenschaften (Berlin) *Sitzungsber* (25 nov. 1915) p. 831-838

[19] Tilman Sauer. The Relativity Discovery : Hilbert's First Note on Foundations of Physis. 26 nov. 1998. <https://arxiv.org/pdf/physics/9811050.pdf>

- [20] Hilbert.D. Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1916)
- [21] K. Schwarzschild: Über das Gravitationalfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916. English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.
- [22] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler. Gravitation.Princeton University Press. 2017.
- [23] Ludwig Flamm. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zeitschrift XVII (1916) pp. 448-454. Reprint by Gen. Relativ. Gravit. Contributions to Einstein's theory of gravitation (2015) 47:72 DOI 10.1007/s10714-015-1908-2
- [24] Weyl. H . Zur Gravitationstheorie. Reprinted in 2012. General Relativity and Gravitation 44: 779-810. DOI 10.1007/s10714-011-13107
- [25] A.Einstein and N.Rosen : The particle problem in general theory of relativity. Physical Review 110 (4) : 73-77. 1935
- [26] Droste J. The field of a single centre in Einstein' theory and le motion of a particle in that field. KNAW Proceedings, 19 I , 1917 Amstermam, pp/ 197-215. Communicated in the meeting og May 27, 1916.
- [27] Eddington A. The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge University Press, 1923. Second edition : 1924.
- [28] J.R.Oppenheimer and H.Snyder : On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. Vol. 56 pp 455-459 sept 1939.<https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.56.455>
- [29] R.Kerr : Gravitational Filed of a Spinning Body as an Example of Algebraic Special Metrics. Physical Letters 11, 237 1 sept. 1963
- [30] G.D. Birkhoff : Relativity and modern physics. Cambridge Harvard University Press.
- [31] J.P.Petit, F.Margnat, H.Zejli : A bimetric cosmological model on Andrei's twin universe approach. The European Physical Journal. Vol. 84 :N°1126 (2024)
- [32] P.Koiran : Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application to Eddigton-Rosen Bridges. Inter. Jr. of Mod. Phys. D, 14 aug. 2021, to be published. <https://arxiv.org/abs/2110.05938>
- [33] P.Koiran, H.Zejli, J.P.Levy, F.Margnat, MF. Duval : PT-symmetry in one-way wormholes. Annals of Physics, Vol. 470, November 2024, 169765

- [34] First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. K. Akiyama, A.Alberdi,W.Alef,K.Asada, R.Azulay, A.K.Bcako, D.Ball,M. Balakovic, J. Barrett. *Astrophysical Journal*, vo. 875, n°1,2019
- [35]First Sagittarius A* Event Hirizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. K. Akiyama, A.Alberdi, W. Alef, J.C.Algaba, E. Anantua, K. Asada, R. Azulay, U. Bach, A.K.Backo. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 930, number 2. 2022. DOI 10.3847/2041-8213/ac6674
- [36] J.M.Souriau : *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod Ed. France, 1970 and *Structure of Dynamical Systems*. Boston, Birkhäuser Ed. 1997
- [37] J.P.Petit, H.Zejli : Study of symmetries through the action on torsors of the Janus symplectic group. *Reviews in Mathematical Physics*. Vol. 37, n001, 244004.
<https://www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S0129055X24500545>
- [38] S.Chandrasekhar :*The Mathematical Theory of Black Holes*. Okford University Press 1992
- [39] Kruskal. M.D. : Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys. Rev.* 119, 1734 (1° sept 1960).